ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2019 октябрь–декабрь № 4 (45)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 530.182; 517.957

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ МЕТОДОМ ДИБАР-ОДЕВАНИЯ

В.Г. Дубровский, А.В. Топовский
Новосибирский государственный технический университет

Методом $\bar{\partial}$-одевания (дибар-одевания) Захарова–Манакова построены новые периодические решения модифицированного уравнения Кадомцева–Петвиашвили (версии мКП-1) с интегрируемым граничным условием $u\big|_{y=0} = 0$. Решения представлены в общей детерминантной форме, с помощью которой подходящим выбором соответствующих параметров удовлетворены условие вещественности и граничное условие. Показано, что наложение граничного условия приводит к формированию мод собственных колебаний поля $u(x, y, t)$ в полуплоскости $y \geq 0$. Приведен явный пример двухпериодического решения с граничным условием, как нелинейной суперпозиции двух простых однопериодических (линейно-периодических) решений.

Ключевые слова: интегрируемые нелинейные уравнения, метод $\bar{\partial}$-одевания (дибар-одевания), двумерное интегрируемое нелинейное модифицированное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (мКП), интегрируемые граничные условия, периодические решения.

DOI: 10.17212/1727-2769-2019-4-7-25

Введение

Известное модифицированное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, или кратко, мКП уравнение

$$V_t + V_{xxx} - \frac{3}{2}V^2 V_x + 3\sigma^2 \partial_x^{-1} V_{yy} - 3\sigma V_x \partial_x^{-1} V_y = 0, \quad \sigma^2 = \pm 1, \tag{1}$$

как 2+1-мерное обобщение модифицированного уравнения Кортевега-де-Фриза, впервые было установлено в работах Конопельченко [1] и Джимбо, Мива [2]. Уравнение мКП может быть представлено как условие совместности, в форме Лакса $[L_1, L_2] = 0$, следующих двух линейных вспомогательных задач [3]:

$$\begin{cases} L_1\psi = \sigma\psi_y + \psi_{xx} + V\psi_x = 0, \\ L_2\psi = \psi_t + 4\psi_{xxx} + 6V\psi_x x + 3\left(V_x - \sigma\partial_x^{-1}V_y + \frac{1}{2}V^2\right)\psi_x + \alpha\psi = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В общем случае решения мКП уравнения являются комплексными функциями, но это уравнение допускает две редукциии:

1) к чисто мнимому полю $V = \sigma u := iu$, $\bar{u} = u$ ($\sigma = i$, случай мКП-1);

2) к чисто вещественному полю $V = \sigma u := u$, $\bar{u} = u$ ($\sigma = 1$, случай мКП-2).

Поэтому естественно переписать уравнение мКП (1) в терминах полевой переменной u, определяемой соотношением $V = \sigma u$, в следующей форме:

$$u_t + u_{xxx} - \sigma^2\left(\frac{3}{2}u^2 u_x - 3\partial_x^{-1}u_{yy} + 3u_x\partial_x^{-1}u_y\right) = 0, \tag{3}$$

© 2019 В.Г. Дубровский, А.В. Топовский

последнее уравнение, очевидно, допускает две редукции к чисто вещественному полю u с $\sigma = i$ – для мКП-1 и с $\sigma = 1$ – для мКП-2.

Адекватное введение спектрального параметра λ для мКП уравнения достигается следующим преобразованием от волновой функции ψ к волновой функции χ [4]:

$$\Psi(x, y, t; \lambda) := \chi(x, y, t; \lambda) \exp\left(i\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\sigma\lambda^2} + \frac{4it}{\lambda^3} \right). \tag{4}$$

Волновая функция χ, определяемая посредством (4), допускает в силу (2) так называемую каноническую нормировку $\chi|_{\lambda\to\infty} \to 1$. В статьях [3, 4] и книге [14] с использованием локальной и нелокальной проблемы Римана–Гильберта и метода $\bar\partial$-одевания впервые были построены различные классы точных решений уравнений мКП-1,2 (3).

В настоящей работе метод $\bar\partial$-одевания Захарова–Манакова [14, 17, 18, 19, 21] применен к построению точных периодических решений мКП-1 уравнения. Статья организована следующим образом. Во втором разделе приведены основные формулы метода $\bar\partial$-одевания Захарова–Манакова, сформулированы ограничения на ядро $\bar\partial$-проблемы от условия вещественности $u(x, y, t) = \overline{u(x, y, t)}$ и интегрируемого граничного условия $u\big|_{y=0} = 0$ в так называемом пределе слабых полей. В третьем разделе получена общая детерминантная формула, удобная для построения точных периодических решений мКП уравнения, показано, как эта формула может быть эффективно использована для удовлетворения условия вещественности и интегрируемого граничного условия строящихся точных решений. В четвертом разделе вычислены простые однопериодические решения (нелинейные плоские волны), не удовлетворяющие граничному условию. В пятом разделе с использованием специальной нелинейной суперпозиции простых однопериодических решений, подбираемой под удовлетворение граничного условия, получено двухпериодическое решение с интегрируемым граничным условием $u|_{y=0} = 0$. В заключении обсуждаются перспективы применения развиваемого для построения точных периодических решений метода к другим 2+1-мерным интегрируемым нелинейным уравнениям.

1. Основные формулы метода $\bar\partial$-одевания для мКП уравнения

Метод $\bar\partial$-одевания Захарова–Манакова основан на использовании нелокальной $\bar\partial$-проблемы для волновой функции $\chi(\lambda, \bar\lambda)$ [14, 15], в пространстве спектральных переменных λ, $\bar\lambda$ эта проблема задается уравнением

$$\frac{\partial\chi(\lambda,\bar\lambda)}{\partial\bar\lambda} = (\chi * R)(\lambda,\bar\lambda) = \iint_C \chi(\lambda', \bar\lambda') R(\lambda', \bar\lambda'; \lambda, \bar\lambda)\, d\lambda' \wedge d\bar\lambda', \tag{5}$$

в рассматриваемом случае мКП уравнение (3) $\chi(\lambda, \bar\lambda)$ и ядро $R(\lambda', \bar\lambda'; \lambda, \bar\lambda)$ являются скалярными функциями комплексных переменных. Зависимость ядра R $\bar\partial$-проблемы (5) и, следовательно, волновой функции χ от физических про-

странственно-временных переменных x, y, t в случае мКП уравнения имеет вид [3, 4, 14]

$$R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) e^{F(\mu; x, y, t) - F(\lambda; x, y, t)}, \tag{6}$$

здесь функция $F(\mu; x, y, t)$ определяется формулой

$$F(\mu, x, y, t) = i\frac{x}{\mu} + \frac{y}{\sigma\mu} + 4i\frac{t}{\mu^3} \tag{7}$$

с $\sigma = i$ для мКП-1 и $\sigma = 1$ для мКП-2 уравнений соответственно. Будем предполагать, что χ имеет каноническую нормировку [3, 4, 14]:

$$\chi|_{\lambda\to\infty} \to 1, \tag{8}$$

в таком случае из (5) с помощью обобщенной формулы Коши следует эквивалентное (5) сингулярное интегральное уравнение

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}) = 1 + \iint\limits_C \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{2\pi i(\lambda' - \lambda)} \iint\limits_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda', \bar{\lambda}') d\mu \wedge d\bar{\mu} \tag{9}$$

метода $\bar{\partial}$-одевания.

Формула реконструкции для полевой переменной $u(x, y, t)$ имеет вид [3, 4, 14]

$$u = -\frac{2}{\sigma}\partial_x \ln\chi_0 = -\frac{2\chi_{0x}}{\sigma\chi_0}, \tag{10}$$

где χ_0 – нулевой член разложения волновой функции $\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda = 0$:

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = \chi_0(x, y, t) + \lambda\chi_1(x, y, t) + \ldots \tag{11}$$

Отметим, что для удобства в статье будут использоваться более короткие обозначения, такие, например, как в уравнении (9):

$$F(\mu; x, u, t) \Rightarrow F(\mu), \quad \chi(\mu, \bar{\mu}; x, y, t) \Rightarrow \chi(\mu, \bar{\mu}), \tag{12}$$

а также $R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \Rightarrow R(\mu, \lambda)$ с ограничением указания зависимостей соответствующих величин лишь от спектральных переменных.

Из (9) следует формула для $\chi_0(x, y, t)$:

$$\chi_0(x, y, t) = 1 + \frac{2i}{\pi}\iint\limits_C \frac{d\lambda_R d\lambda_I}{\lambda} \iint\limits_C \chi(\mu, \bar{\mu}; x, y, t) R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \times$$

$$\times e^{F(\mu; x, y, t) - F(\lambda; x, y, t)} d\mu_R d\mu_I. \tag{13}$$

Построение точных решений методом $\bar{\partial}$-одевания предполагает следующую последовательность действий: для заданного ядра $R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})$ определяется волновая функция χ, как решение $\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)$ $\bar{\partial}$-проблемы (5) или эквивалентного интегрального уравнения (9); затем из найденной на предыдущем этапе волновой фунции χ определяется коэффициент χ_0 (13) разложения в ряд

Тейлора (11) и, наконец, на последнем этапе с помощью формулы реконструкции (10) вычисляется точное решение $u(x,y,t)$ уравнения мКП (1). При всем этом должны быть удовлетворены условие вещественности и налагаемое на решение граничное условие, эти условия приводят к серьезным ограничениям на ядро $\bar{\partial}$-проблемы. Из (10) и (13), в так называемом пределе слабых полей, получается [6] следующее ограничение на ядро R_0 в случае мКП-1 уравнения (3):

$$\mu R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \lambda \overline{R_0(\bar{\lambda}, \lambda; \bar{\mu}, \mu)}. \tag{14}$$

В настоящей работе построено точное двухпериодическое решение мКП-1 уравнения с интегрируемым граничным условием $u|_{y=0} = 0$. Концепция интегрируемого граничного условия в теории интегрируемых нелинейных уравнений была введена впервые Скляниным [5], затем развита в последующих работах Хабибуллиным с сотр. [6, 7], см. также работу Верещагина [12]. Интегрируемые границы в широком смысле рассматривались также в многочисленных статьях по дромионным решениям для уравнений Дэви–Стюардсона, Ишимори, Нижника–Веселова–Новикова и т. д. [8–11].

В статье Хабибулина с сотр. [13] было показано, что граничное условие вида

$$u|_{y=0} = 0 \tag{15}$$

для решений мКП-1 уравнения (3) совместно с условием интегрируемости этого уравнения в форме Лакса $[L_1, L_2] = 0$. Таким образом, в соответствии с общепринятой терминологией граничное условие (15) принадлежит к классу интегрируемых граничных условий. Мощный метод $\bar{\partial}$-одевания Захарова и Манакова позволяет достаточно просто и эффективно строить точные решения интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями, это было продемонстрировано впервые в работе Дубровского, Топовского и Остреинова [22].

В контексте настоящей работы применение метода $\bar{\partial}$-одевания к построению точных решений с интегрируемым граничным условием (15) может быть обосновано следующим образом. Используя формулу реконструкции (10) в «пределе слабых полей», в подынтегральное выражение (13) для χ_0 этой формулы подставим приближенное выражение $\chi(\lambda, \bar{\lambda}) \simeq 1$ для волновой функции, как первую итерацию для решения χ уравнения (9); в результате получим следующее приближенное выражение для граничного значения полевой переменной $u|_{y=0}$:

$$u|_{y=0} = 2i\frac{\partial}{\partial x}\chi_0|_{y=0} \cong$$

$$\cong -\frac{4}{\pi\chi_0}\iint \frac{d\lambda_R d\lambda_I}{\lambda}\iint\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}\right)R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda})e^{F(\mu)-F(\lambda)}d\mu_R d\mu_I|_{y=0}. \tag{16}$$

Фаза $(F(\mu)-F(\lambda))|_{y=0}$ в силу определения (7) не изменяется при замене переменных $\mu \leftrightarrow -\lambda$, так что при указанной замене переменных в подынтегральном выражении граничное значение (16) переходит в следующее:

$$u\,|_{y=0} \cong -\frac{4}{\pi\chi_0}\iint \frac{d\mu_R d\mu_I}{-\mu}\iint\left(-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\times$$

$$\times R_0(-\lambda,-\bar{\lambda},-\mu,-\bar{\mu})e^{F(\mu)-F(\lambda)}d\lambda_R d\lambda_I\,|_{y=0}\,. \qquad (17)$$

Требуя, чтобы ядро R_0 $\bar{\partial}$-проблемы удовлетворяло условию

$$\frac{1}{\lambda}R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda}) = \frac{1}{\mu}R_0(-\lambda,-\bar{\lambda},-\mu,-\bar{\mu}), \qquad (18)$$

в силу (16) и (17) получаем

$$u\,|_{y=0} = -u\,|_{y=0} \Rightarrow u\,|_{y=0} = 0, \qquad (19)$$

т. е. при выполнении ограничения на ядро R_0 вида (18) граничное условие (15) удовлетворяется!

Например, ядро R_0 $\bar{\partial}$-проблемы следующего вида:

$$R_0(\mu,\,\bar{\mu};\,\lambda,\,\bar{\lambda}) = a\big(\lambda_0\delta(\mu-\mu_0)\delta(\lambda-\lambda_0)+\mu_0\delta(\mu+\lambda_0)\delta(\lambda+\mu_0)\big), \qquad (20)$$

очевидно, удовлетворяет условию (18), так как

$$\frac{\mu}{\lambda}R_0(\mu,\,\bar{\mu};\,\lambda,\,\bar{\lambda}) =$$

$$= a\big(\mu_0\delta(\mu-\mu_0)\delta(\lambda-\lambda_0)+\lambda_0\delta(\mu+\lambda_0)\delta(\lambda+\mu_0)\big) = R_0(-\lambda,-\bar{\lambda},-\mu,-\bar{\mu}). \qquad (21)$$

Такое ядро используется в разделе 5 для вычисления точного двухпериодического решения мКП-1 уравнения с интегрируемым граничным условием (15).

Требования периодичности решений также приводят к ограничениям на ядро R_0. Имея в виду построение периодических решений $u(x,\,y,\,t)$, следует ограничиться чисто мнимыми фазами $F(\mu)-F(\lambda)$ в экспонентах $\exp\big(F(\mu)-F(\lambda)\big)$ интегрального уравнения $\bar{\partial}$-уравнения (9). В случае мКП-1 уравнения эти фазы имеют вид [3, 4, 14]

$$F(\mu)-F(\lambda) = ix\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}\right)-iy\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)+4it\left(\frac{1}{\mu^3}-\frac{1}{\lambda^3}\right). \qquad (22)$$

Чисто мнимым фазам $F(\mu)-F(\lambda)$, приводящим к осциллирующим экспонентам, соответствуют вещественные значения спектральных переменных μ_k и λ_k «дельта-образного» ядра $R_0(\mu,\,\bar{\mu};\,\lambda,\,\bar{\lambda})$ (кратко: дельта-ядра в виде суммы произведений дельта-функций):

$$R_0(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda}) = \sum_k A_k\delta(\mu-\mu_k)\delta(\lambda-\lambda_k) \qquad (23)$$

с чисто вещественными «спектральными» точками $\mu_k = \bar{\mu}_k$, $\lambda_k = \bar{\lambda}_k$. Действительно, для такого ядра R_0 фазы (22) в (13) имеют чисто мнимые значения:

$$F(\mu_k)-F(\lambda_k) = -\overline{\big(F(\mu_k)-F(\lambda_k)\big)}, \qquad (24)$$

следовательно, соответствующие точные решения $u(x, y, t)$, в общем случае комплексные, будут периодическими по некоторым комбинациям пространственно-временных переменных x, y, t, задаваемых выражениями для фаз (24).

При вычислении точных вещественных периодических решений будем придерживаться следующей схемы. На первом этапе строятся в виде общих детерминантных формул соответствующие дельта-ядру R_0 (23) с вещественными спектральными точками μ_k, λ_k и комплексными амплитудами $A_k \neq \overline{A}_k$ комплексные в общем положении периодические решения $u(x, y, t)$, осциллирующие по некоторым комбинациям пространственно-временных переменных. С помощью общей детерминантной формулы для точных периодических решений определяются затем ограничения на спектральные параметры μ_k, λ_k и комплексные амплитуды $A_k \neq \overline{A}_k$, приводящие к вещественным решениям $u = \overline{u}$. Как показано в последующих разделах, сформулированная схема успешно реализуется, в результате вычислений получаются точные вещественные периодические решения уравнения мКП-1.

2. Детерминантная формула для точных периодических решений мКП-1 уравнения

Для заданного дельта-ядра R_0 (23) с комплексными амплитудами A_k и «спектральными» точками μ_k, λ_k легко получить общую детерминантную формулу для точных периодических, комплексных в общем положении, решений уравнения мКП (1) или (3). При выводе будем следовать известному способу получения детерминантной формулы для многосолитнных решений [13, 14], вводя удобные обозначения и полезную терминологию, адаптируя общую детерминантную формулу для случая периодических решений. Из (9) и (10) получается волновая функция $\chi(\lambda, \overline{\lambda})$:

$$\chi(\lambda, \overline{\lambda}) = 1 - \frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{\lambda - \lambda_k} \chi(\mu_k) e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)} \tag{25}$$

в виде суммы N слагаемых с простыми полюсами в точках λ_k; такая комплексная полюсная структура волновой функции $\chi(\lambda, \overline{\lambda})$ по спектральной переменной λ типична для волновых функций квантовой механики с ее фундаментальным уравнением Шрёдингера и соответствующих полюсных особенностей от волновых чисел, энергий, моментов и т. д. Формула (25) выражает волновую функцию $\chi(\lambda, \overline{\lambda})$ от произвольных комплексных спектральных переменных $\lambda, \overline{\lambda}$ в терминах некоторого рода «базиса» или базисного набора из N волновых функций $\chi(\mu_k) := \chi(\mu_k, \overline{\mu_k})$, $(k = 1, \dots, N)$ в фиксированных спектральных точках μ_k, соответствующих выбору (23) ядра R_0.

Из (25) получается алгебраическая система линейных уравнений для набора волновых функций $\chi(\mu_k) \equiv \chi(\mu_k, \overline{\mu}_k)$, $(k = 1, \dots, N)$:

$$\sum_{l=1}^{N} \tilde{A}_{kl} \chi(\mu_l) = 1, \quad \tilde{A}_{kl} = \delta_{kl} + \frac{2i}{\pi} \frac{A_l e^{F(\mu_l) - F(\lambda_l)}}{\mu_k - \lambda_l}, \tag{26}$$

с решениями $\chi(\mu_k)$ этой системы в следующей форме:

$$\chi(\mu_k) = \sum_{l=1}^{N} \tilde{A}_{kl}^{-1}. \tag{27}$$

Коэффициент $\chi_0(x, y, t)$ разложения в ряд Тейлора (11), в силу (13), (25) и (27), дается выражением

$$\chi_0(x, y, t) = 1 + \frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{\lambda_k} \chi(\mu_k) e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)} =$$

$$= 1 + \frac{2i}{\pi} \sum_{k,l=1}^{N} \frac{A_k}{\lambda_k} e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)} \tilde{A}_{kl}^{-1}. \tag{28}$$

Вместо матрицы $\tilde{A}_{kl}$ удобно ввести матрицу A_{kl}, определяемую соотношением

$$A_{kl} := e^{F(\mu_k)} \tilde{A}_{kl} e^{-F(\mu_l)} = \delta_{kl} + \frac{2i}{\pi} \frac{A_l e^{F(\mu_k) - F(\lambda_l)}}{\mu_k - \lambda_l}, \tag{29}$$

производная последней матрицы по x имеет вид

$$\frac{\partial A_{kl}}{\partial x} \doteq A_{kl,x} = \frac{2A_l}{\pi} \frac{e^{F(\mu_k) - F(\lambda_l)}}{\mu_k \lambda_l} \Rightarrow A_{lk,x} = \frac{2A_k}{\pi} \frac{e^{F(\mu_l) - F(\lambda_k)}}{\mu_l \lambda_k}. \tag{30}$$

Для χ_0 из (28)–(30) получается выражение

$$\chi_0(x, y, t) = 1 + i \sum_{k,l=1}^{N} A_{lk,x} \mu_l A_{kl,x}^{-1} = 1 + tr(BA^{-1}) = \ln\det(1 + BA^{-1}),$$

$$B_{lk} := iA_{lk,x}\mu_l = \frac{2iA_k}{\pi\lambda_k} e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)},$$

$$(A + B)_{kl} = \delta_{kl} + \frac{2iA_l \mu_k e^{F(\mu_k) - F(\lambda_l)}}{\pi\lambda_l(\mu_k - \lambda_l)}, \tag{31}$$

здесь использовано справедливое для матрицы B (31) ранга 1 тождество:

$$1 + tr(BA^{-1}) = \ln\det(1 + BA^{-1}). \tag{32}$$

Наконец из формулы реконструкции (10) и (31) следует общая детерминантная формула для точных решений $u(x, y, t)$ мКП уравнения [3, 4, 14], соответствующих дельта-ядру (23):

$$u = -\frac{2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \ln\det(1 + BA^{-1}) = -\frac{2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \ln\det\frac{A + B}{A}, \tag{33}$$

эта формула справедлива для обоих типов мКП-1 и мКП-2 уравнений. В общем положении формула (33) дает комплексные точные решения.

Для получения ограничений на параметры A_k и μ_k, λ_k ядра R_0, следующих из условия вещественности $u = \bar{u}$, удобно преобразовать матрицы $A + B$ и A,

определяемые в (31), простым преобразованием подобия, к эквивалентным (в смысле получения точных решений) и более симметричным матрицам :

$$(A+B)_{kl} = \delta_{kl} + \frac{2iA_l\mu_k e^{F(\mu_k)-F(\lambda_l)}}{\pi\lambda_l(\mu_k-\lambda_l)} := e^{\frac{F(\mu_k)}{2}} N_{kl} \frac{2A_l}{\pi\lambda_l} e^{-\frac{F(\lambda_l)}{2}}, \tag{34}$$

здесь

$$N_{kl} := \delta_{kl} \frac{\pi\lambda_k}{2A_k} e^{-\frac{\Delta F(\mu_k,\lambda_k)}{2}} + \frac{i\mu_k}{\mu_k-\lambda_l} e^{\frac{\Delta F(\mu_k,\lambda_l)}{2}}. \tag{35}$$

Аналогично для A_{kl} :

$$A_{kl} = \delta_{kl} + \frac{2iA_l}{\pi\lambda_l(\mu_k-\lambda_l)} e^{F(\mu_k)-F(\lambda_l)} := e^{\frac{F(\mu_k)}{2}} D_{kl} \frac{2A_l}{\pi\lambda_l} e^{-\frac{F(\lambda_l)}{2}}, \tag{36}$$

где

$$D_{kl} := \delta_{kl} \frac{\pi\lambda_k}{2A_k} e^{-\frac{\Delta F(\mu_k,\lambda_k)}{2}} + \frac{i\lambda_l}{\mu_k-\lambda_l} e^{\frac{\Delta F(\mu_k,\lambda_l)}{2}} \tag{37}$$

и в (35)–(37) введены обозначения:

$$\Delta F(\mu_k,\lambda_l) := F(\mu_k) - F(\lambda_l) =$$

$$= ix\left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\lambda_l}\right) - iy\left(\frac{1}{\mu_k^2} - \frac{1}{\lambda_l^2}\right) + 4it\left(\frac{1}{\mu_k^3} - \frac{1}{\lambda_l^3}\right). \tag{38}$$

Очевидно фазы $\Delta F(\mu_k, \lambda_l)$ при вещественных μ_k и λ_l в ядре R_0 (23) удовлетворяют соотношению

$$\overline{\Delta F(\mu_k, \lambda_l)} = \Delta F(\lambda_l, \mu_k). \tag{39}$$

Формула реконструкции (33), в силу (34)–(37), преобразуется к следующей эквивалентной форме в терминах матриц N и D :

$$u = -\frac{2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\ln\det\frac{A+B}{A} = -\frac{2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\ln\det\frac{N}{D}. \tag{40}$$

Требование вещественности решений $u = \bar{u}$, в силу (35)–(39), в случае мКП-1 уравнения с $\sigma = i$ приводит к условию:

$$\det N = \det\left(\delta_{kl}\frac{\pi\lambda_k}{2A_k} e^{-\frac{\Delta F(\mu_k,\lambda_k)}{2}} + \frac{i\mu_k}{\mu_k-\lambda_l} e^{\frac{\Delta F(\mu_k,\lambda_l)}{2}}\right) = \overline{\det D} =$$

$$= \det\left(\delta_{kl}\frac{\pi\lambda_k}{2\bar{A}_k} e^{-\frac{\Delta F(\lambda_k,\mu_k)}{2}} - \frac{i\lambda_l}{\mu_k-\lambda_l} e^{\frac{\Delta F(\lambda_l,\mu_k)}{2}}\right). \tag{41}$$

При выполнении условия (41) по формуле реконструкции (40) вычисляются вещественные решения мКП-1 уравнения в общей детерминантной форме:

$$u(x,\ y,\ t) = 2i\frac{\partial}{\partial x}\left(-2i\arg(\det D)\right) = 4\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\left(\frac{\det_I D}{\det_R D}\right), \tag{42}$$

здесь $\det_R D$ и $\det_I D$ – вещественная и мнимая части $\det D = \det_R D + i\det_I D$.

В последующих разделах 4 и 5 с помощью общих формул (37)–(42) построены простейшие примеры точных периодических решений мКП-1 уравнения.

3. Простое однопериодическое решение мКП-1 уравнения, как нелинейный аналог плоской монохроматической волны

Простейшему периодическому решению мКП-1 уравнения соответствует выбор дельта-ядра R_0 (23) в $\bar\partial$-проблеме (5) или в методе $\bar\partial$-одевания уравнения (9) с одним дельта-функционным слагаемым

$$R_0(\mu,\bar\mu;\lambda,\bar\lambda) = A_0\delta(\mu-\mu_0)\delta(\lambda-\lambda_0) \tag{43}$$

с комплексной амплитудой A_0 и вещественными спектральными точками $\mu_0 = \bar\mu_0$, $\lambda_0 = \bar\lambda_0$. Для $\det N$ и $\det D$, в силу (36), получаются следующие выражения:

$$\det N = \left(\frac{\pi\lambda_0}{2A_0}e^{-\frac{\Delta F(\mu_0,\lambda_0)}{2}} + \frac{i\mu_0}{\mu_0-\lambda_0}e^{\frac{\Delta F(\mu_0,\lambda_0)}{2}}\right),$$

$$\det D = \left(\frac{\pi\lambda_0}{2A_0}e^{-\frac{\Delta F(\mu_0,\lambda_0)}{2}} + \frac{i\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}e^{\frac{\Delta F(\mu_0,\lambda_0)}{2}}\right). \tag{44}$$

Здесь согласно (38)

$$\Delta F(\mu_0,\lambda_0) = ix\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\lambda_0}\right) - iy\left(\frac{1}{\mu_0^2}-\frac{1}{\lambda_0^2}\right) + 4it\left(\frac{1}{\mu_0^3}-\frac{1}{\lambda_0^3}\right) := i\Delta\tilde\Phi. \tag{45}$$

Требование вещественности $u = \bar u$ решений $u(x,y,t)$ приводит в рассматриваемом случае к соотношению

$$\det N = \left(\frac{\pi\lambda_0}{2A_0}e^{-\frac{i\Delta\tilde\Phi}{2}} + \frac{i\mu_0}{\mu_0-\lambda_0}e^{\frac{i\Delta\tilde\Phi}{2}}\right) = \overline{\det D} =$$

$$= \left(\frac{\pi\lambda_0}{2\bar A_0}e^{\frac{i\Delta\tilde\Phi}{2}} - \frac{i\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}e^{-\frac{i\Delta\tilde\Phi}{2}}\right). \tag{46}$$

Из (46) получаем

$$\frac{\pi\lambda_0}{2A_0} = -\frac{i\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0},\quad \frac{\pi\lambda_0}{2\bar A_0} = \frac{i\mu_0}{\mu_0-\lambda_0} \tag{47}$$

и, следовательно

$$|A_0| = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\mu_0}}(\mu_0 - \lambda_0), \quad A_0 = |A_0|\, e^{i\alpha} \tag{48}$$

с некоторой вещественной константой α. Подставляя (48) в (44), находим:

$$\det D = \left(\frac{\sqrt{\mu_0\lambda_0}}{\mu_0 - \lambda_0} e^{-i\frac{\Delta\tilde{\Phi}+\alpha}{2}} + \frac{i\lambda_0}{\mu_0 - \lambda_0} e^{i\frac{\Delta\tilde{\Phi}+\alpha}{2}} \right) e^{-i\frac{\alpha}{2}}; \tag{49}$$

$$(\arg\det D) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_0}{\mu_0}}\cos\frac{\Delta\Phi}{2} - \sin\frac{\Delta\Phi}{2}}{\cos\frac{\Delta\Phi}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mu_0}}\sin\frac{\Delta\Phi}{2}} \right) - \frac{\alpha}{2}, \quad \Delta\Phi := \Delta\tilde{\Phi} + \alpha. \tag{50}$$

Наконец, формула реконструкции (42) с учетом (50) после простых вычислений приводит к точному вещественному периодическому мКП-1 уравнению:

$$u = 4\frac{\partial}{\partial x}\left(\arg\det D\right) = 4\frac{\dfrac{(\lambda_0 - \mu_0)^2}{2\lambda_0\mu_0^2}}{1 + \dfrac{\lambda_0}{\mu_0} - 2\sqrt{\dfrac{\lambda_0}{\mu_0}}\sin\Delta\Phi} = \frac{4sh^2\Xi}{\sqrt{\lambda_0\mu_0}\,(ch\Xi - \sin\Delta\Phi)}, \tag{51}$$

здесь $e^{\Xi} := \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mu_0}}$, $\Delta\Phi = x\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\lambda_0}\right) - y\left(\frac{1}{\mu_0^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right) + 4t\left(\frac{1}{\mu_0^3} - \frac{1}{\lambda_0^3}\right) + \alpha$. Переписывая фазу $\Delta\Phi$ в общепринятой для плоских монохроматических волн удобной форме:

$$\Delta\Phi = k_x x + k_y y - \omega t + \alpha, \tag{52}$$

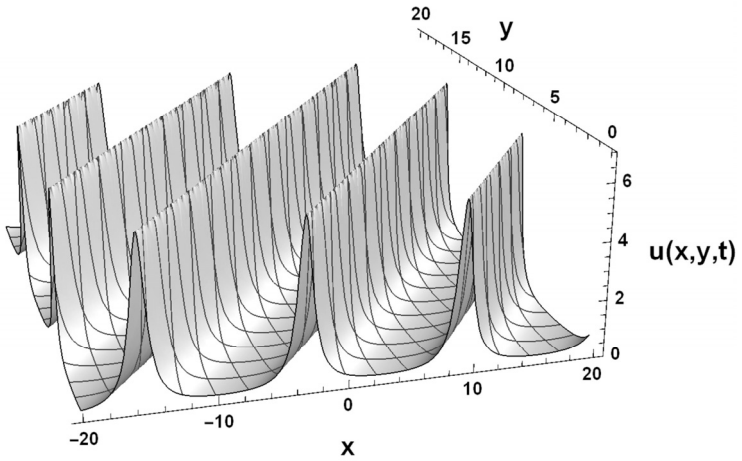

Рис. 1 – Периодическое решение u (51) с параметрами $\lambda_{10} = 1$, $\mu_{10} = 2$

Fig. 1 – The periodic solution u (51). Parameters values are $\lambda_{10} = 1$, $\mu_{10} = 2$

заключаем, что поле $u(x, y, t)$ распространяется в плоскости (x, y) в направлении волнового вектора $\vec{k}$ как плоская монохроматическая волна, осциллирующая с частотой ω:

$$\vec{k} = (k_x, k_y) = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\lambda_0}, -\frac{1}{\mu_0^2} + \frac{1}{\lambda_0^2}\right), \quad \omega = 4\left|\frac{1}{\mu_0^3} - \frac{1}{\lambda_0^3}\right|, \tag{53}$$

Скорость этой периодической нелинейной волны дается следующим выражением:

$$V := \frac{|\omega|}{|\vec{k}|} = \frac{4\left|\frac{1}{\mu_0^3} - \frac{1}{\lambda_0^3}\right|}{\left|\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\lambda_0}\right|\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2}} = \frac{4\left(\frac{1}{\mu_0^2} + \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\mu_0\lambda_0}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2}}. \tag{54}$$

В силу неравенства $\operatorname{ch}\Xi > 1$ полученное точное периодическое решение (51) несингулярно и является, очевидно, простым однопериодическим точным решением мКП-1 уравнения, которое можно назвать линейно-периодическим, периодическим аналогом линейного солитона.

4. Пример точного двухпериодического решения мКП-1 уравнения с интегрируемым граничным условием

Из простых периодических решений, построенных в предыдущем разделе, можно получать их нелинейные суперпозиции из любого числа простых нелинейных волн, выбирая ядро R_0 $\bar{\partial}$-проблемы (23) в виде суммы из нескольких дельта-функционных слагаемых типа (43), причем суперпозиции можно подбирать так, чтобы удовлетворялось интегрируемое граничное условие (15). Вычислим для примера двухпериодическое решение мКП-1 уравнения, соответствующее ядру R_0 (20) $\bar{\partial}$-уравнения (9) с двумя слагаемыми:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = A_1\delta(\mu - \mu_0)\delta(\lambda - \lambda_0) + A_2\delta(\mu + \lambda_0)\delta(\lambda + \mu_0) \tag{55}$$

с комплексными амплитудами A_1, A_2 и вещественными спектральными точками $\mu_0 = \bar{\mu}_0$, $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$. В (55) в соответствии с (18) и (21) для удовлетворения интегрируемого граничного условия (15) на амплитуды наложено соотношение

$$A_2 = \frac{\mu_0}{\lambda_0} A_1. \tag{56}$$

Матрицы N и D, соответствующие ядру (55), в силу (35)–(37) имеют вид:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\pi\lambda_0}{2A_1} e^{-\frac{\Delta F(\mu_0,\lambda_0)}{2}} + \frac{i\mu_0}{\mu_0 - \lambda_0} e^{\frac{\Delta F(\mu_0,\lambda_0)}{2}} & \frac{i\mu_0}{\mu_0 + \mu_0} e^{\frac{\Delta F(\mu_0,-\mu_0)}{2}} \\ \frac{-i\lambda_0}{-\lambda_0 - \lambda_0} e^{\frac{\Delta F(-\lambda_0,\lambda_0)}{2}} & -\frac{\pi\mu_0}{2A_2} e^{-\frac{\Delta F(-\lambda_0,-\mu_0)}{2}} - \frac{i\lambda_0}{-\lambda_0 + \mu_0} e^{\frac{\Delta F(-\lambda_0,-\mu_0)}{2}} \end{pmatrix}; \tag{57}$$

$$D =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi\lambda_0}{2A_1} e^{-\frac{\Delta F(\mu_0,\lambda_0)}{2}} + \frac{i\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0} e^{\frac{\Delta F(\mu_0,\lambda_0)}{2}} & \frac{-i\mu_0}{\mu_0+\mu_0} e^{\frac{\Delta F(\mu_0,-\mu_0)}{2}} \\ \frac{i\lambda_0}{-\lambda_0-\lambda_0} e^{\frac{\Delta F(-\lambda_0,\lambda_0)}{2}} & -\frac{\pi\mu_0}{2A_2} e^{-\frac{\Delta F(-\lambda_0,-\mu_0)}{2}} - \frac{i\mu_0}{-\lambda_0+\mu_0} e^{\frac{\Delta F(-\lambda_0,-\mu_0)}{2}} \end{pmatrix}.$$

(58)

Входящие в экспоненты в (56) и (57) фазы и им комплексно сопряженные удобно переписать с учетом (38) и (39) в следующих обозначениях:

$$\Delta F(\mu_0,\lambda_0) = ix\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\lambda_0}\right) - iy\left(\frac{1}{\mu_0^2}-\frac{1}{\lambda_0^2}\right) + 4it\left(\frac{1}{\mu_0^3}-\frac{1}{\lambda_0^3}\right) := i\big(\Phi(x,t)-\Theta(y)\big),$$

$$\Phi(x,t) \doteq x\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\lambda_0}\right) + 4t\left(\frac{1}{\mu_0^3}-\frac{1}{\lambda_0^3}\right), \quad \Theta(y) \doteq y\left(\frac{1}{\mu_0^2}-\frac{1}{\lambda_0^2}\right), \tag{59}$$

$$\Delta F(-\lambda_0,\ -\mu_0) = i\big(\Phi(x,t)-\Theta(y)\big), \quad \Delta F(-\lambda_0,-\mu_0) = i\big(\Phi(x,t)+\Theta(y)\big);$$

$$\Delta F(-\lambda_0,\lambda_0) = -2i\frac{x}{\lambda_0} - 8it\frac{1}{\lambda_0^3}, \quad \Delta F(\mu_0,-\mu_0) = 2i\frac{x}{\mu_0} + 8it\frac{1}{\mu_0^3};$$

$$\Delta F(\mu_0,-\mu_0) + \Delta F(-\lambda_0,\lambda_0) = 2i\Phi(x,t). \tag{60}$$

Переписывая N и $\overline{D}$ в обозначениях (59) и (60), получаем:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\pi\lambda_0}{2A_1} e^{-i\frac{\Phi-\Theta}{2}} + \frac{i\mu_0}{\mu_0-\lambda_0} e^{i\frac{\Phi+\Theta}{2}} & \frac{i}{2} e^{i\frac{x}{\mu_0}+4i\frac{t}{\mu_0^3}} \\ \frac{i}{2} e^{-i\frac{x}{\lambda_0}-4i\frac{t}{\lambda_0^3}} & -\frac{\pi\mu_0}{2A_2} e^{-i\frac{\Phi+\Theta}{2}} + \frac{i\lambda_0}{\lambda_0-\mu_0} e^{i\frac{\Phi+\Theta}{2}} \end{pmatrix}; \tag{61}$$

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} \frac{\pi\lambda_0}{2\overline{A}_1} e^{i\frac{\Phi-\Theta}{2}} - \frac{i\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0} e^{-i\frac{\Phi-\Theta}{2}} & \frac{i}{2} e^{-i\frac{x}{\mu_0}-4i\frac{t}{\mu_0^3}} \\ \frac{i}{2} e^{i\frac{x}{\lambda_0}+4i\frac{t}{\lambda_0^3}} & -\frac{\pi\mu_0}{2\overline{A}_2} e^{i\frac{\Phi+\Theta}{2}} + \frac{i\mu_0}{\mu_0-\lambda_0} e^{-i\frac{\Phi+\Theta}{2}} \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Требование условия вещественности $\overline{u} = u$ для поля $u(x,y,t)$, выраженное в y соответствии с (41), (42) в форме

$$\det N = \overline{\det D}, \tag{63}$$

с матрицами N и $\overline{D}$ (61) и (62) приводит к некоторым ограничениям на комплексные амплитуды A_1, A_2 и спектральные точки (параметры) $\mu_0 = \overline{\mu}_0$ и

$\lambda_0 = \overline{\lambda}_0$; приравнивая коэффициенты при экспонентах $e^{\pm i\Phi}$, $e^{\pm i\Theta}$ в равенстве $\det N = \overline{\det D}$ с учетом (61) и (62), получаем:

$$e^{i\Phi} : -\frac{\pi^2\lambda_0\mu_0}{4\overline{A}_1\overline{A}_2} = \frac{(\mu_0+\lambda_0)^2}{4(\mu_0-\lambda_0)^2}, \quad e^{-i\Phi} : -\frac{\pi^2\lambda_0\mu_0}{4A_1A_2} = \frac{(\mu_0+\lambda_0)^2}{4(\mu_0-\lambda_0)^2}; \tag{64}$$

$$e^{i\Theta} : \frac{i\pi\lambda_0\mu_0}{2\overline{A}_2(\mu_0-\lambda_0)} = -\frac{i\pi\lambda_0^2}{2(\mu_0-\lambda_0)A_1}, \; e^{-i\Theta} : \frac{i\pi\lambda_0\mu_0}{2\overline{A}_1(\mu_0-\lambda_0)} = -\frac{i\pi\mu_0^2}{2(\mu_0-\lambda_0)A_2}. \tag{65}$$

Ограничения (64), (65) на A_1, A_2 и μ_0, λ_0, очевидно, удовлетворяются при следущем выборе параметров:

$$A_1 = |A_1|\, e^{i\alpha} = \frac{\pi\lambda_0(\mu_0-\lambda_0)}{(\mu_0+\lambda_0)} e^{i\alpha}, \quad A_2 = -\overline{A}_1\frac{\mu_0}{\lambda_0} = -\frac{\pi\mu_0(\mu_0-\lambda_0)}{(\mu_0+\lambda_0)} e^{-i\alpha}. \tag{66}$$

Из (58) и (62)–(66) получается следующее выражение для

$$\det D : \det D = \frac{(\mu_0+\lambda_0)^2}{2(\mu_0-\lambda_0)^2}\big(\cos\Phi(x,t) + \sin(\Theta(y)-\alpha)\big) -$$

$$-\frac{i(\mu_0+\lambda_0)}{2(\mu_0-\lambda_0)}\cos(\Theta(y)-\alpha). \tag{67}$$

Таким образом, требование вещественности $u = \overline{u}$, в силу удовлетворенного соотношения $\det N = \overline{\det D}$, выполнено, и для $\operatorname{tg}(\arg\det D)$ из (67) получается выражение

$$\operatorname{tg}(\arg\det D) = -\frac{\dfrac{(\mu_0-\lambda_0)}{(\mu_0+\lambda_0)}\cos\big(\Theta-\alpha\big)}{\cos\Phi + \sin\big(\Theta-\alpha\big)}, \tag{68}$$

здесь, в силу (59) и (67)

$$\alpha = \arg A_1, \quad \Phi(x,t) = x\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\lambda_0}\right) + 4t\left(\frac{1}{\mu_0^3}-\frac{1}{\lambda_0^3}\right), \quad \Theta(y) = y\left(\frac{1}{\mu_0^2}-\frac{1}{\lambda_0^2}\right). \tag{69}$$

Формула реконструкции (42) для u с учетом (68) приводит к следующему двухпериодическому решению мКП-1 уравнения:

$$u(x,y,t) = \frac{\dfrac{4(\mu_0-\lambda_0)^2}{\lambda_0\mu_0(\mu_0+\lambda_0)}\sin\Phi(x,t)\cos\big(\Theta(y)-\alpha\big)}{\big(\cos\Phi(x,t)+\sin\big(\Theta-\alpha\big)\big)^2 + \left(\dfrac{\mu_0-\lambda_0}{\mu_0+\lambda_0}\right)^2\cos^2\big(\Theta(y)-\alpha\big)} =$$

$$= \frac{8\operatorname{sh}^2\Xi}{\sqrt{\mu_0\lambda_0}\cdot\operatorname{ch}\Xi}\,\frac{\sin\Phi(x,t)\cos\big(\Theta(y)-\alpha\big)}{\big(\cos\Phi(x,t)+\sin\big(\Theta(y)-\alpha\big)\big)^2 + \cos^2\big(\Theta(y)-\alpha\big)\operatorname{th}^2\Xi}. \tag{70}$$

Отметим, что полученное решение соответствует ядру R_0 вида (55) и не удовлетворяет граничному условию (15). Как было показано выше в первом разделе, для выполнения интегрируемого граничного условия (15), в пределе слабых полей, должно выполяться ограничение (18) на ядро R_0 $\bar{\partial}$-проблемы (23), это ограничение удовлетворяется для ядер типа (20) или (55) с условием на амплитуды (56). Учитывая соотношения (56) и (66) на амплитуды одновременно, получаем

$$A_2 = -\bar{A}_1 \frac{\mu_0}{\lambda_0} = A_1 \frac{\mu_0}{\lambda_0} \Rightarrow \arg(A_1) = \alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{71}$$

В результате из (70) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получается точное вещественное двухпериодическое решение $u(x,\ y,\ t)$, имеющее вид

$$u(x,\ y,\ t) = \frac{8\,\mathrm{sh}^2\,\Xi}{ch\,\Xi\sqrt{\mu_0\lambda_0}} \frac{\sin\Phi(x,t)\sin\Theta(y)}{\cdot\left(\cos\Phi(x,\ t) + \cos\Theta(y)\right)^2 + \sin^2(\Theta(y))\,\mathrm{th}^2\,\Xi}, \tag{72}$$

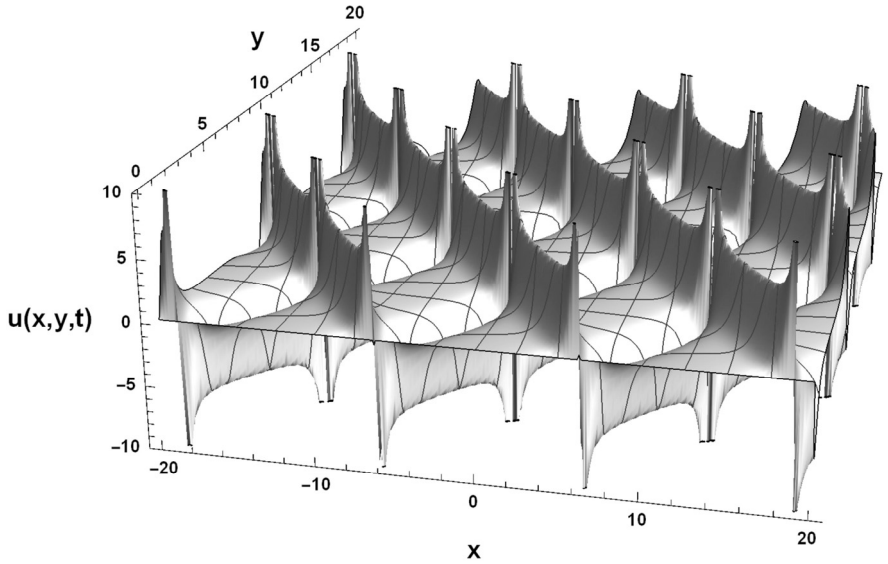

Рис. 2 – Двухпериодическое решение *u* (72) с параметрами $\lambda_{10} = 1$, $\mu_{10} = 2$

Fig. 2 – The two-periodic solution *u* (72). Parameter valuesare are $\lambda_{10} = 1$, $\mu_{10} = 2$

здесь $e^{\Xi} \doteq \sqrt{\frac{\mu_0}{\lambda_0}}$. Полученное решение по построению удовлетворяет интегрируемому граничному условию (15), является двухпериодическим по фазам

$$\Phi(x,t) \doteq x\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\lambda_0}\right) + 4t\left(\frac{1}{\mu_0^3} - \frac{1}{\lambda_0^3}\right) \quad \text{и} \quad \Theta(y) \doteq y\left(\frac{1}{\mu_0^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right) \tag{73}$$

и представляет собой нелинейную гармоническую волну: стоячую периодическую в направлении оси y и распространяющуюся вдоль оси x со скоростью

$$V_x := \frac{-4\left(\frac{1}{\mu_0^3}-\frac{1}{\lambda_0^3}\right)}{\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\lambda_0}\right)} = -4\left(\frac{1}{\mu_0^2}+\frac{1}{\lambda_0^2}+\frac{1}{\mu_0\lambda_0}\right). \tag{74}$$

Решение (73), очевидно, имеет точечные сингулярности в точках плоскости $(x,\ y)$, задаваемых уравнениями $\sin\Theta(y)=0 \Rightarrow \Theta(y)=n\pi$ и $\cos\Phi(x,t)-\cos\Theta(y)=0 \Rightarrow$ $\cos\Phi(x,t)=\cos(n\pi)=(-1)^n$, n – произвольное целое число.

Заключение

В статье в рамках метода $\bar{\partial}$-одевания Захарова–Манакова развита общая схема вычисления точных периодических решений уравнения мКП-1: получена в удобной форме общая детерминантная формула для таких решений, показано, как с ее помощью специальным выбором параметров ядра $\bar{\partial}$- проблемы удовлетворяются условие вещественности $u=\bar{u}$ и интегрируемое граничное условие $u\big|_{y=0}=0$ для решений. В качестве примера применения развитой схемы вычислено простое вещественное несингулярное однопериодическое точное решение – нелинейный аналог плоской монохроматической волны (см. решение, дающееся формулой (51)), т. е. показано, как строятся плоские нелинейные монохроматические волны.

Показано, как с помощью специальной нелинейной суперпозиции из простых нелинейных монохроматических волн можно строить решения, удовлетворяющие интегрируемому граничному условию: предъявлен явный пример возникающего в результате наложения двух простых периодических нелинейных волн более сложного вещественного двухпериодического решения, как связанного состояния двух простых нелинейных монохроматических волн. Можно сказать, что наложение на поле $u(x,\ y,\ t)$ интегрируемого граничного условия приводит к формированию моды собственных колебаний поля в полуплоскости $y \geq 0$, т. е. к образованию некоторого рода стоячей волны (см. решение, дающееся формулой (72)) с фиксированными, чередующимися друг с другом, максимумами и минимумами вдоль оси y.

Развитая в статье схема построения в рамках метода $\bar{\partial}$-одевания точных периодических решений нелинейного интегрируемого уравнения мКП-1 может быть эффективно применена для построения точных периодических решений и для других 2+1-мерных интегрируемых нелинейных уравнений, с соответствующими интегрируемыми граничными условиями, таких как Кадомцева–Петвиашвили, Дэви–Стюардсона, Нижника–Веселова–Новикова, Ишимори и т. д., что может составить предмет дальнейших исследований.

Данная тема находится в разработке, получены предварительные результаты, которые будут опубликованы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Konopelchenko B.G.** On the gauge-invariant description of the evolution equations integrable by Gelfand-Dikij spectral problems // Physics Letters A. – 1982. – Vol. 92, iss. 7. – P. 323–327. – DOI: 10.1016/0375-9601(82)90900-8.
2. **Jimbo M., Miwa T.** Solitons and infinite dimensional Lie algebras // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. – 1983. – Vol. 19 (3). – P. 943–1001. – DOI: 10.2977/prims/1195182017.
3. **Konopelchenko B.G.**, **Dubrovsky V.G.** Some new integrable nonlinear evolution equations in (2+1)-dimensions Physics Letters A. – 1984. – Vol. 102, iss. 1–2. – P. 15–17. – DOI: 10.1016/0375-9601(84)90442-0.
4. **Konopelchenko B.G.**, **Dubrovsky V.G.** Inverse spectral transform for the modified Kadomtsev-Petviashvili equation // Studies in Applied Mathematics. – 1992. – Vol. 86, N 3. – P. 219–268. – DOI: 10.1002/sapm1992863219.
5. **Склянин Е.К.** Граничные условия для интегрируемых уравнений // Функциональный анализ и его приложения. – 1987. – Т. 21, вып. 2. – С. 86–87.
6. **Гудкова Е.В., Хабибуллин И.Т.** Уравнение Кадомцева–Петвиашвили на полуплоскости // Теоретическая и математическая физика. – 2004. – Т. 140, № 2. – С. 230–240. – DOI: 10.4213/tmf89/.
7. **Хабибуллин И.Т.**, **Гудкова Е.В.** Краевые условия для многомерных интегрируемых уравнений // Функциональный анализ и его приложения. – 2004. – Т. 38, вып. 2. – С. 71–83. – DOI: 10.4213/faa109.
8. **Хабибуллин И.Т.** Граничные условия для нелинейных уравнений, совместимые с интегрируемостью // Теоретическая и математическая физика. – 1993. – Т. 96, № 1. – С. 109–122.
9. **Хабибуллин И.Т.** Уравнение sin-Гордон на полуоси // Теоретическая и математическая физика. – 1998. – Т. 114, № 1. – С. 115–125. – DOI: 10.4213/tmf832.
10. **Адлер В.Э., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.** Краевая задача для уравнения КдФ на полуоси // Теоретическая и математическая физика. – 1997. – Т. 110, № 1. – С. 98–113. – DOI: 10.4213/tmf955.
11. **Хабибуллин И.Т.** Уравнение КдФ на полуоси с нулевым краевым условием // Теоретическая и математическая физика. – 1999. – Т. 119, № 3. – С. 397–404. – DOI: 10.4213/tmf747.
12. **Верещагин В.Л.** Интегрируемые граничные условия для 2+1-мерных моделей математической физики // Теоретическая и математическая физика. – 2012. – Т. 171, № 3. – С. 430–437. – DOI: 10.4213/tmf6932.
13. **Konopelchenko B.G.** Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions. – New York: Plenum Press, 1992. – 292 p.
14. **Konopelchenko B.G.** Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method. – Singapore: World Scientific, 1993. – 304 p.
15. **Beals R., Coifman R.R.** The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions// Physica D. 1986. Vol. 18 (1–3), pp. 242–249. DOI: 10.1016/0167-2789(86)90184-3.
16. **Захаров В.Е., Манаков С.В.** Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Функциональный анализ и его приложения. – 1985. – Т. 19, вып. 2. – С. 11–25.
17. **Zakharov V.E.** Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}-$problem // Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics / ed. by N.S. Erokhin, V.E. Zakharov, A.G. Sitenko, V.M. Chernousenko, V.G. Bar'yakhtar. – Kiev: Naukova Dumka, 1988. – Vol. 1. – P. 152–158.
18. **Bogdanov L.V., Manakov S.V.** The non-local $\bar{\partial}-$problem and (2+1)-dimensional soliton equations // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1988. – Vol. 21, N 10. – P. L537–L544. – DOI: 10.1088/0305-4470/21/10/001.
19. **Zakharov V.E.** On the dressing method // Inverse Methods in Action / ed. by P.C. Sabatier. – Berlin: Springer, 1990. – P. 602–623.
20. **Дубровский В.Г., Топовский А.В., Остреинов Г.М.** Построение точных решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП-2) с интегрируемыми граничными условиями методом дибар-одевания // Доклады АН ВШ РФ. – 2018. – № 4 (41). – С. 7–29. – DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-7-29.

CONSTRUCTION OF PERIODIC SOLUTIONS OF THE MODIFIED KADOMTSEV-PETVIASHVILI EQUATION VIA THE DIBAR-DRESSING METHOD

Dubrovsky V.G., Topovsky A.V.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

New periodical solutions $u(x, y, t)$ of modified Kadomtsev-Petviashvili-1 (mKP-1) equation with the integrable boundary condition $u_y = 0$ by the use of the Zakharov-Manakov $\bar{\partial}$-dressing(dibar-dressing) method are constructed. A general determinant formula for these solutions is derived. The restrictions from reality and boundary conditions for solutions via a general determinant formula are exactly satisfied by an appropriate choice of corresponding parameters. It is shown how the imposition of a boundary condition leads to the formation of some kind of eigen modes of normal oscillations of the field $u(x, y, t)$ in the semi-plane $y \geq 0$. An explicit example of a two-periodic solution with an integrable boundary condition as some nonlinear superposition of two simple one-periodical (linear-periodic) solutions and point singularities is presented.

Keywords: integrable nonlinear equations, method of $\bar{\partial}$-dressing (dibar-dressing), two-dimensional integrable non-linear modified Kadomtsev-Petviashvili (mKP) equation, solutions with integrable boundary conditions, periodic solutions.

DOI: 10.17212/1727-2769-2019-4-7-25

REFERENCES

1. Konopelchenko B.G. On the gauge-invariant description of the evolution equations integrable by Gelfand-Dikij spectral problems. *Physics Letters A*, 1982, vol. 92, iss. 7, pp. 323–327. DOI: 10.1016/0375-9601(82)90900-8.
2. Jimbo M., Miwa T. Solitons and infinite dimensional Lie algebras. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 1983, vol. 19 (3), pp. 943–1001. DOI: 10.2977/prims/1195182017.
3. Konopelchenko B.G., Dubrovsky V.G. Some new integrable nonlinear evolution equations in (2+1)-dimensions. *Physics Letters A*, 1984, vol. 102, iss. 1–2, pp. 15–17. DOI: 10.1016/0375-9601(84)90442-0.
4. Konopelchenko B.G., Dubrovsky V.G. Inverse spectral transform for the modified Kadomtsev-Petviashvili equation. *Studies in Applied Mathematics*, 1992, vol. 86, no. 3, pp. 219–268. DOI: 10.1002/sapm1992863219.
5. Sklyanin E.K. Boundary conditions for integrable equations. *Functional Analysis and Its Applications*, 1987, vol. 21, iss. 2, pp. 164–166. DOI: 10.1007/BF01078038. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1987, vol. 21, iss.2, pp. 86–87.
6. Gudkova E.V., Habibullin I.T. Kadomtsev–Petviashvili equation on the half-plane. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 140 (2), pp. 1086–1094. DOI: 10.1023/B:TAMP.0000036539.35565.1f. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2004, vol. 140, no. 2, pp. 230–240. DOI: 10.4213/tmf89/.
7. Habibullin I.T., Gudkova E.V. Boundary conditions for multidimensional integrable equations. *Functional Analysis and Its Applications*, 2004, vol. 38, iss. 2, pp. 138–148. DOI: 10.1023/B:FAIA.0000034044.01773.dd. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 2004, vol. 38, iss. 2, pp. 71–83. DOI: 10.4213/faa109.
8. Habibullin I.T. Boundary conditions for nonlinear equations compatible with integrability. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1993, vol. 96, pp. 845–853. DOI: 10.1007/BF01074113. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 1993, vol. 96, no. 1, pp. 109–122.
9. Habibullin I.T. Sine-Gordon equation on the semi-axis. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1998, vol. 114, pp. 90–98. DOI: 10.1007/BF02557111. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 1998, vol. 114, no. 1, pp. 115–125. DOI: 10.4213/tmf832.

10. Adler V.E., Habibullin I.T., Shabat A.B. Boundary value problem for the KDV equation on a half-line. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1997, vol. 110, pp. 78–90. DOI: 10.1007/BF02630371. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 1997, vol. 110, no. 1, pp. 98–113. DOI: 10.4213/tmf955.
11. Habibullin I.T. KDV equation on a half-line with the zero boundary condition. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1999, vol. 119, pp. 712–718. DOI: 10.1007/BF02557381. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 1999, vol. 119, no. 3, pp. 397–404. DOI: 10.4213/tmf747.
12. Vereshchagin V.L. Integrable boundary conditions for (2+1)-dimensional models of mathematical physics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 171, pp. 792–799. DOI: 10.1007/s11232-012-0075-9. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2012, vol. 171, no. 3, pp. 430–437. DOI: 10.4213/tmf6932.
13. Konopelchenko B.G. *Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions*. New York, Plenum Press, 1992. 292 p.
14. Konopelchenko B.G. *Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method*. Singapore, World Scientific, 1993. 304 p.
15. R. Beals, R.R. Coifman. The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions// Physica D. 1986. Vol. 18 (1–3), pp. 242–249. DOI: 10.1016/0167-2789(86)90184-3
16. Zakharov V.E., Manakov S.V. Construction of higher-dimensional nonlinear integrable systems and of their solutions. *Functional Analysis and Its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 89–101. DOI: 10.1007/BF01078388. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 11–25.
17. Zakharov V.E. Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}$ – problem. *Plasma theory and Nonlinear and turbulent processes in Physics*. Ed. by Erokhin N.S., Sitenko A.G., Chernousenko V.M., Bar'yakhtar V.G., Zakharov V.E. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, vol. 1, pp. 152–158.
18. Bogdanov L.V., Manakov S.V. The non-local $\bar{\partial}$ – problem and (2+1)-dimensional soliton equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1988, vol. 21, no. 10, pp. L537–L544. DOI: 10.1088/0305-4470/21/10/001.
19. Zakharov V.E. On the dressing method. *Inverse Methods in Action*. Ed. P.C. Sabatier. Berlin, Springer, 1990, pp. 602–623.
20. Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Ostreinov G.M. Postroenie tochnykh reshenii uravneniya Kadomtseva–Petviashvili (KP-2) s integriruemymi granichnymi usloviyami metodom dibar-odevaniya [The construction of exact solutions of Kadomtsev–Petviashvili (KP-2) equation with integrable boundary conditions via dibar-dressing method]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp. 7–29. DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-7-29.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дубровский Владислав Георгиевич – родился в 1948 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 50 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: dubrovsky@ngs.ru).

Dubrovsky Vladislav Georgievich (b. 1948) – Doctor of Sciences (Phys. & Math.), professor, head of the Department of Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is the author of 50 research papers (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: dubrovsky@ngs.ru).

Топовский Антон Валерьевич – родился в 1985 году, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 9 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).

Topovsky Anton Valerevich (b. 1985) – Candidate of Sciences (Phys & Math.), an associate professor at the Department of Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations and the soliton theory. He is the author of 9 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).

Статья поступила 29 ноября 2019 г.
Received November 29, 2019

To references:

Dubrovsky V.G., Topovsky A.V. Postroenie periodicheskikh reshenii modifitsirovannogo uravneniya Kadomtseva–Petviashvili metodom dibar-odevaniya [Construction of periodic solutions of the modified Kadomtsev–Petviashvili equation via the dibar-dressing method]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2019, no. 4 (45), pp. 7–25. DOI: 10.17212/1727-2769-2019-4-7-25.