ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.958

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДОПУСКАЮЩЕГО ГРУППУ ДВИЖЕНИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ АКУСТИКИ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Ю.А. Чиркунов, А.В. Ступин
Новосибирский государственный технический университет

Методами группового анализа исследуется имеющее ненулевой обобщенный инвариант Лапласа и допускающее группу движений максимального порядка уравнение двумерной модели акустики в вертикально стратифицированной слоистой среде. Получены все существенно различные подмодели математической модели, задаваемой этим уравнением. Найдены простейшие существенно различные (не связанные обратимыми точечными преобразованиями) инвариантные решения этого уравнения. Применение к этим решениям полученных формул производства решений дает 28-параметрическое множество существенно различных точных решений уравнения. Применение к этим решениям инфинитезимальных формул производства решений дает счетное множество его точных решений. Линейная оболочка этого множества образует бесконечномерное векторное пространство (со счетным базисом) точных решений уравнения. Тем самым создана база данных его точных решений. Из вида инвариантных решений следует, что характер решения уравнения существенно зависит от волнового числа. При низкочастотных колебаниях решение полиномиально зависит от переменной, определяющей слоистость среды. При высокочастотных колебаниях решение является с точностью до весового множителя периодическим. Методом удвоения допускаемой группы найдено фундаментальное решение этого уравнения, что делает возможным построение формул Грина и получение обобщенных формул Пуассона решений краевых задач. Полученные результаты, в частности, могут быть использованы при расчетах, связанных с проведением геофизической разведки нефти и газа в слоистых средах и в гидроакустике.

Ключевые слова: акустические волны, слоистая среда, инвариантные решения, формулы производства решений.

Введение

Рассматривается двумерная модель стационарного (гармонического по времени) распространения акустических волн в слоистой среде специального вида [1], для которой коэффициент сопротивления сжимаемости среды $\theta(x,y)=y^2$. Звуковое давление $p=p(\boldsymbol{x})$ при этом описывается уравнением [1]:

$$M_\lambda[p] \equiv p_{xx}+p_{yy}+\frac{\lambda^2}{y^2}p=0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}=(x,y)\in R^2$, λ – волновое число, пропорциональное частоте.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект № 435; гранта № НШ-2133.2014.1 в рамках Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ, гранта РФФИ № 12-01-00648.

1. Точные решения

Уравнение (1) ввиду линейности допускает бесконечную группу Ли преобразований с нормальным делителем, порождаемым операторами $P(x,y)\partial_p$, где $p = P(x,y)$ – произвольное решение уравнения (1), фактор-группа по которому порождается операторами [2–4]:

$$Y_1 = \partial_x,\ \ Y_2 = x\partial_x + y\partial_y,\ \ Y_3 = \left(y^2 - x^2\right)\partial_x - 2xy\partial_y,\ \ Y_4 = p\partial_p. \tag{2}$$

Алгебра Ли L_3 с базисом Y_1, Y_2, Y_3 является алгеброй Ли группы движений максимального порядка в ассоциированным с уравнением римановом пространстве [2–4]. Оператор Y_4 – центр алгебры Ли с базисом (2).

В силу теоремы Ли [4, 5] операторы (2) порождают четырехпараметрическую группу Ли преобразований, допускаемых уравнением (1). Эти преобразования порождают зависящие от четырех произвольных вещественных постоянных вещественные формулы производства («размножения») решений уравнения (1). Ввиду линейности уравнения (1) для любого его решения $p = p(x,y)$, являющегося комплекснозначной функцией, решениями этого уравнения являются также функции $\operatorname{Re} p(x,y)$, $\operatorname{Im} p(x,y)$. Это позволяет обобщить вещественные формулы производства решений этого уравнения. В результате получаются следующие формулы производства решений: для любого решения $p(x,y)$ уравнения (1) и для любых вещественных постоянных α_k, β_k $\left(k = 1,2,3,4;\ (\alpha_m)^2 + (\beta_m)^2 \neq 0\ \ (m = 2,4)\right)$ решениями уравнения (1), записанного для переменных x', y', p', являются функции:

$$\begin{aligned} p' &= \operatorname{Re}\left(a_4 p\left(\frac{x' - (\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_2 + i\beta_2},\ \frac{y'}{\alpha_2 + i\beta_2}\right)\right), \\ p' &= \operatorname{Im}\left(a_4 p\left(\frac{x' - (\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_2 + i\beta_2},\ \frac{y'}{\alpha_2 + i\beta_2}\right)\right), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} p' &= \operatorname{Re}\left(a_4 p\left(\frac{\varphi(x',y')\left(x' - a_3\varphi(x',y')\right)}{(y')^2 + \left(x' - a_3\varphi(x',y')\right)^2},\ \frac{y'\varphi(x',y')}{(y')^2 + \left(x' - a_3\varphi(x',y')\right)^2}\right)\right), \\ p' &= \operatorname{Im}\left(a_4 p\left(\frac{\varphi(x',y')\left(x' - a_3\varphi(x',y')\right)}{(y')^2 + \left(x' - a_3\varphi(x',y')\right)^2},\ \frac{y'\varphi(x',y')}{(y')^2 + \left(x' - a_3\varphi(x',y')\right)^2}\right)\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $a_m = \alpha_m + i\beta_m$ $(m = 3, 4)$.

Кроме формул производства решений (3) и (4) из группового свойства (2) следуют инфинитезимальные формулы производства решений уравнения (1).

А именно, если $p = P(x, y)$ – произвольное гладкое решение уравнения (1), то решениями этого уравнения являются функции:

$$\begin{aligned} &p = P_x(x, y), \quad p = xP_x(x, y) + yP_y(x, y), \\ &p = \left(y^2 - x^2\right)P_x(x, y) - 2xyP_y(x, y). \end{aligned} \tag{5}$$

Для классификации инвариантных решений уравнения (1) строится оптимальная система одномерных и двумерных подалгебр алгебры Ли L_4 с базисом (2). Действие на эту алгебру Ли группы ее внутренних автоморфизмов разбивает ее на непересекающиеся классы подобных подалгебр. Выбор простейшего представителя в каждом таком классе приводит к оптимальной системе неподобных подалгебр алгебры Ли L_4 и, следовательно, к оптимальной системе неподобных подгрупп основной группы Ли преобразований уравнения (1). Применение критерия инвариантности [4, 5] позволяет найти универсальные инварианты этих подгрупп в пространстве $R^3(x, y, p)$. Результаты приведены в табл. 1 и 2, в которых β, γ, μ, ν, так же как и входящие во все последующие формулы величины c_k $(k = 1, 2, ..., 18)$, суть произвольные вещественные постоянные.

Универсальные инварианты всех подгрупп в таблицах 1 и 2 позволяют получить простейшие представители всех существенно различных (не связанных точечными преобразованиями) инвариантных решений уравнения (1).

Для подгрупп $\theta_{1.7}, \theta_{2.k}$ $(k = 2, 3, 5, 6)$ не выполнены необходимые условия [4, 5] существования инвариантного решения.

Неособые [4, 5] инвариантные H-решения ранга 0 уравнения (1) суть решения, инвариантные относительно подгрупп $H \in \{\theta_{2.k}\}$ $(k = 1, 4)$. Далее речь идет только о ненулевых решениях.

Инвариантное $\theta_{2.1}$-решение существует только при $\mu = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2}\right)$ и имеет вид

$$p = c_1 y^{\mu}. \tag{6}$$

Инвариантное $\theta_{2.4}$-решение существует только при $\nu = -\left(\lambda^2 + 1\right)$. В этом случае оно определяется по формуле

$$p = c_2 \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^{\lambda^2 + 1}. \tag{7}$$

Неособые [4, 5] инвариантные H-решения ранга 1 уравнения (1) суть решения, инвариантные относительно подгрупп $H \in \{\theta_{1.k}\}$ $(k = 1, 2, ..., 6)$.

Инвариантное $\theta_{1.1}$-решение выражается через функцию Уиттекера $W_{0,\mu}(z)$ $\left(\mu^2 = \frac{1}{4} - \lambda^2\right)$ [6]:

$$p = e^x\left(c_3 W_{0,\mu}(2iy) + c_4 W_{0,\mu}(-2iy)\right). \tag{8}$$

Таблица 1

Однопараметрические подгруппы $\theta_{1.k}$

k	Базис подалгебры	Универсальный инвариант
1	$Y_1 + Y_4$	$y,\ \exp(-x)\,p$
2	Y_1	$y,\ p$
3	$Y_2 + \beta Y_4$	$\frac{x}{y},\ y^{-\beta}p$
4	$Y_3 + Y_4$	$\frac{x^2+y^2}{y},\ \exp\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)p$
5	Y_3	$\frac{x^2+y^2}{y},\ p$
6	$Y_1 - Y_3 + 2\gamma Y_4$	$\frac{x^2+y^2+1}{2y},\ \exp\left(-\gamma \arcsin\frac{x^2+y^2-1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)^2-4y^2}}\right)p$
7	Y_4	$x,\ y$

Таблица 2

Двухпараметрические подгруппы $\theta_{2.k}$

k	Базис подалгебры		Универсальный инвариант
1	Y_1	$Y_2 + \mu Y_4$	$y^{-\mu}p$
2	Y_1	Y_4	y
3	Y_2	Y_4	$\frac{y}{x}$
4	$Y_2 + \nu Y_4$	Y_3	$\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^{\nu} p$
5	Y_3	Y_4	$\frac{x^2+y^2}{y}$
6	$Y_1 - Y_3$	Y_4	$\frac{x^2+y^2+1}{y}$

Инвариантное $\theta_{1.2}$ -решение таково:

$$p = \sqrt{y}\begin{cases} c_5\cos\left(b\ln y\right) + c_6\cos\left(b\ln y\right) & \text{при } b^2 = \lambda^2 - \frac{1}{4} > 0; \\ c_5 y^b + c_6 y^{-b} & \text{при } b^2 = \frac{1}{4} - \lambda^2 > 0; \\ c_5 + c_6\ln y & \text{при } \lambda^2 = \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{9}$$

Инвариантное $\theta_{1.3}$-решение является обобщенным автомодельным решением (при $\beta = 0$ – автомодельным решением):

$$p = y^{\beta} q(\xi), \quad \xi = \frac{x}{y}.$$

При $\beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ оно выражается через гипергеометрическую функцию $F(a, b, c; \eta)$:

$$\begin{aligned} p = c_7 y^{\beta} F\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2} - \beta, \frac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2} + \beta; 1-\beta; \frac{y+ix}{2y} \right) + \\ + c_8 (y+ix)^{\beta} F\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2}, \frac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2}; 1+\beta; \frac{y+ix}{2y} \right)\Bigg). \end{aligned} \tag{10}$$

При $\beta = 1$ инвариантное $\theta_{1.3}$-решение выражается через функции Лежандра $P_{\nu}(z)$, $Q_{\nu}(z)$ $\left(\nu = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-4\lambda^2} \right) \right)$ первого и второго рода:

$$p = c_9 y \left(P_{\nu+1}\left(\frac{ix}{y} \right) - \frac{ix}{y} P_{\nu}\left(\frac{ix}{y} \right) \right) + c_{10} y \left(Q_{\nu+1}\left(\frac{ix}{y} \right) - \frac{ix}{y} Q_{\nu}\left(\frac{ix}{y} \right) \right). \tag{11}$$

При $\beta = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4\lambda^2} \right)$ инвариантное $\theta_{1.3}$-решение определяется с помощью квадратуры

$$p = y^{\beta} \left(c_{11} \int_0^{\frac{x}{y}} \left(\xi^2 + 1 \right)^{\beta-1} d\xi + c_{12} \right). \tag{12}$$

Инвариантное $\theta_{1.4}$-решение выражается через цилиндрические функции Бесселя $J_{\nu}(z), N_{\nu}(z)$ $\left(\nu = -\frac{1}{2}\sqrt{1-4\lambda^2} \right)$ первого и второго рода:

$$p = \sqrt{\frac{y}{x^2+y^2}} \exp\left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) \left(c_{13} J_{\nu}\left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) + c_{14} N_{\nu}\left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) \right). \tag{13}$$

Инвариантное $\theta_{1.5}$-решение определяется по формуле

$$p = \sqrt{\frac{y}{x^2+y^2}} \begin{cases} c_{15}\xi^{b} + c_{16}\xi^{-b} & \text{при } b^2 = \frac{1}{4} - \lambda^2 \neq 0; \\ c_{15} + c_{16} \ln \xi & \text{при } \lambda^2 = \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{14}$$

Инвариантное $\theta_{1.6}$-решение имеет вид

$$p = \exp\left(\gamma \arcsin \frac{x^2+y^2-1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)^2-4y^2}}\right) q(\xi), \quad \xi = \frac{x^2+y^2+1}{2y}.$$

Фактор-уравнение для функции $q(\xi)$ приводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса, решение которого выражается через гипергеометрическую функцию и при $\gamma \neq 0$ определяется по формуле

$$q = \left(\left(\frac{x^2+y^2+1}{2y}\right)^2 - 1\right)^{\frac{i\gamma}{2}} \left(c_{17} F\left(a,\, b;\; 1-i\gamma;\; \frac{x^2+(y+1)^2}{4y}\right) + \right.$$
$$\left. + c_{18} F\left(a+i\gamma,\; b+i\gamma;\; 1+i\gamma;\; \frac{x^2+(y+1)^2}{4y}\right)\right), \tag{15}$$

где

$$a = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\lambda^2}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\lambda^2}\right).$$

2. Фундаментальное решение

Группа Ли G_3, порождаемая операторами Y_1, Y_2, Y_3, является не дважды транзитивной подгруппой основной группы уравнения (1). Фундаментальное решение уравнения (1) ищется в классе решений, инвариантных относительно удвоения группы G_3. Из критерия инвариантности [4, 5] следует, что в качестве базиса инвариантов этого удвоения в пространстве $R^6(\boldsymbol{x}, \xi, p, q)$ можно взять функции:

$$\tau = \tau(\boldsymbol{x}, \; \xi) = \frac{|\boldsymbol{x}-\xi|^2}{4y\eta}; \; p; \; q,$$

где $\boldsymbol{x} = (x, y)$, $\xi = (\xi, \eta)$. Фундаментальное решение уравнения (1) в полуплоскости $R_+^2 = \left\{\boldsymbol{x} = (x, y) \in R^2 : y > 0\right\}$ ищется в виде

$$p = \Phi\left(\boldsymbol{x}, \; \xi\right) = U\left(\tau\left(\boldsymbol{x}, \; \xi\right)\right).$$

Подстановка в уравнение (1) приводит к уравнению

$$\tau(\tau+1)U'' + (2\tau+1)U' + \lambda^2 U = 0.$$

Решение $p=\Phi(\boldsymbol{x},\xi)$ должно иметь в силу оператора M_λ особенность типа δ-функции в точке $\boldsymbol{x}=\xi$. Отсюда следует, что фундаментальное решение уравнения (1) в полуплоскости R_+^2 имеет вид

$$\Phi(\boldsymbol{x},\xi)=F(\alpha,\beta;1;-\tau)\ln\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\tau^k\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{(k!)^2\,\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\big(f(\alpha,k)+f(\beta,k)-2\psi(k+1)+2\psi(1)\big), \tag{16}$$

где $f(\gamma,n)=\psi(\gamma+n)-\psi(\gamma)$, $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера [6], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [6], $\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\lambda^2}\right)$, $\beta=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\lambda^2}\right)$.

Заключение

1. Получены все существенно различные подмодели математической модели, задаваемой уравнением (1), описывающим распространение акустических волн в слоистой среде с коэффициентом сопротивления сжимаемости среды $\theta(x,y)=y^2$.

2. Найденные инвариантные решения (6)–(15) являются простейшими представителями существенно различных (не связанных обратимыми точечными преобразованиями) точных решений уравнения (1). Они зависят от 20 произвольных вещественных постоянных $\beta,\gamma,c_1,c_2,c_3\ldots c_{18}$. Применение к этим решениям формул (3) и (4) производства решений, зависящих от восьми произвольных вещественных постоянных α_k,β_k $(k=1,2,3,4)$, дает 28-параметрическое множество существенно различных точных решений этого уравнения. Применение к этим решениям инфинитезимальных формул производства решений (5) дает счетное множество точных решений. Линейная оболочка этого множества образует бесконечномерное векторное пространство (со счетным базисом) точных решений уравнения (1). Тем самым создана база данных точных решений этого уравнения, которые, в частности, можно использовать при расчетах, связанных с проведением геофизической разведки нефти и газа в слоистых средах и в гидроакустике.

2. Из вида инвариантных решений (6)–(15) следует, что характер решения уравнения (1) существенно зависит от волнового числа λ. Волновое число $\lambda=\frac{1}{4}$ для рассматриваемой модели является собственной частотой и определяет условие резонанса. При низкочастотных колебаниях решение полиномиально зависит от переменной, определяющей слоистость среды. При высокочастотных колебаниях решение является с точностью до весового множителя периодическим, в связи с чем, как показано в работе [7], при некоторых дополнительных условиях в данной слоистой среде существуют локальные неоднородности (области), для которых отсутствует рассеянное поле, возникающее при падении на неоднородность высокочастотного поля, создаваемого внешними компактно распределенными источниками.

3. Фундаментальное решение (16) делает возможным построение формул Грина и получение обобщенных формул Пуассона решений краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Бреховских Л.М., Годин О.А.** Акустика слоистых сред. – М.: Наука, 1989. – 461 с.
[2] **Chirkunov Yu.A.** Group Classification of First-Order Linear Differential Equations with Two Unknown Functions of Two Variables // *Soviet Mathematics. Doklady.* – 1991. – No. 2. – Pp. 404–408.
[3] **Chirkunov Yu.A.** Steady-State Oscillations in Continuously Inhomogeneous Medium Described by a Generalized Darboux Equation // *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* – 2010. – No. 4. – Pp. 19–28.
[4] **Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В.** Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – 659 с.
[5] **Ovsiannikov L.V.** Group Analysis of Differential Equations. – New York: Academic Press. – 1982. – 399 p.
[6] **Whittaker E.T. and Watson G.N.** A Course of Modern Analysis. Vol. 2, Cambridge, University Press. – 1962. – 515 p.
[7] **Romanov V.G., Chirkunov Yu.A.** Nonscattering acoustic objects in an anisotropic medium of special kind // *Doklady Mathematics.* – 2013. – Vol. 87. – No. 1. – Pp. 73–75.

EXACT SOLUTIONS OF A 2-D ACOUSTICS MODEL EQUATION IN A STRATIFIED MEDIUM ADMITTING MAXIMAL ORDER MOTION GROUPS

Chirkunov Yu.A., Stupin A.V.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

The equation with a nonzero generalized Laplace invariant which admits the maximal order motion group of a two-dimensional acoustics model in a vertically stratified medium is investigated by group analysis methods. All essentially different submodels of the mathematical model defined by this equation have been obtained. The simplest essentially different, i.e. non-connected by reversible point transformations, invariant solutions of this equation have been found. The use of the derived solution production formulas to these invariant solutions gives an independent 28-parametric set of essentially different exact solutions of the equation. The use of infinitesimal solution production formulas to these invariant solutions gives a denumerable set of exact solutions. A linear span of this set forms an infinite dimensional vector space (with a denumerable basis) of exact solutions. Thus, a database of exact solutions of this equation has been created. The form of the invariant solutions shows that the character of solutions of the equation depends strongly on the wave number. For low frequency vibrations solutions polynomially depend on the variable that defines the stratification of a medium. For high frequency vibrations solutions are periodic with an accuracy of the weighting factor. A fundamental solution of the equation is found by the method of doubling the admitted group, which makes it possible to construct Green's formulas and to obtain a generalized solution of the Poisson boundary value problem. The results obtained can be used in calculations related to geophysical exploration of oil and gas in stratified media and hydroacoustics.

Keywords: acoustic waves; stratified medium; invariant solutions; formulas of solution production.

REFERENCES

[1] **Brehovskih L.M., Godin O.A.** *Akustika sloistyh sred* [Acoustics of stratified mediums]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 461 p.
[2] **Chirkunov Yu.A.** Group Classification of First-Order Linear Differential Equations with Two Unknown Functions of Two Variables. *Soviet Mathematics. Doklady,* 1991, no. 2, pp. 404–408.
[3] **Chirkunov Yu.A.** Steady-State Oscillations in Continuously Inhomogeneous Medium Described by a Generalized Darboux Equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2010, no. 4, pp. 19–28.
[4] **Chirkunov Yu.A., Habirov S.V.** *Jelementy simmetrijnogo analiza differencial'nyh uravnenij mehaniki sploshnoj sredy* [Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2012, 659 p.

[5] **Ovsiannikov L.V.** Group Analysis of Differential Equations. New York, Academic Press., 1982, 399 p.

[6] **Whittaker E.T., Watson G.N.** A Course of Modern Analysis. Vol. 2. Cambridge, University Press, 1962, 515 p.

[7] **Romanov V.G., Chirkunov Yu.A.** Nonscattering acoustic objects in an anisotropic medium of special kind. *Doklady Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 73–75.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Чиркунов Юрий Александрович – родился в 1952 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: модели и подмодели механики и математической физики. Опубликовано 120 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: chr01@rambler.ru)

Chirkunov Yuri Alexandrovich (b. 1952) – Doctor of Science (Phys.&Math.), Professor, Professor of Higher Mathematics Department of the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the models and submodels of mechanics and mathematical physics. He is author of 120 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: chr01@rambler.ru**)**

Ступин Александр Владимирович – родился в 1994 году, с 2011 года студент факультета радиотехники и электроники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: волны в непрерывно-неоднородной среде. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: snaekst@gmail.com).

Stupin Alexander Vladimirovich (b. 1994) – Student of Radio Engineering and Electronics Faculty of the Novosibirsk State Technical University. Area of research: waves in continuously inhomogeneous medium. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: snaekst@gmail.com)

Статья поступила 13 января 2014 г.

Received 20 Jan. 2014

To Reference:

Chirkunov Yu.A., Stupin A.V. Tochnye resheniya dopuskayushchego gruppu dvizhenii maksimalnogo poryadka uravneniya dvumernoi modeli akustiki v sloistoi srede [Exact solutions of a 2-D acoustics model equation in a stratified medium admitting maximal order motion groups]. *Doklady Akademii Nauk Vysshei Shkoly Rossiiskoi Federatsii* [*Reports of Russian Higher Education Academy of Sciences*], 2014, no. 1(22), pp. 25–33. (in Russ.).