

УДК 621.396.67

**ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ АНТЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ****А.А. Слободяненко***Новосибирский государственный технический университет*

В статье задачи определения и контроля параметров антенн, решаемые с помощью измерений ближнего поля, представлены в единой формулировке, соответствующей обобщенной обратной задаче излучения в виде интегрального уравнения первого рода. В рамках численного подхода к решению уравнение дискретизируется, затем решение ищется приближенно как решение нормальной системы уравнений. Показано, что приближенное решение дискретизированной задачи, удовлетворяющее нормальной системе, также является решением уравнения с ортогональным проектором в его правой части. На основе представленной формулировки предложен новый итерационный метод. Работоспособность метода продемонстрирована на примере решения задачи восстановления диаграммы направленности рупорной антенны из данных ближнего поля, рассчитанных для электродинамической модели антенны в программе HFSS. Результаты предложенного метода сопоставляются с результатами решения задачи методом разложения по сингулярным числам.

Ключевые слова: обратные задачи, антенные измерения, проекционные методы, преобразование ближнего поля в дальнее, метод Качмарца, итерационные методы.

DOI: 10.17212/1727-2769-2022-2-36-45

Введение

Ряд актуальных задач в области антенных измерений, проводимых в ближней зоне, в частности восстановление диаграммы направленности (ДН) [1], обнаружение неисправных элементов в антенных решетках [2, 3], диагностика рефлекторных антенн [4] и другие, может быть сформулирован по типу обратной задачи [5, 6] и решен с помощью соответствующих численных методов. Преимуществом такого подхода является не только его универсальность, но и повышенная точность по сравнению с методами модального разложения [7, 8].

Единая формулировка задач достигается с помощью теоремы эквивалентности [9], согласно которой электромагнитное поле $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$ вне области V' , содержащей источники излучения – антенны, полностью определяется эквивалентными поверхностными токами $\vec{J}_{\text{ЭК}}^{\text{Э}}$, $\vec{J}_{\text{ЭК}}^{\text{М}}$, «текущими» по поверхности $\partial V'$, ограничивающей область V' . При выборе в качестве фиктивной поверхности $\partial V'$ поверхность, совпадающую с геометрией антенны, информации о распределении эквивалентных токов $\vec{J}_{\text{ЭК}}^{\text{Э}}$, $\vec{J}_{\text{ЭК}}^{\text{М}}$ на этой поверхности оказывается достаточным, чтобы решить любую из вышеназванных задач. В свою очередь эквивалентные токи, можно определить по измеренным значениям поля в ближней зоне антенны [10, 11], т. е. тем самым решить обратную задачу, представленную линейным операторным уравнением первого рода

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{L}(\vec{J}_{\text{ЭК}}^{\text{Э}}(\vec{r}), \vec{J}_{\text{ЭК}}^{\text{М}}(\vec{r})), \quad (1)$$

где \vec{r} – вектор произвольной точки наблюдения; \vec{r}' – вектор, определяющий положение точки на поверхности $\partial V'$; $\vec{J}_{\text{эк}}^{\text{э}}, \vec{J}_{\text{эк}}^{\text{м}}$ – эквивалентные электрический и магнитный токи соответственно; \mathcal{L} – линейный интегро-дифференциальный оператор, включающий функцию Грина для свободного пространства.

Численный подход к решению (1) требует, чтобы уравнение было дискретизировано, т.е. выражено в терминах конечного числа неизвестных. Для этого, прежде всего, используют алгоритмы, основанные на методе моментов [12], в котором эквивалентные токи аппроксимируются конечной суммой токов, определенных на каждой из подобластей разбиения поверхности и выраженных в виде некоторой базисной функции f_m с неизвестным комплексным коэффициентом c_m . Затем уравнение (1) взвешивается с помощью множества дельта-функций $\{\delta(\vec{r}) | \vec{r} \in \partial V_{\text{изм}}\}$, где $\partial V_{\text{изм}}$ – поверхность, расположенная в ближнем поле антенны, вдоль которой производятся измерения электромагнитного поля. Это приводит к матричной форме операторного уравнения, которое абстрактно можно записать в виде

$$Ax = b, \quad (2)$$

где $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ – матрица, коэффициенты которой представляют взаимодействие между датчиком и каждым из участков тока; $x \in \mathbb{C}^n$ – вектор неизвестных комплексных коэффициентов разложения эквивалентных токов $\vec{J}_{\text{эк}}^{\text{э}}, \vec{J}_{\text{эк}}^{\text{м}}$; $b \in \mathbb{C}^m$ – вектор, компоненты которого представляют значения измеренного электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$.

Методы решения систем алгебраических уравнений (2) в принципе позволяют получать решения с максимально возможной точностью, однако при этом следует учитывать некорректную природу обратной задачи [13], а именно тот факт, что любое возмущение в исходном уравнении (1) может привести к отсутствию, неединственности, а также неустойчивости решения его дискретного представления (2). Такие возмущения неизбежны и, как правило, связаны с шумами, присутствующими при измерениях ближнего поля, поэтому решение дискретизированной обратной задачи (2) ищут приближенно в виде некоторого вектора $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$, «наименее отклоняющегося» от решения (2) в смысле

$$\|A\hat{x} - b\| = \min \{\|Ax - b\| : x \in \mathbb{C}^n\}, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма.

Для построения устойчивого приближенного решения обратной задачи (2) наряду с основной формулировкой (3) до сих пор находила применение только система нормальных уравнений, которая позволяла применять различные эффективные методы вычисления. Так, например, в работах [14–16] решение достигалось путем вычисления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза методом разложения по сингулярным числам (SVD). В последних публикациях вычислительно трудоемкий метод SVD заменен итерационными методами, такими как различные типы сопряженных градиентов (CG) [17, 18].

В этой работе представлен новый подход к построению приближенного решения дискретизированной задачи (2). Для этого система нормальных уравнений заменяется эквивалентным уравнением с ортогональным проектором в правой

части, которое решается в два шага, при этом матрица A рассматривается как линейный оператор, действующий на конечномерных унитарных пространствах. На первом шаге с помощью подпространственных проекций и теоремы Неймана-Гальперина строится ортогональный проектор, вычисляющий вектор, лежащий в образе оператора A . Затем полученная непротиворечивая система уравнений решается алгоритмом Качмарца [19], адаптированным для поставленной задачи. В частности, с помощью теории операторов показано, что гиперплоскости, на которые последовательно осуществляется проецирование результата текущего шага алгоритма Качмарца, формируются векторами, комплексно-сопряженными исходным векторам-строкам матрицы A . Практическое применение представленного подхода проиллюстрировано на примере решения обратной задачи восстановления ДН. Результаты, полученные проекционным методом, сравниваются с решением задачи методом разложения по сингулярным числам. Показано, что предложенный метод сходится по норме к этому решению. Также обсуждается вопрос точности восстановления ДН путем сравнения результатов с ДН электро-динамической модели исследуемой антенны.

1. Проекционный метод

Будем рассматривать комплекснозначную матрицу A как линейное отображение, действующее на унитарных конечномерных пространствах $A: \mathbb{C}^n \rightarrow R(A) \subset \mathbb{C}^m$, где $R(A)$ – образ пространства отображения (матрицы) A . $R(A)^\perp$ будет обозначать ортогональное дополнение к $R(A)$. A^* – сопряженный оператор. При этом для конечномерных унитарных пространств $\mathbb{C}^m = R(A) \oplus R(A)^\perp$. Скалярное произведение в \mathbb{C}^d обозначим $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^d}$ и определим естественным образом как

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^d} = \sum_{i=1}^d \bar{y}_i x_i,$$

где x_i, \bar{y}_i – i -я компонента вектора x и вектора \bar{y} , комплексно сопряженного с y , соответственно. Среднеквадратичная норма вектора $x \in \mathbb{C}^n$ определяется следующим выражением

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}^n}}.$$

Пусть исходное операторное уравнение (1), соответствующее обратной задаче, сведено к системе линейных алгебраических уравнений в форме (2), будем искать приближенное решение поставленной задачи. Рассмотрим систему нормальных уравнений

$$A^* A x = A^* b. \quad (4)$$

Пусть вектор \hat{x} является решением этого уравнения, тогда вектор $A\hat{x} - b \in R(A)^\perp$. Взяв проекцию этого вектора на образ пространства оператора $R(A)$, имеем

$$0 = P_{R(A)}(A\hat{x} - b) = A\hat{x} - P_{R(A)}b,$$

где $P_{R(A)} : \mathbb{C}^m \rightarrow R(A) = \overline{R(A)}$ – ортогональный проектор на образ оператора A , совпадающий с его замыканием $\overline{R(A)}$.

Значит, искомый вектор \hat{x} помимо уравнения (4) также является решением уравнения

$$Ax = P_{R(A)}b. \quad (5)$$

Выберем в пространстве \mathbb{C}^n n -векторов $u_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $u_2 = (0, 1, \dots, 0)$; ...; $u_n = (0, 0, \dots, 1)$, тогда $Au_i (i = 1, \dots, n)$ формирует в пространстве \mathbb{C}^m векторы a^i , соответствующие i -му вектору-столбцу матрицы A , при этом $a^i \in R(A)$. Для каждого вектора a^i определим проекцию некоторого вектора u на подпространство $M_i = L(a^i) \subset \mathbb{C}^m$, образованное его линейной оболочкой:

$$P_{M_i}(u) = \frac{\langle u, a^i \rangle}{\|a^i\|_2^2} a^i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

Тогда проекция на ортогональное дополнение M_i^\perp определяется как

$$P_{M_i^\perp}(u) = u - \frac{\langle u, a^i \rangle}{\|a^i\|_2^2} a^i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Принимая во внимание тот факт, что $\bigcap_{i=1}^n M_i^\perp = R(A)^\perp$, теорема Неймана–Гальперина [20] позволяет вычислить проекцию вектора b на ортогональное дополнение $R(A)^\perp$ линейного оператора A как предел последовательности итераций вида

$$y^{k+1} = P_{M_n^\perp} \left(P_{M_{n-1}^\perp} \left(\dots \left(P_{M_1^\perp}(y^k) \right) \right) \right), \quad (8)$$

где $y^0 = b$. Обозначая конечный результат (8) как y^\perp , проекция вектора b на $\overline{R(A)}$ определяется из выражения

$$y = P_{R(A)}b = b - y^\perp. \quad (9)$$

Тем самым задача сведена к непротиворечивой системе уравнений

$$Ax = y, \quad (10)$$

где $y \in \overline{R(A)}$.

Для решения (10) алгоритмом Качмарца необходимо выбрать произвольное начальное приближение x^0 и определить гиперплоскости, на которые будет осуществляться проецирование на каждом шаге алгоритма. Из теории операторов [21] известно, что для любых векторов $u \in \mathbb{C}^n$ и $v \in \mathbb{C}^m$ выполняется

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{C}^m} = \langle x, A^*y \rangle_{\mathbb{C}^n}. \quad (11)$$

Пусть \hat{x} является решением уравнения (10), выберем в пространстве \mathbb{C}^m m - векторов $v_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $v_2 = (0, 1, \dots, 0)$; ...; $v_m = (0, 0, \dots, 1)$, тогда

$$\langle A\hat{x}, v_i \rangle_{\mathbb{C}^m} = \langle y, v_i \rangle_{\mathbb{C}^m} = y_i. \quad (12)$$

При этом $A^* v_i$ ($i = 1, \dots, m$) порождает векторы, соответствующие столбцу матрицы, отождествленной с сопряженным оператором, беря во внимание то, что эта матрица в унитарных пространствах является эрмитово-сопряженной к матрице A , имеем

$$A^* v_i = \bar{a}_i, \quad (13)$$

где \bar{a}_i – вектор, соответствующий i -му комплексно-сопряженному вектору-строке матрицы A .

Тогда, подставляя (12) и (13) в выражение (11), получим m гиперплоскостей H_i , точка пересечения которых является приближенным решением задачи.

$$\langle x, \bar{a}_i \rangle_{\mathbb{C}^n} = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (14)$$

Легко показать эквивалентность (14) и (10), определив проекцию P_{H_i} на гиперплоскость H_i следующим образом

$$P_{H_i}(x) = x - \frac{\langle x, \bar{a}_i \rangle - y_i}{\|\bar{a}_i\|_2^2} \bar{a}_i \quad (i = 1, \dots, m). \quad (15)$$

За шаг алгоритма Качмарца примем композицию проекций

$$x^{k+1} = P_m \left(P_{m-1} \left(\dots \left(P_1(x^k) \right) \right) \right), \quad (16)$$

предел последовательности, которых сходится к решению задачи (2).

2. Результаты численного моделирования

Работоспособность проекционного метода продемонстрирована на примере задачи восстановления ДН рупорной антенны с размерами раскрыва 40×20 мм, работающей на частоте 10 ГГц.

Дискретизированная форма интегрального уравнения (1) была получена с помощью метода моментов. Для этого в качестве фиктивной поверхности была выбрана бесконечная плоскость, совпадающая с раскрывом рупора, которая усечена до размеров раскрыва и разбита на 1000 прямоугольных подобластей. Эквивалентные токи разложены по пульс-базису. Данные ближнего поля антенны получены путем строгого расчета модели рупорной антенны (рис. 1) в программном пакете HFSS для точек плоскости размером 990×990 мм, отстоящей на расстоянии 90 мм от раскрыва с шагом 10 мм вдоль осей X и Y введенной декартовой системы координат. Размер итоговой матрицы составил 9801×4000 элементов.

На рис. 2 показано, что решение предложенным проекционным методом сходится по норме (3) к решению методом разложения по сингулярным числам. Об этом также свидетельствует полное совпадение ДН, рассчитанной из результатов дискретизированной обратной задачи рис. 3.

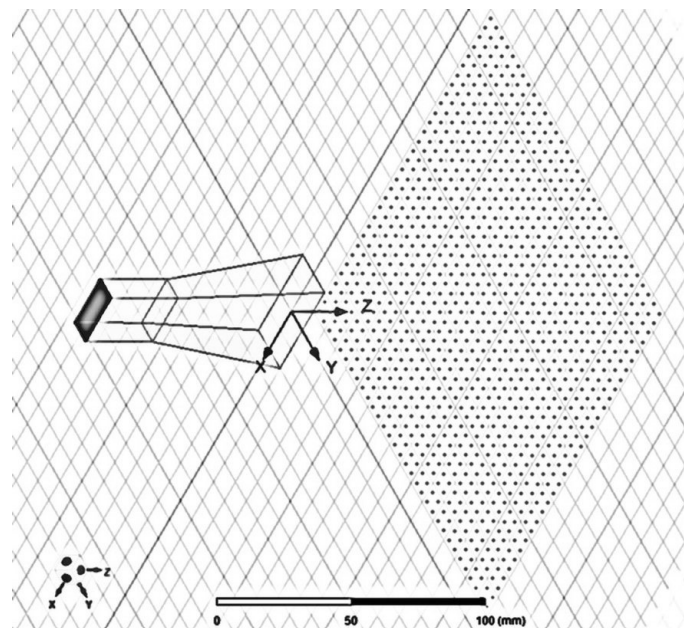


Рис. 1 – Модель рупорной антенны и расположение плоскости расчета значений ближнего поля

Fig. 1 – A horn antenna model and location of the near-field calculation plane

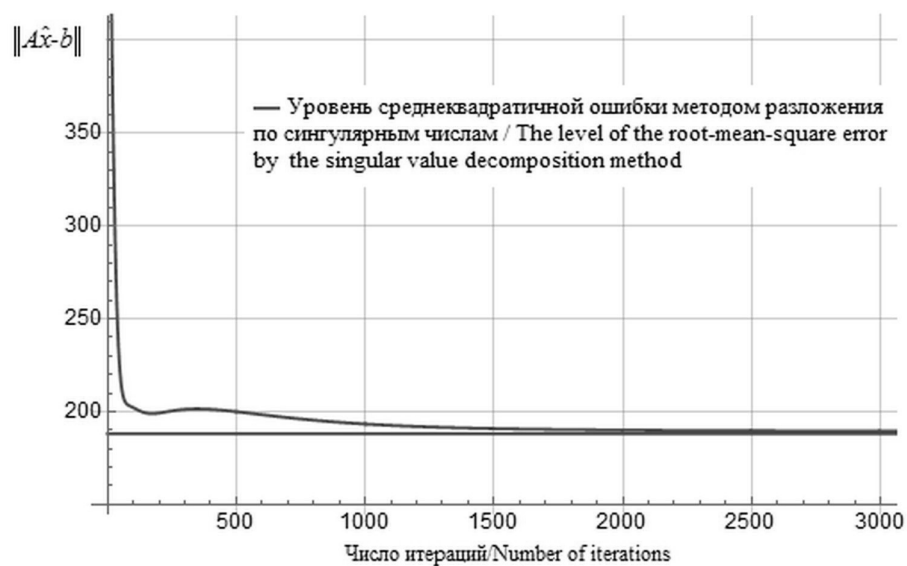


Рис. 2 – Зависимость среднеквадратичной ошибки от количества итераций проекционного алгоритма

Fig. 2 – Dependence of the mean square error on the number of iterations of the projection algorithm

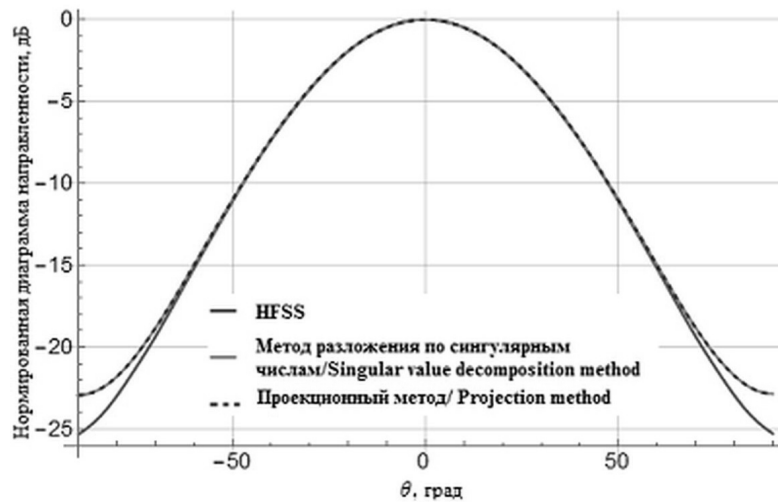


Рис. 3 – Сравнение диаграмм направленности рупорной антенны, рассчитанной в HFSS, и восстановленных из ближнего поля

Fig. 3 – Comparison of the radiation pattern of a horn antenna calculated in HFSS and reconstructed from the near field

Восстановленные диаграммы хорошо согласуются с эталонной ДН, рассчитанной с помощью электродинамической модели в HFSS. При этом относительная среднеквадратичная ошибка восстановления ДН с использованием проекционного метода составила менее 5 % для сектора $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ и менее 2 % для сектора $-80^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$.

Заключение

Математический аппарат теории обратных задач, совмещающий в себе универсальность теории операторов, а также эффективные методы вычислительной математики позволяют решить ряд задач антенных измерений в рамках единого подхода. Формулировка этих задач в виде операторного уравнения первого рода и его последующая дискретизация, рассмотренная как линейное преобразование между унитарными конечномерными пространствами совместно с введенным понятием о решении задачи, как наилучшего решения в среднеквадратичном смысле, дало толчок к разработке проекционного метода. Так, положенное в основу метода уравнение с ортогональным проектором в правой части гарантирует существование и единственность решения. Для отыскания этого решения ключевым явилось введение понятия проекции на подпространство и проекции на гиперплоскости. В частности введение первого понятия совместно с теоремой Неймана–Гальперина приводит к конструктивному построению ортогонального проектора и сведению задачи к непротиворечивой системе алгебраических уравнений, к которой затем применяется адаптированный метод Качмарца, использующий последовательное проецирование некоторой начальной точки на гиперплоскости, образованной уравнениями с коэффициентами, комплексно-сопряженными к коэффициентам непротиворечивой системы уравнений. Приведенное теоретическое обоснование, а также результаты численного моделирования, полученные для задачи определения ДН по измеренной информации в ближней зоне, подтверждают работоспособность проекционного метода для решения задач в области антенных измерений, представимых по типу обратных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы измерений параметров излучающих систем в ближней зоне / Л.Д. Бахрах, С.Д. Кременецкий, А.П. Курочкин, В.А. Усин, Я.С. Шифрин. – Л.: Наука, 1985. – 272 с.
2. **Данилов И.Ю., Седельников Ю.Е.** Диагностика апертурных распределений антенн путем измерений в зоне ближнего излученного поля // Журнал радиоэлектроники. – 2016. – № 1. – С. 12.
3. **Анохина О.Д., Нечеса А.В., Усин В.А.** Определение АФР в элементах фазированных антенных решеток по измерениям амплитуды ближнего поля // Вісті вищих учбових закладів. Радіоелектроніка. – 1996. – Т. 39 (10). – Р. 64–68. – DOI: 10.20535/S002134701996100081.
4. **Шафранов Е.В.** Восстановление характеристик зеркальных антенн по результатам моделирования процесса измерения поля в ближней зоне // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 15 (115). – С. 100–105.
5. Evaluating near-field radiation patterns of commercial antennas / F. Las-Heras, M.R. Pino, S. Lored, Y. Alvarez, T.K. Sarkar // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2006. – Vol. 54 (8). – P. 2198–2207. – DOI: 10.1109/TAP.2006.879190.
6. **Las-Heras F., Galocha B., Álvarez Y.** On the sources reconstruction method application for array and aperture antennas diagnostics // Microwave and Optical Technology Letters. – 2009. – Vol. 51 (7). – P. 1664–1668.
7. **Petre P., Sarkar T.K.** Theoretical comparison of modal expansion and integral equation methods for near-field to far-field transformation // 1992 Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings: APMC' 92. – Adelaide, SA, Australia, 1992. – Vol. 2. – P. 713–716.
8. **Álvarez Y., Las-Heras F., Pino M.R.** On the comparison between the spherical wave expansion and the sources reconstruction method // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2008. – Vol. 56 (10). – P. 3337–3341.
9. **Rengarajan S.R., Rahmat-Samii Y.** The field equivalence principle: illustration of the establishment of the non-intuitive null fields // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – 2000. – Vol. 42. – P. 122–128.
10. **Álvarez Y., Las-Heras F., Pino M.R.** Reconstruction of equivalent currents distribution over arbitrary three-dimensional surfaces based on integral equation algorithms // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2007. – Vol. 54. – P. 3460–3468.
11. An improved super-resolution source reconstruction method / Y. Álvarez, F. Las-Heras, M.R. Pino, T.K. Sarkar // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2009. – Vol. 58 (11). – P. 3855–3866.
12. **Gibson W.C.** The method of moments in electromagnetics. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008. – 298 p.
13. **Moura Neto F.D., Silva Neto A.J.** An introduction to inverse problems with applications. – Heidelberg: New York: Springer, 2013. – 255 p.
14. **Taaghola A., Sarkar T.K.** Near-field to near/far-field transformation for arbitrary near-field geometry, utilizing an equivalent magnetic current // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 1996. – Vol. 38 (3). – P. 536–542.
15. **Sarkar T., Taaghola A.** Near-field to near/far-field transformation for arbitrary near-field geometry utilizing an equivalent electric current and MoM // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1999. – Vol. 47 (3). – P. 566–573.
16. **Colinas J., Goussard Y., Laurin J.J.** Application of the Tikhonov regularization technique to the equivalent magnetic currents near-field technique // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2004. – Vol. 52 (11). – P. 3122–3132.
17. **Li P., Jiang L.J.** Source reconstruction method-based radiated emission characterization for PCBs // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 2013. – Vol. 55 (5). – P. 933–940.
18. **BarriÈre P.A., Laurin J.J., Goussard Y.** Mapping of equivalent currents on high-speed digital printed circuit boards based on near-field measurements // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 2009. – Vol. 51 (3). – P. 649–658.
19. **Kaczmarz S.** Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen // Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A. – 1937. – Vol. 35. – P. 355–357.
20. **Halperin I.** The product of projection operators // Acta Scientiarum Mathematicarum. – 1962. – Vol. 23. – P. 96–99.
21. **Kress R.** Linear integral equations. – 2nd ed. – New York: Springer, 1999. – 427 p.

A PROJECTION METHOD FOR SOLVING DISCRETEZED INVERSE PROBLEMS FOR ANTENNA MEASUREMENTS

Slobodyanenko A.A.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

In the article, the problems of determining and monitoring antenna parameters, solved using measurements in the near field, are presented in a unified formulation corresponding to the generalized inverse radiation problem in the form of an integral equation of the first kind. Within the framework of the numerical approach to the solution, the equation is discretized, and then the solution is sought approximately as a solution to the normal system of equations. It is shown that an approximate solution to the discretized problem that satisfies the normal system is also a solution to an equation with an orthogonal projector on its right-hand side. On the basis of this formulation, a new method of iterative projections is proposed. The efficiency of the method is demonstrated by the example of solving the problem of reconstructing the radiation pattern of a horn antenna from near-field data calculated for the electrodynamic model of the antenna in the HFSS program. The results of the proposed method are compared with the results of solving the problem by the method of decomposition in singular numbers.

Keywords: inverse problem, antenna measurements, projection method, NF-FF transform, Kaczmarz method, iterative methods.

DOI: 10.17212/1727-2769-2022-2-36-45

REFERENCES

1. Bakhrakh L.D., Kremenetskii S.D., Kurochkin A.P., Usin V.A., Shifrin Ya.S. *Metody izmerenii parametrov izluchayushchikh sistem v blizhnei zone* [Methods for measuring radiating systems in the near zone]. Leningrad, Nauka Publ., 1985. 272 p.
2. Danilov I.Yu., Sedel'nikov Yu.E. Diagnostika aperturnykh raspredelenii anten putem izmerenii v zone blizhnego izluchennogo polya [Diagnostics of aperture distributions of antennas by measurements in the near-field radiation zone]. *Zhurnal radioelektroniki = Journal of Radio Electronics*, 2016, no. 1, pp. 12–38.
3. Anokhina O.D., Nechesa A.V., Usin V.A. Opredelenie AFR v elementakh fazirovannykh anten nykh reshetok po izmereniyam amplitudy blizhnego polya [Determination of amplitude-phase distribution in the elements of phased antenna arrays from measurements of the near-field amplitude]. *Visti vishchikh uchbov zakladiv. Radioelektronika = Radioelectronics and Communications Systems*, 1996, vol. 39 (10), pp. 64–68. DOI: 10.20535/S002134701996100081.
4. Shafranov E.V. Vosstanovlenie kharakteristik zerkal'nykh anten po rezul'tatam modelirovaniya protsessa izmereniya polya v blizhnei zone [Restoration of characteristics of mirror antennas on the basis of modelling process of measurements of a field in a near zone]. *Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye = Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 15 (115), pp. 100–105.
5. Las-Heras F., Pino M.R., Loreda S., Alvarez Y., Sarkar T.K. Evaluating near-field radiation patterns of commercial antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006, vol. 54 (8), pp. 2198–2207. DOI: 10.1109/TAP.2006.879190.
6. Las-Heras F., Galocha B., Álvarez Y. On the sources reconstruction method application for array and aperture antennas diagnostics. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2009, vol. 51 (7), pp. 1664–1668.
7. Petre P., Sarkar T.K. Theoretical comparison of modal expansion and integral equation methods for near-field to far-field transformation. *1992 Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings: APMC' 92*, Adelaide, SA, Australia, 1992, vol. 2, pp. 713–716.
8. Álvarez Y., Las-Heras F., Pino M.R. On the comparison between the spherical wave expansion and the sources reconstruction method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2008, vol. 56 (10), pp. 3337–3341.
9. Rengarajan S.R., Rahmat-Samii Y. The field equivalence principle: illustration of the establishment of the non-intuitive null fields. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2000, vol. 42, pp. 122–128.

10. Álvarez Y., Las-Heras F., Pino M.R. Reconstruction of equivalent currents distribution over arbitrary three-dimensional surfaces based on integral equation algorithms. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2007, vol. 54, pp. 3460–3468.
11. Álvarez Y., Las-Heras F., Pino M.R., Sarkar T.K. An improved super-resolution source reconstruction method. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2009, vol. 58 (11), pp. 3855–3866.
12. Gibson W.C. *The method of moments in electromagnetics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2008. 298 p.
13. Moura Neto F.D., Silva Neto A.J. *An introduction to inverse problems with applications*. Heidelberg, New York, Springer, 2013. 255 p.
14. Taaghola A., Sarkar T.K. Near-field to near/far-field transformation for arbitrary near-field geometry, utilizing an equivalent magnetic current. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 1996, vol. 38 (3), pp. 536–542.
15. Sarkar T., Taaghola A. Near-field to near/far-field transformation for arbitrary near-field geometry utilizing an equivalent electric current and MoM. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1999, vol. 47 (3), pp. 566–573.
16. Colinas J., Goussard Y., Laurin J.J. Application of the Tikhonov regularization technique to the equivalent magnetic currents near-field technique. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004, vol. 52 (11), pp. 3122–3132.
17. Li P., Jiang L.J. Source reconstruction method-based radiated emission characterization for PCBs. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2013, vol. 55 (5), pp. 933–940.
18. Barrière P.A., Laurin J.J., Goussard Y. Mapping of equivalent currents on high-speed digital printed circuit boards based on near-field measurements. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2009, vol. 51 (3), pp. 649–658.
19. Kaczmarz S. Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen. *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A*, 1937, vol. 35, pp. 355–357.
20. Halperin I. The product of projection operators. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 1962, vol. 23, pp. 96–99.
21. Kress R. *Linear integral equations*. 2nd ed. New York, Springer, 1999. 427 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ



Слободяненко Александр Александрович – родился в 1993 году, ассистент кафедры автономных информационно-управляющих систем НГТУ. Область научных интересов: численные методы решения обратных задач электродинамики. Опубликовано 15 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: sepwood@gmail.com).

Slobodyanenko Alexandr Alexandrovich (b. 1993) – assistant lecturer at the autonomic information-control systems department, NSTU. His research interests are currently focused on numerical methods for solving inverse problems of electrodynamics. He is the author of 15 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: sepwood@gmail.com).

Статья поступила 29 сентября 2021 г.
Received September 29, 2021

To Reference:

Slobodyanenko A.A. Proektsionnyi metod resheniya diskretizirovannykh obratnykh zadach v oblasti antennoykh izmerenii [A projection method for solving discretized inverse problems for antenna measurements]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii = Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2022, no. 2 (55), pp. 36–45. DOI: 10.17212/1727-2769-2022-2-36-45.