

УДК 621.321

**ПОСТРОЕНИЕ СПИСКА КРИТИЧЕСКИХ РАСПОЛОЖЕНИЙ
ПОЛЮСОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ****А.А. Воевода, А.В. Чехонадских***Новосибирский государственный технический университет*

Полиномиальный подход к синтезу линейных систем управления предусматривает размещение ее полюсов в заданной области. Преобладающие на практике регуляторы пониженного порядка не позволяют задавать расположение полюсов произвольно; их параметры выбираются так, чтобы полюса попадали в приемлемую область. Затем выбор корректируется в соответствии с некоторым критерием оптимальности расположения полюсов. В статье исследуется геометрический подход к оптимальности, когда указывается вид целевой области, накрывающей все полюса системы, и ищутся такие значения параметров, при которых достигается самое левое расположение области этого вида на комплексной плоскости. В частности, поиск самого левого положения границы для всевозможных полуплоскостей, накрывающих полюса системы, эквивалентен максимизации степени устойчивости системы как функции параметров регулятора. Критические расположения полюсов характеризуются наличием на правой границе области наибольшего числа действительных (т.е. наибольшей кратности) и комплексно сопряженных полюсов. В статье такие критические расположения представляются с помощью критических корневых диаграмм – обобщенных корневых портретов. Указывается рекуррентная процедура построения полного списка таких диаграмм для различных видов целевых областей и произвольного числа параметров регулятора. Устанавливается, что число различных критических диаграмм растет в зависимости от числа параметров регулятора по закону Фибоначчи. В предыдущих работах авторов показано, что техника корневых многочленов позволяет алгебраически выяснять, реализуется ли каждая корневая диаграмма в конкретной системе управления и достигается ли в ней экстремальное (крайнее левое) положение целевой области. В настоящей статье решается вопрос о полноте такого рассмотрения.

Ключевые слова: автоматическое управление, регулятор пониженного порядка, оптимальное расположение полюсов, целевая функция, критические многообразия, корневые диаграммы, рекуррентное перечисление, числа Фибоначчи.

Введение

Синтез регуляторов пониженного порядка для линейных систем автоматического управления (САУ) – проблема, которая осознается и ставится довольно давно [1, 2]. Отсутствие классического теоретического решения и различные препятствия, возникающие при реализации многообразных численных подходов [3], парадоксально сочетаются с широким распространением простых и эффективных управляющих устройств в технике и промышленности [4]. Число и спектр исследований и публикаций, связанных с реализацией пропорционально-интегрального (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД, иногда с привлечением регулирования по высшим производным) управления конкретными объектами, исключительно широки; среди множества обзоров можно указать [5]. Авторы настоящей статьи с конца 1990-х годов изучали возможности использования в синтезе управления пониженного порядка полиномиальных методов. Поскольку линейные системы с помощью преобразования Лапласа допускают переход к алгебраическому описанию на языке передаточных функций и матриц,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052.

задача построения эффективного управления приводит к вопросу расположения на комплексной плоскости полюсов – корней характеристического многочлена замкнутой системы. И если САУ полного порядка позволяют осуществлять любое расположение полюсов по усмотрению конструктора, то для систем пониженного порядка можно рассчитывать лишь на попадание полюсов в некоторую желаемую область в левой комплексной полуплоскости. Главная идея, развивавшаяся авторами (см., напр. [6–8]) заключалась в применении оптимизационного подхода: задав вместо конкретной целевой области семейство областей определенного вида, найти такие значения параметров регулятора, которые обеспечивали бы самое левое расположение области семейства, которая накрывала бы все полюса САУ (рис. 1). Правая граница этой крайней области, задающаяся «наименее устойчивыми» полюсами, служит целевой функцией минимизации. Самая естественная форма осуществления этой идеи – накрывать полюса $\{z_1, \dots, z_m\}$ системы левыми полуплоскостями $\{s \mid \operatorname{Re} s \leq \max\{\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_m\}\}$, которые ограничиваются вертикальными прямыми, проходящими через самые правые корни. Нахождение самой левой из возможных полуплоскостей соответствует минимизации целевой величины $H = \max\{\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_m\}$, отрицательные значения которой свидетельствуют о классической устойчивости системы, что позволяет называть противоположную величину $-H$ степенью устойчивости, или запасом устойчивости (далее $H = H(p)$ как функция параметров регулятора p будет именоваться гурвицевой функцией, а классическая устойчивость – гурвицевой).

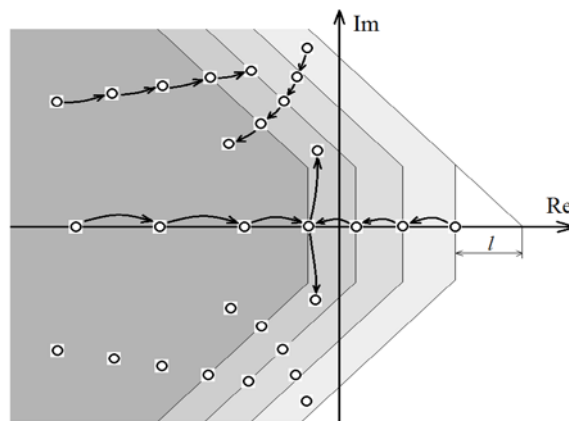


Рис. 1 – Градуировочное семейство усеченных конусов Tr_a . Каждая область накрывает все полюса; граница задается наименее устойчивыми полюсами, смещающимися в связи с изменением одного из параметров p

Fig. 1 – Graduated family of truncated cones Tr_a . Each area covers all the poles; its boundary is defined by the least stable pole, that is shifted due to changes in one of the parameters p

Вопросы максимизации степени устойчивости для характеристических многочленов специального вида с 1980-х годов изучали А.М. Шубладзе и его соавторы (см., напр., [9–12]). В широком ряде случаев им удалось доказать, что максимумы степени устойчивости (т.е. минимумы функции $H(p)$) для таких САУ достигаются при нахождении на границе полуплоскости максимально возможного числа корней – например, действительного корня кратности $n+1$ или $(n+1)$ -й

простой комплексной пары с совпадающими действительными частями, где n – число свободных параметров регулятора. Проблемами оставались установление условий экстремальности для САУ произвольного вида и при различном значении числа параметров n , а кроме этого, построение полного перечня возможностей для критических расположений полюсов – тех, в которых может достигаться экстремум целевой функции.

Последней проблеме посвящена настоящая статья. Вводимое ниже понятие R-градуировки обобщает различные подходы к запасу устойчивости, включая гурвицеву и D-устойчивость. Единственное ограничение, которое накладывается на тип САУ и, тем самым, на вид характеристического многочлена, заключается в том, что это *система неполного порядка*, т. е. такая, где число свободных параметров регулятора или способ их вхождения в коэффициенты характеристического многочлена не позволяет добиваться любого наперед заданного расположения полюсов.

1. R-градуировки и критические многообразия в пространстве параметров

Зададим на комплексной плоскости семейство замкнутых областей $\{B_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ такое, что

- (1) $B_\alpha \subset B_\beta$ при $\alpha < \beta$;
- (2) $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} B_\alpha = \mathbb{C}$;
- (3) $\operatorname{Re} c \leq \alpha$ для всякого комплексного $c \in B_\alpha$.

В силу требования (2) каждое конечное множество $M = \{z_1, \dots, z_m\}$ содержится в некотором из множеств B_α .

Назовем R-градуировкой множества M величину $\alpha_M = \inf\{\alpha \mid M \subseteq B_\alpha\}$.

Естественно требовать от семейства $\{B_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ также следующего:

- (4) инвариантности относительно комплексного сопряжения: $B_\alpha = \overline{B_\alpha}$;
- (5) согласованности с действительной осью: $\alpha \in B_\alpha$;
- (6) непрерывности: для всякого конечного множества M и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что $\alpha_N < \alpha_M + \varepsilon$ для всех $N \subseteq O_\delta(M)$;
- (7) кусочно-гладкой параметризации $x_{\alpha_0}(t) + iy_{\alpha_0}(t)$ границы каждой области B_{α_0} с помощью действительного параметра t ¹.

Примеры. Конструкция R-градуированной плоскости включает в себя наиболее распространенные в ТАУ примеры:

а) семейство полуплоскостей $\{s \mid \operatorname{Re} s \leq \alpha\}$, R-градуировка которого будет противоположна степени устойчивости: $H(p) = \max\{\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_m\}$;

б) семейство конусов $\{s \mid \operatorname{Re} s + |\operatorname{Im} s| \leq \alpha\}$, R-градуировкой для которого будет колебательность с учетом устойчивости: $K(p) = \max(\operatorname{Re} z_k + |\operatorname{Im} z_k|)$;

¹ Для реализации алгебраического метода синтеза существенно, что параметризация задается алгебраическими соотношениями между действительной и мнимой частями, точнее, границы области B_α заданы либо равенством $\operatorname{Re} s = \iota_\alpha(|\operatorname{Im} s|)$, либо $\operatorname{Im} s = \pm \tau_\alpha(\operatorname{Re} s)$, где невозрастающие функции $\iota_\alpha(y)$, $\tau_\alpha(x) \geq 0$ определены при $y \geq 0$ или $x \leq \alpha$ соответственно, причем $\iota_\alpha(0) = \alpha$, $\tau_\alpha(\alpha) = 0$, а $\iota_\alpha(y)$ и $\tau_\alpha^2(x)$ – целые алгебраические функции.

в) семейство усеченных на величину l от вершины конусов – трапециевидных областей Tr_α (оно изображено на рис. 1); R-градуировкой здесь будет величина $T(p) = \max(H(p), K(p) - l)$, представляющая собой степень устойчивости с учетом колебательности.

Граница каждой градуировочной области задается самым правым – наименее устойчивым – полюсом или их сопряженной парой, которые и определяют значение R-градуировки $F(p)$. Изменяя значения параметров p так, чтобы эта граница смещалась влево, можно добиться того, чтобы на ней оказалось уже кратная действительная пара $z_{m-1} = z_m$ (характеристический многочлен в случае кратных граничных полюсов назван в [13] *сильно несепарабельным*), действительный корень вместе с комплексной парой: $z_{m-2, m-1} =_\alpha z_m$ или две комплексные пары с равными R-градуировками²: $z_{m-3, m-2} =_\alpha z_{m-1, m}$ (в случае *слабо несепарабельного* многочлена).

Если пространство параметров управления обеспечивает n степеней свободы, то каждое α -равенство связывает одну из них, задавая в пространстве параметров регулятора $(n-1)$ -мерное многообразие. Если возможность смещать границу области влево сохраняется, то можно добиться того, что уже несколько пар или кратных корней окажутся на границе, связывая α -равенствами k степеней свободы и задавая $(n-k)$ -мерное многообразие. Нульмерное многообразие может включать одну или несколько точек экстремума; типичная для этого случая картина представлена на рис. 1: на границе самой левой трапециевидной градуировочной области оказывается кратный действительный корень и две комплексные пары с равными значениями R-градуировки $T(p)$: $z_1 = z_2 =_\alpha z_{3,4} =_\alpha z_{5,6}$. Такая система равенств связывает три степени свободы и для случая трехпараметрических ПИД-или ПДД₂-регуляторов может задавать точку p^* , в которой любое изменение каждого из параметров управления приводит к смещению одного из корней или пары вправо, за счет чего увеличивается значение градуировки. Таким образом, в точке p^* достигается локальный минимум. Из этих соображений также ясно, что при появлении на границе градуировочной области двух и более не сопряженных корней нарушается дифференцируемость самой градуировки [7, 13].

Нетрудно видеть, что условие нахождения на границе кратной комплексной пары связывает две степени свободы, поскольку комплексное равенство $z_{m-3, m-2} = z_{m-1, m}$ требует выполнения двух действительных равенств:

$$\text{Re } z_{m-3, m-2} = \text{Re } z_{m-1, m} \text{ и } \text{Im } z_{m-3, m-2} = \text{Im } z_{m-1, m},$$

$$\text{или } z_{m-3, m-2} =_\alpha z_{m-1, m} \text{ и } \tau_\alpha(x_{m-3}) = \tau_\alpha(x_{m-1}).$$

Наличие кратной комплексной пары на границе вместе с действительным корнем или простой парой связывает три степени свободы и т. д.

Таким образом, поставленная во введении проблема может быть конкретизирована так: указать эффективный способ перечисления всех возможностей критических корневых расположений для произвольных R-градуировки и числа параметров управления n .

² Значок α -равенства $=_\alpha$ будет использоваться для характеристических корней и комплексных пар с одинаковыми градуировочными значениями, т. е., например,

$$z_{m-3, m-2} =_\alpha z_{m-1, m} \Leftrightarrow \alpha(z_{m-3, m-2}) = \alpha(z_{m-1, m}).$$

2. Критические корневые диаграммы

Традиционным способом наглядного представления взаимного расположения полюсов являются так называемые *корневые портреты*: изображения комплексной плоскости, на которой отмечено расположение характеристических корней (полюсов) относительно действительной и мнимой осей и относительно друг друга. Для целей этой статьи достаточно указывать только расположение «самых правых» корней: тех, которые имеют максимальную R-градуировку. Так возникают *корневые диаграммы*, отличающиеся от корневых портретов двумя особенностями. Корни с меньшими градуировочными значениями, не влияющие на градуировку корневого множества, допустимо обозначать серым сегментом в левой части круга (рис. 2 и 3).

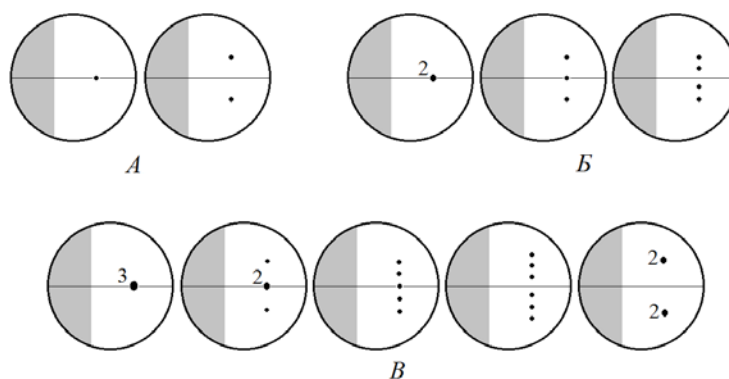


Рис. 2 – Критические корневые диаграммы САУ, имеющих ноль (А), один (Б) и два (В) параметров управления. Кратность корня подписывается рядом с изображающей его точкой. Нахождение корней на одной вертикали указывает на их α -равенство. Расположение прочих корней (помимо α -правых) условно обозначается серым сегментом слева

Fig. 2 – Critical root diagrams for the control system with no (A), one (B) and two (B) controller parameters. Multiplicity of the root is signed close to the depicting it point. The root placement on the same column indicates their α -equality. Location of other roots (besides α -right roots) is designated by gray segment leftward

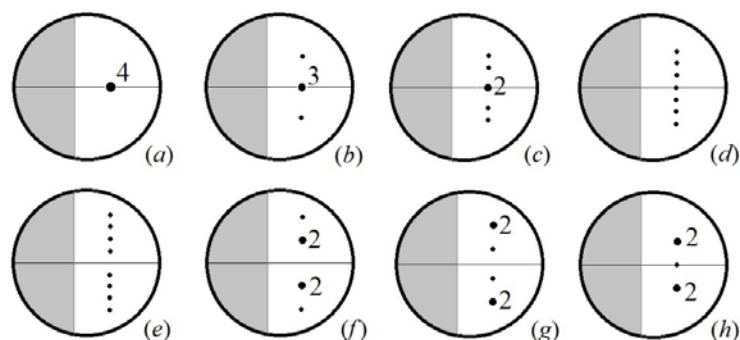


Рис. 3 – Критические корневые диаграммы для трехпараметрической САУ
 Fig. 3 – Critical root diagrams for the three-parameter control system

Второе отличие заключается в том, что корни с одинаковой R -градуировкой изображаются на одной α -вертикали: вертикальной прямой, проходящей через точку $s = \alpha$ на действительной оси. Таким образом, расположение корней на трапециевидной границе самой левой области (см. рис. 1), отвечающее равенству $z_1 = z_2 =_{\alpha} z_{3,4} =_{\alpha} z_{5,6}$, будет представляться корневой диаграммой (с) (см. рис. 3). При этом кратность корня подписывается рядом с точкой, его изображающей.

Поскольку взаимное расположение α -правых корней диаграммой полностью отражается, то составление перечня критических расположений полюсов сводится к перечислению списка критических корневых диаграмм – тех, которые представляют критические расположения полюсов и описываются таким же числом α -равенств, каково число параметров управления.

3. Критические корневые расположения малых порядков

(1) Предположим, что задан многочлен с числовыми коэффициентами, которые не включают свободных параметров. В общем случае на правой границе области расположения корней оказывается либо действительный корень, либо комплексная пара (рис. 2, А); таким образом, для ноль-параметрического многочлена возникает две диаграммы.

(2) Если коэффициенты многочлена зависят от одного свободного параметра, то минимизация R -градуировки может привести к равенству $z_l =_{\alpha} z_m$ для корней z_l, z_m , не образующих сопряженной пары. Это означает наличие на правой границе либо двукратного действительного корня, либо комплексной пары $z_{m-1, m-2}$ с тем же градуировочным значением, что и действительный корень z_m , т. е. $z_{m-1, m-2} =_{\alpha} z_m$, либо, наконец, две комплексных пары с равными градуировочными значениями: $z_{m-3, m-2} =_{\alpha} z_{m-1, m}$ (рис. 2, Б).

Заметим, что две из трех возможностей возникают из ноль-параметрического случая за счет добавления на правую границу простой комплексной пары «извне» (т. е. с большей мнимой частью) – это означает одно α -равенство для полюсов; кроме того, возникает возможность кратного действительного корня.

(3) Для многочлена с зависимостью от двух параметров возможно накладывать два условия, связывающих две степени свободы – например, два α -равенства или условие кратности комплексной пары. В итоге возможно пять критических расположений (рис. 2, В), где справа оказываются:

- (а) трехкратный действительный корень;
- (б) двукратный действительный корень на одной α -вертикали с комплексной парой;
- (с) простой действительный корень и две комплексные пары на одной α -вертикали;
- (д) три комплексные пары на одной α -вертикали;
- (е) двукратная комплексная пара.

Легко видеть, расположения (б)–(д) образуются добавлением «извне» комплексной пары к трем диаграммам примера (2); кроме того, возникает две возможности: трехкратного действительного корня и кратной комплексной пары – максимальных возможных здесь кратностей.

(4) Для многочлена с зависимостью коэффициентов от трех параметров возможно восемь критических многообразий (рис. 3):

- (а) четырехкратный действительный корень;
- (б) трехкратный действительный корень на одной α -вертикали с комплексной парой;

(с) двукратный действительный корень и две комплексные пары на одной α -вертикали;

(d) простой действительный корень и три комплексные пары на одной α -вертикали;

(e) четыре комплексные пары на одной α -вертикали;

(f) двукратная комплексная пара на одной вертикали с однократной, причем кратная пара имеет меньшую мнимую часть;

(g) двукратная комплексная пара на одной вертикали с однократной, причем кратная пара имеет бóльшую мнимую часть;

(h) двукратная комплексная пара на одной вертикали с простым действительным корнем.

Сравнивая рис. 2 и 3, нетрудно видеть, что диаграммы (b)–(f) возникают из диаграмм примера (3) при добавлении «извне» простой комплексной пары.

Диаграммы (g) и (h) возникают из примера (1) в результате добавления двукратной комплексной пары на той же α -вертикали, что и простые корень или пара корней, что также связывает три степени свободы.

Как и выше, к этому добавляется возможность (a) действительного корня максимальной кратности.

Замечание. Из рассмотренных примеров видно, что число $\Phi(n)$ критических диаграмм для многочленов, зависящих от малого числа параметров n , соответствует началу последовательности Фибоначчи: $\Phi(0) = 2 = \varphi_3$, $\Phi(1) = 3 = \varphi_4$, $\Phi(2) = 5 = \varphi_5$, $\Phi(3) = 8 = \varphi_6$.

4. Построение списка критических корневых диаграмм

Рассмотрение п. 3 позволяет указать, как список диаграмм для многочленов, зависящих от n свободных параметров, рекуррентно строится из списков для $k < n$ параметров. Поскольку основание индукции установлено, предположим, что $\Phi(k) = \varphi_{k+3}$.

a) Очевидно, если среди α -правых корней нет комплексных пар, и n степеней свободы связываются действительным корнем, то этот корень должен иметь кратность $n+1$, и такая возможность единственна; отметим, что $\varphi_1 = 1$.

Будем считать, что α -правые корни включают в себя комплексные пары.

б) Пусть наибольшую мнимую часть среди них имеет простая комплексная пара. Устраняя ее, получим корневые диаграммы, описывающиеся на единицу меньшим числом α -равенств. Они оказываются критическими диаграммами многочлена с $n-1$ параметром, и по предположению индукции их φ_{n+2} .

в) Если наибольшую мнимую часть среди α -правых пар имеет двукратная комплексная пара, то ее удаление приведет к критическим корневым диаграммам, задаваемым набором $n-3$ равенств и соответствующим $(n-3)$ -параметрическому многочлену. По предположению их число равно φ_n .

г) Рассматривая случаи комплексных пар нарастающей кратности, будем получать списки критических корневых диаграмм многочленов, зависящих от $n-5$, $n-7$ и т. д. параметров, которых по предположению будет соответственно φ_{n-2} , φ_{n-4} и т. д.

д) Максимальная возможная кратность комплексной пары (в том числе и с наибольшей мнимой частью) равна $[n/2] + 1$. В конце возможны два варианта.

I. Для нечетного числа параметров $n = 2k + 1$ число $n + 3 = 2k + 4$ четно, и отбрасывание комплексных пар нарастающей кратности будет приводить к спискам диаграмм многочленов с четным числом параметров (и нечетным членам последовательности Фибоначчи) и окончится на $\varphi_3 = 2$ диаграммах ноль-параметрического многочлена (пример 1 в п. 2).

По известному тождеству для четных номеров последовательности Фибоначчи [14] получаем $\Phi(n) = \varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5 + \dots + \varphi_n + \varphi_{n+2} = \varphi_{n+3}$.

II. Если число $n = 2k$ четно, то $n + 3$ нечетно, и за счет отбрасывания комплексных пар нарастающей кратности будут возникать списки диаграмм многочленов с четным числом параметров (и нечетным членам последовательности Фибоначчи) вплоть до $\varphi_4 = 3$ диаграмм однопараметрического многочлена (пример 2 в п. 2).

Однако, кроме случая (а) здесь нужно учесть возможность $(k + 1)$ -кратной комплексной пары, обеспечивающей выполнение $n = 2k$ равенств (для нечетного n это не было возможно).

Число $n + 3$ нечетно, и по аналогичному тождеству (с учетом того, что $\varphi_2 = 1$), получим $\Phi(n) = 1 + \varphi_2 + \varphi_4 + \dots + \varphi_n + \varphi_{n+2} = \varphi_{n+3}$.

Таким образом, построен рекуррентный процесс перечисления полного списка критических диаграмм и доказано следующее утверждение.

Теорема. Число критических корневых диаграмм для многочлена, коэффициенты которого зависят от n параметров, равно числу Фибоначчи φ_{n+3} .

Замечание. Обозначив D_k множество критических корневых диаграмм для многочлена, зависящего от k параметров, можно схематически представить процесс построения списка критических диаграмм (рис. 4).



Рис. 4 – Схема построения множества D_n критических корневых диаграмм рекурсией из множеств D_k меньших размерностей. Для нечетного числа n $D^* = D_0$, для четного числа n множество D^* пусто

Fig. 4 – The construction scheme of critical root diagram set D_n with recurrence of sets D_k of lower dimensions. For even number n $D^* = D_0$, for odd number n set D^* is empty

Заключение

Полный список критических корневых диаграмм позволяет в наиболее естественных и практических важных случаях выписывать все соответствующие им корневые многочлены. В [8, 15–17] на примерах САУ порядков 9–11 (в качестве объектов рассматривались многозвенные математические и перевернутые маятники, описываемые системами дифференциальных уравнений 6-го порядка) показано, как использование корневых многочленов приводит к системам алгебраических уравнений, связывающих координаты полюсов и параметры регуляторов. Из этих систем уравнений с помощью пакета Maple удавалось рационально выразить

параметры управления через корневые координаты и установить, реализуется ли такое расположение полюсов в данной САУ, и какое критическое значение целевой R-градуировки при этом достигается.

Таким образом, наличие полного списка диаграмм позволяет алгебраическими методами устанавливать оптимальные по выбранной R-градуировке расположения полюсов САУ и, тем самым, оптимальные значения параметров регулятора.

Остается добавить, что теорема, заключающая п. 4, здесь доказана непосредственно, тогда как в диссертации одного из авторов ее доказательство строилось на анализе кодов критических корневых диаграмм [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory / Ed. by V.D. Blondel, A. Megretski. – Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2004. – 350 p.
2. **Поляк Б.Т.** Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 7–46.
3. **Henrion D.** Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions / D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle // Automatica. – 2003. – Vol. 39, iss. 8. – P. 1479–1485.
4. **Kano M.** The state of the art in chemical process control in Japan: Good practice and questionnaire survey / M. Kano, M. Ogawa // Journal of Process Control. – 2010. – Vol. 20, iss. 9. – P. 969–982.
5. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры / В.А. Бойченко, А.П. Курдюков, В.Н. Тимин, М.М. Чайковский, И.Б. Ядыкин // Управление большими системами. – 2007. – Вып. 19. – С. 23–126.
6. **Воевода А.А.** Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка / А.А. Воевода, А.В. Чехонадских // Автоматика. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 113–123.
7. **Воевода А.А.** Преодоление недифференцируемости при оптимизационном синтезе систем автоматического управления / А.А. Воевода, А.В. Чехонадских // Автоматика. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 11–17.
8. **Воевода А.А.** О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника / А.А. Воевода, А.Н. Корюкин, А.В. Чехонадских // Автоматика. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.
9. **Шубладзе А.М.** Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. I // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 3. – С. 93–105.
10. **Шубладзе А.М.** Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. II // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 8. – С. 67–79.
11. Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД-управлении. Ч. 1 / А.М. Шубладзе, В.Е. Попадько, А.А. Якушева, С.И. Кузнецов // Управление большими системами. – 2008. – Вып. 22. – С. 86–100.
12. Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД-управлении. Ч. 2 / А.М. Шубладзе, В.Е. Попадько, А.А. Якушева, Н.М. Бобриков, С.И. Кузнецов // Управление большими системами. – 2008. – Вып. 23. – С. 39–55.
13. **Чехонадских А.В.** Метрика, градуировка и оптимизация расположения характеристических корней системы автоматического управления // Научный вестник НГТУ. – 2009. – № 1 (34). – С. 165–182.
14. **Воробьев Н.Н.** Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
15. **Koryukin A.N.** Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system / A.N. Koryukin, A.V. Chekhonadskikh // Algebra and Model Theory 8: Collection of papers. – Novosibirsk: NSTU Publ., 2011. – P. 19–39.
16. **Корюкин А.Н.** Предел устойчивости трехмассовой системы с регулятором 3-го порядка. Ч. 1 / А.Н. Корюкин, А.В. Чехонадских // Сборник научных трудов НГТУ. – 2011. – Вып. 4 (66). – С. 3–22.

17. **Корюкин А.Н.** Предел устойчивости трехмассовой системы с регулятором 3-го порядка. Ч. 2 / А.Н. Корюкин, А.В. Чехонадских // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – Вып. 1 (67). – С. 37–56.
18. **Чехонадских А.В.** Алгебраический метод синтеза алгоритмов автоматического управления пониженного порядка: дис. ... д-ра техн. наук / Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 2013. – 341 с.

CONSTRUCTION OF THE CRITICAL LOCATION LIST OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEM POLES

Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

A polynomial approach to the linear control system design involves placing its poles in a given area of the complex plane. Low order controllers prevail in practice though they don't make it possible to specify the location of the poles arbitrarily; their parameters are chosen so that the system poles are placed in the acceptable domain. Then the choice is to be corrected to correspond to some optimality criterion for the pole location. The paper investigates a geometric approach to optimality; we fix some form of the object area which must cover all the system poles, then we seek for such parameter values that approach the leftmost position of the object area in the complex plane. In particular, the search for the leftmost position of the border for various semi-planes enclosing the system poles is equivalent to maximizing the relative stability of the system as a function of the controller parameters. Critical locations of the poles are characterized by the presence of the largest number of real poles on the right boundary (i.e. the highest multiplicity) and complex pairs. In the article such critical locations are represented by critical root diagrams. We specify a recursive procedure for constructing a complete list of such diagrams for different object areas and an arbitrary number of controller parameters. The number of different root diagrams depends on the controller parameter number by Fibonacci law. As the authors have shown in their previous papers, the technique of the root polynomials makes it possible to find out in an algebraic way whether each critical diagram is implemented in a particular control system and whether the extreme position of the object area is achieved in it. The problem of this approach completeness is solved in the present paper.

Key words: control system, low order controller, optimal pole location, objective function, critical manifold, root diagrams, recurrent enumeration, Fibonacci numbers.

REFERENCES

1. Blondel V.D., Megretski A., eds. *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Princeton, Oxford, Princeton University Press, 2004. 350 p.
2. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Trudnye zadachi lineinoi teorii upravleniya. Nekotorye podkhody k ikh resheniyu [Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Solution]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 5, pp. 681-718. doi: 10.1007/s10513-005-0115-0. Translated from *Avtomatika i telemekhanika*, 2005, no. 5, pp. 7-46.
3. Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D. Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions. *Automatica*, 2003, vol. 39, iss. 8, pp. 1479-1485.
4. Kano M., Ogawa M. The state of the art in chemical process control in Japan: Good practice and questionnaire survey. *Journal of Process Control*, 2010, vol. 20, iss. 9, pp. 969-982.
5. Boichenko V.A., Kurdyukov A.P., Timin V.N., Chaikovskii M.M., Yadykin I.B. Nekotorye metody sinteza regulyatorov ponizhennogo poryadka i zadannoi struktury [Some design methods of low order and fixed structure controllers]. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large system control*, 2007, iss. 19, pp. 23-126.
6. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Optimizatsiya raspolozheniya polyusov sistemy avtomaticheskogo upravleniya s regulyatorom ponizhennogo poryadka [Optimization of the pole location of automatic control systems with a reduced-order controller]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2009, vol. 45, iss. 5, pp. 472-480. doi: 10.3103/S875669900905015X. Translated from *Avtometriya*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 113-123.

7. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Preodolenie nedifferentsiruemosti pri optimizatsionnom sinteze sistem avtomaticheskogo upravleniya [Overcoming nondifferentiability in optimization synthesis of automatic control systems]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2010, vol. 46, iss. 5, pp. 408-413. doi: 10.3103/S8756699011050025. Translated from *Avtometriya*, 2009, vol. 46, no. 5, pp. 11-17.
8. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. O ponizhenii poryadka stabiliziruyushchego upravleniya na primere dvojnogo perevernutogo mayatnika [Reducing the stabilizing control order for a double inverted pendulum]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, vol. 48, iss. 6, pp. 593-604. doi: 10.3103/S8756699012060076. Translated from *Avtometriya*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 69-83.
9. Shubladze A.M. Dostatochnye usloviya ekstremuma v sistemakh maksimal'noi stepeni ustoichivosti. I [Sufficient Conditions of Extrema in Systems with Maximum Degree of Stability. I]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 3, pp. 403-412. Translated from *Avtomatika i telemekhanika*, 1997, no. 3, pp. 93-105.
10. Shubladze A.M. Dostatochnye usloviia ekstremuma v sistemakh maksimal'noi stepeni ustoichivosti. II [Sufficient Conditions of Extrema in Systems with Maximum Degree of Stability. II]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 8, pp. 1303-1313. Translated from *Avtomatika i telemekhanika*. 1997, no. 8, pp. 67-79.
11. Shubladze A.M., Popad'ko V.E., Yakusheva A.A., Kuznetsov S.I. Issledovanie optimal'nykh po stepeni ustoichivosti reshenii pri PID-upravlenii. Ch.1 [Analysis of the Stability Degree Optimal Solutions under PID Control. Pt. 1]. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large system control*, 2008, iss. 22, pp. 86-100.
12. Shubladze A.M., Popad'ko V.E., Yakusheva A.A., Bobrikov N.M., Kuznetsov S.I. Issledovanie optimal'nykh po stepeni ustoichivosti reshenii pri PID-upravlenii. Ch. 2 [Analysis of the Stability Degree Optimal Solutions under PID Control. Pt. 2]. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large system control*, 2008, iss. 23, pp. 39-55.
13. Chekhonadskikh A.V. Metrika, graduirovka i optimizatsiya raspolozheniya kharakteristicheskikh kornei sistemy avtomaticheskogo upravleniya [On metrics, graduation and optimization of root location for automatic control system]. *Nauchnyi vestnik NGTU – Science Bulletin of the Novosibirsk State Technical University*, 2009, no. 1 (34), pp. 165-182.
14. Vorob'ev N.N. Chisla Fibonachchi [Fibonacci numbers]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 144 p.
15. Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system. *Algebra and Model Theory* 8. Novosibirsk, NSTU Publ., 2011, pp.19-39.
16. Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Predel ustoichivosti trekhmassovoi sistemy s regulyatorom 3-go poryadka. Ch. 1 [Stability limit of a 3-mass system with the controller of the 3rd order. Pt. 1]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU – Transaction of Scientific Papers of Novosibirsk State Technical University*, 2011, iss. 4 (66), pp. 3-22.
17. Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Predel ustoichivosti trekhmassovoi sistemy s regulyatorom 3-go poriadka. Ch. 2 [Stability limit of a 3-mass system with the controller of the 3rd order. Pt. 2]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU – Transaction of Scientific Papers of Novosibirsk State Technical University*, 2012, iss. 1 (67), pp. 37-56.
18. Chekhonadskikh A.V. Algebraicheskij metod sinteza algoritmov avtomaticheskogo upravleniya ponizhennogo porjadka. Diss. dokt. tekhn. nauk [Algebraic method of algorithm design of low order control system. Dr. eng. sci. diss.] Novosibirsk, 2013. 341 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Воевода Александр Александрович – родился в 1943 году, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры автоматизации НГТУ. Область научных интересов: теория автоматического управления, идентификация сложных систем, сети Петри. Опубликовано более 300 научных работ. (630073, Россия, Новосибирск, Немировича-Данченко, 136. Email: voevoda@ucit.ru).

Voevoda Alexander Alexandrovich (b. 1943) – D.Sc. (Eng.), professor, professor of the automation department, NSTU. His research interests are currently

focused on the control theory, identification of complex systems, and Petri nets. He is author of over 300 scientific papers. (Address: 136, Nemirovich-Danchenko, Novosibirsk, 630073, Russia. Email: voevoda@ucit.ru).



Чехонадских Александр Васильевич – родился в 1959 году, д-р техн. наук, доцент, заведующий кафедрой инженерной математики НГТУ. Область научных интересов: теория автоматического управления, теория графов. Опубликовано более 60 научных работ. (630073, Россия, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20/8. Email: alchekh@ngs.ru).

Chekhonadskikh Alexander Vasil'evich (b. 1959) – D.Sc.(Eng.), professor, head of engineering mathematics department, NSTU. His research interests are currently focused on control theory and graph theory. He is author of 65 scientific papers. (Address: 20/8, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russia. Email: alchekh@ngs.ru).

*Статья поступила 30 июня 2014 г.
Received June 30, 2014*

To Reference:

Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Postroenie spiska kriticheskikh raspolozhenii poliustov sistem avtomaticheskogo upravleniia [Construction of the critical location list of automatic control system poles]. *Doklady Akademii Nauk Vyssei Shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2014, no. 2-3 (23-24), pp. 7-18.