ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2014 апрель–сентябрь № 2–3 (23–24)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 512.62

О ГРУППЕ ГАЛУА ПОЛЯ, ПОРОЖДАЕМОГО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ЭЛЕМЕНТОВ

К.Н. Пономарёв
Новосибирский государственный технический университет

Статья относится к теории полей. Она посвящена изучению взаимосвязи свойств бесконечных расширений Галуа и отвечающим этим расширениям проконечных групп Галуа. Общие взаимосвязи установлены в самой теории Галуа. Например, по теореме о примитивном элементе любое конечное расширение Галуа порождается некоторым одним элементом. Поэтому для конечных расширений полей нет связи между наименьшим числом порождающих элементов и величиной группы Галуа. Однако для бесконечных расширений полей неизвестна зависимость между количеством порождающих элементов расширения полей и величиной соответствующей этому расширению группы Галуа. По-видимому, наименьшее количество порождающих элементов расширения Галуа находит выражение в локальном весе топологии группы Галуа. Рассматриваем наименьшую бесконечную мощность порождающих элементов, ограничиваемся изучением счетно порожденных расширений полей. В подтверждение предположения устанавливаем, что счетно порожденному расширению полей отвечает свойство счетности локального веса топологии группы Галуа.

Ключевые слова: расширение полей, группа Галуа, проконечная группа, счетность топологии.

Введение

Статья относится к теории полей. Она посвящена изучению взаимосвязи свойств расширений полей и отвечающим этим расширениям групп Галуа. Такие взаимосвязи установлены в самой теории Галуа. Мы изучаем свойство счетной порожденности расширения полей. Устанавливаем, что ему отвечает свойство локальной счетности топологии группы Галуа.

В теории Галуа установлено, что любому (возможно, бесконечному) нормальному расширению полей L/K отвечает группа Галуа $G = Gal(L/K)$. В случае бесконечного расширения полей такая группа является топологической проконечной группой, топология проконечной группы определяется некоторой фундаментальной системой окрестностей единицы этой группы.

Счетно порожденные поля

Замечание

Заметим, что фундаментальная счетная система окрестностей точки топологического пространства $U_i, i \in \mathbb{N}$ эквивалентна фундаментальной счетной системе убывающих окрестностей этой точки, системе: $U_1, U_1 \cap U_2, U_1 \cap U_2 \cap U_3, \ldots$

В самом деле, любая окрестность U_i содержит пересечение $U_1 \cap \ldots \cap U_i$. Наоборот, фундаментальная система является направленной, поэтому для любого такого пересечения $U_1 \cap \ldots \cap U_i$ найдется такая окрестность U_j, которая содержится во всех множествах $U_1, \ldots, U_i$. Поэтому $U_1 \cap \ldots \cap U_i \supseteq U_j$. Это поясняет замечание.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект № 1052.

Лемма

Если бесконечная проконечная группа G обладает счетной фундаментальной системой окрестностей единицы, то она обладает такой системой из убывающих нормальных делителей группы G.

В самом деле, нормальные делители бесконечной проконечной группы образуют фундаментальную систему окрестностей единицы (см. [1] предложение 1.14). Поэтому, если в бесконечной проконечной группе G найдется какая-то счетная система фундаментальных окрестностей единицы, то по замечанию ее можно предполагать убывающей. Тогда в группе G найдется такая система, образованная некоторой убывающей цепью нормальных подгрупп конечного индекса $\{N_i \mid i \in \mathbb{N} \quad N_{i+1} \subseteq N_i$. Это нормальные делители, которые содержатся в исходной фундаментальной системе. Лемма доказана.

Теорема

Рассмотрим бесконечное расширение Галуа полей L/K и его бесконечную проконечную группу Галуа G. Тогда группа G обладает счетной фундаментальной системой окрестностей единицы тогда и только тогда, когда поле L порождается над полем K счетной последовательностью элементов: $L = K(l_1, l_2, \ldots)$.

В самом деле, по лемме условие на группу G равносильно наличию в группе убывающей счетной цепи нормальных делителей: $G = N_1 > N_2 > \ldots$. По соответствию Галуа расширение L/K получается объединением башни конечных расширений Галуа: $K = L^G = L^{N_1} \subseteq \ldots$. По теореме о примитивном элементе (см. [2]–[4]) для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $a_i \in L$ для которого $L^{N_i} = K(a_i)$. Отсюда следует достаточность.

Проверим необходимость. Пусть $L = K(a_1, a_2, \ldots)$. Для каждого натурального $i \in \mathbb{N}$ обозначим L_i – нормальное замыкание поля $K(a_1, \ldots, a_i)$ в поле L. По соответствию Галуа каждое такое поле отвечает некоторому нормальному делителю группы G. Эта система определяет счетную фундаментальную систему окрестностей единицы группы G (см. [1] предложение 2.3). **Теорема доказана.**

Условие счетности фундаментальной системы окрестностей единицы группы означает, что локальная топология этой группы счетного веса.

Заключение

Укажем в заключение, что данный результат позволит в дальнейшем применить его к изучению мультипликативных групп полей (см. [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кох Г.** Теория Галуа *p*-расширений. – М.: Мир, 1973. – 195 с.
2. **Зарисский О., Самюэль П.** Коммутативная алгебра. Т. 2. – М.: Изд-во ИЛ, 1963. – 438 с.
3. **Ленг С.** Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
4. **Варден Б.Л. ван-дер.** Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 624 с.
5. **Пономарёв К.Н.** Жесткие алгебры с делением // Алгебра и логика. – 2013. – Т. 52, № 6. – С. 712–730.

ON GALOIS GROUP OF FIELD, GENERATED BY A COUNTABLE SET OF ELEMENTS

Ponomarev K.N.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

The paper is concerned with the field theory. It is devoted to the investigation of interrelations between infinite Galois extensions and corresponding profinite Galois groups. General relations have been stated in the Galois theory. For instance, by using the primitive element theorem any finite Galois extension of fields is generated by one element. So for finite extensions of fields there is no relation between the least number of generating elements of the field extension and its Galois group. However, for infinite field extensions the relation between the number of generations of field extension and the size of the Galois group is unknown. It is supposed that a minimal number of generations is related to the local weight of its Galois group. The minimal power of generating elements is studied, with emphasis being placed on a countable number of generated extensions of fields. We prove that a normal extension of fields generated by a countable set of elements is related to the countable topology of the profinite Galois group of this extension.

Key words: extension of fields, Galois group, profinite group, countable topology.

REFERENCES

1. Koch H. *Galoissche theorie der p-erweiterungen*. Berlin, Verlag der Wissenshaften, 1970. 161 p. (Russ. ed.: Kokh G. *Teoriya Galua p-rasshirenii*. Moscow, Mir Publ., 1973. 195 p.).
2. Zariski O., Samuel P. *Commutative algebra*. Vol. 2. Princeton, New York, D. Van Nostrand Co., 1960. 414 p. (Russ. ed.: Zarisckii O., Samyuel' P. *Kommutativnaya algebra*. T. 2. Moscow, IL Publ., 1963. 438 p.).
3. Lang S. *Algebra*. New York, Addison-Wesley Publ. Co., 1965. 508 p. (Russ. ed.: Leng S. *Algebra*. Moscow, Mir Publ., 1968. 564 p.).
4. Van Der Waerden B.L. *Algebra*. New York, Berlin, Springer-Verlag, 1967. (Russ. ed.: Varden B.L. van-der. *Algebra*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 624 p.).
5. Ponomarev K.N. Zhestkie algebry s deleniem [Rigid division algebras]. *Algebra i logika – Algebra and Logic*, 2014, vol. 52, iss. 6, pp. 471-483. doi: 10.1007/s10469-014-9261-1. *Translated from Algebra i logika*, 2013, vol. 52, no. 6, pp. 712-730.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Пономарев Константин Николаевич – родился в 1958 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры алгебры и математической логики, НГТУ. Область научных интересов: алгебра. Опубликовано 63 научные работы. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: algebra@nstu.ru).

Ponomarev Konstantin Nikolaevich (b. 1958) – PhD, professor, professor algebra & math.logic department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on algebra. He is author of 63 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russia. Email: algebra@nstu.ru).

Статья поступила 29 июня 2014 г.
Received June 29, 2014

To Reference:

Ponomarev K.N. O gruppe Galua polya, porozhdaemogo schetnym chislom elementov [On galois group of field, generated by a countable set of elements]. *Doklady Akademii Nauk Vysshei Shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2014, no. 2-3 (23-24), pp. 31-33.