ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2014 апрель–сентябрь № 2–3 (23–24)
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 621.396

# ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗЛИЧЕНИЯ СИСТЕМЫ СИГНАЛОВ С ВЫРОЖДЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЕЙ

**Ю.С. Радченко, М.С. Кондаков**
*Воронежский государственный университет*

В статье рассматривается задача различения неортогональных сигналов с многопозиционной фазовой и амплитудно-фазовой модуляцией на фоне гауссовских помех. В качестве решающего правила выбран критерий максимального правдоподобия. При теоретическом анализе вероятностей ошибок решающего правила возникают многомерные нормальные интегралы с вырожденной корреляционной матрицей. Поскольку вычисление таких интегралов не разработано, на практике применяются или оценки вероятности ошибок в виде границ сверху, или эвристические приемы для некоторых частных случаев. Применение метода Монте-Карло для нахождения вероятностей ошибок в этом случае является нетривиальной задачей, поскольку формирование многомерных нормальных векторов, использующее разложение Холецкого вырожденной корреляционной матрицы, невозможно. В данной работе предложен способ вычисления многомерных нормальных интегралов с вырожденной корреляционной матрицей. Расчеты основаны на методе возмущения корреляционной матрицы системы сигналов и интегрировании обобщенных функций. Эта процедура может производиться путем возмущения собственных значений корреляционной матрицы или путем возмущения созвездия сигналов. Метод возмущений вырожденной корреляционной матрицы позволяет вычислять многократные нормальные интегралы любой кратности. Результатом расчетов могут быть как точные аналитические формулы, так и первые приближения быстро сходящихся рядов. В качестве примера для систем с 2- и 4-позиционной фазовой модуляцией получены точные аналитические выражения для вероятностей ошибок, совпадающие с выражениями, полученными другими методами.

*Ключевые слова*: многомерный нормальный интеграл, вырожденная корреляционная матрица, многопозиционная фазовая модуляция, вероятности ошибок, метод возмущений.

## Введение

Современные телекоммуникационные системы для увеличения скорости передачи информации широко используют сигналы с многопозиционной фазовой и амплитудно-фазовой модуляцией. Исследование помехоустойчивости таких систем представляет собой важную задачу. Однако при теоретическом анализе вероятностей ошибок возникают многомерные нормальные интегралы (МНИ) с вырожденной корреляционной матрицей. Поскольку вычисление таких МНИ не разработано, на практике применяются или оценки вероятности ошибок в виде границ сверху [1, 2], или эвристические приемы для некоторых частных случаев (например, анализ ошибок для ФМ-2, ФМ-4). Применение метода Монте-Карло для нахождения вероятностей ошибок также становится нетривиальной задачей. Это связано с тем, что формирование многомерных нормальных векторов, использующее разложение Холецкого вырожденной корреляционной матрицы, невозможно [3].

Таким образом, становится необходимой разработка способа точного вычисления МНИ с вырожденной корреляционной матрицей. В данной работе предложен аналитический метод вычисления МНИ с вырожденной корреляционной матрицей. На примере ФМ-2, ФМ-4 показаны возможности этого метода, установлено совпадение вычисленных вероятностей ошибок с полученными другим путем. Указаны способы вычисления МНИ при использовании многопозиционной модуляции любой кратности.

**1. Постановка задачи**

Пусть в течение интервала времени $[0, T]$ наблюдается смесь $\xi(t) = s_i(t) + \eta(t)$ одного из $M$ возможных сигналов $s_i(t)$ и белого гауссовского шума $\eta(t)$ со спектральной плотностью $N_0/2$.

Здесь $s_i(t) = A_i f(t)\cos\left(\omega_0 t + \psi_i\right)$, $i = 1...M$, – детерминированный сигнал с известными параметрами и законом амплитудно-фазовой модуляции. Энергии сигналов $E_i = \int_0^T s_i^2(t)dt$. Логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП) для сигнала $s_i(t)$ может быть записан как

$$L_i = (1/N_0)\left[2\int_0^T \xi(t)s_i(t)dt - E_i\right]. \quad (1)$$

Оптимальным является байесовское правило принятия решения [4]. При некоторых предположениях относительно априорных вероятностей присутствия сигналов и вида матрицы потерь байесовское правило преобразуется в алгоритмы максимума апостериорной вероятности и максимального правдоподобия. В [4] доказано, что при увеличении отношения сигнал/шум $2E_i/N_0 \to \infty$ асимптотически байесовским является алгоритм максимального правдоподобия, инвариантный к априорным распределениям и виду матрицы потерь.

Согласно этому алгоритму при различении сигналов выносится решение в пользу сигнала $s_j(t)$, если выполняется условие $L_j > L_i$, $i = 1...M$, $i \neq j$. При наличии на входе *i*-го приемного устройства сигнала $s_j(t)$

$$L_i(s_j) = (2/N_0)\int_0^T \left(s_j(t) + \eta(t)\right)s_i(t)dt - E_i/N_0 = q_i q_j R_{ji} + q_i n_i - 0{,}5q_i^2 .$$

Здесь $q_i^2 = 2E_i/N_0$ – энергетическое отношение сигнал/шум для сигнала $s_i(t)$, $R_{j,i} = \left(\int_0^T s_j(t)s_i(t)dt\right)\Big/\sqrt{E_i E_j}$ – элементы нормированной корреляционной матрицы системы сигналов, $R_{ii} = 1$, $n_i = \sqrt{2/E_i N_0}\int_0^T \eta(t)s_i(t)dt$ – гауссовская случайная величина с нулевым средним, единичной дисперсией $D(n_i) = 1$. Гауссовский вектор $N_i = q_i n_i$, $i = 1...M$, имеет элементы корреляционной матрицы $< N_j N_i >= q_j q_i R_{ji}$. В дальнейшем будем оперировать со случайными величинами

$$L(i \mid j) = q_i q_j R_{ji} - 0{,}5q_i^2 + N_i = m_i^{(j)} + N_i .$$

Тогда решение в пользу сигнала $s_j(t)$ по критерию максимального правдоподобия записывается в виде

$$L(j\,|\,j) > L(i\,|\,j)\,,\ i = 1..M\,,\ i \neq j\,.$$

Условная вероятность правильного решения записывается как

$$P_{jj} = P\left[L(j\mid j) > L(i\mid j)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_j \int\limits_{-\infty}^{z_j} .. \int\limits_{-\infty}^{z_j} W\left(z_1,..z_M\right) \prod_{\substack{i=1..M \\ i\neq j}} dz_i\,. \tag{2}$$

С учетом статистических свойств случайных величин $L(i\,|\,j)$ получаем их распределение в виде многомерной нормальной плотности вероятности

$$W(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det(\mathbf{K})}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{z}-\mathbf{m}^{(j)})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{m}^{(j)})}{2}\right\}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{z} = (z_1..z_M)^T$ – вектор–столбец аргументов плотности вероятности, $\mathbf{m}^{(j)} = \left[q_j q_i R_{ji} - 0.5q_i^2\right]$, $i = 1...M$, – вектор-столбец условных математических ожиданий статистик $L(i\,|\,j)$, $\mathbf{K} = \left[q_k q_i R_{ki}\right]$, $k, i = 1...M$, – корреляционная матрица случайного вектора $\mathbf{N} = \left[N_i\right]$.

Средняя вероятность ошибочных решений

$$P_e = 1 - \sum_{j=1}^{M} p_j P_{jj}\,, \tag{4}$$

где $p_j$ – вероятность наличия сигнала $s_j(t)$. Выражения (2), (3), (4) справедливы для любой системы сигналов с амплитудно-фазовой манипуляцией. Для систем связи обычно выполняется условие $p_j = p = 1/M$. Кроме того для системы сигналов с эквидистантной фазовой манипуляцией $\psi_i = 2\pi(i-1)/M$, $A_i = A$ имеют место соотношения $E_i = E,\ \ q_i = q$ и $P_{jj} = P(q)$ не зависят от номера сигнала.

Для любого созвездия сигналов, задаваемого координатами $(A_i,\, \psi_i)$, $i = 1...M$, или на плоскости $(I,\, Q)$ $\left(I_i = A_i\cos(\psi_i), Q_i = A_i\sin(\psi_i)\right)$, нетрудно убедиться прямым расчетом, что $\det(\mathbf{K}) = 0$. Это является следствием того факта, что любой вектор $(A_i,\, \psi_i)$ может быть представлен комбинацией двух ортогональных векторов, т. е. элементы строки (столбца) матрицы $\mathbf{K}$ являются комбинацией других элементов. Следовательно, прямой расчет интегралов вида (2) с плотностью вероятности (3) невозможен.

### 2. Принцип метода возмущений для расчета МНИ

Вырожденная корреляционная матрица $\mathbf{K}$ для любого созвездия сигналов с амплитудно-фазовой манипуляцией имеет только два ненулевых собственных значения $\lambda_1, \lambda_2$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = \sum\limits_{i=1}^{M} q_i^2$. (Для ФМ-2 только $\lambda_1$). Если созвездия сигналов с фазовой или амплитудно-фазовой манипуляцией имеют эквидистантную по углу $\psi_i = 2\pi(i-1)/M$ геометрию, то $\lambda_1 = \lambda_2$. Соответственно, для $M$-кратной ФМ $\lambda_1 = \lambda_2 = Mq^2/2$, для квадратурной амплитудно-фазовой манипуляции (КАМ) величины $\lambda_1, \lambda_2$ зависят от геометрии созвездия сигналов. Например, для КАМ-8 с квадратурными координатами сигналов $(I,Q) = \{(1,0), (1,1), (0,1), (1,1),$ $(-1,0), (-1,-1), (0,-1), (1,-1)\}$ значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 6q_1^2$. Для данной геометрии созвездия $q_1^2 = q_3^2 = q_5^2 = q_7^2$, $q_2^2 = q_4^2 = q_6^2 = q_8^2 = 2q_1^2$.

При ортогональном разложении матрицы $\mathbf{K} = \mathbf{T}\Lambda\mathbf{T}^T$, где $\mathbf{T}$-ортогональная матрица, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $i = 1...M$ – диагональная матрица из собственных значений, квадратичная форма в плотности вероятностей (3) преобразуется к виду

$$(\mathbf{z}-\mathbf{m})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{m}) = (\mathbf{T}(\mathbf{z}-\mathbf{m}))^T \Lambda^{-1}(\mathbf{T}(\mathbf{z}-\mathbf{m})) =$$

$$= \mathbf{Y}^T \Lambda^{-1}\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{-1} y_i^2. \tag{5}$$

Как следует из (5), преобразованные статистики $U_i^{(j)} = \sum_{k=1}^{M} T_{ik} L(k \mid j)$ являются независимыми гауссовскими случайными величинами. При этом только две случайные величины $U_1, U_2$, соответствующие $\lambda_1, \lambda_2$, имеют невырожденное гауссовское распределение. Однако в (5), как и в исходной плотности вероятности (3), проблема нулевых собственных значений и бесконечных подынтегральных функций в (2) остается.

Метод расчета многомерных нормальных интегралов базируется на возмущении матрицы $\mathbf{K} \to \mathbf{K}_d$ или $\Lambda \to \Lambda_d$ таким образом, чтобы $\det(\mathbf{K}_d) \neq 0$ или $\det(\Lambda_d) \neq 0$. Затем эти возмущения устремляются к нулю таким образом, чтобы в совместной плотности вероятности статистик $L(i \mid j)$ или $U_j^{(j)}$ присутствовали две невырожденные одномерные гауссовские плотности вероятности и $\delta$-образные компоненты. Универсальным является возмущение вида $\Lambda_d = \Lambda + \varepsilon\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\varepsilon \to 0$ определяет возмущение. Технической трудностью при таком подходе является необходимость вычисления многократных интегралов от $\delta$-функций со сложными аргументами по многомерным областям. Другим вариантом является возмущение созвездия сигналов, приводящее матрицу $\mathbf{K}_d$ к распределениям необходимого вида. При этом области интегрирования не меняются. Однако обращение блочной матрицы $\mathbf{K}_d$ большой размерности становится трудоемким. Общим для обоих подходов к возмущению матриц является необходимость корректных вычислений интегралов от $\delta$-функций.

### 3. Применение метода возмущения корреляционной матрицы

Рассмотрим вычисление интегралов вида (2) на основе возмущения созвездия сигналов. В качестве примера вычислим вероятности $P_e$ для ФМ-2, ФМ-4, поскольку для них имеются аналитические выражения, полученные на основе иных подходов. Для упрощения вычислений перейдем к статистикам $\left(L(i \mid j) + 0,5q^2\right)/q = qR_{ji} + n_i$. Здесь учтено, что $q_i = q$ – не зависит от $j$.

Сначала получим вероятность $P_{11}$ для системы сигналов ФМ-2. Для этого рассмотрим возмущенную систему сигналов с фазами: $\psi_1(t)=0$, $\psi_2(t)=\pi+\varepsilon$. Тогда $R_{11}=R_{22}=1$, $R_{12}=R_{21}=\cos(\pi+\varepsilon)=-\cos(\varepsilon)\equiv\rho$. То есть возмущенная корреляционная матрица становится невырожденной. Здесь $\varepsilon\to 0$ – возмущение фазового угла сигнала $s_2(t)$. При $\varepsilon\to 0$ величина $\rho\to -1$.

Двумерную плотность вероятности для расчета МНИ перепишем в виде

$$W(z_1,z_2)=\frac{\exp\left\{-\dfrac{\left[(z_1-m_1)^2-2\rho(z_1-m_1)(z_2-m_2)+(z_2-m_2)\right]}{2(1-\rho^2)}\right\}}{\sqrt{(2\pi)^2(1-\rho^2)}}=$$

$$=W(z_1)W(z_2\,|z_1)=\frac{\exp\left\{-\dfrac{(z_1-m_1)^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\exp\left\{-(z_2-m_2-\dfrac{\rho(z_1-m_1)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}.$$

Здесь $m_1=q$, $m_2=-q\cos(\varepsilon)=q\cdot\rho$. Выражение для условной плотности вероятности $W(z_2\,|z_1)$ при $\rho\to -1$ сходится к $\delta$-функции $\lim\limits_{\rho\to -1}W(z_2\,|z_1)=\delta(z_2+z_1)$. Учтем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{z_1}\delta(z_2+z_1)\,dz_2=U_0(z_1)==\begin{cases}0, & z_1<0,\\ 0{,}5, & z_1=0,\\ 1, & z_1>0.\end{cases}\qquad(6)$$

Тогда

$$P_{11}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(z_1)dz_1\int\limits_{-\infty}^{z_1}W(z_2\,|z_1)dz_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(z_1-q)^2}{2}\right)U_0(z_1)dz_1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{+0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(z_1-q)^2}{2}\right)dz_1=\Phi(q).\qquad(7)$$

Здесь $\Phi(x)=\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int\limits_{-\infty}^{x}\exp(-t^2/2)\,dt$ – интеграл вероятности [5]. Выражение (7) совпадает с известным выражением для правильного различения двух противоположных сигналов [2, 5]. Соответственно $P_e=1-\Phi(q)$.

Выполним теперь расчеты для ФМ-4 на основе аналогичного подхода. Исходная система сигналов имеет фазовые углы $\psi_i(t)=2\pi(i-1)/M$, $i=1...M$. Разобьем созвездие сигналов на две группы сигналов

$$\mathbf{S}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{S}^{(1)}(t)\\ \mathbf{S}^{(2)}(t)\end{bmatrix},\ \mathbf{S}^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}s_1^{(1)}(t)\\ s_2^{(1)}(t)\end{bmatrix},\ \mathbf{S}^{(2)}(t)=\begin{bmatrix}s_1^{(2)}(t)\\ s_2^{(2)}(t)\end{bmatrix}.$$

Здесь $s_1^{(1)}(t)=s_1(t)$, $s_2^{(1)}(t)=s_2(t)$, $s_1^{(2)}(t)=s_3(t)$, $s_2^{(2)}(t)=s_4(t)$. Верхний индекс относится к номеру группы, нижний индекс к номеру сигнала в группе. Соответственно шумовой вектор также можно разбить на блоки

$$\mathbf{n}=\begin{bmatrix}\mathbf{n}^{(1)}\\ \mathbf{n}^{(2)}\end{bmatrix},\ \mathbf{n}^{(1)}=\begin{bmatrix}n_1^{(1)}\\ n_2^{(1)}\end{bmatrix},\ \mathbf{n}^{(2)}=\begin{bmatrix}n_1^{(2)}\\ n_2^{(2)}\end{bmatrix}. \qquad (4)$$

В (8) $n_k^{(\nu)}=\sqrt{2/EN_0}\int_0^T \eta(t)s_k^{(\nu)}(t)dt$, $\nu=1,2,$ – номер группы, $k=1,2,$ – номер сигнала в группе. Корреляционная матрица блочного вектора $\mathbf{n}$ имеет вид

$$\mathbf{K}=\left\langle \mathbf{nn}^T\right\rangle=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12}\\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22}\end{bmatrix},$$

где

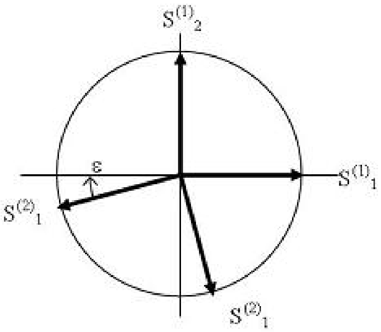
$$\mathbf{K}_{11}=\left\langle \mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(1)T}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}n_1^{(1)}n_1^{(1)} & n_1^{(1)}n_2^{(1)}\\ n_2^{(1)}n_1^{(1)} & n_2^{(1)}n_2^{(1)}\end{bmatrix}\right\rangle,$$

$$\mathbf{K}_{12}=\left\langle \mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)T}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}n_1^{(1)}n_1^{(2)} & n_1^{(1)}n_2^{(2)}\\ n_2^{(1)}n_1^{(2)} & n_2^{(1)}n_2^{(2)}\end{bmatrix}\right\rangle, \qquad \mathbf{K}_{21}=\mathbf{K}_{12},$$

$$\mathbf{K}_{22}=\left\langle \mathbf{n}^{(2)}\mathbf{n}^{(2)T}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}n_1^{(2)}n_1^{(2)} & n_1^{(2)}n_2^{(2)}\\ n_2^{(2)}n_1^{(2)} & n_2^{(2)}n_2^{(2)}\end{bmatrix}\right\rangle.$$

Совместная плотность вероятности блочного вектора $\mathbf{n}$ имеет вид

$$W(\mathbf{Z}^{(1)},\mathbf{Z}^{(2)})=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{Z}^{(1)T}\mathbf{Z}^{(2)T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12}\\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{Z}^{(1)}\\ \mathbf{Z}^{(2)}\end{bmatrix}\right\}}{\sqrt{(2\pi)^{2\nu}\det\mathbf{K}}}. \qquad (5)$$




Структура возмущенного созвездия
Perturbed constellation structure

Здесь $\mathbf{Z}^{(1)}$, $\mathbf{Z}^{(2)}$ – векторные аргументы, относящиеся к распределению векторов $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$. Внесем фазовое возмущение в систему сигналов $\mathbf{S}^{(2)}$, аналогично случаю ФМ-2: $\psi_1^{(2)}=\psi_3+\varepsilon,$ $\psi_2^{(2)}=\psi_4+\varepsilon$. Обозначим $\rho=-\cos(\varepsilon)$, $\gamma=\sin(\varepsilon)$. Структура возмущенного созвездия приведена на рисунке.

Тогда возмущенные блоки матрицы $\mathbf{K}_d$

$$\mathbf{K}_{11}=\mathbf{K}_{22}=\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{12}=\mathbf{K}_{21}=\begin{bmatrix}\rho & -\gamma\\ \gamma & \rho\end{bmatrix}=\rho\begin{bmatrix}1 & -\gamma/\rho\\ \gamma/\rho & 1\end{bmatrix}.$$

При $\varepsilon \to 0$ $\gamma \approx \varepsilon \to 0$. Соответственно матрицы $\mathbf{K}_{12}$, $\mathbf{K}_{21}$ сходятся к единичным матрицам размером 2×2. Для расчетов будем считать $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21} = \rho\mathbf{I}$, перейдя в окончательном выражении к значению $\rho = 1$. С учетом вышесказанного и правилами обращения блочных матриц можно записать:

$$\mathbf{K}_d^{-1} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11} = \left[\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}\right]^{-1} \to \frac{1}{(1-\rho^2)}\mathbf{I},$$

$$\mathbf{B}_{22} = \left[\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12}\right]^{-1} \to \frac{1}{(1-\rho^2)}\mathbf{I},$$

$$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12}\left[\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{22}\right]^{-1} \to -\frac{\rho}{(1-\rho^2)}\mathbf{I},$$

$$\mathbf{B}_{21} = \left[\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{22}\right]^{-1}\mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{11}^{-1} \to -\frac{\rho}{(1-\rho^2)}\mathbf{I}.$$

Многомерную плотность (9) с учетом асимптотики обратной корреляционной матрицы $\mathbf{B}$ можно записать следующим образом:

$$W(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\mathbf{Z}^{(1)T}\mathbf{Z}^{(1)} - 2\rho\mathbf{Z}^{(1)^T}\mathbf{Z}^{(2)} + \mathbf{Z}^{(2)T}\mathbf{Z}^{(2)}\right]\right\}}{\sqrt{(2\pi)^4(1-\rho^2)^2}}. \quad (10)$$

Учитывая, что $W(\mathbf{Z}^{(2)} \big| \mathbf{Z}^{(1)}) = W(\mathbf{Z}^{(2)},\ \mathbf{Z}^{(1)}) / W(\mathbf{Z}^{(1)})$, условную плотность вероятности можно записать как

$$W(\mathbf{Z}^{(2)} \big| \mathbf{Z}^{(1)}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\mathbf{Z}^{(2)} - \rho\mathbf{Z}^{(1)}\right)^T\left(\mathbf{Z}^{(2)} - \rho\mathbf{Z}^{(1)}\right)\right]\right\}}{\sqrt{(2\pi)^2(1-\rho^2)^2}}. \quad (11)$$

При наличии во входной смеси сигнала $s_1^{(1)}(t)$ в (10) и (11) делаем замену $\mathbf{Z}^{(2)}$ на $\mathbf{Z}^{(2)} - \mathbf{m}^{(2|1)}$ и $\mathbf{Z}^{(1)}$ на $\mathbf{Z}^{(1)} - \mathbf{m}^{(1|1)}$. Здесь $\mathbf{m}^{(1|1)} = q\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{m}^{(2|1)} = q\begin{bmatrix}\rho & \gamma\end{bmatrix}^T$ – векторы условных математических ожиданий выходных статистик. Очевидно, что

$$W(\mathbf{Z}^{(1)}) \equiv W\left(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\right) =$$

$$= W\left(z_1^{(1)}\right)W\left(z_2^{(1)}\right) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{\left(z_1^{(1)} - q\right)^2 + \left(z_2^{(1)}\right)^2}{2}\right\}. \quad (12)$$

При $\varepsilon \to 0$ и соответственно $\rho \to -1$, $\gamma \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W\left(\mathbf{Z}^{(2)} \big| \mathbf{Z}^{(1)}\right) = \delta\left(z_1^{(2)} + z_1^{(1)}\right)\delta\left(z_2^{(2)} + z_2^{(1)}\right).$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{z_1^{(1)}}\int_{-\infty}^{z_1^{(1)}} W\left(\mathbf{Z}^{(2)}\middle|\mathbf{Z}^{(1)}\right)d\mathbf{Z}^{(2)}=\left(U_0\left(2z_1^{(1)}\right)\right)U_0\left(z_1^{(1)}+z_2^{(1)}\right). \qquad (13)$$

Подставляя (12), (13) в (2), получаем

$$P_{11}=\int_{-\infty}^{\infty} W(z_1^{(1)}U_0\left(z_1^{(1)}\right)dz_1^{(1)}\int_{-z_1^{(1)}}^{z_1^{(1)}} W\left(z_2^{(1)}\right)U_0\left(z_2^{(1)}+z_1^{(1)}\right)dz_2^{(1)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{(t-q)^2}{2}\right)(2\Phi(t)-1)\,dt=\left(\Phi(q/\sqrt{2})\right)^2.$$

Здесь использован табличный интеграл [6]

$$\int_0^{\infty} erf\left(az\right)\exp\left[-\left(az-\beta\right)^2\right]dz=\frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[1+erf\left(\beta/\sqrt{2}\right)\right],$$

где $erf(x)=\left(2/\sqrt{\pi}\right)\int_0^x\exp\left(-t^2\right)dt$ и учтено, что $erf(x)=2\Phi(x\sqrt{2})-1$. Нетрудно увидеть, что при $q\to 0$ $P_{11}\to 1/4$, а при $q\to\infty$ $P_{11}\to 1$.

Соответственно $Pe=1-\left[\Phi\left(q/\sqrt{2}\right)\right]^2$. Данное выражение совпадает с известным [2], полученным на основании того факта, что система ФМ-4 может быть сведена к ортогональной системе двух противоположных сигналов ФМ-2. Необходимо только учесть, что в [2] выражение $P_{11}$ при ФМ-4 получено для двух информационных битов, т. е. эквивалентно символу с удвоенной энергией.

Для расчета характеристик различения числа сигналов $M>4$ необходимо матрицу $\mathbf{K}$ разбить на блоки 2×2, аналогично разбиению при анализе ФМ-4. Затем внести возмущение в созвездие сигналов для создания матрицы $\mathbf{K}_d$ с необходимыми свойствами. Ввиду громоздкости вычислений в данной статье расчеты не приводятся. Метод возмущений собственных значений матрицы $\Lambda+\varepsilon\mathbf{I}$ можно использовать для вычисления МНИ с вырожденной корреляционной матрицей любой кратности.

**Заключение**

Предлагаемая методика вычисления МНИ с вырожденной корреляционной матрицей может быть использована для различных приложений, математическая формализация которых приводит к указанным интегралам. Результатом расчетов могут быть как точные аналитические формулы, так и выражения в виде быстро сходящихся рядов, удобные для практического применения.

Методика вычисления многомерных нормальных интегралов (МНИ) с вырожденной корреляционной матрицей использована для вычисления помехоустойчивости системы сигналов с многопозиционной модуляцией. Для случая ФМ-2 и ФМ-4 точные выражения для вероятностей ошибок, полученные на основе предлагаемой методики, совпадают с известными, что подтверждает корректность выполненных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ипатов В.П.** Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. – М.: Техносфера, 2007. – 488 с.
2. **Proakis J.G.** Digital Communications. – New York: McGraw-Hill, 1983. – 608 p.
3. **Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.** Прикладные методы статистического моделирования. – Л.: Машиностроение, 1986. – 330 с.
4. **Трифонов А.П.**, **Шинаков Ю.С.** Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
5. **Тихонов В.И.** Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
6. **Коротков Н.Е.** Интегралы для приложений интеграла вероятностей. – Воронеж: Воронеж. НИИ связи, 2002. – 800 с.

## DISTINGUISHING CHARACTERISTICS OF SIGNAL SYSTEMS WITH SINGULAR CORRELATION MATRIX

**Radchenko Yu.S., Kondakov M.S.**
*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

The problem of distinguishing non-orthogonal signals with multiposition phase and amplitude-phase modulation in the Gaussian noise is considered. The maximum likelihood criterion is used as a decision rule. Multivariate normal integrals with a singular correlation matrix occur in the theoretical analysis of the decision rule error probabilities. In practice instead of calculating these integrals the upper boundaries estimates of error probabilities are used as well as heuristic techniques for some special cases. The application of the Monte Carlo method for finding the probability of errors in this case also becomes a non-trivial task, since the formation of multivariate normal vectors requires the Cholesky decomposition of the singular correlation matrix. A method of calculating the multivariate normal integrals with a singular correlation matrix is proposed in the paper. The method is based on the perturbation of the correlation matrix of the system of signals and the integration of generalized functions. The procedure can be implemented by the perturbation of eigenvalues of the correlation matrix or signals constellation perturbation. The correlation matrix perturbation approach makes it possible to calculate multivariate normal integrals of any multiplicity. The calculation results can be represented in the form of exact analytical expressions as well as first approximations of rapidly converging series. For illustration exact analytical expressions for the error probabilities are obtained for systems with 2- and 4-positional phase modulation which coincides with the expressions obtained by known methods.

*Keywords*: multivariate normal integral, singular correlation matrix, multiposition phase modulation, error probability, the perturbation method.

REFERENCES

1. Ipatov V.P. *Shirokopolosnye sistemy i kodovoe razdelenie signalov. Printsipy i prilozheniya* [Broadband systems and code division signals. Principles and applications]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2007. 488 p.
2. Proakis J.G. *Digital Communications.* New York, McGraw-Hill, 1983. 608 p.
3. Shalygin A.S., Palagin Yu.I. *Prikladnye metody statisticheskogo modelirovaniya* [Applied statistical modeling techniques]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1986. 330 p.
4. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. *Sovmestnoe razlichenie signalov i otsenka ikh parametrov na fone pomekh* [Joint distinction of signals and estimation of their parameters under interference conditions]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1986. 264 p.
5. Tikhonov V.I. *Optimal'nyi priem signalov* [Optimal reception of signals]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1983. 320 p.
6. Korotkov N.E. *Integraly dlya prilozhenii integrala veroyatnostei* [Integrals for the applications of the probability integral]. Voronezh, Voronezhskii NII svyazi Publ., 2002. 800 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Радченко Юрий Степанович** – родился в 1946 году, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры радиофизики Воронежского государственного университета. Область научных интересов: статистическая радиофизика, анализ телекоммуникационных систем, цифровая обработка случайных процессов и полей. Опубликовано более 200 научных работ.

**Radchenko Yury Stepanovich** (b. 1946) – D.Sc. (Phys.&Math), Professor, Department of Radio Physics, Voronezh State University. His research interests are currently focused on statistical physics, analysis of telecommunication systems, digital processing of random processes and fields. He is author of more than 200 scientific papers.

**Кондаков Михаил Сергеевич** – родился в 1979 году, аспирант кафедры радиофизики Воронежского государственного университета. Область научных интересов: анализ и моделирование телекоммуникационных систем, алгоритмы и протоколы множественного доступа в беспроводных сетях передачи данных. Опубликовано 10 научных работ. (Адрес: 394042, Россия, Воронеж, Ленинский пр-т, 138–45. Email: ppkms@yandex.ru).

**Kondakov Mikhail Sergeevych** (b. 1979) – postgraduate, Department of Radio Physics, Voronezh State University. His research interests are currently focused on analysis and modeling of telecommunication systems, algorithms and protocols for multiple access in wireless data networks. He is coauthor of more than 10 scientific papers. (Address: 138-45, Leninskii Prospekt, Voronezh, 394042, Russia. Email: ppkms@yandex.ru).

*Статья поступила 16 мая 2014 г.*
*Received May 16, 2014*

To Reference:

Radchenko Yu.S., Kondakov M.S. Kharakteristiki razlicheniya sistemy signalov s vyrozhdennoi korrelyatsionnoi matritsei [Distinguishing characteristics of signal systems with singular correlation matrix]. *Doklady Akademii Nauk Vysshei Shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2014, no. 2-3 (23-24), pp. 91-100.