

УДК 621.3.011.6

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ДИССИПАЦИИ
ЭНЕРГИИ В ЦЕПИ С РЕАКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ****Е.И. Алгазин, К.А. Лайко, Ю.О. Филимонова,
А.С. Разумихин, А.В. Удовиченко***Новосибирский государственный технический университет*

В настоящей работе проведены исследования, имеющие своей целью определение времени диссипации энергии реактивного элемента до определенного уровня. В качестве реактивного элемента используется емкость. При этом емкость описывается линейным законом при наличии постоянной составляющей. В литературе достаточно полно освещены исследования емкости с нелинейным законом вольт-кулонной характеристики и линейным законом без постоянной составляющей. Один из методов нахождения времени диссипации энергии до заданного уровня в электрических цепях предложен авторами настоящей работы. Суть этого метода заключается в решении уравнения баланса энергии рассматриваемой цепи относительно переменной времени диссипации энергии. В работе рассматривается цепь первого порядка. Анализ такой цепи состоит в получении характеристического уравнения, которое позволяет найти решение дифференциального уравнения, описывающего эту цепь. Найденное решение используется для нахождения суммы энергии, запасенной в реактивном элементе, и энергии потерь на резистивном элементе. Найденная сумма энергий дает возможность определения времени диссипации энергии реактивного элемента до заданного уровня. В работе использован математический аппарат дифференциального исчисления и теории электрических цепей.

Ключевые слова: диссипация энергии в цепи, емкость, электрическая цепь, время диссипации до заданного уровня, дифференциальное уравнение, характеристическое уравнение.

DOI: 10.17212/1727-2769-2025-1-5-13

Введение

В литературе широко освещены исследования поведения как линейных, так и нелинейных электрических цепей. В зависимости от примененных инструментов исследования проведен анализ как линейных, так и нелинейных цепей.

Результаты таких исследований опубликованы в статьях, монографиях и учебных пособиях. В данной работе используется подход, базирующийся на анализе нелинейных цепей. Существующие отечественные [1–6] и зарубежные работы [7–14] охватывают широкий спектр вопросов, однако не рассматривают случай, представленный в данной статье – частный случай нелинейной емкости, описываемой суммой постоянной и линейно изменяющейся составляющих заряда. В рамках данного исследования рассматривается разряд такой емкости через резистивный элемент, при условии предварительной зарядки емкости до определенного напряжения u_0 .

© 2025 Е.И. Алгазин, К.А. Лайко, Ю.О. Филимонова, А.С. Разумихин,
А.В. Удовиченко

1. Постановка задачи

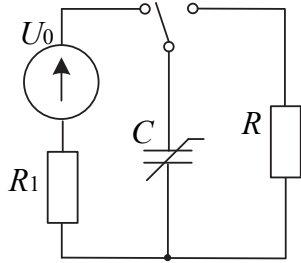


Рис. 1 – Электрическая цепь

Fig. 1 – Electrical circuit

Дана электрическая цепь в виде последовательно соединенных: резистора, обладающего сопротивлением R , конденсатора, заряд на обкладках которого нужно описать. Емкость предварительно заряжена до напряжения U_0 ; схема такой цепи изображена на рис. 1.

В работе приняты следующие допущения: элементы цепи сосредоточены.

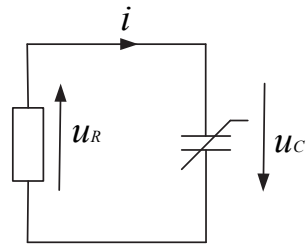
Необходимо: для данной электрической цепи найти время диссипации энергии до заданного уровня.

2. Пути решения

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 1, после коммутации ключа. Она представлена на рис. 2.

Рис. 2 – Схема цепи после коммутации

Fig. 2 – Circuit diagram after switching



Система уравнений такой цепи имеет вид

$$q(u_C) - \text{заданная функция,} \quad (1)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (2)$$

$$u_R(t) = Ri(t), \quad (3)$$

$$u_R(t) + u_C(t) = 0. \quad (4)$$

Подставляя выражение (1) в уравнение (2), получим

$$i(t) = \frac{dq(u_C)}{du_C} \frac{du_C(t)}{dt} = C_D \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (5)$$

где $C_D = \frac{dq(u_C)}{du_C}$ – дифференциальная емкость.

Подставим формулу (5) в уравнение (3) и с учетом (4) получим

$$RC_D(u_C(t)) \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0. \quad (6)$$

Подставим выражение $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC_D}}$ в уравнение (6).

Тогда вольт-кулонная характеристика нелинейной емкости (варикапа) аппроксимирована полиномом [15]:

$$q(u_C) = q_0 + C_0 u_C + C_0 u_C^2 + \dots,$$

где q_0 и C_0 – коэффициенты.

Ограничимся первыми двумя членами.

При $q_0 = 0$ получен обычный линейный конденсатор с емкостью C_0 .

Поскольку мы имеем дело с обычной цепью первого порядка, то следует функцию первого порядка $q(u_C) = q_0 + C_0 u_C$ подставить в уравнение (6) для проверки правильности решения.

$$RC_D(u_C(t)) \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0,$$

$$R \frac{dq(u_C)}{du_C} \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0,$$

$$R \frac{d}{du_C} [q_0 + C_0 u_C] \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0,$$

$$RC_0 \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0.$$

Перейдем к характеристическому уравнению:

$$RC_0 p u_C(t) + u_C(t) = 0,$$

$$RC_0 p + 1 = 0,$$

$$p = -\frac{1}{RC_0}.$$

Следовательно, решение дифференциального уравнения (6) будем искать в виде $u_C(t) = Ae^{pt}$.

Проверим правильность решения с учетом $p = -\frac{1}{RC_0}$.

$$RC_0 \left(-\frac{1}{RC_0} \right) Ae^{pt} + Ae^{pt} = 0,$$

$$-Ae^{pt} + Ae^{pt} = 0,$$

$A = U_0$ – определяется с учетом $t(0) = 0$.

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC_0}t}.$$

Чтобы определить энергию, запасенную в нелинейной емкости, воспользуемся аналитическим выражением тока в цепи:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(u_C)}{du_C} \frac{du_C(t)}{dt} = C_0 \frac{du_C(t)}{dt} = C_0 \frac{d}{dt} \left(U_0 e^{-\frac{1}{RC_0}t} \right) = \\ &= C_0 \left[-\frac{1}{RC_0} \right] U_0 e^{-\frac{t}{RC_0}} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC_0}}. \end{aligned}$$

Если за время заряда конденсатора напряжение u_C нарастает от нуля до U_0 , в его электрическом поле запасается энергия

$$W_0 = \int_0^{U_0} C_D u_C du_C,$$

где

$$C_D = \frac{dq}{du_C} = \frac{d}{du_C} (q_0 + C_0 u_C) = C_0,$$

$$W_0 = \int_0^{U_0} C_D u_C du_C = C_0 u_C du_C = \frac{C_0 U_0^2}{2} \quad [3].$$

Конечное аналитическое выражение закона сохранения энергии будет иметь вид

$$\begin{aligned} W_0 + R \int_0^{T_{\text{дис}}} i^2(t) dt &= W_0 + R \int_0^{T_{\text{дис}}} \left[\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC_0}} \right]^2 dt = \\ &= W_0 + \frac{U_0^2}{R} \int_0^{T_{\text{дис}}} e^{-\frac{2t}{RC_0}} dt = W_0 - \frac{U_0^2}{2} \frac{RC_0}{2} \int_0^{T_{\text{дис}}} e^{-\frac{2t}{RC_0}} d \left(-\frac{2t}{RC_0} \right) = \\ &= W_0 - W_0 e^{-\frac{2t}{RC_0}} \Big|_0^{T_{\text{дис}}} = W_0 + \left[W_0 e^{-\frac{2t}{RC_0}} - \frac{U_0^2 C}{2} \right] = \\ &= W_0 + \left[W_0 (e^{-\frac{2t}{RC_0}} - 1) \right] = \varepsilon, \end{aligned}$$

где ε – заданный уровень диссипации энергии.

Преобразуем полученное выражение к виду

$$-W_0 + \varepsilon = W_0 \left[e^{-\frac{2T_{\text{дис}}}{RC_0}} - 1 \right],$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{W_0}(-W_0 + \varepsilon) &= e^{-\frac{2T_{\text{дис}}}{RC_0}} - 1, \\ -\frac{2T_{\text{дис}}}{RC_0} &= \ln \left[\frac{1}{W_0}(-W_0 + \varepsilon) + 1 \right], \\ T_{\text{дис}} &= -\frac{RC_0}{2} \ln \left[\frac{1}{W_0}(-W_0 + \varepsilon) + 1 \right], \\ T_{\text{дис}} &= \frac{RC_0}{2} \ln \left[\frac{1}{\frac{1}{W_0}(-W_0 + \varepsilon) + 1} \right] = \\ &= \frac{RC_0}{2} \ln \left[\frac{1}{-1 + \frac{\varepsilon}{W_0} + 1} \right] = \frac{RC_0}{2} \ln \frac{W_0}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

К примеру, если относительный уровень остаточной энергии соответствует времени диссипации $\frac{\varepsilon}{W_0}$, составляющего 10 %, следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{W_0} = 0,1,$$

$$T_{\text{дис}} = \frac{RC_0}{2} \ln 10 \approx 1,15 RC_0.$$

Если $\frac{\varepsilon}{W_0} \doteq 1 \%$, то $\frac{\varepsilon}{W_0} = 0,01$,

$$T_{\text{дис}} = \frac{RC_0}{2} \ln 100 \approx 2,3 RC_0.$$

3. Результаты

В результате проведенных исследований получено аналитическое выражение, позволяющее определить время диссипации энергии до заданного уровня в рассматриваемой цепи.

Полученные аналитические выражения указывают на зависимость такого времени от параметров элементов цепи, что позволяет изменять значение времени диссипации как в большую, так и в меньшую сторону.

Заключение

Предложенный авторами метод оценки времени диссипации энергии в электрических цепях с емкостью возможно использовать в качестве дополнительного к классическим методам такой оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зернов Н.В., Карпов В.Г.** Теория радиотехнических цепей. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1972. – 816 с.
2. **Филиппов Е.** Нелинейная электротехника / пер. и доп. А.З. Кулебякина. – М.: Энергия, 1968. – 503 с.
3. **Андреев В.С.** Теория нелинейных электрических цепей. – М.: Связь, 1972. – 328 с.
4. **Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С.** Теория нелинейных электрических цепей. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 256 с.
5. **Бессонов Л.А.** Нелинейные электрические цепи. – Изд. 3-е перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1977. – 343 с.
6. **Матханов П.Н.** Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. – М.: Высшая школа, 1977. – 272 с.
7. **Хьюз В.** Нелинейные электрические цепи / пер. с англ. В.В. Савостьянова. – М.: Энергия, 1967. – 336 с.
8. **Yang Y., Tang L.** Equivalent circuit modeling of piezoelectric energy harvesters // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2009. – Vol. 20 (18). – P. 2223–2235. – DOI: 10.1177/1045389X09351757.
9. Equivalent circuit model of an impact-based piezoelectric energy harvester / S.H. Kim, S. Ju, C.H. Ji, S.J. Lee // Journal of Physics: Conference Series. – 2014. – Vol. 557. – Art. 012094.
10. **Smith K.C.** Electrical circuits. – Cambridge University Press, 1992. – 576 p.
11. **Kuphaldt T.R.** Lessons in electric circuits. – Koros Press, 2012. – 2556 p.
12. **Кириллова О.В.** Редакционная подготовка научных журналов по международным стандартам. Рекомендации эксперта БД Scopus. Ч. 1. – М., 2013. – 90 с.
13. **Катковник В.Я.** Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
14. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
15. **Андреевская Т.М.** Основы радиоэлектроники и связи. Курс лекций. – URL: <http://www.jstonline.narod.ru/rsw/> (дата обращения: 14.03.2025).

ABOUT A METHOD FOR ASSESSING ENERGY DISSIPATION TIME IN A CIRCUIT WITH A REACTIVE ELEMENT

**Algazin E.I., Laiko K.A., Filimonova Yu.O.,
Razumikhin A.S., Udovichenko A.V.**

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

This paper presents research aimed at determining the energy dissipation time of a reactive element to a certain level. A capacitor is used as the reactive element, which is described by a linear law with a constant component. In the literature, research on

capacitance with a nonlinear volt-coulomb characteristic law and a linear law without a constant component is quite well covered. One of the methods proposed by the authors of this paper for finding the energy dissipation time to a specified level in electrical circuits involves solving the energy balance equation of the circuit with respect to the variable energy dissipation time. The paper considers a first-order circuit. The analysis of such a circuit involves obtaining a characteristic equation that allows finding the solution of the differential equation describing this circuit. The found solution is used to determine the sum of the energy stored in the reactive element and the energy lost in the resistive element. This sum of energies allows determining the energy dissipation time of the reactive element to the specified level. The paper utilizes the mathematical apparatus of differential calculus and theory of electrical circuits.

Keywords: energy dissipation in a circuit, capacitance, electrical circuit, energy dissipation time to a specified level, differential equation, characteristic equation.

DOI: 10.17212/1727-2769-2025-1-5-13

REFERENCES

1. Zernov N.V., Karpov V.G. *Teoriya radiotekhnicheskikh tsepei* [Theory of radio engineering circuits]. 2nd ed. Leningrad, Energiya Publ., 1972. 816 p.
2. Filippov E. *Nelineinaya elektrotehnika* [Nonlinear electrical engineering]. Moscow, Energiya Publ., 1968. 503 p.
3. Andreev V.S. *Teoriya nelineinykh elektricheskikh tsepei* [Theory of nonlinear electrical circuits]. Moscow, Svyaz' Publ., 1972. 328 p.
4. Danilov L.V., Matkhanov P.N., Filippov E.S. *Teoriya nelineinykh elektricheskikh tsepei* [Theory of nonlinear electrical circuits]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1990. 256 p.
5. Bessonov L.A. *Nelineinye elektricheskie tsepi* [Nonlinear electrical circuits]. 3rd ed. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1977. 343 p.
6. Matkhanov P.N. *Osnovy analiza elektricheskikh tsepei. Nelineinye tsepi* [Fundamentals of electrical circuit analysis. Nonlinear circuits]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1977. 272 p.
7. Hughes W.L. *Nelineinye elektricheskie tsepi* [Nonlinear electrical networks]. Moscow, Energiya Publ., 1967. 336 p. (In Russian).
8. Yang Y., Tang L. Equivalent circuit modeling of piezoelectric energy harvesters. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, vol. 20 (18), pp. 2223–2235. DOI: 10.1177/1045389X09351757.
9. Kim S.H., Ju S., Ji C.H., Lee S.J. Equivalent circuit model of an impact-based piezoelectric energy harvester. *Journal of Physics: Conference Series*, 2014, vol. 557, art. 012094.
10. Smith K.C. *Electrical circuits*. Cambridge University Press, 1992. 576 p.
11. Kuphaldt T.R. *Lessons in electric circuits*. Koros Press, 2012. 2556 p.
12. Kirillova O.V. *Redaktsionnaya podgotovka nauchnykh zhurnalov po mezhdunarodnym standartam. Rekomendatsii eksperta BD Scopus. Ch. 1* [Editorial preparation of scientific journals according to international standards. Expert recommendations from Scopus database. Part 1]. Moscow, 2013. 90 p.
13. Katkovnik V.Ya. *Neparametricheskaya identifikatsiya i sglazhivanie dannykh: metod lokal'noi approksimatsii* [Nonparametric data identification and smoothing: local approximation method]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 336 p.
14. Kendall M.G., Stuart A. *Statisticheskie vyvody i svyazi* [The advanced theory of statistics. Inference and relationship]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 899 p. (In Russian).

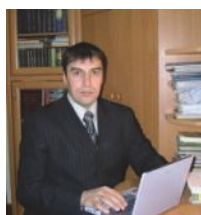
15. Andreevskaya T.M. *Osnovy radioelektroniki i svyazi. Kurs lektsii* [Fundamentals of radio electronics and communications. A course of lectures]. Available at: <http://www.jstonline.narod.ru/rsw/> (accessed 14.03.2025).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Алгазин Евгений Игоревич – родился в 1961 году, д-р техн. наук, доцент кафедры электроники и электротехники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: постоянные времени электрических цепей, временные соотношения в электротехнике и механике. Опубликовано 66 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: algazin@corp.nstu.ru).

Algazin Evgeny Igorevich (b.1961) – Doctor of Sciences (Eng.), Associate Professor, associate professor at the electronics and electrical engineering department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are time constants of electrical circuits, time relationships in electrical engineering and mechanics. He is the author of 66 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: algazin@corp.nstu.ru).



Лайко Константин Алексеевич – родился в 1962 году, канд. техн. наук, доцент кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: синтез амплитудных распределений антенных решеток, фазированных антенных решеток. Опубликовано 42 научные работы. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: lajko@corp.nstu.ru).

Laiko Konstantin Alekseevich (b. 1962) Candidate of Sciences (Eng.), associate professor at the Design and Technology of Radio-electronic Devices department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are synthesis of amplitude distributions of antenna arrays, phased array arrays. He is the author of 42 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: lajko@corp.nstu.ru).



Филимонова Юлия Олеговна – родилась в 1988 году, канд. техн. наук, доцент кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: синтез амплитудных распределений антенных решеток, фазированных антенных решеток. Опубликовано 40 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: yu.filimonova@corp.nstu.ru).

Filimonova Yulia Olegovna (b. 1988) – Candidate of Sciences (Eng.), associate professor at the Design and Technology of Radio-electronic Devices department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are synthesis of amplitude distributions of antenna arrays, phased array arrays. He is the author of 40 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: yu.filimonova@corp.nstu.ru).



Разумихин Анатолий Сергеевич – родился в 1995 году, ассистент кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: синтез излучателей антенных решеток. Опубликовано 11 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: at-tel@mail.ru).

Razumikhin Anatoly Sergeevich (b. 1995) – assistant at the Design and Technology of Radioelectronic Devices department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are synthesis of antenna array emitters. He is the author of 11 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: at-tel@mail.ru).



Удовиченко Алексей Вячеславович – родился в 1987 году, канд. техн. наук, доцент кафедры электроники и электротехники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: энергоэффективные регуляторы переменного напряжения, плавный пуск двигателей, силовая электроника. Опубликовано 94 научные работы. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: udovichenko@corp.nstu.ru)

Udovichenko Aleksey Vyacheslavovich (b. 1987) – Candidate of Sciences (Eng.), associate professor at the electronics and electrical engineering department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on energy-efficient AC voltage regulators, soft-start of engines, and power electronics. He is the author of 94 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: udovichenko@corp.nstu.ru).

*Статья поступила 13 декабря 2024 г.
Received December 13, 2024*

To Reference:

Algazin E.I., Laiko K.A., Filimonova Yu.O., Razumikhin A.S., Udovichenko A.V. Ob odnom metode otsenki vremeni dissipatsii energii v tsepi s reaktivnym elementom [About a method for assessing energy dissipation time in a circuit with a reactive element]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii = Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2025, no. 1 (66), pp. 5–13. DOI: 10.17212/1727-2769-2025-1-5-13.