

519.6:621.391

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИНТЕРПОЛИРОВАННЫХ ПОЛУПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Е.Г. Скулина, И.С. Савиных*Новосибирский государственный технический университет*

Предложены два варианта структуры интерполированного полуполосного фильтра. Оба варианта реализуемы при четных значениях коэффициента интерполяции. Первый вариант может быть использован при коэффициенте интерполяции, кратном четырем. Второй – при четном коэффициенте интерполяции, не кратном четырем. Рассмотрены частные случаи интерполированных фильтров при коэффициентах интерполяции от двух до двенадцати. Для этих случаев получены соотношения для полос пропускания, заграждения и перехода. Применение предложенных вариантов структуры обеспечивает значительное сокращение числа коэффициентов фильтра относительно классического подхода проектирования фильтров. Для данных вариантов структуры выведены аналитические выражения, позволяющие определить оптимальные значения коэффициента интерполяции и коэффициента сокращения вычислительных затрат, а также коэффициента увеличения регистров от значения ширины полос пропускания и перехода исходного фильтра. Также были спроектированы три реализации фильтра: первая – классическим способом, а вторая и третья – согласно двум вариантам разработанной структуры. Проведенное сопоставление подтвердило эффективность полученных соотношений, демонстрируя очевидные преимущества обоих вариантов предлагаемой структуры. Тем не менее разработанные варианты структуры интерполированного полуполосового КИХ-фильтра не обладают универсальностью, поскольку их применение ограничено обеспечением точного равенства центральной частоты четверти частоты дискретизации.

Ключевые слова: конечная импульсная характеристика, интерполированный фильтр, коэффициент интерполяции, полуполосовой фильтр, амплитудно-частотная характеристика.

DOI: 10.17212/1727-2769-2025-4-38-58

Введение

Полосовые фильтры (ПФ) активно используются в области цифровой фильтрации сигналов для эффективного устранения нежелательных шумов и помех [1]. Их частный случай – полуполосовые фильтры, фильтры с центральной частотой, равной $f_d/4$, часто используются при формировании и детектировании сигналов на промежуточной частоте в цифровом виде. Цифровая обработка сигналов предусматривает применение двух основных типов фильтров: фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) и фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры) [2–4].

Использование КИХ-фильтров предпочтительнее БИХ-фильтров, что обусловлено рядом ключевых преимуществ. Прежде всего, КИХ-фильтры могут обеспечивать линейную фазово-частотную характеристику, исключая возникновение фазовых искажений сигнала. Во-вторых, такие фильтры отличаются абсолютной устойчивостью, что позволяет избежать проверок их устойчивости. Наконец, влияние эффектов конечной разрядности значительно меньше в КИХ-фильтрах по сравнению с БИХ-фильтрами [2–5].

Одним из важнейших аспектов цифровой обработки сигналов является отсутствие неравномерности группового времени запаздывания, т. е. фазовых искажений [1], вследствие чего, даже несмотря на повышенные требования к объему вычислительных ресурсов, необходимых для расчета выходной реакции фильтра, предпочтение отдают именно КИХ-фильтрам [2–4].

1. Постановка проблемы

Для снижения вычислительной нагрузки при определении откликов фильтров нижних частот широкое распространение получили методы интерполяции [3, 6–9]. Они используют идею каскадного включения фильтра с интерполированной импульсной характеристикой и фильтра, подавляющего побочные спектральные составляющие, проходящие через первый фильтр. Однако общих соотношений для полосовых фильтров в целом и полуполосных в частности неизвестно, хотя для этого предпринимались попытки [10].

Целью данной работы является рассмотрение возможных вариантов построения интерполированных полуполосовых фильтров, а также получение соотношений коэффициента сокращения вычислительных затрат в зависимости от коэффициента интерполяции и параметров фильтра. Кроме того, определение оптимальных значений коэффициента интерполяции и коэффициента сокращения вычислительных затрат, а также коэффициента увеличения регистров в зависимости от значения ширины полос пропускания и перехода исходного фильтра.

2. Структурная схема

При проектировании цифрового фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтра) осуществляется выбор конкретных значений отсчетов его импульсной характеристики (ИХ), которые одновременно выступают в роли коэффициентов фильтра. Значения выходного сигнала рассчитываются согласно следующему выражению:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k].$$

Отклик традиционного КИХ-фильтра обычно определяется путем прямого вычисления выражения линейной свертки, представленного формулой (1), при этом его архитектура представлена на рис. 1.

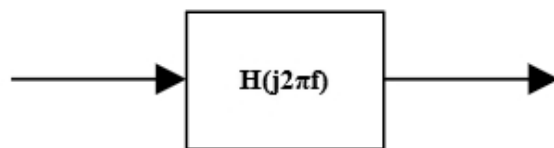


Рис. 1 – Структура классического фильтра с вычислительной точки зрения

Fig. 1 – The structure of the classical filter from the computational point of view

В рамках данной архитектурной реализации увеличение порядка фильтра влечет пропорциональное возрастание количества выполняемых арифметических операций (сложений и умножений), что соответственно увеличивает временные и финансовые издержки.

Структурные схемы двухкаскадного интерполированного полосового фильтра представлены на рис. 2 и 3.

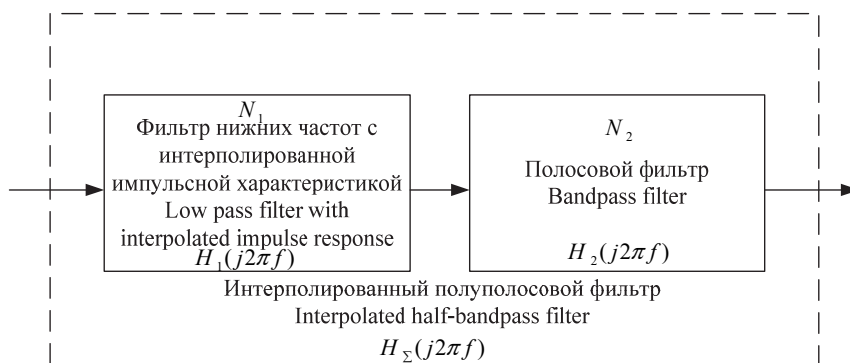


Рис. 2 – Структура интерполированного полуполосового фильтра, первый вариант

Fig. 2 – The structure of the interpolated half-bandpass filter of the first version

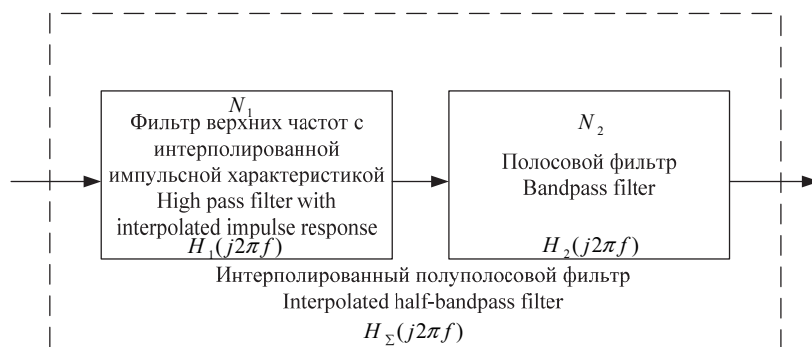


Рис. 3 – Структура интерполированного полуполосового фильтра, второй вариант

Fig. 3 – The structure of the interpolated half-bandpass filter of the second version

Эти структуры состоят из фильтра нижних частот или фильтра верхних частот с интерполированной импульсной характеристикой и фильтра, подавляющего побочную полосу пропускания. Предполагается, что при расчете все частоты нормированы на частоту дискретизации.

Поскольку исследуются полуполосовые фильтры с интерполированными импульсными характеристиками, имеющие центральную частоту, равную одной четвертой от частоты дискретизации, коэффициент интерполяции должен быть целым и четным числом. Необходимо рассмотреть частные случаи синтеза, в зависимости от значения коэффициента интерполяции.

2.1. Двухкратная интерполяция

Ситуация с двухкратной интерполяцией импульсной характеристики будет опущена, поскольку она рассматривается отдельно. В данном случае базовым фильтром выбирается фильтр верхних частот (ФВЧ), который подвергается интерполяции путем вставки одного нулевого отсчета между соседними отсчетами исходной импульсной характеристики. Это позволяет получить полосовой фильтр (не содержащий паразитных полос пропускания и, соответственно, не нуждающийся в фильтре подавления паразитных спектральных составляющих) с центральной частотой, равной одной четвертой от частоты дискретизации. Такой фильтр известен как полуполосный [3]. Согласно известным данным [3], этот фильтр обладает удвоенной вычислительной эффективностью, выражающейся в уменьшении числа операций умножения и сложения приблизительно вдвое.

2.2. Четырехкратная интерполяция

При четырехкратной интерполяции структура интерполированного полосового фильтра включает ФНЧ и ФППС.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) интерполированного полосового фильтра (или опорный случай) представлена на рис. 4.

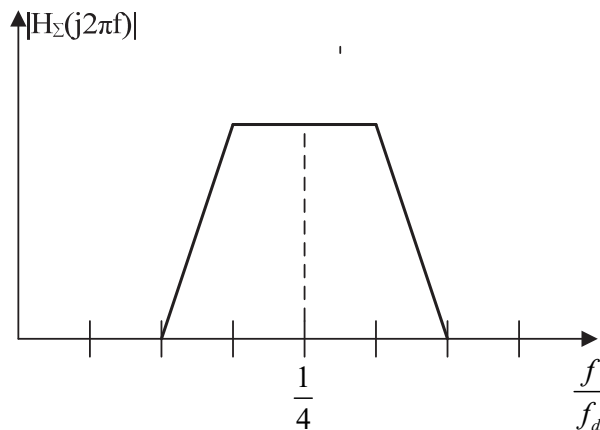


Рис. 4 – Результат интерполированного полуполосового фильтра

Fig. 4 – The result of the interpolated half-band filter

АЧХ до интерполяции представлена на рис. 5.

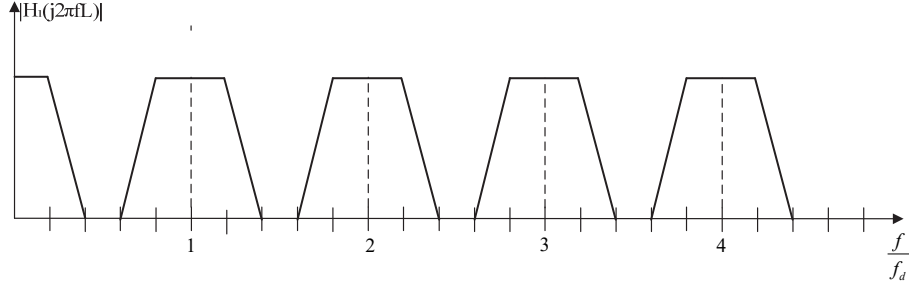


Рис. 5 – АЧХ до интерполяции

Fig. 5 – The amplitude frequency response before interpolation

АЧХ после интерполяции при использовании полосового фильтра, подавляющего побочные составляющие, представлена на рис. 6.

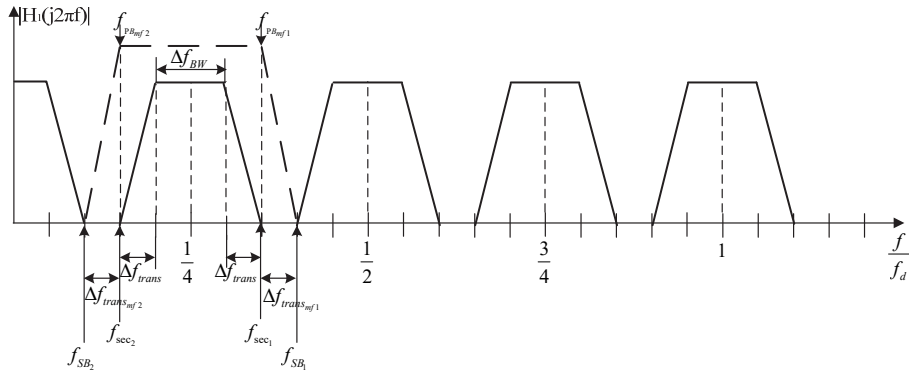


Рис. 6 – АЧХ после интерполяции

Fig. 6 – The amplitude frequency response after interpolation

Результирующая АЧХ интерполированного фильтра должна быть идентична АЧХ опорного случая, представленного на рис. 6.

Из рис. 6 следует, что частоты среза фильтра, подавляющего побочные составляющие, представленного полосовым фильтром, определяются формулами (1) и (2):

$$f_{\text{sec1}} = \frac{1}{4} + \frac{\Delta f_{BW}}{2} + \Delta f_{\text{trans}}, \quad (1)$$

$$f_{\text{sec2}} = \frac{1}{4} - \frac{\Delta f_{BW}}{2} - \Delta f_{\text{trans}}. \quad (2)$$

где Δf_{BW} – полоса пропускания исходного фильтра, Δf_{trans} – полоса перехода исходного фильтра.

Граничные частоты полосы заграждения фильтра, подавляющего побочные составляющие, определяются следующими формулами:

$$f_{SB1} = \frac{1}{2} - \frac{\Delta f_{BW}}{2} - \Delta f_{trans},$$

$$f_{SB2} = 0 + \frac{\Delta f_{BW}}{2} + \Delta f_{trans}.$$

Тогда полосы перехода полосового фильтра, подавляющего выбранную полосу, определяются формулами (3) и (4):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = f_{SB1} - f_{sec1} = \frac{1}{4} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}, \quad (3)$$

$$\Delta f_{trans_{mf2}} = f_{sec2} - f_{SB2} = \frac{1}{4} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что фильтр симметричный, что подтверждается выражением (5):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = \Delta f_{trans_{mf2}} = \frac{1}{4} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (5)$$

2.3. Шестикратная интерполяция

При четырехкратной интерполяции структура интерполированного полосового фильтра включает ФВЧ и ФППС.

АЧХ интерполированного полосового фильтра (или опорный случай) представлена на рис. 4.

АЧХ до интерполяции представлена на рис. 7.

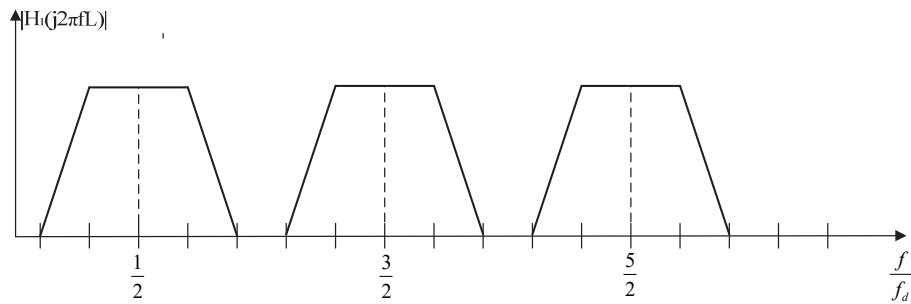


Рис. 7 – АЧХ до интерполяции

Fig. 7 – The amplitude frequency response before interpolation

АЧХ после интерполяции при использовании полосового фильтра, подавляющего побочные составляющие, представлена на рис. 8.

Результирующая АЧХ интерполированного фильтра должна быть идентична АЧХ опорного случая, представленного на рис. 4.

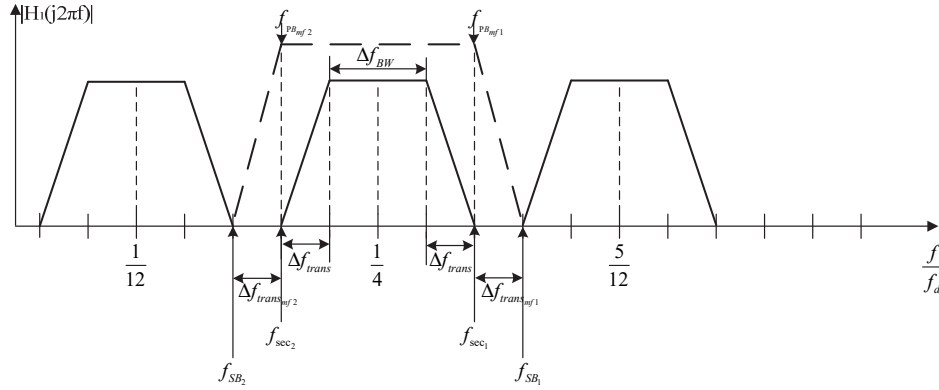


Рис. 8 – АЧХ после интерполяции

Fig. 8 – The amplitude frequency response after interpolation

Из рис. 8 следует, что частоты среза фильтра, подавляющего побочные составляющие, представленного полосовым фильтром, аналогично случаю четырехкратной интерполяции определяются формулами (1), (2).

Граничные частоты полосы заграждения фильтра, подавляющего побочные составляющие, определяются следующими формулами:

$$f_{SB1} = \frac{5}{12} - \frac{\Delta f_{BW}}{2} - \Delta f_{trans},$$

$$f_{SB2} = \frac{1}{12} + \frac{\Delta f_{BW}}{2} + \Delta f_{trans}.$$

Тогда полосы перехода полосового фильтра, подавляющего выбранную полосу, определяются формулами (6), (7):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = f_{SB1} - f_{sec1} = \frac{1}{6} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}, \quad (6)$$

$$\Delta f_{trans_{mf2}} = f_{sec2} - f_{SB2} = \frac{1}{6} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) следует, что фильтр симметричный, что подтверждается выражением (8):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = \Delta f_{trans_{mf2}} = \frac{1}{6} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (8)$$

2.4. Восьмикратная интерполяция

При восьмикратной интерполяции структура интерполированного полосового фильтра включает ФНЧ и ФППС.

АЧХ интерполированного полосового фильтра (или опорный случай) представлена на рис. 4.

АЧХ до интерполяции представлена на рис. 9.

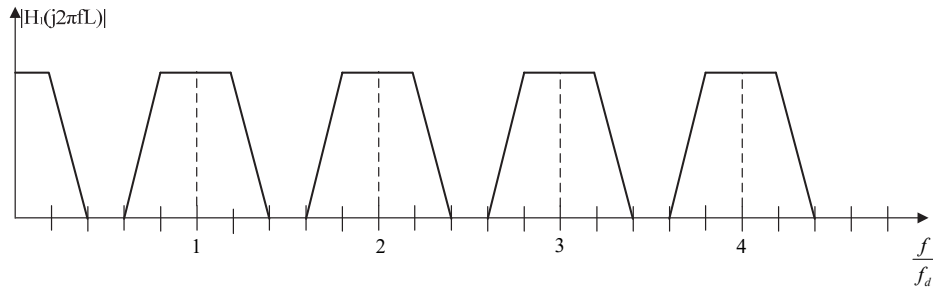


Рис. 9 – АЧХ до интерполяции

Fig. 9 – The amplitude frequency response before interpolation

АЧХ после интерполяции при использовании полосового фильтра, подавляющего побочные составляющие, представлена на рис. 10.

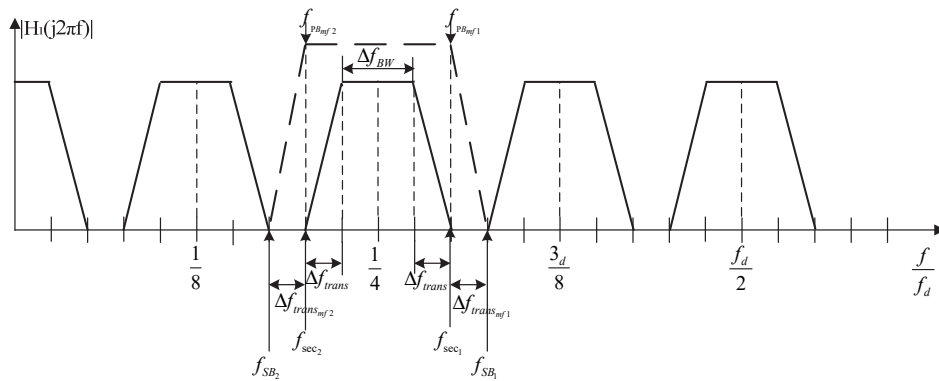


Рис. 10 – АЧХ после интерполяции

Fig. 10. The amplitude frequency response after interpolation

Результирующая АЧХ интерполированного фильтра должна быть идентична АЧХ опорного случая, представленного на рис. 4.

Из рис. 10 следует, что частоты среза фильтра, подавляющего побочные составляющие, представленного полосовым фильтром, аналогично ранее рассмотренным случаям определяются формулами (1), (2).

Граничные частоты полосы заграждения фильтра, подавляющего побочные составляющие, определяются следующими формулами:

$$f_{SB1} = \frac{3}{8} - \frac{\Delta f_{BW}}{2} - \Delta f_{trans},$$

$$f_{SB2} = \frac{1}{8} + \frac{\Delta f_{BW}}{2} + \Delta f_{trans}.$$

Тогда полосы перехода полосового фильтра, подавляющего выбранную полосу, определяются формулами (9), (10):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = f_{SB1} - f_{sec1} = \frac{1}{8} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}, \quad (9)$$

$$\Delta f_{trans_{mf2}} = f_{sec2} - f_{SB2} = \frac{1}{8} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (10)$$

Из формул (9) и (10) следует, что фильтр симметричный, что подтверждается выражением (11):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = \Delta f_{trans_{mf2}} = \frac{1}{8} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (11)$$

2.5. Десятикратная интерполяция

При восьмикратной интерполяции структура интерполированного полосового фильтра включает ФВЧ и ФППС.

АЧХ интерполированного полосового фильтра (или опорный случай) представлена на рис. 4.

АЧХ до интерполяции представлена на рис. 11.

АЧХ после интерполяции при использовании полосового фильтра, подавляющего побочные составляющие, представлена на рис. 12.

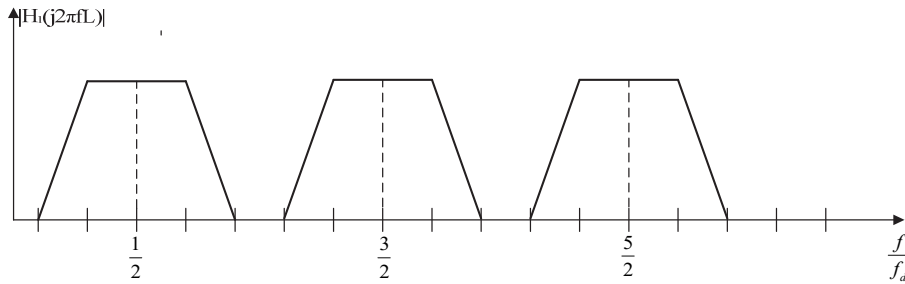


Рис. 11 – АЧХ до интерполяции

Fig. 11 – The amplitude frequency response before interpolation

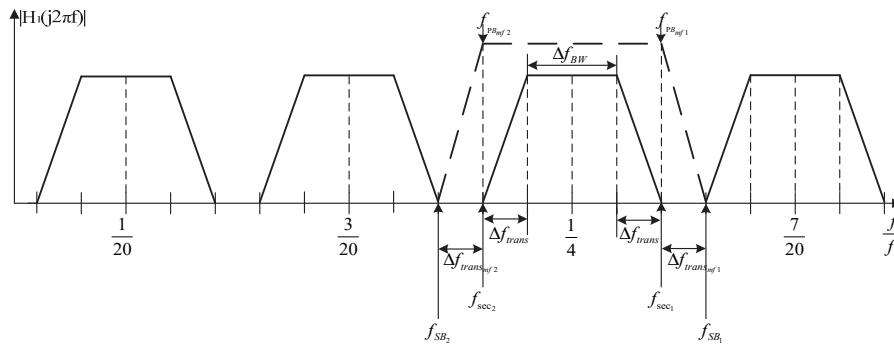


Рис. 12 – АЧХ после интерполяции

Fig. 12 – The amplitude-frequency response after interpolation

Результирующая АЧХ интерполированного фильтра должна быть идентична АЧХ опорного случая, представленного на рис. 4.

Из рис. 12 следует, что частоты среза фильтра, подавляющего побочные составляющие, представленного полосовым фильтром, аналогично ранее рассмотренным случаям определяются формулами (1), (2).

Граничные частоты полосы заграждения фильтра, подавляющего побочные составляющие, определяются следующими формулами:

$$f_{SB1} = \frac{7}{20} - \frac{\Delta f_{BW}}{2} - \Delta f_{trans},$$

$$f_{SB2} = \frac{3}{20} + \frac{\Delta f_{BW}}{2} + \Delta f_{trans}.$$

Тогда полосы перехода полосового фильтра, подавляющего выбранную полосу, определяются формулами (12) и (13):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = f_{SB1} - f_{sec1} = \frac{1}{10} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}, \quad (12)$$

$$\Delta f_{trans_{mf2}} = f_{sec2} - f_{SB2} = \frac{1}{10} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (13)$$

Из формул (12) и (13) следует, что фильтр симметричный, что подтверждается выражением (14):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = \Delta f_{trans_{mf2}} = \frac{1}{10} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (14)$$

2.6. Двенадцатикратная интерполяция

При восьмикратной интерполяции структура интерполированного полосового фильтра включает ФНЧ и ФППС.

АЧХ интерполированного полосового фильтра (или опорный случай) представлена на рис. 4.

АЧХ до интерполяции представлена на рис. 13.

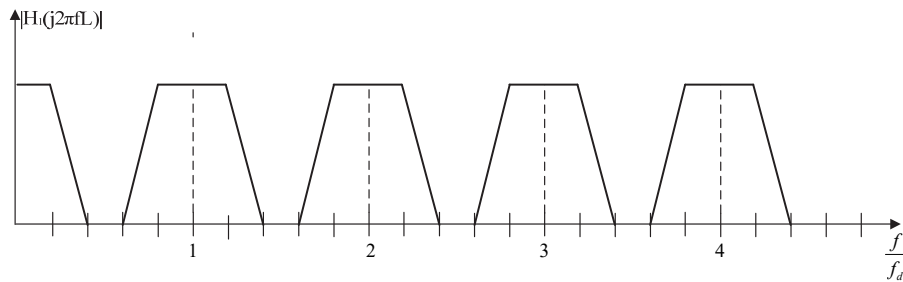


Рис. 13 – АЧХ до интерполяции

Fig. 13 – The amplitude-frequency response before interpolation

АЧХ после интерполяции при использовании полосового фильтра, подавляющего побочные составляющие, представлена на рис. 14.

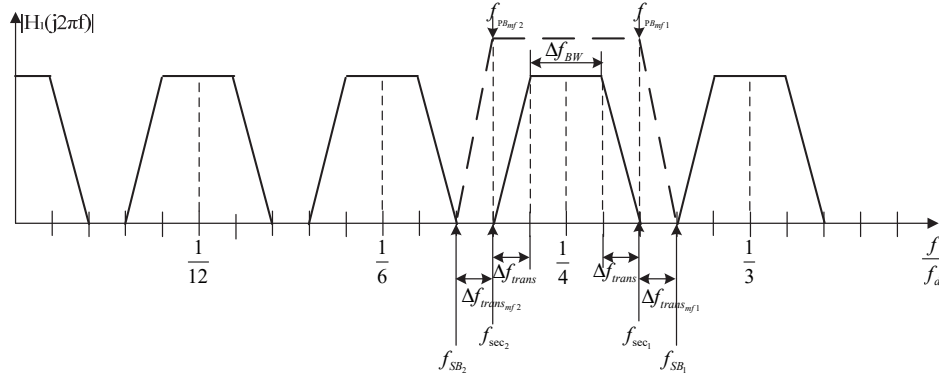


Рис. 14 – АЧХ после интерполяции

Fig. 14 – The amplitude-frequency response after interpolation

Результирующая АЧХ интерполированного фильтра должна быть идентична АЧХ опорного случая, представленного на рис. 4.

Из рис. 14 следует, что частоты среза фильтра, подавляющего побочные составляющие, представленного полосовым фильтром, аналогично ранее рассмотренным случаям определяются формулами (1), (2).

Граничные частоты полосы заграждения фильтра, подавляющего побочные составляющие, определяются следующими формулами:

$$f_{SB1} = \frac{1}{3} - \frac{\Delta f_{BW}}{2} - \Delta f_{trans},$$

$$f_{SB2} = \frac{1}{6} + \frac{\Delta f_{BW}}{2} + \Delta f_{trans}.$$

Тогда полосы перехода полосового фильтра, подавляющего выбранную полосу, определяются формулами (15), (16):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = f_{SB1} - f_{sec1} = \frac{1}{12} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}, \quad (15)$$

$$\Delta f_{trans_{mf2}} = f_{sec2} - f_{SB2} = \frac{1}{12} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (16)$$

Из формул (15) и (16) следует, что фильтр симметричный, что подтверждается выражением (17):

$$\Delta f_{trans_{mf1}} = \Delta f_{trans_{mf2}} = \frac{1}{12} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (17)$$

2.7. Выявленные закономерности

Из рис. 6, 10 и 14 следует, что структурная схема интерполированного двухкаскадного полосового фильтра при четном коэффициенте интерполяции, кратном четырем, представлена на рис. 2. Первый каскад представляет собой фильтр нижних частот с интерполированной импульсной характеристикой, с четным коэффициентом интерполяции, кратным четырем, второй каскад представляет собой фильтр, подавляющий побочные полосы пропускания первого фильтра, а именно полосовой фильтр.

Из рис. 8 и 12 следует, что структурная схема интерполированного двухкаскадного полосового фильтра при четном коэффициенте интерполяции, не кратном четырем, представлена рис. 3. Первый каскад представляет собой фильтр верхних частот с интерполированной импульсной характеристикой, с четным коэффициентом интерполяции, не кратным четырем, второй каскад представляет собой фильтр, подавляющий побочные полосы пропускания первого фильтра, а именно полосовой фильтр.

Из (5), (8), (11), (14), (17) следует, что полоса перехода фильтра, подавляющего выбранную полосу, при четном коэффициенте интерполяции определяется формулой (18):

$$\Delta f_{trans_{mf}} = \frac{1}{L} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}. \quad (18)$$

3. Расчет коэффициента сокращения вычислительных затрат

При расчете предполагаем, все частоты нормированы на частоту дискретизации. Количество коэффициентов, требуемых для вычисления импульсной характеристики классического КИХ-фильтра, определяется формулой (19). При этом будем считать, что количество коэффициентов фильтра заметно больше единицы.

$$N = \frac{K_{meth}}{\Delta f_{trans}}, \quad (19)$$

где Δf_{trans} — полоса перехода исходного фильтра; K_{meth} — коэффициент, определяемый используемым методом синтеза фильтра.

Тогда количество коэффициентов, требуемых для вычисления ИХ предложенного КИХ-фильтра, определяется следующей формулой:

$$M = M_1 + M_2,$$

где M_1 — количество коэффициентов, требуемых для вычисления ИХ фильтра с интерполированной ИХ; M_2 — количество коэффициентов, требуемых для вычисления ИХ ФППС.

Количество коэффициентов, требуемых для вычисления ИХ фильтра с интерполированной ИХ, определяется формулой (20):

$$M_1 = \frac{K_{meth}}{L\Delta f_{trans}}, \quad (20)$$

где L — коэффициент интерполяции.

Количество коэффициентов, требуемых для вычисления ИХ ФППС, определяется формулой (21):

$$M_2 = \frac{K_{meth}}{\Delta f_{trans_{mf}}}, \quad (21)$$

где $\Delta f_{trans_{mf}}$ – полоса перехода фильтра, подавляющего выбранную полосу.

Коэффициент сокращения вычислительных затрат, который показывает, насколько стало меньше вычислительных затрат, определяется формулой (22):

$$R = \frac{N_{inter}}{N_{uninter}} = \frac{M_1 + M_2}{N}. \quad (22)$$

Подставим соотношения (19), (20) и (21) в формулу (22) и получим

$$R = \frac{\frac{K_{meth}}{L\Delta f_{trans}} + \frac{K_{meth}}{\Delta f_{trans_{mf}}}}{\frac{K_{meth}}{\Delta f_{trans}}} = \frac{1}{L} + \frac{\Delta f_{trans}}{\Delta f_{trans_{mf}}} = \frac{1}{L} + \frac{\Delta f_{trans}}{\frac{1}{L} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}}. \quad (23)$$

Коэффициент увеличения регистров, который вычисляется как соотношение минимально необходимого количества ячеек памяти для предложенной структуры и классической, определяется формулой (24):

$$U = \frac{LM_1 + M_2}{N}. \quad (24)$$

Подставим соотношения (19), (20) и (21) в формулу (24) и получим

$$U = \frac{\frac{LK_{meth}}{L\Delta f_{trans}} + \frac{K_{meth}}{\Delta f_{trans_{mf}}}}{\frac{K_{meth}}{\Delta f_{trans}}} = 1 + \frac{\Delta f_{trans}}{\Delta f_{trans_{mf}}} = 1 + \frac{\Delta f_{trans}}{\frac{1}{L} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}}. \quad (25)$$

Рассмотрим ситуацию, в которой приоритетной задачей является минимизация вычислительной нагрузки по сравнению с сокращением требований к объему памяти. Ширина полос пропускания и перехода заранее известна и используется в процессе вычисления коэффициентов фильтра. Исходя из указанных условий сформулирован критерий выбора коэффициента интерполяции таким образом, чтобы минимизировать затраты ресурсов, необходимых для вычисления реакции интерполированного фильтра.

4. Расчет оптимального коэффициента интерполяции

Для определения оптимального коэффициента интерполяции L_{opt} найдем производную по L из соотношения (23) для коэффициента сокращения вычислительных затрат и приравняем ее к нулю.

В результате получим

$$L^2 \left((\Delta f_{BW} + 2\Delta f_{trans})^2 - \Delta f_{trans} \right) - L(2(\Delta f_{BW} + 2\Delta f_{trans})) + 1 = 0. \quad (26)$$

Найдя корни уравнения (26), получим

$$L_{1,2} = \frac{1}{(\Delta f_{BW} + 2\Delta f_{trans}) \mp \sqrt{\Delta f_{trans}}}.$$

Коэффициент интерполяции должен быть положительным числом, поэтому оптимальный коэффициент интерполяции будет определяться соотношением (27):

$$L_{opt} = \frac{1}{(\Delta f_{BW} + 2\Delta f_{trans}) + \sqrt{\Delta f_{trans}}}. \quad (27)$$

5. Расчет оптимального коэффициента сокращения вычислительных затрат

Для определения оптимального коэффициента сокращения вычислительных затрат необходимо подставить оптимальный коэффициент интерполяции (27) в (23):

$$R_{opt} = \Delta f_{BW} + 2\Delta f_{trans} + 2\sqrt{\Delta f_{trans}}. \quad (28)$$

Для определения коэффициента увеличения регистров при оптимальном значении коэффициента интерполяции необходимо подставить (27) в (25).

$$U(L_{opt}) = 1 + \frac{\Delta f_{trans}}{(\Delta f_{BW} + 2\Delta f_{trans}) + \sqrt{\Delta f_{trans}} - \Delta f_{BW} - 2\Delta f_{trans}}, \quad (29)$$

$$U(L_{opt}) = 1 + \sqrt{\Delta f_{trans}}.$$

6. Экспериментальные результаты

Для того чтобы оценить полученные ранее результаты, было рассмотрено два фильтра. Один был рассчитан классическим методом, два других – рассчитаны в соответствии с двумя предложенными вариантами структуры. Коэффициенты фильтров находились методом взвешивания с использованием взвешивающей функции Хэмминга.

Для примера были приняты следующие исходные данные: центральная частота 1000 Гц, ширина полосы заграждения 200 Гц, ширина полосы пропускания 100 Гц, частота дискретизации 4000 Гц, минимальное затухание в полосе заграждения 40 дБ, максимальная неравномерность в полосе пропускания 0,1 дБ.

В ходе расчетов были получены следующие результаты.

- Оптимальный коэффициент интерполяции $L_{opt} = 6,18$.

- Оптимальный коэффициент сокращения вычислительных затрат $R_{opt} = 0,274$.
- Коэффициент увеличения регистров при оптимальном значении коэффициента интерполяции $U(L_{opt}) = 1,112$.

Коэффициент интерполяции должен быть целым четным числом. Было рассмотрено два варианта округления: $L_1 = 6$ и $L_2 = 8$.

При $L_1 = 6$ была применена структурная схема интерполированного двухкаскадного полуполосового фильтра, состоящая из ФВЧ с интерполированной импульсной характеристикой, и ПФ (см. рис. 3).

При $L_2 = 8$ была применена структурная схема интерполированного двухкаскадного полуполосового фильтра, состоящая из ФНЧ с интерполированной импульсной характеристикой, и ПФ (см. рис. 2).

При выполнении требований к полосам пропускания и заграждения были получены следующие минимальные затухания в полосе заграждения и максимальные значения неравномерности в полосе пропускания (табл. 1, 2).

Таблица 1 / Table 1

Сравнение полученных результатов при шестикратной интерполяции
Comparison of the obtained results with the 6-fold interpolation

	Исходные данные / Basic data	Классический метод / Classical method	Предложенный метод / Proposed method
Минимальное затухание в полосе заграждения / Minimum attenuation in the barrier strip	40 дБ	50,57 дБ	49,62 дБ
Максимальное значение неравномерности в полосе пропускания / Maximum Bandwidth Unevenness	0,1 дБ	0,06 дБ	0,04 дБ

Таблица 2 / Table 2

Сравнение полученных результатов при восьмикратной интерполяции
Comparison of the obtained results with the 8-fold interpolation

	Исходные данные / Basic data	Классический метод / Classical method	Предложенный метод / Proposed method
Минимальное затухание в полосе заграждения / Minimum attenuation in the barrier strip	40 дБ	50,57 дБ	50,55 дБ
Максимальное значение неравномерности в полосе пропускания / Maximum Bandwidth Unevenness	0,1 дБ	0,06 дБ	0,04 дБ

Амплитудно-частотные характеристики полуполосовых фильтров, рассчитанных по предложенной структуре, и амплитудно-частотные характеристики полуполосовых фильтров, рассчитанных классическим методом в логарифмическом масштабе, представлены на рис. 15 и 16.

Из рис. 15 и 16 видно, что минимальное затухание полосы заграждения становится больше, чем у классического фильтра, но не превышает заданного значения. Однако максимальное значение неравномерности в полосе пропускания становится меньше, чем у классического фильтра.

При шестикратной интерполяции коэффициент увеличения регистров равен $U_1 = 1,107$, а фактически полученный коэффициент сокращения вычислительных затрат – $R_1 = 0,274$.

При восьмикратной интерполяции коэффициент увеличения регистров равен $U_2 = 1,167$, а фактически полученный коэффициент сокращения вычислительных затрат – $R_2 = 0,292$.

Из полученных результатов видно, что при шестикратной интерполяции фактически полученный коэффициент сокращения вычислительных затрат равен оптимальному, и увеличения объема памяти, по сравнению с оптимальным случаем, не требуется, при восьмикратной интерполяции коэффициент сокращения вычислительных затрат увеличивается, так же как и коэффициент увеличения регистров.

По сравнению с классическим методом экономия составляет более 70 %, увеличение объема памяти – не более 17 %.

Фактически использование интерполированных фильтров приводит к сокращению объема вычислений за счет увеличения объема памяти.

7. Обсуждение результатов

Из выражения (18) следует, что полоса перехода фильтра, подавляюще-го выбранную полосу, изменяется дискретно, что влияет на реализацию данной структуры.

Из выражения (27) следует, что оптимальный коэффициент интерполяции является дробным, что физически нереализуемо, а значит, при реализации необходимо округление до ближайшего четного целого числа.

Из выражения (28) следует, что оптимальный коэффициент сокращения вычислительных затрат является теоретическим пределом для заданных значений полос пропускания и перехода. Фактически полученный коэффициент сокращения вычислительных затрат определяется формулой (23).

Из выражения (29) следует, что коэффициент увеличения регистров при оптимальном значении коэффициента интерполяции является теоретическим минимумом. Фактически полученный коэффициент увеличения регистров определяется формулой (25).

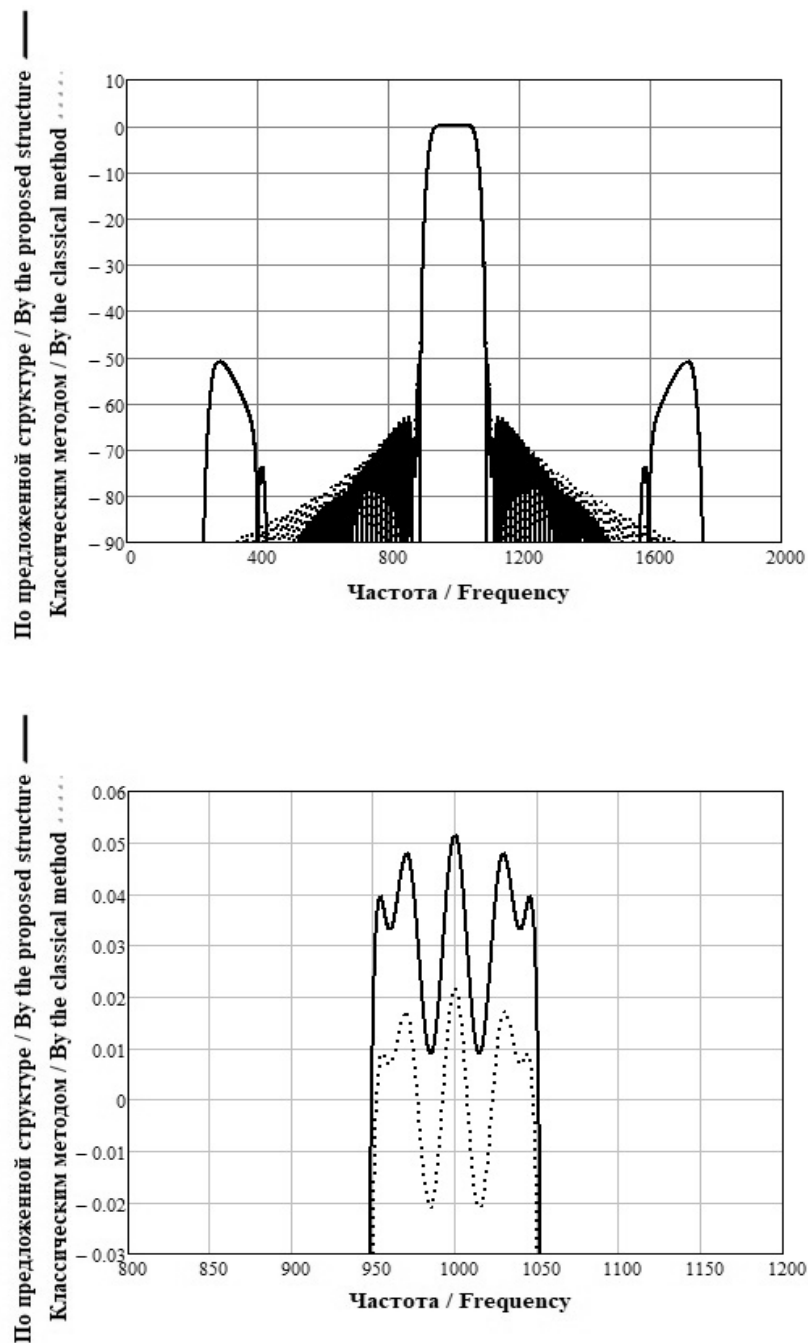


Рис. 15 – Амплитудно-частотная характеристика полуполосового фильтра, рассчитанного по предложенной структуре, и амплитудно-частотная характеристика полуполосового фильтра, рассчитанного классическим методом в логарифмическом масштабе

Fig. 15 – The frequency response of a half-band filter calculated by the proposed structure and the frequency response of a half-band filter calculated by the classical method on a logarithmic scale

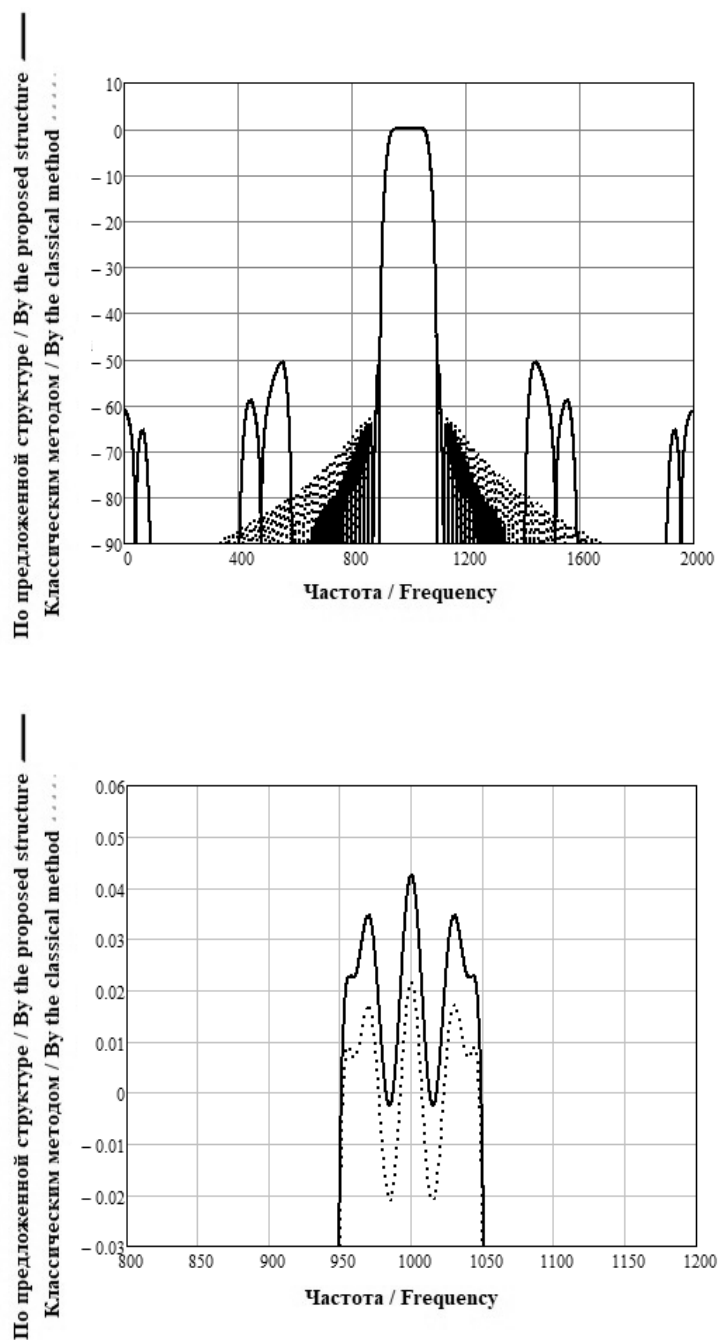


Рис. 16 – Амплитудно-частотная характеристика полуполосового фильтра, рассчитанного по предложенной структуре, и амплитудно-частотная характеристика полуполосового фильтра, рассчитанного классическим методом в логарифмическом масштабе

Fig. 16 – The frequency response of a half-band filter calculated by the proposed structure and the frequency response of a half-band filter calculated by the classical method on a logarithmic scale

Заключение

Предложены два варианта структуры интерполированного полуполосного фильтра. Оба варианта реализуемы при четных значениях коэффициента интерполяции. Первый вариант может быть использован при коэффициенте интерполяции, кратном четырем. Второй – при четном коэффициенте интерполяции, не кратном четырем. Применение предложенных вариантов структуры обеспечивает значительное сокращение числа коэффициентов фильтра относительно классического подхода проектирования фильтров.

Для данных вариантов структуры выведены аналитические выражения, позволяющие определить оптимальные значения коэффициента интерполяции и коэффициента сокращения вычислительных затрат, а также коэффициента увеличения регистров от значения ширины полос пропускания и перехода исходного фильтра.

Были спроектированы три реализации фильтра: первая – классическим способом, а вторая и третья – согласно двум вариантам разработанной структуры. Проведенное сопоставление подтвердило эффективность полученных соотношений, демонстрируя очевидные преимущества обоих вариантов предлагаемой структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sklar B.** Digital communications: fundamentals and applications. – 2nd ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001. – 1079 p.
2. **Ifeachor E.C., Jervis B.W.** Digital signal processing: a practical approach. – New York: Prentice Hall, 2002. – 933 p.
3. **Lyons R.G.** Understanding digital signal processing. – 3rd ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2011. – 954 p.
4. **Antoniou A.** Digital signal processing. – McGraw-Hill, 2006. – 966 p.
5. **Harris F.** Multirate signal processing for communication systems. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2004. – 478 p.
6. **Neuvo Y., Dong C.Y., Mitra S.K.** Interpolated finite impulse response filters // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1984. – Vol. ASSP-32. – P. 563–570.
7. **Saramaki T., Neuvo Y., Mitra S.K.** Design of computationally efficient interpolated FIR filters // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1988. – Vol. 35 (1). – P. 70–88.
8. **Mehrnia A., Willson A.N.** On optimal IFIR filter design // Proceedings of the 2004 International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), 23–26 May. – IEEE, 2004. – Vol. 3. – P. 133–136.
9. **Савиных И.С., Чемасов Д.А.** Вычислительная эффективность интерполированного фильтра нижних частот // Радиопромышленность. – 2018. – № 2. – С. 58–62.
10. **Савиных И.С., Гладких М.О.** Полосовые интерполированные фильтры // Вопросы радиоэлектроники. – 2017. – № 4. – С. 16–23.

COMPUTATIONAL EFFICIENCY OF INTERPOLATED HALF-BAND FILTERS

Skulina E.G., Savinykh I.S.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Two variants of the structure for an interpolated half-band filter are proposed. Both options can be implemented with even values of the interpolation factor. The first variant is applicable when the interpolation factor is a multiple of four. The second one applies to even interpolation factors that are not multiples of four. Special cases of interpolated filters have been considered for interpolation coefficients ranging from two to twelve. For these cases, relationships for passband, stopband, and transition band were derived. Application of the proposed structural alternatives leads to a significant reduction in the number of filter coefficients compared to classical filter design approaches. Analytical expressions have been developed for determining optimal values of the interpolation coefficient, the computational cost reduction factor, as well as the register increase ratio based on the width of the original filter passband and transition band. Three implementations of the filter were designed: the first using a conventional method, while the second and third followed the two proposed structural variations. A comparative analysis confirmed the effectiveness of the obtained relations, clearly demonstrating the advantages of both proposed structures. However, the developed versions of the interpolated half-band FIR filter structure lack universality since their application requires precise equality between the central frequency and one-quarter of the sampling rate.

Keywords: finite impulse response, interpolated filter, interpolation coefficient, half-band filter, amplitude frequency response.

DOI: 10.17212/1727-2769-2025-4-38-58

REFERENCES

1. Sklar B. *Digital communications: fundamentals and applications*. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 2001. 1079 p.
2. Ifeachor E.C., Jervis B.W. *Digital signal processing: a practical approach*. New York, Prentice Hall, 2002. 933 p.
3. Lyons R.G. *Understanding digital signal processing*. 3rd ed. Upper Saddle River, Prentice Hall, 2011. 954 p.
4. Antoniou A. *Digital signal processing*. McGraw-Hill, 2006. 966 p.
5. Harris F. *Multirate signal processing for communication systems*. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 2004. 478 p.
6. Neuvo Y., Dong C.Y., Mitra S.K. Interpolated finite impulse response filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1984, vol. ASSP-32, pp. 563–570.
7. Saramaki T., Neuvo Y., Mitra S.K. Design of computationally efficient interpolated FIR filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, vol. 35 (1), pp. 70–88.
8. Mehrnia A., Willson A.N. On optimal IFIR filter design. *Proceedings of the 2004 International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 23–26 May, 2004, vol. 3, pp. 133–136.
9. Savinykh I.S., Chemasov D.A. Vychislitel'naya effektivnost' interpolirovannogo fil'tra nizhnikh chastot [Computing efficiency of the interpolated low pass filter]. *Radiopromyshlennost' = Radio Industry*, 2018, no. 2, pp. 58–62.
10. Savinykh I.S., Gladkikh M.O. Polosovye interpolirovannye fil'try [Interpolated band pass filters]. *Voprosy radioelektroniki = Issues of radio electronics*, 2017, no. 4, pp. 16–23.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Скулина Елена Георгиевна – родилась в 1996 г. С 2022 года учится по программе аспирантуры в области радиотехники в Новосибирском государственном техническом университете. Автор более 10 статей, участница научных конференций. Исследовательские интересы включают проектирование и синтез фильтров, передачу электрической энергии. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: Dream.len@yandex.ru).

Skulina Elena Georgievna (b. 1996) – Since 2022, she has been pursuing a Ph.D. program in Radio Engineering in the Novosibirsk State Technical University. She is the author of more than 10 research papers and participated in scientific conferences. Her research interests include filter design and synthesis and transmission of electrical energy. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: Dream.len@yandex.ru).



Савиных Иван Сергеевич – родился в 1976 г., канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств в Новосибирском государственном техническом университете. Автор более 60 статей. Исследовательские интересы включают цифровую обработку сигналов и вычислительную эффективность цифровых фильтров. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: isavinykh@mail.ru).

Savinykh Ivan Sergeevich (b. 1976) – Candidate of Sciences (Eng.), Assistant professor, assistant professor at the Department of Radio Receiving and Radio Transmitting Devices, in the Novosibirsk State Technical University. He is the author of more than 60 research papers. His research interests include digital data processing and computational efficiency of digital filters. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: isavinykh@mail.ru).

*Статья поступила 10 сентября 2025 г.
Received September 10, 2025*

To Reference:

Skulina E.G., Savinykh I.S. Vychislitel'naya effektivnost' interpolirovannykh polupolosovykh fil'trov [Computational efficiency of interpolated half-band filters]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii = Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2025, no. 4 (69), pp. 38–58. DOI: 10.17212/1727-2769-2025-4-38-58.