

УДК 621.313.8

ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ В МАШИНАХ С ДРОБНЫМИ ЗУБЦОВЫМИ ОБМОТКАМИ И ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ

Д.Ю. Бабицкий*Новосибирский государственный технический университет*

В работе выполнено теоретическое исследование закономерностей образования электромагнитных радиальных сил низкого порядка в синхронных электрических машинах с дробными зубцовыми обмотками и возбуждением от постоянных магнитов. Актуальность исследования обусловлена тем, что возникающие радиальные силы являются одной из основных причин повышенного уровня вибраций и шума. На основе гармонического анализа пространственно-временного распределения магнитного поля получено аналитическое выражение для определения удельной радиальной силы, учитывающее взаимодействие основных гармонических составляющих магнитодвижущей силы обмотки статора, магнитодвижущей силы ротора и эквивалентной магнитной проводимости воздушного зазора. Рассмотрены условия возникновения радиальных сил как при гладком немагнитном воздушном зазоре, так и при наличии зубчатости статора. Установлено, что в обоих случаях возникают радиальные силы нулевого порядка, соответствующие пульсирующему растягивающе-сжимающему воздействию на статор. Показано, что для машин с обмоткой, имеющей шесть фазных зон, характерно образование радиальных сил второго порядка, вызывающих изгибные деформации статорного кольца, тогда как для машин с тремя фазными зонами возникают силы первого порядка, приводящие к одностороннему притяжению ротора к статору. Полученные аналитические зависимости позволяют выявить механизмы формирования наиболее опасных гармонических составляющих радиальных сил и могут быть использованы при проектировании электрических машин для выбора конструктивных решений, направленных на снижение вибраций и шума.

Ключевые слова: радиальная электромагнитная сила, дробная зубцовая обмотка, постоянные магниты, магнитодвижущая сила.

DOI: 10.17212/1727-2769-2026-3-5-19

Введение

Одним из перспективных направлений в области электромашиностроения является применение синхронных электрических машин с возбуждением от постоянных магнитов (ПМ) с использованием в качестве обмотки статора дробных зубцовых обмоток (ДЗО). Такие машины находят широкое применение в различных областях: мотор колеса, ветрогенераторы, безредукторные приводы лифтов, двигатели беспилотных летательных аппаратов и другие устройства.

Отличительной особенностью ДЗО является их число пазов на полюс и фазу q , которое представляет собой дробное число меньше единицы. С конструктивной точки зрения намотка каждой катушки таких обмоток

выполняется вокруг одного зубца, что обеспечивает малый осевой размер и длину лобовых частей обмотки в сравнении с классическими распределенными обмотками. Таким образом, применение ДЗО обеспечивает комплекс существенных технологических и эксплуатационных преимуществ, в частности сокращение осевых габаритов электрической машины, снижение расхода меди, уменьшение активного сопротивления, электрических потерь и индуктивности рассеяния в лобовых частях.

В рассматриваемом классе машин в качестве источника потока возбуждения используются постоянные магниты. В сравнении с электромагнитным возбуждением применение ПМ позволяет отказаться от обмотки возбуждения и контактных колец, что исключает потери на возбуждение, повышает КПД машины, улучшает массогабаритные показатели и увеличивает надежность.

Применение ДЗО и ПМ позволяет выполнять электрические машины с улучшенными массогабаритными показателями, повышенными удельными показателями мощности и момента, высоким КПД. Пример конструкции таких электрических машин приведен на рис. 1.

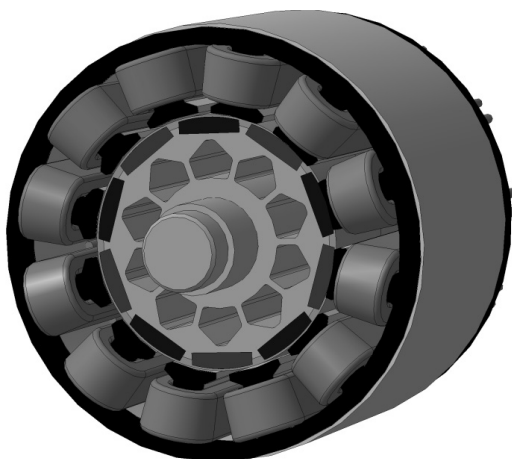


Рис. 1 – Пример конструкции электрической машины с ДЗО и ПМ

Fig. 1 – An example of the electric machine design with fractional-slot concentrated winding and permanent magnets

Анализ литературных источников [1–5], а также практический опыт проектирования свидетельствуют о том, что ряд типоразмеров синхронных машин с ДЗО и ПМ характеризуется повышенным уровнем шума и вибраций. Указанные нежелательные явления обусловлены действием электромагнитных радиальных сил, изменяющихся как во времени, так и в пространстве и возникающих между статором и ротором в процессе работы электрической машины. Вибрации, в свою очередь, могут снижать ресурс подшипниковых узлов и механических соединений, а шум негативно влияет на акустический комфорт обслуживающего персонала.

В рамках настоящей работы проведено теоретическое исследование причин и условий образования электромагнитных радиальных сил в машинах рассматриваемого класса.

1. Образование радиальных сил в электрических машинах с ДЗО и ПМ

Вибрации и вызванный ими шум, источником которых являются магнитные силы, принято называть магнитными вибрациями. В электрических машинах данные вибрации обусловлены радиальными силами, действующими между статором и ротором. Эти силы, изменяющиеся как во времени, так и в пространстве, вызывают деформацию ярма статора, приводящую к его колебаниям. Наибольшие деформации статорного кольца возникают при совпадении частоты возмущающего воздействия, которой является радиальная сила, с частотой собственных колебаний статора [6].

В общем виде выражение радиальной силы можно записать следующим образом [6]:

$$F_r(\alpha, t) = F_{r.m} \cos(\Omega_r t - r\alpha),$$

где r – порядок радиальной силы; $F_{r.m}$ – амплитуда силы r -го порядка; Ω_r – угловая частота силы r -го порядка; t – время; α – пространственная координата.

Особую опасность представляют радиальные силы низких порядков, поскольку их пространственный период достаточно велик, что позволяет вызывать значительные деформации статора. С ростом порядка волны плечо силы уменьшается и амплитуда колебаний снижается [6]. На рис. 2 показано влияние радиальных сил различных порядков на форму деформации кольца статора. Сила порядка $r = 0$ создает пульсирующее усилие растяжения/сжатия; $r = 1$ соответствует одностороннему притяжению ротора к статору; $r = 2$ и $r = 3$ приводят к изгибным деформациям статорного кольца, причем каждому порядку соответствует своя форма деформации. В настоящей работе рассматриваются условия образования электромагнитных радиальных сил описанных порядков.

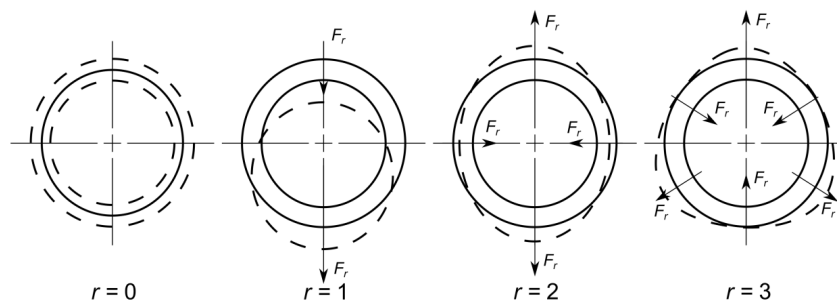


Рис. 2 – Пространственное распределение сил, вызывающих деформацию кольца статора

Fig. 2 – Spatial force distribution causing deformation of the stator ring

Удельная радиальная сила в любой точке воздушного зазора определяется как величина, пропорциональная квадрату магнитной индукции [6]:

$$F_r(\alpha, t) = \frac{B_\delta^2(\alpha, t)}{2\mu_0}, \quad (1)$$

где $B_\delta(\alpha, t)$ – функция магнитной индукции в воздушном зазоре; μ_0 – магнитная постоянная.

При пренебрежении магнитным сопротивлением стали мгновенное значение индукции в данной точке является произведением результирующей магнитодвижущей силы (МДС) и эквивалентной магнитной проводимости воздушного зазора [6]:

$$B_\delta(\alpha, t) = F(\alpha, t)\Lambda(\alpha), \quad (2)$$

где $F(\alpha, t)$ – результирующая МДС; $\Lambda(\alpha)$ – эквивалентная магнитная проводимость воздушного зазора.

Функция результирующей МДС есть сумма МДС статора, созданная обмоткой, и МДС ротора, образованная постоянными магнитами [6]:

$$F(\alpha, t) = F_v(\alpha, t) + F_k(\alpha, t), \quad (3)$$

где $F_v(\alpha, t)$ – МДС статора; $F_k(\alpha, t)$ – МДС ротора.

В рамках настоящей работы рассмотрено образование низкочастотных электромагнитных радиальных сил, образованных взаимодействием пространственных гармонических составляющих МДС статора, МДС ротора и эквивалентной магнитной проводимости, обладающих наибольшей амплитудой. Далее такие гармоники каждой из рассматриваемых функций будут называться основными. Такой подход позволяет выявить ключевые механизмы возникновения рассматриваемых радиальных сил.

Число пазов на полюс и фазу ДЗО можно представить следующим образом [7]:

$$q = \frac{c}{d} < 1. \quad (4)$$

При описании МДС, созданной ДЗО, необходимо отметить особенность данного класса обмоток. Поскольку каждая катушка охватывает только один зубец статора, пространственное распределение МДС обмотки отличается от синусоидальной формы. В пространственном гармоническом составе МДС всегда присутствуют две составляющие, обладающие высокой амплитудой и вращающиеся в противоположных направлениях. Таким образом, каждая из этих гармоник может выступать в качестве рабочей. Обе эти гармоники называются основными гармониками МДС ДЗО [7].

В качестве демонстрации гармонического состава МДС ДЗО на рис. 3 представлены амплитуды гармоник МДС обмотки с числом пазов на полюс и фазу $q = 2/5$, являющейся одной из часто используемых ДЗО. Здесь основными гармониками с наибольшей амплитудой являются пятая и седьмая. Также показаны нерабочие гармоники МДС.

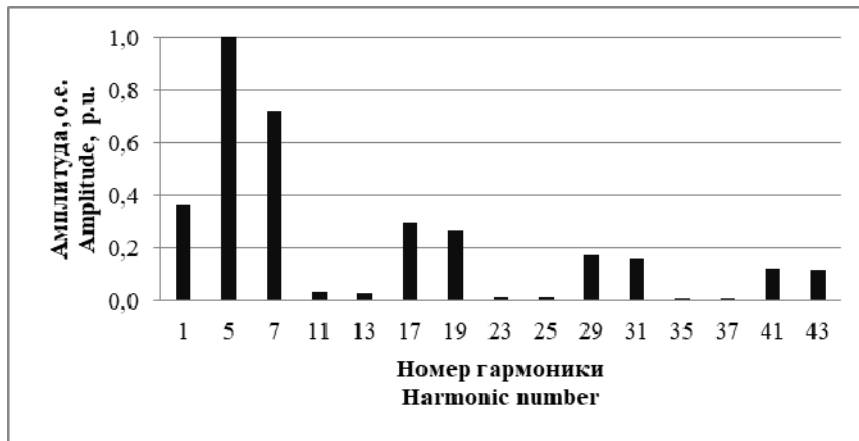


Рис. 3 – Относительные амплитуды гармоник МДС ДЗО с $q = 2/5$

Fig. 3 – Relative harmonic amplitudes of the magnetomotive force of fractional-slot concentrated windings with $q = 2/5$

Функцию МДС статора, созданной ДЗО, учитывая две основные гармоники, можно представить следующим образом [7]:

$$F_v(\alpha, t) = F_{v1m} \cos(\omega t - v_1 \alpha) + F_{v2m} \cos(\omega t + v_2 \alpha), \quad (5)$$

где v_1 и v_2 – номера первой и второй основных пространственных гармоник МДС ДЗО; F_{v1m} и F_{v2m} – амплитуды соответствующих пространственных гармоник МДС; ω – частота протекающих по обмотке токов. Отличающиеся знаки в аргументах косинусов показывают противоположное направление вращения основных гармоник МДС ДЗО.

При описании МДС ротора наибольшую амплитуду имеет гармоника поля возбуждения, порядок которой равен числу пар полюсов, на которое выполнен ротор:

$$F_k(\alpha, t) = F_{km} \cos(p(\omega_r t - \alpha)), \quad (6)$$

где p – число пар полюсов ротора; F_{km} – амплитуда основной гармоники МДС ротора; ω_r – частота вращения ротора.

В настоящей работе рассмотрен вариант, когда магнитная проводимость воздушного зазора изменяется вдоль расточки за счет зубчатой конструкции статора (односторонняя зубчатость). Такая постановка применима для конструкций роторов с поверхностным расположением радиально намагниченных ПМ. Пример конструкции магнитной системы рассматриваемой электрической машины показан на рис. 4.

Анализ магнитного сопротивления с односторонней зубчатостью со стороны статора выполнен на модели гладкого зазора с эквивалентной удельной проводимостью, воспроизводящей зубцовую периодичность. В проводимости воздушного зазора учтем только постоянную составляющую, определяемую величиной воздушного зазора и высотой ПМ (так как магнитная проводимость ПМ мало отличается от проводимости воздуха),

и основную гармонику, обусловленную числом зубцов статора (зубцовую гармонику) [7]:

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda_0 + \Lambda_m \cos(Z_1 \alpha), \quad (7)$$

где Λ_0 – постоянная составляющая магнитной проводимости; Λ_m – амплитуда основной гармоники эквивалентной магнитной проводимости; Z_1 – число пазов статора.

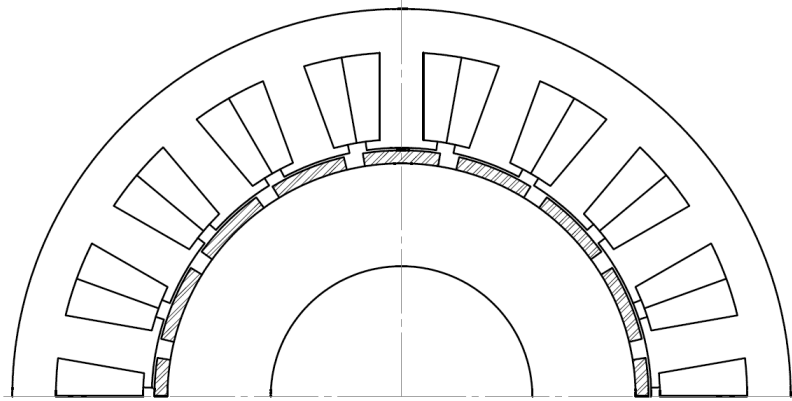


Рис. 4 – Эскиз рассматриваемой магнитной системы

Fig. 4 – Configuration of the magnetic system under study

Используя выражения (2)–(3) и (5)–(7), функцию удельной радиальной силы (1) можно записать как

$$\begin{aligned} F_r(\alpha, t) = & \frac{1}{2\mu_0} \left\{ [F_{v1m} \cos(\omega t - v_1 \alpha) + \right. \\ & + F_{v2m} \cos(\omega t + v_2 \alpha) + F_{km} \cos(p\omega_r t - p\alpha)] \times \\ & \left. \times [\Lambda_0 + \Lambda_m \cos(Z_1 \alpha)] \right\}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, используя выражение (8), рассмотрим условия образования электромагнитных радиальных сил по отдельности: 1) при гладком немагнитном зазоре с учетом постоянной составляющей эквивалентной удельной магнитной проводимости воздушного зазора; 2) при односторонней зубчатости со стороны статора с учетом переменной составляющей магнитной проводимости.

2. Образование радиальных сил низкого порядка при гладком немагнитном зазоре

При гладком немагнитном зазоре функция эквивалентной удельной магнитной проводимости (7) включает в себя только постоянную составляющую Λ_0 . Для такого случая выражение (8) можно записать как

$$\begin{aligned}
F_r(\alpha, t) &= \frac{1}{2\mu_0} \Lambda_0^2 [F_{v1m} \cos(\omega t - v_1 \alpha) + \\
&+ F_{v2m} \cos(\omega t + v_2 \alpha) + F_{km} \cos(p\omega_r t - p\alpha)]^2 = \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \Lambda_0^2 \left[\frac{1}{2} F_{v1m}^2 (1 + \cos(2\omega t - 2v_1 \alpha)) + \right. \\
&+ \frac{1}{2} F_{v2m}^2 (1 + \cos(2\omega t + 2v_2 \alpha)) + \frac{1}{2} F_{km}^2 (1 + \cos(2p\omega_r t - 2p\alpha)) + \\
&+ F_{v1m} F_{v2m} \cos(-(v_1 + v_2)\alpha) + F_{v1m} F_{v2m} \cos(2\omega t - (v_1 - v_2)\alpha) + \\
&+ F_{v1m} F_{km} \cos((\omega - p\omega_r)t - (v_1 - p)\alpha) + \\
&+ F_{v1m} F_{km} \cos((\omega + p\omega_r)t - (v_1 + p)\alpha) + \\
&+ F_{v2m} F_{km} \cos((\omega - p\omega_r)t + (v_2 + p)\alpha) + \\
&\left. + F_{v2m} F_{km} \cos((\omega + p\omega_r)t + (v_2 - p)\alpha) \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

Порядок радиальной силы определяется коэффициентом при α . Таким образом, анализируя выражение (9), можно сделать следующие выводы. Поскольку большинство электрических машин с ДЗО выполняются многополюсными, то v_1 , v_2 и p имеют высокий порядок, т. е. часть слагаемых выражения (9), содержащих в аргументах косинусов только эти множители, не создают исследуемых радиальных сил. Другая часть слагаемых не изменяются во времени и имеют только пространственное распределение, что показывает наличие постоянной силы вдоль воздушного зазора, и также не вызывают создание исследуемых радиальных сил. Исключив эти выражения, функцию (9) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
F_r(\alpha, t) &= \frac{1}{2\mu_0} \Lambda_0^2 [F_{v1m} F_{v2m} \cos(2\omega t - (v_1 - v_2)\alpha) + \\
&+ F_{v1m} F_{km} \cos((\omega - p\omega_r)t - (v_1 - p)\alpha) + \\
&+ F_{v1m} F_{km} \cos((\omega + p\omega_r)t - (v_1 + p)\alpha) + \\
&+ F_{v2m} F_{km} \cos((\omega - p\omega_r)t + (v_2 + p)\alpha) + \\
&+ F_{v2m} F_{km} \cos((\omega + p\omega_r)t + (v_2 - p)\alpha)]. \quad (10)
\end{aligned}$$

Структуру ДЗО можно описать следующим образом: обмотка формируется из ряда одинаковых участков, называемых фазными зонами m_z , число которых кратно числу фаз m . Для трехфазных обмоток при нечетном

значении d [см. выражение (4)] количество фазных зон составляет $m_z = 2m = 6$, тогда как при четном значении d оно равно $m_z = m = 3$. Каждая фазная зона включает в себя c [см. выражение (4)] последовательно соединенных катушек. Номера основных пространственных гармоник МДС ДЗО связаны с числом фазных зон обмотки и числом катушек в фазной зоне [7]:

а) для ДЗО с шестью фазными зонами ($m_z = 6$)

$$\mp v_{1,2} = m_z \frac{c}{2} \pm 1 = 6 \frac{c}{2} \pm 1; \quad (11)$$

б) для ДЗО с тремя фазными зонами ($m_z = 3$)

$$\mp v_{1,2} = m_z \frac{c \mp 1}{2} \pm 1 = 3 \frac{c \mp 1}{2} \pm 1, \quad (12)$$

где верхние знаки выражений (11)–(12) относятся к прямобегающим гармоникам МДС, а нижние – к обратнотекущим.

В выражении (10) в аргументе первого слагаемого в коэффициенте при α содержатся только гармоники МДС обмотки, что показывает их взаимодействие. Используя формулы (11)–(12), можно рассчитать коэффициент r при α :

а) для ДЗО с шестью фазными зонами ($m_z = 6$)

$$r = v_1 - v_2 = \left(m_z \frac{c}{2} + 1 \right) - \left(m_z \frac{c}{2} - 1 \right) = -2; \quad (13)$$

б) для ДЗО с тремя фазными зонами ($m_z = 3$)

$$r = v_1 - v_2 = \left(m_z \frac{c-1}{2} + 1 \right) - \left(m_z \frac{c+1}{2} - 1 \right) = 1. \quad (14)$$

Остальные слагаемые выражения (10) в коэффициенте при α содержат номер гармоники МДС статора и число пар полюсов МДС ротора, что показывает их взаимодействие. Поскольку электрическая машина может быть выполнена для работы с любой из основных гармоник МДС обмотки, то число пар полюсов может принимать значения $p = v_1$ или $p = v_2$. Как было сказано ранее, основные гармоники МДС ДЗО имеют противоположное вращение. Соответственно, ротор будет вращаться сонаправленно с одной основной гармоникой МДС обмотки и встречно – со второй. Проанализировав коэффициенты при α в этих выражениях, можно заключить следующее. Для коэффициентов вида $(v - p)$, когда $p = v$, имеет место образование радиальной силы порядка $r = 0$ при взаимодействии гармоники МДС ротора с гармоникой МДС обмотки, имеющих одинаковый порядок. Также исследуемые радиальные силы создаются при взаимодействии МДС ротора с гармоникой МДС обмотки, имеющей противоположное направление вращения. Для такого случая расчет порядка создаваемой радиальной силы аналогичен выражениям (13) и (14). Таким образом, для

ДЗО с $m_z = 6$ образуются радиальные силы порядка $r = 2$, а для ДЗО с $m_z = 3$ – радиальные силы порядка $r = 1$. Описанные силы имеют различное изменение во времени, которое определяется коэффициентом при t .

3. Образование радиальных сил низкого порядка при односторонней зубчатости со стороны статора

Как показано в выражении (7), при учете односторонней зубчатости со стороны статора в выражении эквивалентной удельной проводимости присутствуют постоянная составляющая и переменная составляющая, определяющаяся числом зубцов статора. Поскольку анализ выражения радиальной силы при учете постоянной составляющей проведен ранее, далее рассмотрим влияние переменной составляющей. Выражение (8) можно записать как

$$\begin{aligned}
 F_r(\alpha, t) &= \frac{1}{2\mu_0} \left\{ [F_{v1m} \cos(\omega t - v_1 \alpha) + F_{v2m} \cos(\omega t + v_2 \alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + F_{km} \cos(p\omega_r t - p\alpha)] \Lambda_m \cos(Z_1 \alpha) \right\}^2 = \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{1}{4} F_{v1m}^2 \Lambda_m (2 \cos(Z_1 \alpha) + \cos(2\omega t - (2v_1 + Z_1) \alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos(2\omega t - (2v_1 - Z_1) \alpha)) + \frac{1}{4} F_{v2m}^2 \Lambda_m (2 \cos(Z_1 \alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos(2\omega t + (2v_2 - Z_1) \alpha) + \cos(2\omega t + (2v_2 + Z_1) \alpha)) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} F_{km}^2 \Lambda_m (2 \cos(Z_1 \alpha) + \cos(2p\omega_r t - (2p + Z_1) \alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos(2p\omega_r t - (2p - Z_1) \alpha)) + \frac{1}{2} F_{v1m} F_{v2m} \Lambda_m \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\cos(-(v_1 + v_2 + Z_1) \alpha) + \cos(-(v_1 + v_2 - Z_1) \alpha)) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} F_{v1m} F_{v2m} \Lambda_m (\cos(2\omega t - (v_1 - v_2 + Z_1) \alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos(2\omega t - (v_1 - v_2 - Z_1) \alpha)) + \frac{1}{2} F_{v1m} F_{km} \Lambda_m \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\cos((\omega - p\omega_r) t - (v_1 - p + Z_1) \alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos((\omega - p\omega_r) t - (v_1 - p - Z_1) \alpha)) + \frac{1}{2} F_{v1m} F_{km} \Lambda_m \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\cos((\omega + p\omega_r) t - (v_1 + p + Z_1) \alpha) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos((\omega + p\omega_r)t - (v_1 + p - Z_1)\alpha)) + \frac{1}{2}F_{v2m}F_{km}\Lambda_m \times \\
& \quad \times (\cos((\omega - p\omega_r)t + (v_2 + p - Z_1)\alpha) + \\
& + \cos((\omega - p\omega_r)t + (v_2 + p + Z_1)\alpha)) + \frac{1}{2}F_{v2m}F_{km}\Lambda_m \times \\
& \quad \times (\cos((\omega + p\omega_r)t + (v_2 - p - Z_1)\alpha) + \\
& \quad + \cos((\omega + p\omega_r)t + (v_2 - p + Z_1)\alpha)) \Big]. \tag{15}
\end{aligned}$$

Часть слагаемых выражения (15) не имеют изменения во времени, т. е. их можно не рассматривать при анализе исследуемых радиальных сил. Оставшиеся слагаемые для удобства последующего исследования целесообразно классифицировать по типу взаимодействующих гармонических составляющих и рассматривать по отдельности. Выделим три группы:

- 1) силы, обусловленные взаимодействием МДС статора с переменной составляющей магнитной проводимости;
- 2) силы, возникающие при взаимодействии МДС ротора с переменной составляющей магнитной проводимости;
- 3) силы, являющиеся результатом взаимодействия результирующей МДС с переменной составляющей магнитной проводимости.

Радиальные силы, возникающие при взаимодействии МДС статора и переменной магнитной проводимости. Список аргументов косинусоидальных функций данной группы радиальных сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\omega t - (2v_1 + Z_1)\alpha, \\ 2\omega t - (2v_1 - Z_1)\alpha, \\ 2\omega t + (2v_2 + Z_1)\alpha, \\ 2\omega t + (2v_2 - Z_1)\alpha, \\ 2\omega t - (v_1 - v_2 + Z_1)\alpha, \\ 2\omega t - (v_1 - v_2 - Z_1)\alpha. \end{array} \right.$$

Число пазов статора в машинах с элементарной ДЗО можно связать с числом фазных зон обмотки [7]:

$$Z_1 = m_z c. \tag{16}$$

В отношении коэффициентов при α вида $(2v + Z_1)$ можно заключить, что высокий порядок таких радиальных сил не вызывает значительной деформации статора. Для коэффициентов при α вида $(2v - Z_1)$ существуют

условия создания исследуемых радиальных сил. Причем порядок сил будет отличен для ДЗО с шестью и тремя фазными зонами. Это можно показать с использованием выражений (11)–(12) и (16):

а) для ДЗО с шестью фазными зонами ($m_z = 6$)

$$r = 2v_{1,2} - Z_1 = 2\left(m_z \frac{c}{2} \pm 1\right) - m_z c = m_z c \pm 2 - m_z c = \pm 2; \quad (17)$$

б) для ДЗО с тремя фазными зонами ($m_z = 3$)

$$\begin{aligned} r = 2v_{1,2} - Z_1 &= 2\left(m_z \frac{c \mp 1}{2} \pm 1\right) - m_z c = m_z (c \mp 1) \pm 2 - m_z c = \\ &= m_z c \mp m_z \pm 2 - m_z c = \mp m_z \pm 2 = \mp 3 \pm 2 = \mp 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Это объясняется тем, что число пар полюсов основных гармоник поля, создаваемого обмоткой, практически совпадает с числом зубцов статора, вследствие чего разность соответствующих пространственных гармоник оказывается малой и дает составляющие низкого порядка.

Рассматривая коэффициенты при α вида $(v_1 - v_2 \pm Z_1)$, можно заключить следующее. Поскольку разность порядков основных гармоник $(v_1 - v_2)$ имеет малую величину, а число зубцов статора Z_1 значительно ее превосходит, то результирующий порядок радиальной силы оказывается соизмеримым с Z_1 и относится к высоким пространственным гармоникам.

Радиальные силы, возникающие при взаимодействии МДС ротора и переменной магнитной проводимости. Список аргументов косинусоидальных функций данной группы радиальных сил:

$$\begin{cases} 2p\omega_r t - (2p + Z_1)\alpha, \\ 2p\omega_r t - (2p - Z_1)\alpha. \end{cases}$$

Учитывая, что для обеспечения работы электрической машины число пар полюсов возбуждения p должно соответствовать числу пар полюсов одной из основных гармоник поля обмотки ($p = v_1$ или $p = v_2$), анализ условий образования радиальных сил при взаимодействии МДС ротора с переменной составляющей магнитной проводимости полностью аналогичен анализу, проведенному в выражениях (17) и (18). Следовательно, и в данном случае имеют место те же закономерности: для обмоток с $m_z = 6$ образуются силы порядка $r = 2$, а для обмоток с $m_z = 3$ – силы порядка $r = 1$.

Радиальные силы, возникающие при взаимодействии результирующей МДС и переменной магнитной проводимости. Список аргументов косинусоидальных функций данной группы радиальных сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\omega - p\omega_r)t - (v_1 - p + Z_1)\alpha, \\ (\omega - p\omega_r)t - (v_1 - p - Z_1)\alpha, \\ (\omega + p\omega_r)t - (v_1 + p + Z_1)\alpha, \\ (\omega + p\omega_r)t - (v_1 + p - Z_1)\alpha, \\ (\omega - p\omega_r)t + (v_2 + p + Z_1)\alpha, \\ (\omega - p\omega_r)t + (v_2 + p - Z_1)\alpha, \\ (\omega + p\omega_r)t + (v_2 - p + Z_1)\alpha, \\ (\omega + p\omega_r)t + (v_2 - p - Z_1)\alpha_1. \end{array} \right.$$

Здесь к созданию исследуемых радиальных сил низких порядков приводят только функции, содержащие коэффициенты при α вида $(v + p - Z_1)$. Причем существуют два варианта создания радиальных сил низких порядков.

1. Силы порядка $r = 0$. Это справедливо для случая взаимодействия основной гармоники МДС ротора, основной гармоники МДС статора, не являющейся рабочей, и основной гармоники магнитной проводимости. Это можно доказать с использованием выражений (11)–(12) и (16). Продемонстрируем это для случая, когда v_2 – рабочая гармоника статора ($p = v_2$), а v_1 – нерабочая:

а) для ДЗО с шестью фазными зонами ($m_z = 6$)

$$r = v_1 + p - Z_1 = v_1 + v_2 - Z_1 = \left(m_z \frac{c}{2} + 1 \right) + \left(m_z \frac{c}{2} - 1 \right) - m_z c = 0;$$

б) для обмоток с тремя фазными зонами ($m_z = 3$)

$$r = v_1 + p - Z_1 = v_1 + v_2 - Z_1 = \left(m_z \frac{c-1}{2} + 1 \right) + \left(m_z \frac{c+1}{2} - 1 \right) - m_z c = 0.$$

2. Для ДЗО с различным числом фазных зон имеет место образование радиальных сил разных порядков. Это справедливо для случая взаимодействия гармоники МДС ротора, порядок которой соответствует рабочей гармонике МДС статора, рабочей гармоники МДС статора и эквивалентной магнитной проводимости. Это также можно доказать с использованием выражений (11)–(12) и (16). Продемонстрируем это для случая, когда v_1 – рабочая гармоника статора ($p = v_1$):

а) для ДЗО с шестью фазными зонами ($m_z = 6$)

$$r = v_1 + p - Z_1 = v_1 + v_1 - Z_1 = \left(m_z \frac{c}{2} + 1 \right) + \left(m_z \frac{c}{2} - 1 \right) - m_z c = 2;$$

б) для обмоток с тремя фазными зонами ($m_z = 3$)

$$r = v_1 + p - Z_1 = v_1 + v_1 - Z_1 = \left(m_z \frac{c-1}{2} + 1 \right) + \left(m_z \frac{c+1}{2} - 1 \right) - m_z c = 1.$$

Заключение

В настоящей работе выполнено теоретическое исследование условий образования магнитных радиальных сил низкого порядка в электрических машинах с ДЗО и возбуждением от ПМ. В ходе проведенного анализа получены следующие основные результаты. Разработано обобщенное аналитическое выражение для удельной радиальной силы, действующей между статором и ротором, учитывающее пространственно-временное распределение магнитного поля и включающее основные гармонические составляющие (обладающие наибольшей амплитудой) МДС обмотки, МДС возбуждения и эквивалентной магнитной проводимости воздушного зазора. Показано, что радиальные силы низкого порядка в машинах рассматриваемого класса возникают как при гладком немагнитном зазоре, так и при учете односторонней зубчатости со стороны зубчатости статора. Показано также, что в электрических машинах с ДЗО как с шестью, так и с тремя фазными зонами имеет место образование сил нулевого порядка, представляющих собой пульсирующее усилие растяжения/сжатия. В дополнение к этому установлено, что в машинах с ДЗО с шестью фазными зонами образуются радиальные силы второго порядка, вызывающие изгибные деформации статорного кольца и его искривление к форме эллипса, а в машинах с ДЗО с тремя фазными зонами – силы первого порядка, приводящие к одностороннему притяжению ротора к статору. Причем данные силы имеют место как при гладком немагнитном зазоре, так и при учете зубчатости статора. Представленные в работе аналитические зависимости и выявленные закономерности могут быть использованы на этапе проектирования электрических машин рассматриваемого класса в ходе выбора конструктивных технических решений для снижения исследуемых гармонических составляющих, являющихся причиной возникновения магнитных радиальных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Noise and vibration characteristics analysis on different structure parameters of permanent magnet synchronous motor / Y. Li, S. Li, J. Xia, F. Zhang // 2013 International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS). – Busan, 2013. – P. 46–49. – DOI: 10.1109/ICEMS.2013.6754549.
2. Analysis of global and local force harmonics and their effects on vibration in permanent magnet synchronous machines / J. Zou, H. Lan, Y. Xu, B. Zhao // IEEE Transactions on Energy Conversion. – 2017. – Vol. 32 (4). – P. 1523–1532. – DOI: 10.1109/TEC.2017.2720422.
3. **Chen Y.S., Zhu Z.Q., Howe D.** Vibration of PM brushless machines having a fractional number of slots per pole // IEEE Transactions on Magnetics. – 2006. – Vol. 42 (10). – P. 3395–3397. – DOI: 10.1109/TMAG.2006.879072.
4. Comparison of radial vibration forces in 10-pole/12-slot fractional slot surface-mounted and interior PM brushless AC machines / Z.P. Xia, Z.Q. Zhu, L.J. Wu, G.W. Jewell // The XIX International Conference on Electrical Machines – ICEM 2010. – Rome, 2010. – P. 1–6. – DOI: 10.1109/ICELMACH.2010.5608062.
5. Unequal teeth design to reduce electromagnetic vibration in fractional-slot concentrated-windings permanent-magnet machine / S. Zhu, J. Ji, W. Zhao, J. Zheng,

- Y. Mao, G. Liu // *Journal of Magnetism*. – 2019. – Vol. 24 (4). – P. 657–667. – DOI: 10.4283/JMAG.2019.24.4.657.
6. Геллер Б., Гамата В. Высшие гармоники в асинхронных машинах. – М.: Энергия, 1981. – 351 с.
7. Шевченко А.Ф. Электромеханические преобразователи энергии с модулированным магнитным потоком: дис. ... д-ра техн. наук. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. – 346 с.

STUDY OF RADIAL ELECTROMAGNETIC FORCES IN MACHINES WITH FRACTIONAL-SLOT CONCENTRATED WINDINGS AND PERMANENT MAGNETS

Babitsky D.Yu.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Electromagnetic radial forces are among the dominant sources of vibration and acoustic noise in permanent magnet synchronous machines, making their prediction an important task in the design of high-performance electrical drives. This work presents a theoretical investigation of the mechanisms responsible for the generation of low-order radial force components in machines with fractional-slot concentrated windings. The presented analytical model describes the interaction between the stator magnetic field, the rotor permanent-magnet excitation, and the air-gap magnetic reluctivity. The proposed formulation makes it possible to evaluate the contribution of individual harmonic components and to identify the physical origin of radial force waves under both idealized smooth air-gap conditions and practical slotted stator configurations. The analysis shows that breathing-mode forces are present irrespective of stator slotting, whereas additional low-order force components strongly depend on the winding layout. Machines employing six phase zones predominantly generate second-order radial forces that promote elliptical deformation of the stator, while three-phase-zone topologies are susceptible to first-order forces responsible for unbalanced magnetic pull. These findings clarify the relationship between winding configuration and electromagnetic excitation of structural vibrations. The derived analytical expressions provide a convenient tool for the electromagnetic design of permanent magnet machines and can support the development of low-noise, low-vibration electrical drives through informed selection of winding and magnetic circuit parameters.

Keywords: radial electromagnetic force, fractional-slot concentrated winding, permanent magnets, magnetomotive force.

DOI: 10.17212/1727-2769-2026-3-5-19

REFERENCES

1. Li Y., Li S., Xia J., Zhang F. Noise and vibration characteristics analysis on different structure parameters of permanent magnet synchronous motor. *2013 International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*. Busan, 2013, pp. 46–49. DOI: 10.1109/ICEMS.2013.6754549.
2. Zou J., Lan H., Xu Y., Zhao B. Analysis of global and local force harmonics and their effects on vibration in permanent magnet synchronous machines. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2017, vol. 32 (4), pp. 1523–1532. DOI: 10.1109/TEC.2017.2720422.

3. Chen Y.S., Zhu Z.Q., Howe D. Vibration of PM brushless machines having a fractional number of slots per pole. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2006, vol. 42 (10), pp. 3395–3397. DOI: 10.1109/TMAG.2006.879072.
4. Xia Z.P., Zhu Z.Q., Wu L.J., Jewell G.W. Comparison of radial vibration forces in 10-pole/12-slot fractional slot surface-mounted and interior PM brushless AC machines. *The XIX International Conference on Electrical Machines – ICEM 2010*. Rome, 2010, pp. 1–6. DOI: 10.1109/ICELMACH.2010.5608062.
5. Zhu S., Ji J., Zhao W., Zheng J., Mao Y., Liu G. Unequal teeth design to reduce electromagnetic vibration in fractional-slot concentrated-windings permanent-magnet machine. *Journal of Magnetics*, 2019, vol. 24 (4), pp. 657–667. DOI: 10.4283/JMAG.2019.24.4.657.
6. Heller B., Hamata V. *Harmonic field effects in induction machines*. Academia, 1977. 330 p. (Russ. ed.: Geller B., Gamata V. *Vysshie garmoniki v asinkhronnykh mashinakh*. Moscow, Energiya Publ., 1981. 351 p.).
7. Shevchenko A.F. *Elektromekhanicheskie preobrazovateli energii s modulirovannym magnitnym potokom*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Electromechanical energy converters with modulated magnetic flux. Dr. eng. sci. diss.]. Novosibirsk, NSTU Publ., 1999. 346 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Бабицкий Денис Юрьевич – родился в 1995 году, ассистент кафедры электромеханики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: электрические машины с постоянными магнитами. Опубликовано 21 научная работа. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: babiczkiy.2013@corp.nstu.ru).

Babitsky Denis Yurievich (b. 1995), assistant lecturer at the Department of Electromechanics in Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on permanent magnet electric machines. He is the author of 21 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: babiczkiy.2013@corp.nstu.ru).

Статья поступила 16 июля 2026 г.

Received July 16, 2026

To Reference:

Babitsky D.Yu. Issledovanie radial'nykh elektromagnitnykh sil v mashinakh s drobnymi zubtsovymi obmotkami i postoyannymi magnitami [Study of radial electromagnetic forces in machines with fractional-slot concentrated windings and permanent magnets]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii = Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2026, no. 3 (72), pp. 5–19. DOI: 10.17212/1727-2769-2026-3-5-19.