

УДК 532.517.3

**О РЕЖИМАХ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ
МЕЖДУ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ****Е.Г. Борд, В.Я. Рудяк***Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)*

Исследуется устойчивость спирального течения в каналах различной ширины между соосными цилиндрами, возникающего из-за осевого перепада давления и вращения внутреннего цилиндра. Показано, что устойчивость течения определяется двумя независимыми числами Рейнольдса, соответствующими течению в осевом и в азимутальном направлениях. В широком диапазоне изменения параметров течений построены кривые нейтральной устойчивости и найдены зависимости коэффициентов усиления возмущений от волнового числа. Установлено, что в зависимости от условий наиболее неустойчивыми могут быть моды с различными азимутальными волновыми числами. Изучена зависимость характеристика устойчивости течения от азимутального числа Рейнольдса. Обнаружен режим неустойчивости спирального течения, соответствующий неустойчивости Рэлея–Тейлора, характерный для цилиндрического течения Куэтта. Этот тип неустойчивости подавляется при увеличении осевого числа Рейнольдса. Проведено сопоставление данных расчетов с известными экспериментальными результатами и установлено их хорошее согласование. Наконец, показано, что при определенных условиях возникают режимы ветвления кривых нейтральной устойчивости. Определены диапазоны изменения чисел Рейнольдса, в которых такое ветвление фиксируется.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, спиральные течения, ламинарно-турбулентный переход, неустойчивость Рэлея–Тейлора, кривые нейтральной устойчивости.

DOI: 10.17212/1727-2769-2014-4-7-20

Введение

Задача устойчивости спирального течения в канале между концентрическими цилиндрами является одной из немногих модельных задач классической теории гидродинамической устойчивости все еще полностью не решенной. Сложность состоит в том, что спиральное течение фактически является суперпозицией двух достаточно разнородных течений в цилиндрическом канале: напорного и течения Куэтта.

Задача устойчивости напорного течения в цилиндрическом канале, т. е. течения, возникающего при покоящемся внутреннем цилиндре, имеет два предельных случая: плоское течение Пуазейля и течение Хагена–Пуазейля в трубе. Характеристики устойчивости течений в этих двух предельных случаях существенно различны. В частности, согласно линейной теории плоское течение Пуазейля неустойчиво, а течение в трубе устойчиво. С другой стороны, напорное течение в цилиндрическом канале (цилиндрическое течение Пуазейля) неустойчиво уже относительно бесконечно малых возмущений. Впервые это было установлено в работе [1], где для осесимметричных возмущений численно были построены кривые нейтральной устойчивости для течений в зазорах различной ширины. Представленный здесь же асимптотический анализ, однако, указывал и на существование других неустойчивых мод возмущений. Численные исследования

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (соглашение № 14-19-00312).

устойчивости различных мод возмущений течения Пуазейля в зазоре удалось завершить сравнительно недавно. В работе [2] приведены критические значения чисел Рейнольдса и азимутальных волновых чисел. Установлено, что принципиальное отличие течения Пуазейля в цилиндрическом канале от плоского проявляется, если относительная ширина зазора $\theta = R_i/R_o$ менее $\theta < 0,8$ (здесь R_i , R_o радиус внутреннего и внешнего цилиндра соответственно). Для таких течений наиболее неустойчивыми становятся неосесимметричные моды возмущений. Исчерпывающе, однако, они не изучены до сих пор.

История раннего периода изучения течения Куэтта, относящегося к первой половине XX века, описана в работе [3], полученные здесь экспериментальные результаты в значительной мере определили проблематику исследований этого течения на несколько последующих десятилетий. В частности, установлено множество возможных типов ламинарно-турбулентного перехода и найдены границы области неустойчивости Тейлора, соответствующие вращению внутреннего и внешнего цилиндров. Позднее тем же автором исследовано влияние граничных эффектов, вызванных конечным осевым размером цилиндров, и эксцентриситета вращающихся цилиндров [4]. Установлено, что эффекты влияния конечной длины цилиндров сохраняются в установках с длиной цилиндров, превышающих десять размеров зазора между цилиндрами, а устойчивость течения возрастает с увеличением эксцентриситета.

Теоретический анализ, проведенный в [5], позволил объяснить экспериментальные данные [3]. Систематическое численное исследование устойчивости течения Куэтта между концентрическими цилиндрами для течений в зазорах различной ширины представлено в работе [6]. Здесь получены критические значения азимутального числа Рейнольдса и осевого волнового числа для течений в цилиндрических каналах различной ширины. Показано, что течение становится неустойчивым при числах Рейнольдса, достаточно малых по сравнению с напорными течениями. В работах [7, 8] представлены кривые нейтральной устойчивости. Наконец, в экспериментах [9] наблюдалась последовательность изменений неустойчивых состояний течения в закритической области.

Идеологически близкой является задача о цилиндрическом течении стока жидкости с закруткой, экспериментально изученная в работе [10]. Одновременно с помощью моделирования кольцевого слоя сдвига системой гауссовских вихрей [11] была исследована как линейная, так и нелинейная стадия устойчивости данных течений. Были установлены различные каналы развития неустойчивости, которые приводили к образованию в течении двух, трех и т.д. вихревых жгутов [10, 12, 13] (см. также [14]).

Весьма полное экспериментальное исследование устойчивости спирального течения в цилиндрическом канале с отношением радиусов цилиндров $\theta = 0,5$ выполнено в [15]. Здесь для осевых чисел Рейнольдса Re_z в диапазоне $Re_z = 1...150$ были найдены критические значения азимутального числа Рейнольдса и критические волновые числа. Установлено, что неустойчивыми могут быть различные азимутальные моды, в том числе возмущения с азимутальным волновым числом равным нулю. Критические азимутальные числа Рейнольдса Re_φ при этом не превышали двухсот.

Практически одновременно появилось достаточно систематическое численное исследование спирального течения [16], здесь изучены течения при $\theta = 0,77$ и $\theta = 0,95$. Рассматривалась устойчивость течения как по отношению к осесимметричным, так и к неосесимметричным возмущениям. Для серии значений числа

Тейлора построены кривые нейтральной устойчивости. В недавней работе [2] численно изучена устойчивость спирального течения. Здесь получены кривые нейтральной устойчивости при заданном осевом числе Рейнольдса $Re_z = 100$, при этом были обнаружены замкнутые области неустойчивости, разрывы и образование отдельных ветвей на кривых нейтральной устойчивости.

Численное исследование механизмов неустойчивости спирального течения и похожего течения, возникающего при скольжении внутреннего цилиндра в направлении оси предпринималось в работах [17, 18]. Построены поверхности нейтральной устойчивости в переменных (Re_ϕ, Re_z) . Известные экспериментальные результаты [15] качественно соответствуют найденным в [17, 18] границам области неустойчивости. Тем не менее критические числа Рейнольдса, полученные по результатам расчетов в [17, 18] существенно отличаются от критических чисел Рейнольдса, найденных в эксперименте.

Подводя итог этому краткому обзору, следует отметить, что систематические данные относительно устойчивости спирального течения все еще отсутствуют. Вместе с тем данная задача имеет высокую практическую мотивацию. Такие течения реализуются в различных технических устройствах: в теплообменниках, подшипниках скольжения, центрифугах, буровых колоннах, ротационных вискозиметрах и т. д. Численно они достаточно хорошо исследованы и в ламинарном [19–22], и в турбулентном режимах течения [23].

Тем не менее данных о ламинарно-турбулентном переходе в таких течениях все еще недостаточно для практического применения. Систематическое численное изучение устойчивости спирального течения и является целью данной работы.

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарное течение в канале между внутренним цилиндром с радиусом R_i и внешним цилиндром, радиус которого равен R_o . Уравнения Навье–Стокса в цилиндрических координатах r, ϕ, z имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{V^2}{r} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \nu \left(\Delta U - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{U}{r^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{UV}{r} + W \frac{\partial V}{\partial z} - \nu \left(\Delta V + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{V}{r^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{r \partial \phi}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial W}{\partial \phi} + W \frac{\partial W}{\partial z} - \nu \Delta W = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (4)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ν – коэффициент кинематической вязкости,

ρ – плотность жидкости. В силу симметрии стационарного спирального течения (суперпозиции цилиндрических течений Пуазейля и Куэтта) между вращающимися концентрическими цилиндрами относительно сдвига и поворота вокруг оси течения профиль скорости не зависит от азимутальной координаты ϕ и осевой

координаты z . В этом случае уравнения (1)–(4) существенно упрощаются. В частности, из уравнения неразрывности (1) и условий непроницаемости на границах цилиндра следует, что радиальная компонента скорости равна нулю ($U = 0$). Уравнение (2) тогда сводится к условию баланса центробежных сил инерции и радиального распределения давления: $\rho(V^2/r) = \partial P / \partial r$. Уравнение (3) приводит к уравнению относительно азимутальной компоненты скорости:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} = 0, \quad (5)$$

из (4) следует уравнение для определения осевой компоненты скорости:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{\rho \nu} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (6)$$

Уравнение (5) совместно с условиями непроницаемости и прилипания на внутреннем цилиндре, вращающемся с угловой скоростью Ω , $V(R_i) = \Omega R_i$, и неподвижном внешнем цилиндре $V(R_o) = 0$, приводят к известному решению [24]:

$$U_c = 0; \quad V_c = \frac{\theta \Omega R_i}{1 - \theta^2} V_0(r); \quad V_0(r) = \frac{R_o}{r} - \frac{r}{R_0}; \quad W_c = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) с условиями $W(R_i) = W(R_o) = 0$ дает решение, описывающее цилиндрическое течение Пуазейля [25, гл. X, § 89] при постоянном перепаде давления $\Delta p = -(\partial P / \partial z)$:

$$U_p = 0; \quad V_p = 0; \quad W_p = \frac{\Delta p R_o^2}{4 \nu \rho} W_0(r); \quad W_0(r) = 1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 - \frac{1 - \theta^2}{\ln \theta} \ln \frac{r}{R_o}. \quad (8)$$

Линейная задача устойчивости получается в результате подстановки в уравнения Навье–Стокса (2)–(4) и уравнение неразрывности (1) возмущенного решения $(\varepsilon u(r, \varphi, z, t), V_0(r) + \varepsilon v(r, \varphi, z, t), W_0(r) + \varepsilon w(r, \varphi, z, t))$ и последующего разложения по амплитуде возмущений ε . Решение полученных таким образом линеаризованных уравнений представляется в виде нормальных волн:

$$(u(r, \varphi, z, t), v(r, \varphi, z, t), w(r, \varphi, z, t)) = (u(r), v(r), w(r)) \exp(i\alpha z + in\varphi - i\omega t),$$

здесь α и n – осевое и азимутальное волновое число соответственно, ω – комплексная частота возмущений. В результате получаются следующие уравнения для амплитуд возмущений:

$$u_r + u/r + in v/r + i\alpha w = 0, \quad (9)$$

$$(i\tilde{W} - L)u + 2 \operatorname{Re}_\varphi V_0 v/r + (u + 2inv)/r^2 = -\partial_r p, \quad (10)$$

$$(i\tilde{W} - L)v + \operatorname{Re}_\varphi (V_0' + V_0/r)u + (v - 2inu)/r^2 = -in p/r, \quad (11)$$

$$(i\tilde{W} - L)w + \operatorname{Re}_z W_0' u = -i\alpha p, \quad (12)$$

здесь $L = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - n^2/r^2 - \alpha^2$; $\tilde{W} = -\omega + \alpha \text{Re}_z W_0 + n \text{Re}_\varphi V_0/r$; осевое число Рейнольдса равно $\text{Re}_z = W_{\max} d/\nu$, а азимутальное: $\text{Re}_\varphi = \Omega d^2/\nu$; W_{\max} – максимальная азимутальная скорость; $d = (R_o - R_i)/2$.

Однородная краевая задача для уравнений (9)–(12) приводит к задаче на собственные значения ω при заданных значениях осевого и азимутального чисел Рейнольдса, осевого и азимутального волновых чисел. Решение задачи на собственные значения представляется кривыми нейтрального роста возмущений (нейтральными кривыми). Частные задачи устойчивости для течения Пуазейля и течения Куэтта могут быть получены из уравнений (9)–(12) в предположениях $\text{Re}_\varphi = 0$ и $\text{Re}_z = 0$ соответственно.

В настоящей работе задача устойчивости решалась численно с использованием метода Галеркина, основанного на построении бездивергентного набора базисных функций, являющихся комбинациями полиномов Чебышева [26–28].

2. Результаты расчетов устойчивости спирального течения

На рис. 1 и в табл. 1 приведены результаты расчетов и критические числа Рейнольдса, полученные для течения в зазоре с $\theta = 0,5$. Точками на рисунке показаны критические числа Рейнольдса, полученные в экспериментах [15]. Расчеты проводились при фиксированных значениях азимутальных чисел Рейнольдса, соответствовавших условиям экспериментов. В расчетах определялись кривые нейтральной устойчивости в плоскости (Re_z, α) , по кривым нейтральной устойчивости определялись критические осевые числа Рейнольдса Re_z^* .

Вид кривых нейтральной устойчивости позволяет сделать вывод, что в данном диапазоне осевых чисел Рейнольдса происходит изменение типа неустойчивости. Неустойчивости типа Толлмина–Шлихтинга соответствует кривая 1.

Однако в отличие от плоского течения здесь она наблюдается на азимутальной моде с волновым числом $n = 5$. Кривые 3, 4, 5, 6 демонстрируют тенденцию к неустойчивости течения при малых осевых числах Рейнольдса и стабилизацию течения с увеличением осевого числа Рейнольдса. Вид этих кривых позволяет сделать вывод о возникновении рэлей-тэйлоровской неустойчивости течения Куэтта. При этом неустойчивыми оказываются различные азимутальные моды возмущений. Кривые 3, 4 получены для первой азимутальной моды, а 5, 6 – для осесимметричных возмущений. Замкнутая область неустойчивости, ограниченная кривой 2, может рассматриваться как переходное состояние между двумя различными типами неустойчивости.

Экспериментальные данные [15] интерпретировались ранее в работе [18], при этом были получены фрагменты кривых нейтральной устойчивости, которые не позволяли увидеть какого-либо систематического поведения в экспериментальных данных. Предположение о рэлей-тэйлоровском механизме неустойчивости,

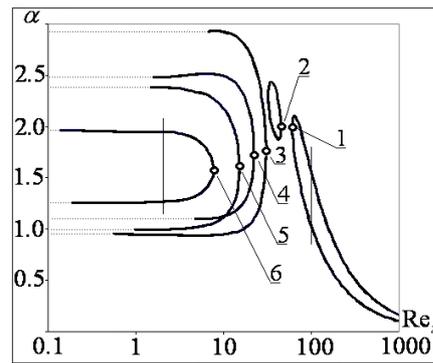


Рис. 1 – Кривые нейтральной устойчивости спирального течения

Fig. 1 – Spiral flow neutral stability curves

приводящем к появлению кривых нейтральной устойчивости 3–6 на рис. 1, требует дополнительной аргументации. Необходимо получить дополнительную информацию о характере неустойчивости в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса. Прежде всего могут быть рассмотрены зависимости коэффициентов усиления от азимутальных волновых чисел и от азимутальных чисел Рейнольдса.

Таблица 1 / Table 1

Критические осевые числа Рейнольдса для спирального течения
Critical azimuthal Reynolds numbers in spiral flow

Кривая на рис. 1	Re_z^*	Re_φ	n
1	60,0	51,0	5
2	44,95	52,0	3
3	30,15	48,50	1
4	21,91	43,0	1
5	15,07	38,92	0
6	7,52	35,33	0

На рис. 2 представлены зависимости коэффициента усиления от волнового числа, полученные при фиксированных осевых числах Рейнольдса. Зависимости, представленные на рис. 2, *a*, соответствуют вертикальному сечению области неустойчивости, ограниченной кривой 1 на рис. 1. Видно, что моды, соответствующие азимутальным волновым числам $n < 5$, являются затухающими, причем начиная с $n = 1$ максимальное значение коэффициентов усиления монотонно возрастает с увеличением n . Мода $n = 5$, для которой получена кривая нейтральной устойчивости 1 на рис. 1, оказывается младшей неустойчивой модой при данном значении азимутального числа Рейнольдса $Re_\varphi = 51$.

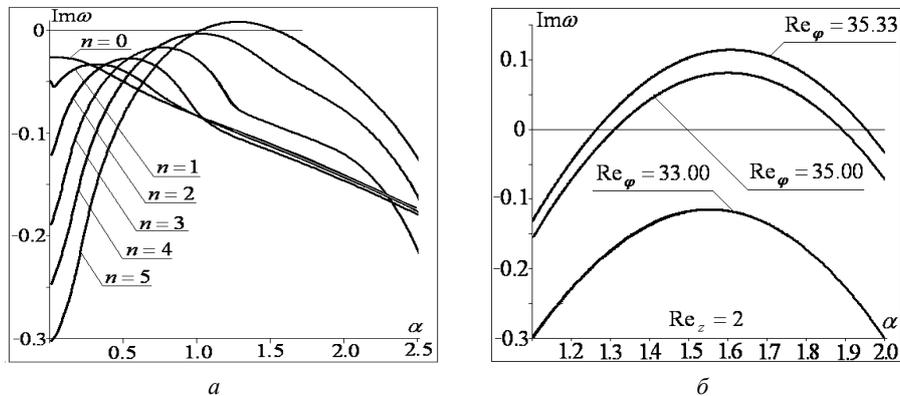


Рис. 2 – Зависимости коэффициента усиления возмущений от волнового числа:

a) $Re_z = 100$, $Re_\varphi = 51$; *б*) $Re_z = 2$

Fig. 2 – Temporal growth increment dependencies on wave number:

a) $Re_z = 100$, $Re_\varphi = 51$; *b*) $Re_z = 2$

Кривая нейтральной устойчивости 6 на рис. 1 получена для азимутальной моды $n = 0$, поэтому изменение устойчивости может быть связано только с вариацией азимутального волнового числа Re_φ . Зависимости коэффициентов усиления на рис. 2, *б* демонстрируют монотонную дестабилизацию течения с увеличе-

нием Re_ϕ . Видно также, что значение азимутального числа Рейнольдса, при котором получена кривая *b* на рис. 1, близко к критическому.

В условиях эксперимента труднопреодолимым препятствием является контроль азимутального волнового числа неустойчивой моды, поэтому представляет интерес исследование устойчивости отдельных азимутальных мод в возможно более широком диапазоне изменения азимутального числа Рейнольдса.

На рис. 3 приведены кривые нейтральной устойчивости, полученные для возмущений с азимутальным волновым числом $n = 0$ для серии значений азимутального числа Рейнольдса (табл. 2), расширенной по сравнению с исследованными в [18]. Нейтральной кривой *b* на рис. 1 здесь соответствует нейтральная кривая 1 рис. 3. Рис. 3 позволяет увидеть проявление типичного режима неустойчивости, связанного с вращением внутреннего цилиндра, характеризуемого азимутальным числом Рейнольдса Re_ϕ , которое стабилизируется с увеличением осевого числа Рейнольдса Re_z .

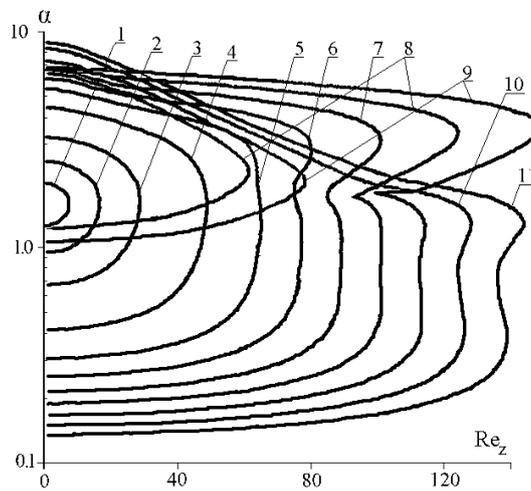


Рис. 3 – Кривые нейтральной устойчивости возмущений с $n = 0$ течения в канале $\theta = 0,5$

Fig. 3 – Neutral stability curves for the disturbances flow $n = 0$ in middle width channel $\theta = 0,5$

Таблица 2 / Table 2

Значения азимутального числа Рейнольдса для кривых нейтральной устойчивости на рис. 3

Azimuthal Reynolds numbers correspondence to curves on fig. 3

Номер кривой	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Re_ϕ	35,33	40	50,425	75	100	120	140	160	180	200	220

Сопоставление диапазона азимутальных волновых чисел, в котором имеет место неустойчивость спирального течения в пределе $Re_z \rightarrow 0$ с кривыми нейтральной устойчивости течения Куэтта в плоскости (Re_ϕ, α) , представленными на рис. 4, позволяет сделать вывод о том, что при достаточно малых осевых

числах Рейнольдса неустойчивость спирального течения соответствует рэлей-тейлоровской неустойчивости течения Куэтта, вызванного вращением внутреннего цилиндра.

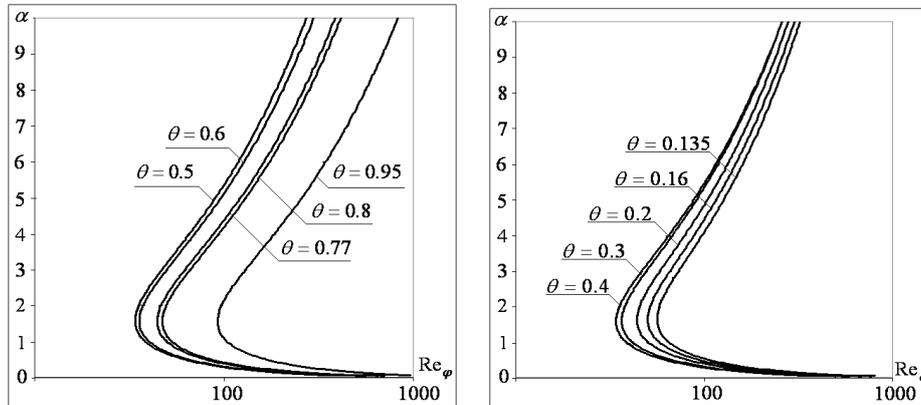


Рис. 4 – Кривые нейтральной устойчивости течения Куэтта, вызванного вращением внутреннего цилиндра в каналах различной ширины

Fig. 4 – Couette flow neutral stability curves with various channel width

Следует отметить также появление ветвления на кривых нейтральной устойчивости 8, 9 на рис. 3, связанного с изменением осевого числа Рейнольдса. Диапазон параметров, при которых наблюдается ветвление, ограничен, при этом поведение нижней части кривых нейтральной устойчивости основной моды возмущений остается непрерывным по параметру Re_ϕ .

Эксперименты [15] проводились в канале средней ширины $\theta = 0,5$. В работе [2] отмечалось, в частности, что изменение ширины канала может существенно влиять на характеристики устойчивости течения Пуазейля. Представляет интерес исследование возможности возникновения рэлей-тейлоровской неустойчивости в спиральном течении в каналах различной ширины. Кривые нейтральной устойчивости для течений в узком $\theta = 0,8$ и широком $\theta = 0,2$ каналах представлены на рис. 5. Значения азимутального числа Рейнольдса для нейтральных кривых на этих рисунках приведены в табл. 3.

Вид кривых нейтральной устойчивости на рис. 5 позволяет сделать вывод, что линейная неустойчивость спирального течения, соответствующая неустойчивости Рэля–Тейлора течения Куэтта, является типичной для течений между коаксиальными цилиндрами независимо от ширины канала. Диапазон волновых чисел, при которых течение становится неустойчивым, соответствует диапазону неустойчивости течения Куэтта, которое возникает когда $Re_z \rightarrow 0$. Увеличение азимутального числа Рейнольдса приводит к дестабилизации течения. Зависимость характеристик устойчивости от азимутального числа Рейнольдса в спиральном течении оказывается немонотонной. На рис. 5, а выделяются нейтральные кривые 6, 7, которые в случае узкого канала явно свидетельствуют о ветвлении решения, аналогичного ветвлению решения задачи устойчивости в канале средней ширины $\theta = 0,5$. Границы диапазона азимутальных чисел Рейнольдса, в котором возникает ветвление решения в узком канале, оказываются заметно смещены в сторону увеличения по сравнению с соответствующим диапазоном в канале средней ширины.

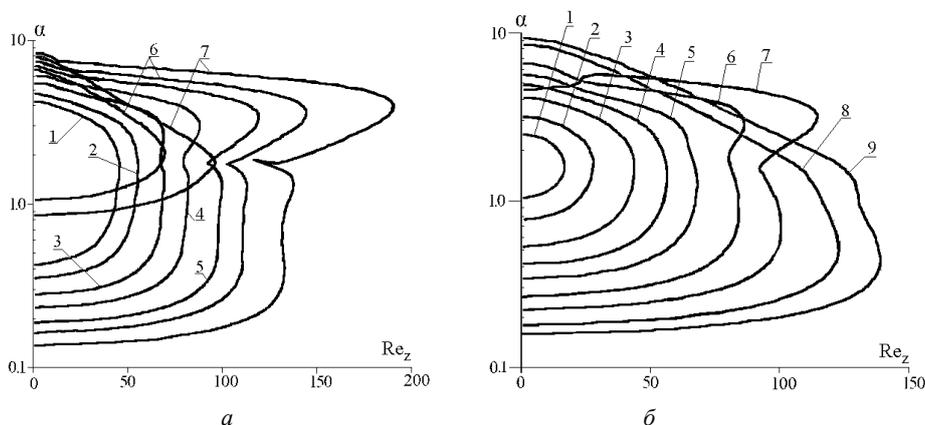


Рис. 5 – Кривые нейтральной устойчивости для спиральных течений в широком и узком канале:

а) узкий канал $\theta = 0,8$; б) широкий канал $\theta = 0,2$

Fig. 5 – Neutral stability curves for the spiral flows in wide and narrow channels:

a) narrow channel $\theta = 0,8$; b) wide channel $\theta = 0,2$

Таблица 3 / Table 3

Значения азимутального числа Рейнольдса для кривых нейтральной устойчивости на рис. 5, а, б

Azimuthal Reynolds numbers correspondence to curves on fig. 5, a, b

Номер кривой	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Re_φ (рис. 5, а)	100	120	150	180	220	250	300		
Re_φ (рис. 5, б)	50	60	80	100	120	150	180	220	250

Для течения в широком канале $\theta = 0,2$ рис. 5, б тенденция, связанная с появлением ветвления решения, наблюдается в диапазоне азимутальных чисел Рейнольдса, близком к диапазону ветвления в канале средней ширины, при этом собственно ветвления решения для течения в широком канале не обнаружено. Эффект, связанный с возможным ветвлением решения, проявляется в искажении формы верхних ветвей кривых нейтральной устойчивости 6 и 7.

Заключение

Результаты проведенных систематических расчетов позволяют прийти к заключению о сохранении при определенных условиях рэлей-тейлоровского механизма неустойчивости, известного для течения Куэтта, и в спиральном течении. Построенные кривые нейтральной устойчивости дают возможность систематизации описания известных экспериментальных данных [15]. Установлено, что наличие осевой составляющей скорости в спиральном течении приводит к подавлению при достаточно больших осевых числах Рейнольдса рэлей-тейлоровской неустойчивости. С другой стороны, при определенных условиях в спиральном течении рэлей-тейлоровская неустойчивость может приводить к ветвлению решения.

Просматривается качественное и прямое количественное соответствие между отдельными режимами неустойчивости в спиральном течении и линейной неустойчивостью течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. Это обстоятельство может служить основанием для привлечения внимания к проблеме устойчивости спиральных течений. Хорошо известно особое место, которое зани-

мает задача устойчивости течения Куэтта в теории гидродинамической устойчивости. Известно также (см., например, работу [9]), что и для течения Куэтта единый общий подход к описанию различных режимов неустойчивости до сих пор не сформулирован в полном объеме. С одной стороны, установленная выше прямая связь между режимами неустойчивости спирального течения и течения Куэтта представляется простым отражением свойства регулярности задачи в пределе $Re_z \rightarrow 0$, а с другой стороны, именно это обстоятельство должно служить стимулом для исследования сохранения или трансформации многочисленных, накопленных за десятилетия, фактов об устойчивости течения Куэтта в задаче устойчивости спирального течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mott J.E., Joseph D.D.** Stability of parallel flow between concentric cylinders // *Physics of Fluids*. – 1968. – Vol. 11, iss. 10. – P. 2065–2073.
2. **Cotrell D.L., Pearlstein A.J.** Linear stability of spiral and annular poiseuille flow for small radius ratio // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2006. – Vol. 547. – P. 1–20.
3. **Coles D.** Transition in circular Couette flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1965. – Vol. 21, iss. 3. – P. 385–425.
4. **Cole J.A.** Taylor-vortex instability and annulus-length effects // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1976. – Vol. 75, iss. 1. – P. 1–15.
5. **Sparrow E.M., Munro W.D., Jonsson V.K.** Instability of the flow between rotating cylinders: the wide-gap problem // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1964. – Vol. 20, iss. 1. – P. 35–46.
6. **DiPrima R.C., Eagles P.M., Ng B.S.** The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow // *Physics of Fluids*. – 1984. – Vol. 27, iss. 10. – P. 2403–2411.
7. **Колесов В.В., Хоперский А.Г.** Бикритические точки в неізотермической проблеме Куэтта–Тейлора // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. – 2002. – № 2. – С. 43–45.
8. **Колесов В.В., Хоперский А.Г.** Простейшие режимы движения жидкости вблизи пересечения бифуркаций возникновения неізотермических вихрей Тейлора и азимутальных волн // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2002. – № 2. – С. 97–109.
9. **Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L.** Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1986. – Vol. 164. – P. 155–183. – doi: 10.1017/S0022112086002513.
10. **Рудяк В.Я., Савченко С.О.** Моделирование неустойчивости закрученной затопленной струи, индуцируемой вихрестокком // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2002. – Т. 5, № 4 (12). – С. 139–149.
11. **Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яненко Н.Н.** О построении дискретных вихревых моделей течений идеальных несжимаемых жидкостей // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1986. – Т. 26, № 1. – С. 103–113.
12. **Рудяк В.Я., Савченко С.О.** О развитии неустойчивости в кольцевых сдвиговых слоях // *Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации*. – 2002. – № 2 (6). – С. 42–51.
13. **Рудяк В.Я., Савченко С.О.** Моделирование аэродинамической неустойчивости кольцевых сдвиговых слоев в потоке // *Известия вузов. Авиационная техника*. – 2002. – № 4. – С. 40–43.
14. **Рудяк В.Я., Савченко С.О.** О невязкой неустойчивости кольцевых сдвиговых слоев // *Теплофизика и аэромеханика*. – 1995. – Т. 2, № 1. – С. 47–53.
15. **Takeuchi D.I., Jankowski D.F.** A numerical and experimental investigation of the stability of spiral Poiseuille flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1981. – Vol. 102. – P. 101–126. – doi: 10.1017/S0022112081002565.
16. **Ng B.S., Turner E.R.** On the linear stability of spiral flow between rotating cylinders // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. – 1982. – Vol. 382, iss. 1782. – P. 83–102. – doi: 10.1098/rspa.1982.0091.

17. **Meseguer A., Marques F.** On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Couette flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2000. – Vol. 402. – P. 33–56. – doi: 10.1017/S0022112099006679.
18. **Meseguer A., Marques F.** On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Poiseuille flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2002. – Vol. 455. – P. 129–148. – doi: 10.1017/S0022112001007315.
19. **Nouri J.M., Whitelaw J.H.** Flow of Newtonian and non-Newtonian fluids in an eccentric annulus with rotation of the inner cylinder // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. – 1997. – Vol. 18, iss. 2. – P. 236–246. – doi: 10.1016/S0142-727X(96)00086-0.
20. **Escudier M.P., Gouldson I.W., Jones D.M.** Flow of shear-thinning fluids in a concentric annulus // *Experiments in Fluids*. – 1995. – Vol. 18. – P. 225–238. – doi: 10.1017/BF00195092.
21. **Podryabinkin E.V., Rudyak V.Ya.** Moment and forces exerted on the inner cylinder in eccentric annular flow // *Journal of Engineering Thermophysics*. – 2011. – Vol. 20, iss. 3. – P. 320–328. – doi: 10.1134/S1810232811030106.
22. **Подрябинкин Е.В., Рудяк В.Я.** Моделирование течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 112–122.
23. **Подрябинкин Е.В., Рудяк В.Я.** Моделирование турбулентных течений в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра // Вестник НГУ. Серия: Физика. – 2012. – Т. 7, № 4. – С. 79–87.
24. **Taylor G.I.** Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*. – 1923. – Vol. 223. – P. 289–343.
25. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
26. **Rudyak V.Ya., Isakov E.B., Bord E.G.** Instability of antisymmetric disturbances of the Poiseuille flow of inhomogeneous fluid // *Thermophysics and Aeromechanics*. – 1996. – Vol. 3, N 1. – P. 51–56.
27. **Rudyak V., Isakov E., Bord E.** Hydrodynamic stability of the Poiseuille flow of the dispersed fluid // *Journal of Aerosol Science*. – 1997. – Vol. 28, iss. 1. – С. 53–66. – doi: 10.1016/S0021-8502(96)00056-0.
28. **Борд Е.Г., Исаков Е.Б., Рудяк В.Я.** Устойчивость ламинарных течений разреженных дисперсных сред // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 1997. – № 4. – С. 32–38.

ON STABILITY REGIMES OF THE FLOW IN THE CHANNEL BETWEEN COAXIAL CYLINDERS

Bord E.G., Rudyak V.Ya.

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering,
Novosibirsk, Russia*

The stability of a spiral flow arising due to a combined axial pressure drop and rotation of the inner cylinder in channels of different width between coaxial cylinders is considered. The flow stability is determined by two independent Reynolds numbers corresponding to the flow in the axial and azimuthal directions. Neutral stability curves are built and dependencies of perturbation increments on the wave number are found in a wide range of flows. It is established that depending on the flow conditions the most unstable modes can have different azimuthal wavenumbers. The dependence of the flow stability characteristics on the azimuthal Reynolds number is studied. The flow instability regime which corresponds to the Rayleigh-Taylor-type instability of the cylindrical Couette flow is revealed. This type of instability is suppressed with increasing the axial Reynolds number. It is shown that the data obtained agree well with the experimental results. Finally, it is found that there are bifurcations of neutral stability curves in some flow regimes. The ranges of corresponding Reynolds numbers are also determined in the paper.

Keywords: hydrodynamic stability, spiral flows, Rayleigh-Taylor instability, laminar-turbulent transition, neutral stability curves.

REFERENCES

1. Mott J.E., Joseph D.D. Stability of parallel flow between concentric cylinders. *Physics of Fluids*, 1968, vol. 11, iss. 10, pp. 2065–2073. doi: 10.1063/1.1691784
2. Cotrell D.L., Pearlstein A.J. Linear stability of spiral and annular Poiseuille flow for small radius ratio. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, vol. 547, pp. 1–20. doi: 10.1017/S002211200500697X
3. Coles D. Transition in circular Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, vol. 21, iss. 3, pp. 385–425. doi: 10.1017/S0022112065000241
4. Cole J.A. Taylor-vortex instability and annulus-length effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 1976, vol. 75, iss. 1, pp. 1–15. doi: 10.1017/S0022112076000098
5. Sparrow E.M., Munro W.D., Jonsson V.K. Instability of the flow between rotating cylinders: the wide-gap problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 1964, vol. 20, iss. 1, pp. 35–46. doi: 10.1017/S0022112064001008
6. DiPrima R.C., Eagles P.M., Ng B.S. The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow. *Physics of Fluids*, 1984, vol. 27, iss. 10, pp. 2403–2411. doi: 10.1063/1.864544
7. Kolesov V.V., Khoperskii A.G. Bikriticheskie tochki v neizotermicheskoi probleme Kuetta-Teilora [Intersection point of bifurcations in nonisothermic Couette-Taylor problem]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Seriya: Estestvennye nauki – North Kavkaz High School Research. Series: Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 43–45.
8. Kolesov V.V., Khoperskii A.G. Prosteishie regimy dvigeniya jidkosti vblizi persecheniya bifurkaciy vozniknoveniya neizotermicheskikh vichrey Teilora i azimutalmykh voln [Simple regimes of fluid motion in the neighborhood of the intersection of bifurcations initiating nonisothermal Taylor vortices and azimuthal waves]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*, 2002, no. 2, pp. 257–267. doi: 10.1023/A:1015862417312. Translated from *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2002, no. 2, pp. 97–109.
9. Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, vol. 164, pp. 155–183. doi: 10.1017/S0022112086002513
10. Rudyak V.Ya., Savchenko S.O. Modelirovanie neustoichivosti zakruchennoy zatoplennoy strui, induziruemoy vichrestokom [Modeling instability of the swirling jet induced by the vortex and suction]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2002, vol. 5, no. 4 (12), pp. 139–149.
11. Veretentsev A.N., Rudyak V.Ya., Yanenko N.N. O postroenii diskretnykh vikhrevykh modelei techenii ideal'nykh neszhimaemykh zhidkosti [The construction of discrete vortex models of ideal incompressible fluid flows]. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986, vol. 26, iss. 1, pp. 65–71. doi:10.1016/0041-5553(86)90182-5. Translated from *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1986, vol. 26, iss. 1, pp. 103–113.
12. Rudyak V.Ya., Savchenko S.O. O razvitiu neustoichivosti v kol'tsevykh sdvigovykh sloyakh [On instability growth in circular shear layer]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2002, no. 2 (6), pp. 42–51.
13. Rudyak V.Ya., Savchenko S.O. Modelirovanie aerodinamicheskoi neustoichivosti kol'tsevykh sdvigovykh sloev v potoke [Simulation of Aerodynamic Instability of Annular Shear Layers in a Flow]. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika – Russian Aeronautics*, 2002, no. 4, pp. 40–43.
14. Rudyak V.Ya., Savchenko S.O. O nevyazkoi neustoichivosti kol'tsevykh sdvigovykh sloev [On inviscid instability of the circular shear layer]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*, 1995, vol. 2, no. 1, pp. 47–53.
15. Takeuchi D.I., Jankowski D.F. A numerical and experimental investigation of the stability of spiral Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 102, pp. 101–126. doi: 10.1017/S0022112081002565
16. Ng B.S., Turner E.R. On the linear stability of spiral flow between rotating cylinders. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1982, vol. 382, iss. 1782, pp. 83–102. doi: 10.1098/rspa.1982.0091

17. Meseguer A., Marques F. On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, vol. 402, pp. 33–56. doi: 10.1017/S0022112099006679
18. Meseguer A., Marques F. On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, vol. 455, pp. 129–148. doi: 10.1017/S0022112001007315
19. Nouri J.M., Whitelaw J.H. Flow of Newtonian and non-Newtonian fluids in an eccentric annulus with rotation of the inner cylinder. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1997, vol. 18, iss. 2, pp. 236–246. doi: 10.1016/S0142-727X(96)00086-0
20. Escudier M.P., Gouldson I.W., Jones D.M. Flow of shear-thinning fluids in a concentric annulus. *Experiments in Fluids*, 1995, vol. 18, pp. 225–238. doi: 10.1017/BF00195092
21. Podryabinkin E.V., Rudyak V.Ya. Moment and forces exerted on the inner cylinder in eccentric annular flow. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2011, vol. 20, iss. 3, pp. 320–328. doi: 10.1134/S1810232811030106
22. Podryabinkin E.V., Rudyak V.Ya. Modelirovanie techenii nen'yutonovskikh zhidkostei v tsilindricheskom zazore s ekstsentrizitetom i vrashcheniem vnutrennego tsilindra [Modeling of herschel-bulkley fluid flow through eccentric annulus]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 112–122.
23. Podryabinkin E.V., Rudyak V.Ya. Modelirovanie turbulentnykh techenii v tsilindricheskom zazore s ekstsentrizitetom i vrashcheniem vnutrennego tsilindra [Modeling of turbulent flows through the annular channel with eccentricity and rotating inner cilinder]. *Vestnik NGU. Seriya: Fizika – Vestnik NSU. Series: Physics*, 2012, vol. 7, no. 4, pp. 79–87.
24. Taylor G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1923, vol. 223, pp. 289–343. doi: 10.1098/rsta.1923.0008
25. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 840 p.
26. Rudyak V.Ya., Isakov E.B., Bord E.G. Instability of antisymmetric disturbances of the Poiseuille flow of inhomogeneous fluid. *Thermophysics and Aeromechanics*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 51–56.
27. Rudyak V., Isakov E., Bord E. Hydrodynamic stability of the Poiseuille flow of the dispersed fluid. *Journal of Aerosol Science*, 1997, vol. 28, iss. 1, pp. 53–66. doi:10.1016/S0021-8502(96)00056-0
28. Bord E.G., Isakov E.B., Rudyak V.Ya. Ustoichivost' laminarnykh techenii razrezhennykh dispersnykh sred [The stability of laminar flows of dilute dispersed media]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*, 1997, no. 4, pp. 32–38.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Борд Евгений Григорьевич – родился в 1962 году, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). Область научных интересов: гидродинамическая устойчивость течений неньютоновских жидкостей, динамика вихревых систем. Опубликовано 39 научных работ. (Адрес: 630008, Россия, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113. Email: ngasu2005@ngs.ru).

Bord Evgeny Grigorievich (b. 1962) – PhD (Phys.&Math.), associate professor, associate professor at the theoretical mechanics department in the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering. His research interests are currently focused on hydrodynamic stability of the non-Newtonian fluid flows, vortex dynamics. He is author of 39 scientific papers. (Address: 113 Lenigradskaya Street, Novosibirsk, 630008, Russia.

Email: ngasu2005@ngs.ru).



Рудяк Валерий Яковлевич – родился в 1945 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). Область научных интересов: кинетическая теория плотных и разреженных газов, неравновесная статистическая механика процессов переноса, физика и механика дисперсных жидкостей, процессы переноса в газах, жидкостях и в наножидкостях, теория ламинарно-турбулентного перехода, моделирование и изучение макро-, микро- и нанотечений ньютоновских и неньютоновских жидкостей. Опубликовано более 300 научных работ. (Адрес: 630008, Россия, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113. Email: valery.rudyak@mail.ru).

Rudyak Valery Yakovlevich (b. 1945) – D.Sc. (Phys.&Math.), professor, head of the theoretical mechanics department in the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering. His research interests are currently focused on kinetic theory, nonequilibrium statistical mechanics, physics and mechanics of dispersed fluids, laminar-turbulent transition, modeling and exploring macro-micro- and nanoflows of Newtonian and non Newtonian fluids. He is author of more than 300 scientific papers. (Address: 113 Lenigradskaya Street., Novosibirsk, 630008, Russia. Email: valery.rudyak@mail.ru).

*Статья поступила 09 декабря 2014 г.
Received December 09, 2014*

To Reference:

Bord E.G., Rudyak V.Ya. O rezhimakh ustoyichivosti techeniya v kanale mezhdru soosnymi tsilindrami [On stability regimes of the flow in the channel between coaxial cylinders]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2014, no. 4, pp. 7–20.