

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ  
ДОКЛАДЫ  
АКАДЕМИИ НАУК  
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

2016

апрель–июнь

№ 2 (31)



*Выходит четыре раза в год*

ISSN 1727-2769

**Учредители**

*Академия наук высшей школы России  
Новосибирское отделение Академии наук высшей школы*

**Главный редактор**

А.Г. Вострецов, д-р техн. наук, проф., засл. деятель науки РФ

**Заместитель главного редактора**

В.Н. Васюков, д-р техн. наук, проф.

**Редакционный совет**

М. Грайцар, PhD, проф. (Словакия)  
А. Загоскин, PhD (Великобритания)  
Е.В. Ильичев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Германия)  
М.Н. Клымаш, д-р техн. наук, проф. (Украина)  
К. Арутюнов, д-р физ.-мат. наук  
И.С. Грузман, д-р техн. наук, проф.  
В.Г. Дубровский, д-р физ.-мат. наук, проф.  
Б.А. Князев, д-р физ.-мат. наук, проф.  
Г.В. Майер, д-р физ.-мат. наук, проф., засл. деятель науки РФ  
В.К. Макуха, д-р техн. наук, проф.  
В.Я. Рудяк, д-р физ.-мат. наук, проф.  
С.А. Харитонов, д-р техн. наук, проф.  
Г.М. Шумский, д-р техн. наук, проф.

**Ответственный секретарь**

Д.О. Соколова, канд. техн. наук

*Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций в 2002 г. (свидетельство ПИ № 77-11517 от 04.01.2002 г.)*

Адрес редакции: 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, НГТУ, корп. 4, ком. 415,  
телефон: (383) 346-15-37, факс: (383) 346-02-09. Email: danvshrf@corp.nstu.ru

© Новосибирское отделение АН ВШ, 2016 г.

**PROCEEDINGS  
OF THE RUSSIAN HIGHER SCHOOL  
ACADEMY OF SCIENCES**

2016

April–June

№ 2 (31)



*Journal is published quarterly*

ISSN 1727-2769

*Journal was established by*

*Russian Higher Education Academy of Science  
Novosibirsk Branch of Higher Education Academy of Science*

**Chief Editor**

A.G. Vostretsov, D.Sc. (Eng.), Prof., Honoured Science Worker of Russian Federation

**Deputy Chief Editor**

V.N. Vasyukov, D.Sc. (Eng.), Prof.

**Editorial Council**

M. Grajcar, PhD, Prof. (Slovakia)  
A. Zagoskin, PhD (United Kingdom)  
E.V. Ilyichev, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof. (Germany)  
M.M. Klymash, D.Sc. (Eng.), Prof. (Ukraine)  
K. Arutyunov, D.Sc. (Phys.&Math.)  
I.S. Gruzman, D.Sc. (Eng.), Prof.  
V.G. Dubrovsky, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.  
B.A. Knyazev, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.  
G.V. Mayer, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof., Honoured Science Worker of Russian Federation  
V.K. Makukha, D.Sc. (Eng.), Prof.  
V.Ya. Rudyak, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.  
S.A. Haritonov, D.Sc. (Eng.), Prof.  
G.M. Shumsky, D.Sc. (Eng.), Prof.

**Executive Secretary**

D.O. Sokolova, C.Sc.(Eng.)

Editor Address: Office 415, 20 bld. 4, K. Marx Prospect, Novosibirsk, 630073, Russian Federation.  
Tel: +7 (383) 346-15-37. Fax: +7 (383) 346-02-09. Email: danvshrf@corp.nstu.ru

© Novosibirsk Branch of Higher Education Academy of Science, 2016 r.

## СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

*Аркашов Н.С., Селезнев В.А.*

О моделировании аномальной диффузии методом  
мастер-уравнения .....7

*Коскин А.П., Габова Н.Е.*

Синтез и исследование каталитической активности  
сульфоокислотных углеродных материалов .....16

## ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

*Андрянов А.И., Саченко Е.А.*

Математическая модель транзисторных управляемых  
выпрямителей в режиме рекуперации электроэнергии .....26

*Демин В.А.*

Разработка и исследование критериев согласия  
для параметрических регрессионных моделей надежности  
на основе оценки Берана .....43

*Н.Б. Иткина, С.И. Марков*

Применение стабилизированного векторного метода конеч-  
ных элементов для моделирования течения газов .....57

*Коротаева Т.А., Турчинович А.О.*

Моделирование пространственного истечения струй  
продуктов сгорания авиадвигателей .....68

**Ландовская И.Е.**

Алгоритм обработки взаимодействий частиц ткани с гранями  
твердотельного объекта при компьютерном моделировании.....78

**Нейман Л.А., Нейман В.Ю.**

Математическая модель динамики электромагнитного удар-  
ного узла с упругими связями.....94

**Финников К.А.**

Применение метода пробных частиц для вычисления  
коэффициентов переноса в разреженных газах .....108

**Хайло Н.С.**

Адаптивная демодуляция широкополосных сигналов  
в условиях неопределенной помеховой обстановки.....123

---

---

CONTENTS

---

**PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

- Arkashov N.S., Seleznev V.A.*  
On the master equation approach to modeling anomalous diffusion .....7
- Koskin A.P., Gabova N.E.*  
Sulfated carbon-base material preparation and investigation  
of their catalytic activity..... 16

---

**TECHNICAL SCIENCES**

- Andriyanov A.I., Sachenko E.A.*  
A mathematical model of transistor controlled rectifiers in the  
electric power regeneration mode .....26
- Demin V.A.*  
Research and development of goodness-of-fit tests based on the  
Beran estimator for the parametric regression reliability model .....43
- Itkina N.B., Markov S.I.*  
Stabilized vector finite element method for modeling gas flows .....57
- Korotaeva T.A., Turchinovich A.O.*  
Simulation of the spatial jet exhaust of aircraft engine combustion  
products .....68

***Landovskaya I.E.***

A processing algorithm of fabric particle interaction with solid  
object faces during computer simulation..... 78

***Neyman L.A., Neyman V.Yu.***

A dynamic mathematical model of the electromagnetic impact unit  
with spring linkages .....94

***Finnikov K.A.***

Application of the Monte Carlo test particle method to calculate  
transport coefficients in diluted gases ..... 108

***Khailo N.S.***

Adaptive detection of wideband signals in uncertain noise  
environments..... 123

---

УДК 519.21

## О МОДЕЛИРОВАНИИ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ МЕТОДОМ МАСТЕР-УРАВНЕНИЯ

Н.С. Аркашов, В.А. Селезнев

*Новосибирский государственный технический университет*

К настоящему времени накоплено большое количество экспериментальных данных о разнообразных процессах так называемой аномальной диффузии, для которых, в частности, дисперсия меняется нелинейным по времени образом. Разнообразные методы моделирования аномальной диффузии связаны со следующими свойствами соответствующих процессов: «сильная форма» зависимости приращений; нестационарность приращений (см., например, [1]–[4]). Известными примерами таких процессов являются модели блуждания в непрерывном времени (общепринятая аббревиатура CTRW), фрактальное (дробное) броуновское движение (см., например, [4, 5]). На сегодняшний день по всей видимости не существует форматов моделирования (см. [3]), охватывающих все указанные свойства, подобно тому как винеровский процесс является классическим форматом броуновского движения. Вопросы моделирования процессов переноса в сингулярных фазовых пространствах ставились в работах [1–4] и др., где рассматривалось моделирование процессов переноса в сплошных средах с фрактальной структурой, рассматриваемых как подмножества нулевой лебеговой и некоторой ненулевой хаусдорфовой меры. В качестве инструмента моделирования в этих работах применялся аппарат дробного интегро-дифференциального исчисления. В этой работе мы отходим от парадигмы того, что процессы переноса моделируются в сплошных средах с фрактальной структурой. В работе построено мастер-уравнение, которое позволяет моделировать процессы аномальной диффузии таким образом, чтобы учитывать одновременно фрактальную структуру последствия и корреляционные свойства процесса. Мастер-уравнение позволяет получить в качестве предельных случаев винеровский процесс и фрактальное броуновское движение. Настоящая работа является естественным продолжением цикла работ [6–9], в котором аномальность переноса массы, энергии, импульса существенно связывалась с введением сингулярных относительно меры Лебега величин.

*Ключевые слова:* множество Кантора, фрактальное броуновское движение, скользящие средние, аномальная диффузия, самоподобие.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-7-15

### Введение

На множестве отрезков  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  определим операцию «вырезания»

$$\text{del}_q([a, b]) = [a, b] \setminus (a + (b - a) / q, b - (b - a) / q),$$

где  $q > 2$ . Результатом этой операции является появление вместо одного отрезка пары непересекающихся отрезков.

Естественным образом распространим эту операцию на совокупность подмножеств, представимых в виде объединения конечного числа непересекающихся отрезков. Тогда определенную операцию «вырезания» можно итерировать. При каждом  $q > 2$  определим канторово множество  $S_q$ :

$$S_q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{del}_q^n([0, 1]).$$

Множество  $S_3$  – классическое канторово множество. Заметим, что множество же  $S_2$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ . Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна  $d_q = \ln 2 / \ln q$  (см., например, [14]), при этом  $\mu_{d_q}$  – соответствующая конечная мера Хаусдорфа (заметим, что  $\mu_{d_q}(S_q) = 1$ ). В дальнейшем за буквой  $d_q$  закрепим обозначение размерности Хаусдорфа множества  $S_q$ .

Каждому множеству  $S_q, 2 < q < \infty$  соответствует непрерывная и возрастающая на отрезке  $[0, 1]$  функция  $C_q(x) = \mu_{d_q}([0, x]), x \in [0, 1]$ , называемая канторовой лестницей.

Отметим, что  $C_2(t) = t$  для всех  $t \in [0, 1]$  и  $C_\infty(t) = 1/2$  при всех  $t \in (0, 1)$ , кроме того,  $C_\infty(0) = 0$  и  $C_\infty(1) = 1$  (см., например, [12]).

Пусть  $B$  и  $T$  – положительные константы. Для всех  $t \in [0, T]$  обозначим  $M_q(t) := 2BC_q(t/T)$ .

### 1. Постановка задачи

Теперь перейдем к постановке основной задачи, причем для простоты изложения мы ограничимся *одномерным случайным блужданием* материальной частицы.

Пусть  $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$  – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, где  $\mathbb{Z}$  – множество всех целых чисел. В дальнейшем будем предполагать, что последовательность  $\{X_j; j \in \mathbb{Z}\}$  определяется по формуле

$$X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k} \xi_k, \quad (1)$$

которые являются скользящими средними исходной последовательности  $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$  (см. [13]). Следующее хорошо известное условие гарантирует сходимость с вероятностью первого ряда в правой части (1):

$$0 < \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^2 < \infty. \quad (2)$$

Всюду в дальнейшем условие (2) предполагается выполненным. Заметим, что если  $a_0 \neq 0$  и  $a_j = 0$  при всех  $j \neq 0$ , то последовательность  $\{X_j\}$  становится последовательностью  $\{a_0 \xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ .

Определим процесс частных сумм скользящих средних из (1):

$$S_0 := 0, S_n := \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, \dots$$

Через  $B_H(t)$  обозначим так называемое фрактальное броуновское движение (см. [5]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t, s) = \frac{1}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right), 0 < H < 1. \quad (3)$$



Легко видеть, что случай  $H = 1/2$  соответствует стандартному винеровскому процессу. Отметим известное свойство  $H$ -однородности фрактального броуновского движения (см. [5]): для любого  $\lambda > 0$  конечномерные распределения случайных процессов  $\{B_H(\lambda t)\}$  и  $\{\lambda^H B_H(t)\}$  совпадают. Кроме того, случайный процесс  $B_H$  имеет стационарные приращения.

Скорость некоторой частицы в моменты времени  $kT/n$ ,  $k = 1, \dots, n$ , обозначим через  $v_n(kT/n)$ , положим  $v_n(0) = 0$ . Пусть закон изменения импульса частицы единичной массы имеет вид

$$\Delta v_n(kT/n) = n^{1-H} \sum_{i=0}^{k-1} \Delta X_{k-i} \Delta M_{q,n}(iT/n), \quad (4)$$

где  $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$ ,  $k = 1, \dots$ ,  $\Delta X_1 = X_1$  и  $\Delta v_n(t) = v_n(t+T/n) - v_n(t)$ ,  $\Delta C_{q,n}(t) = C_q(t+T/n) - C_q(t)$ .

Представление (4) является кинетическим уравнением, описывающем эволюцию некоторой системы во времени с последствием, имеющем фрактальную структуру. Соотношение (4) назовем *мастер-уравнением*.

Правая часть (4) является скользящим средним порядка  $k$  (см., например, [13]). Далее, определим следующий процесс частных сумм:

$$R_n(t) = \frac{T}{n} \sum_{i=1}^{[nt/T]} v_n(iT/n), \quad t \in [0, T], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Значение  $R_n(t)$  представляет собой положение точки в момент времени  $T[nt/T]/n$  (через  $[\cdot]$  мы обозначаем целую часть числа).

Приведем два предельных случая:

I)  $q = \infty$ ;

II)  $q = 2$ .

I) Закон изменения скорости имеет вид:

$$\Delta v_n(kT/n) = Bn^{1-H} \Delta X_k, \quad k = 1, \dots, n-2 \quad (6)$$

и

$$\Delta v_n((n-1)T/n) = Bn^{1-H} (\Delta X_{n-1} + \Delta X_1). \quad (7)$$

Заметим, что  $R_n(t)$  слабо сходится к  $\sigma_0 B T B_H(t/T)$ ,  $t \in [0, T]$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $B_H(\cdot)$  – фрактальное броуновское движение (см. [10]).

II) Закон изменения скорости имеет вид

$$\Delta v_n(kT/n) = \frac{2B}{n^H} X_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

Отметим, что  $R_n(t)$  описывает положение материальной точки с единичной массой движущейся под действием силы  $\frac{2Bn^{1-H}}{T} X_{[nt/T]}$ .

Обозначим

$$\begin{aligned} A_m &= a_0 + \dots + a_m, \quad m \geq 0; \quad A_{-1} := 0, \\ A_m &= -(a_{m+1} + \dots + a_{-1}), \quad m < -1. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что  $S_n$ ,  $n \geq 0$ , можно представить в виде  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{n-k} - A_{-k}) \xi_k$ .

Введем в рассмотрение условия, связывающие между собой последовательность  $\{a_i\}$  и параметр  $H \in (0,1)$ :

$(I_H)$ . Пусть для некоторых постоянных  $c \neq 0$  и  $0 < \delta < H$  при  $n \rightarrow \infty$  выполняются следующие соотношения:

$$|A_n - cn^{H-1/2}| = O(n^{H-1/2-\delta}), \quad (10)$$

$$|a_n - c(H-1/2)n^{H-3/2}| = O(n^{H-3/2-\delta}) \quad (11)$$

и, кроме того,

$$a_n = 0, n < 0. \quad (12)$$

Скажем, последовательность  $a_i = c((i+1)^{H-1/2} - i^{H-1/2}), i \geq 1$ ,  $a_0 = c$  и  $a_i = 0, i < 0$  удовлетворяет условию  $I_H$  (см. [10, 11]).

**Замечание 1.** Пусть выполнено условие  $(I_H)$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{DS_n}{n^{2H}} = \sigma_0^2$ , причем константа  $\sigma_0^2$  имеет вид  $c^2 L_H$ , где  $L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds$ , а константа  $c$  определена в условии  $(I_H)$  (см. [10, 11]).

**Теорема 1.** Пусть выполняется условие  $(I_H)$ . Тогда для каждого  $q$ , такого что  $2 \leq q < \infty$ , дисперсия процесса  $R_n$  удовлетворяет неравенствам:

$$c(t/T)^{2H+2d_q} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} DR_n(t) \leq C(t/T)^{2H+2d_q}, 0 \leq t \leq T,$$

где  $d_q = \ln 2 / \ln q$ ,  $c = \frac{2HB^2\sigma_0^2 T^2}{(q-1)^{2d}} \int_0^1 u^{2d} (1-u)^{2H-1} du$  и  $C = 4H^2 B^2 \sigma_0^2 T^2 \times \left( \int_0^1 u^d (1-u)^{H-1} du \right)^2$ .

## 2. Доказательство основных результатов

Введем обозначение:  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  при  $n \geq 1$ ,  $S_0 = 0$ .

**Лемма 1.** Для любых  $s_1, s_2, t \in [0,1]$ , таких что  $s_1, s_2 \leq t$ , при  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение

$$E(S_{[nt]-[ns_1]} S_{[nt]-[ns_2]}) / n^{2H} \rightarrow \sigma_0^2 EB_H(t-s_1) B_H(t-s_2).$$

*Доказательство.* Будем считать, что  $s_1 \leq s_2$ . Выполняется очевидное равенство:

$$\begin{aligned} 2S_{[nt]-[ns_1]} S_{[nt]-[ns_2]} / n^{2H} &= S_{[nt]-[ns_1]}^2 / n^{2H} + \\ &+ S_{[nt]-[ns_1]}^2 / n^{2H} - (S_{[nt]-[ns_1]} - S_{[nt]-[ns_2]})^2 / n^{2H}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) получаем

$$2E(S_{[nt]-[ns_1]}S_{[nt]-[ns_2]})/n^{2H} = D(S_{[nt]-[ns_1]})/n^{2H} + D(S_{[nt]-[ns_2]})/n^{2H} - D(S_{[ns_2]-[ns_1]})/n^{2H}. \quad (14)$$

В соответствии с замечанием 1 выводим

$$D(S_{[nt]-[ns_1]})/n^{2H} + D(S_{[nt]-[ns_2]})/n^{2H} - D(S_{[ns_2]-[ns_1]})/n^{2H} \rightarrow \sigma_0^2((t-s_1)^{2H} + (t-s_2)^{2H} - (s_2-s_1)^{2H}).$$

Откуда и из (14) получаем

$$E(S_{[nt]-[ns_1]}S_{[nt]-[ns_2]})/n^{2H} \rightarrow \frac{\sigma_0^2}{2}((t-s_1)^{2H} + (t-s_2)^{2H} - (s_2-s_1)^{2H}). \quad (15)$$

Осталось заметить, что правая часть (15) совпадает с  $\sigma_0^2 EB_H(t-s_1)B_H(t-s_2)$ .

Приведем следующее предложение из [12, стр. 192], на котором основывается доказательство предложения 1.

**Предложение 1.** Для каждого  $2 < q < \infty$  имеют место неравенства:

$$t^d / (q-1)^d \leq C_q(t) \leq t^d, t \geq 0,$$

где  $d_q = \ln 2 / \ln q$ . Оба неравенства точные и  $C_q(t)/t^d$  не имеет предела при  $t \rightarrow 0$ .

*Доказательство теоремы 1.* Прежде всего имеют место следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned} R_n(t) &= 2BT \sum_{i=0}^{[n\tau]-1} \frac{S_{[n\tau]-i}}{n^H} (C_q((i+1)/n) - C_q(i/n)) = \\ &= 2BT \int_0^\tau \frac{S_{[n\tau]-[ns]}}{n^H} dC_q(s), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\tau = t/T$ . Из (16) следует, что

$$DR_n(t) = 4B^2T^2 \int_0^\tau \int_0^\tau E \left( \frac{S_{[n\tau]-[ns_1]}S_{[n\tau]-[ns_2]}}{n^{2H}} \right) dC_q(s_1)dC_q(s_2). \quad (17)$$

Из леммы 1 (см. соотношение (15)) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} DR_n(t) &= 4\sigma_0^2 B^2 T^2 \times \\ &\times \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-s_1)^{2H} + (\tau-s_2)^{2H} - (s_2-s_1)^{2H}}{2} dC_q(s_1)dC_q(s_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) вытекает неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} DR_n(t) \geq 4\sigma_0^2 B^2 T^2 \times \\ \times \int_0^\tau \int_0^{s_2} \frac{(\tau - s_1)^{2H} + (\tau - s_2)^{2H} - (s_2 - s_1)^{2H}}{2} dC_q(s_1) dC_q(s_2). \quad (19)$$

Уменьшая правую часть (19), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} DR_n(t) \geq 2\sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau \int_0^{s_2} (\tau s_2)^{2H} dC_q(s_1) dC_q(s_2). \quad (20)$$

Преобразовывая правую часть (20), а также интегрируя по частям, получаем

$$2\sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau \int_0^{s_2} (\tau - s_2)^{2H} dC_q(s_1) dC_q(s_2) = \sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau (\tau - s_2)^{2H} dC_q^2(s_2) = \\ = 2H\sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau C_q^2(s_2) (\tau - s_2)^{2H-1} ds_2. \quad (21)$$

Далее, применяя предложение 1 к правой части последнего равенства в (21), получаем нижнюю оценку неравенства, сформулированного в теореме 1.

Получим теперь верхнюю оценку. Применяя неравенство Гёльдера, выводим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} DR_n(t) = 4\sigma_0^2 B^2 T^2 \int_0^\tau \int_0^\tau EB_H(\tau - s_1) B_H(\tau - s_2) dC_q(s_1) dC_q(s_2) \leq \\ \leq 4\sigma_0^2 B^2 T^2 \left( \int_0^\tau (\tau - s)^H dC_q(s) \right)^2. \quad (22)$$

Интегрируя по частям в правой части (22), получаем

$$\left( \int_0^\tau (\tau - s)^H dC_q(s) \right)^2 = H^2 \left( \int_0^\tau (\tau - s)^{H-1} C_q(s) ds \right)^2. \quad (23)$$

И, наконец, применяя предложение 1 к правой части равенства (23), получаем верхнюю оценку теоремы 1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Федер Е.** Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
2. **Зеленый Л.М., Милованов А.В.** Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // *Успехи физических наук.* – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 809–852.
3. **Заславский Г.М.** Гамильтонов хаос и фрактальная динамика: пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 472 с.
4. **Учайкин В.В.** Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // *Успехи физических наук.* – 2003. – Т. 173, № 8. – С. 847–876.
5. **Mandelbrot B., Ness J. van.** Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // *SIAM Review.* – 1968. – Vol. 10. – P. 422–437.
6. **Аркашов Н.С.** Эргодические свойства одного преобразования на пространстве с мерой Хаусдорфа и самоподобной структурой // *Математические заметки.* – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 163–173.

7. Аркашов Н.С., Селезнев В.А. О модели случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 1216–1236.
8. Аркашов Н.С., Селезнев В.А. О модели суб- и супердиффузии на топологических пространствах с самоподобной структурой // ТВП. – 2015. – Т. 60, № 2. – С. 209–226.
9. Селезнев В.А., Аркашов Н.С. Об условиях формирования процессов суб- и супердиффузии на самоподобных множествах // Доклады АН ВШ РФ. – 2014. – № 4 (25). – С. 33–38.
10. Аркашов Н.С., Борисов И.С. Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1221–1255.
11. Аркашов Н.С., Борисов И.С., Могульский А.А. Принцип больших уклонений для процессов частных сумм скользящих средних // ТВП. – 2007. – Т. 52, № 2. – С. 209–239.
12. Горин Е.А., Кукушкин Б.Н. Интегралы, связанные с канторовой лестницей // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 3. – С. 188–220.
13. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 574 с.
14. Edgar G. Measure, topology, and fractal geometry. – New York: Springer, 2008. – 268 p.

## ON THE MASTER EQUATION APPROACH TO MODELING ANOMALOUS DIFFUSION

Arkashov N. S., Seleznev V. A.

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

A large amount of experimental data on various processes of the so-called anomalous diffusion for which variance varies nonlinearly over time has currently been accumulated. Various methods of modeling anomalous diffusion are associated with such properties of the corresponding processes as “a strong form” of increment dependence and increment nonstationarity (see, e.g., [1]–[4]). The well-known examples of such processes are continuous time random walk (CTRW) models and the fractional Brownian motion (see e. g. [4], [5]). Today, apparently, there are no modeling formats (see. [3]) covering all of these properties, similar to the Wiener process which is a classical format of the Brownian motion. Questions of modeling transport processes in singular phase spaces were raised in [1]–[4] etc., where the modeling of transport processes in continuous media with a fractal structure was studied. These processes were considered as a subset of the zero Lebesgue and some non-zero Hausdorff measures. A technique of fractional integro-differential calculus was used as a modeling tool in these studies. In this paper we depart from the paradigm that transfer processes are modeled in continuous media with a fractal structure. We construct a master equation that makes it possible to model anomalous diffusion processes in such a way as to take into account both the aftereffect fractal structure and correlation properties of the process. This master equation allows obtaining the Wiener process and the fractional Brownian motion as limiting cases. This present paper is a natural continuation of a series of papers [6], [7], [8], [9] in which an anomalous character of mass, energy, and momentum transport was closely linked with the introduction of values singular relative to the Lebesgue measure.

*Keywords:* Cantor set; fractional Brownian motion; moving averages; anomalous diffusion; self-similarity.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-7-15

### REFERENCES

1. Feder J. *Fractals*. New York, Plenum Press, 1988. 254 p. (Russ. ed.: Feder E. *Fraktaly*. Moscow, Mir Publ., 1991. 254 p.).
2. Zelenyi L.M., Milovanov A.V. Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics. *Physics-Uspekhi*, 2004, vol. 47, no. 8, pp. 749–788. Translated from *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2004, vol. 174, no. 8, pp. 809–852.

3. Zaslavsky G.M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. Oxford, Oxford University Press, 2008. 448 p. (Russ. ed.: Zaslavskii G.M. *Gamil'tonov khaos i fraktal'naya dinamika*. Moscow, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., Izhevsk, Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2010. 472 p.).
4. Uchaikin V.V. Self-similar anomalous diffusion and Lévy-stable laws. *Physics-Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 8, pp. 821–849. Translated from *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2003, vol. 173, no. 8, pp. 847–876.
5. Mandelbrot B., Ness J. van. Fractional Brownian motions, fractional noise and applications. *SIAM Review*, 1968, vol. 10, pp. 422–437.
6. Arkashov N.S. Ergodic properties of a transformation of a self-similar space with a Hausdorff measure. *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, iss. 1–2, pp. 155–163. doi: 10.1134/S0001434615010186. Translated from *Matematicheskie zametki*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 163–173.
7. Arkashov N.S., Seleznev V.A. On a random walk model on sets with self-similar structure. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 968–983. Translated from *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 1216–1236.
8. Arkashov N.S., Seleznev V.A. O modeli sub- i superdiffuzii na topologicheskikh prostranstvakh s samopodobnoi strukturoi [On one model of sub- and superdiffusion on topological spaces with a self-similar structure]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*, 2015, vol. 60, no. 2, pp. 209–226. (In Russian)
9. Seleznev V.A., Arkashov N.S. Ob usloviyakh formirovaniya protsessov sub- i superdiffuzii na samopodobnykh mnozhestvakh [On conditions of forming processes of sub- and superdiffusion on sets with self-similar structures]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2014, no. 4 (25), pp. 33–38.
10. Arkashov N.S., Borisov I.S. Gaussian approximation to the partial sum processes of moving averages. *Siberian Mathematical Journal*, 2014, vol. 45, iss. 6, pp. 1000–1030. Translated from *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 2004, vol. 45, no. 6, pp. 1221–1255.
11. Arkashov N.S., Borisov I.S., Mogul'skii A.A. Large deviation principle for partial sum processes of moving averages. *Theory of Probability and its Applications*, 2008, vol. 52, iss. 2, pp. 181–208. doi: 10.1137/s0040585x97982955. Translated from *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya*, 2007, vol. 52, no. 2, pp. 209–239.
12. Gorin E.A., Kukushkin B.N. Integrals related to the Cantor ladder. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, iss. 3, pp. 449–468. Translated from *Algebra i analiz*, 2003, vol. 15, no. 3, pp. 188–220.
13. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 574 p.
14. Edgar G. *Measure, topology, and fractal geometry*. New York, Springer, 2008. 268 p.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Аркашов Николай Сергеевич** – родился в 1978 году, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: функциональные предельные теоремы теории вероятностей. Опубликовано более 20 работ. (Адрес: 6300073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: nicky1978@mail.ru).

**Arkashov Nikolay Sergeevich** (b. 1978) – Candidate of Sciences (Phys.& Math.), Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on functional limit theorems in the probability theory. He is author of more than 20 papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: nicky1978@mail.ru).



**Селезнев Вадим Александрович** – родился в 1946 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой инженерной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: методы геометрической теории функций в задачах математической физики. Опубликовано более 50 работ. (Адрес: 6300073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: selvad@ngs.ru).

**Seleznev Vadim Alexandrovich** (b. 1946) – Doctor of Sciences (Phys.& Math.), Professor, Head of the Department of Engineering Mathematics in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are focused on methods of the geometric function theory in mathematical physics. He is author of more than 50 papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: selvad@ngs.ru).

*Статья поступила 07 апреля 2016 г.*

*Received April 07, 2016*

---

To Reference:

Arkashov N.S., Seleznev V.A. O modelirovani anomal'noi diffuzii metodom master-uravneniya [On the master equation approach to modeling anomalous diffusion]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 7–15. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-7-15

УДК 544.47

**СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ  
СУЛЬФОКИСЛОТНЫХ УГЛЕРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ****А.П. Коскин<sup>1</sup>, Н.Е. Габова<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Институт катализа им. Г.К. Борескова СО РАН*<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет*

Углеродные материалы с химически-связанными сульфогруппами (УСМ) перспективны для ряда промышленно важных кислотно-катализируемых реакций (алкилирование, этерификация, нитрование и дегидрирование). Данные материалы обладают высокими текстурными характеристиками (удельная площадь поверхности и объем пор), а также силой кислотных центров, сравнимой с концентрированной серной кислотой. Высокая концентрация кислотных центров позволяет рассматривать УСМ как альтернативу стандартным гомогенно-кислотным катализаторам (серная кислота, толуолсульфокислота), используемым в промышленности.

В данной работе исследованы методы синтеза УСМ с включением стадии синтеза углерод-углеродных композитов состава: карбонизованная d-глюкоза/углеродные нановолокна, с последующим сульфированием полученных мезопористых материалов серной кислотой или олеумом (20 % SO<sub>3</sub>). Подобрано оптимальное соотношение предшественника кислотной фазы (карбонизованная d-глюкоза) и углеродных нановолокон для сочетания высоких текстурных характеристик (>100 м<sup>2</sup>/г) и кислотности (1.2 ммоль/г) УСМ. Синтезированные материалы исследованы методами низкотемпературной адсорбции азота (текстурные характеристики), РФЭС, элементного анализа (состояние и содержание серы в образцах) и титриметрическими методами. Каталитическая активность УСМ изучена в реакции жидкофазной этерификации карбоновых кислот (RCOOH + CH<sub>3</sub>OH, где R = CH<sub>3</sub>, C<sub>6</sub>H<sub>13</sub>).

*Ключевые слова:* кислотный катализ, этерификация, сульфатированные углеродные материалы.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-16-25

**Введение**

Сульфокислотные углеродные материалы (УСМ) представляют из себя углеродный материал с химически-связанными сульфогруппами. Данные материалы сочетают в себе высокую удельную поверхность наряду с высокой кислотностью и являются относительно недорогим аналогом твердых кислот, перспективных для ряда промышленно важных кислотно-катализируемых реакций (алкилирование, нитрование, этерификация и дегидрирование). Применение материалов подобного типа в гетерогенно-каталитических процессах наряду с известными твердыми кислотами рассматривается как альтернатива стандартным гомогенно-каталитическим процессам с использованием серной кислоты в качестве катализатора. Исключение серной кислоты из технологического процесса и осуществление процесса в гетерогенно-каталитическом режиме обуславливает ряд технологических и экологических преимуществ, среди которых: легкость отделения продуктов реакции от катализатора процесса, исключение стадии утилизации отработанной серной кислоты и снижение коррозионной активности катализатора.

Методы синтеза УСМ и их каталитическая активность активно исследуются, начиная с 2000 годов [1]. Ключевыми характеристиками УСМ, определяющими

---

Работа выполнена при поддержке РАН и ФАНО России (проект V.45.3.5)



каталитическую активность являются величины концентрации кислотных центров (количество сульфогрупп, ммоль/г) и удельная площадь поверхности ( $m^2/g$ ).

Для введения сульфогрупп в состав УСМ оптимально использовать обработку исходных углеродных материалов серной кислотой, применение хлорсульфоновой кислоты [2] существенно повышает требования к безопасности процесса и стоимость итогового материала. Также исследовалось введение сульфоарильных групп синтетическим путем (при реакции диазосочетания углеродных носителей с *p*-NN-сульфобензолом [3] или полимеризации сульфостирола [4]). Недостатком использования этих методов является существенное усложнение методики синтеза УСМ. Проведенный анализ литературных данных позволил выявить три основные стратегии синтеза УСМ, отличающиеся порядком стадий сульфирования и подготовки углеродного материала (УМ) (рис. 1).

I. Одновременный процесс карбонизации и сульфирования предшественника УМ (нафталин, антрацен и другие поликонденсированные ароматические соединения [5–6]) в присутствии сульфлирующего агента.

II. Синтез углеродного предшественника (пиролиз растительного сырья [7–9], либо использование различных мезопористых углеродных носителей [10]), с последующим сульфированием серной кислотой (олеумом) или введением сульфоарильных групп.

III. Синтез сульфатированного предшественника УСМ (полимеризация сульфомономеров, либо совместная полимеризация сульфомономер+мономер связующее), с последующей карбонизацией полученных  $SO_3H$ -смол [11–13].

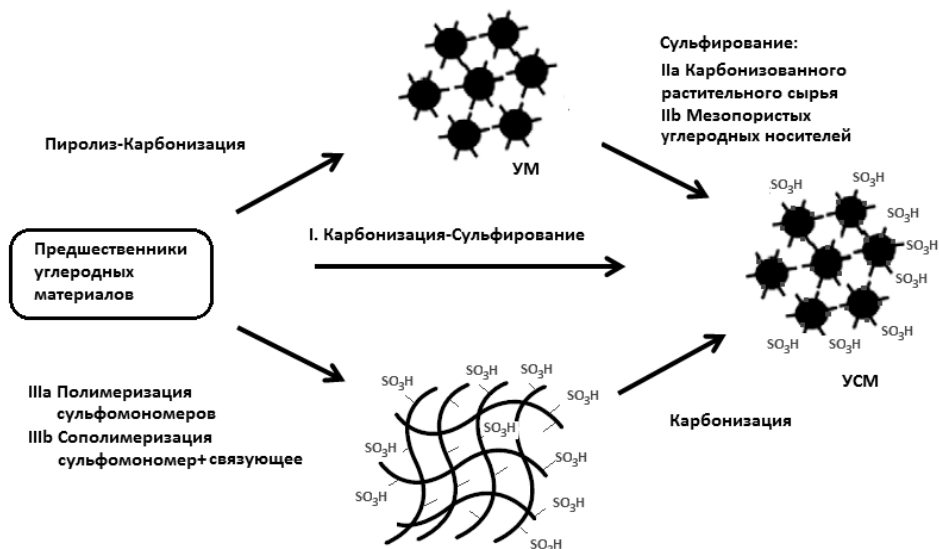


Рис. 1 – Методы синтеза сульфокислотных углеродных материалов

Fig 1 – Carbon based sulfuric acid materials synthesis

При использовании методов I и III (рис. 1) не удастся достичь высоких текстурных характеристик в итоговом УСМ. При получении материалов с высокой степенью карбонизации необходимо использование температур свыше  $400\text{ }^{\circ}C$ , но при данных температурах происходит процесс десульфирования УСМ, в результате термического разложения связи C–S. Материалы с высокими текстурными характеристиками могут быть получены при прямом сульфировании мезопористых углеродных носителей (метод IIb; углеродные нановолокна, углеродные

нанотрубки и др.), однако эти носители достаточно инертны в реакции сульфирования. В случае сульфирования карбонизованного растительного сырья (метод Па; d-глюкоза, целлюлоза, крахмал и др.) удается достичь высоких значений концентраций кислотных групп (до 3.6 ммоль/г), однако удельная площадь поверхности остается низкой ( $<40 \text{ м}^2/\text{г}$ ).

В представленной работе исследован метод синтеза УСМ заключающийся в синтезе углерод-углеродных композитов состава карбонизованная d-глюкоза/углеродные нановолокна (УНВ) и последующем сульфировании. Данные композиты содержат устойчивый углеродный каркас (УНВ), задающий текстурные характеристики материала с нанесенным легко сульфируемым предшественником кислотной фазы (карбонизованная d-глюкоза).

## 1. Экспериментальная часть

Для синтеза УСМ использовались образцы углеродных нановолокон УНВ-141, УНВ-285, УНВ-318 (с удельной площадью поверхности  $S_{\text{уд}} = 141, 285 \text{ и } 318 \text{ м}^2/\text{г}$  соответственно), полученных разложением пропан-бутановой смеси на Ni-Cu/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> катализаторах, согласно [14], карбонизованная d-глюкоза (сG, пиролиз исходного растительного сырья при 400 °С в токе азота, 5 ч), карбонизованная целлюлоза (сС, 400 °С, N<sub>2</sub>, 5 ч) [8]).

Нанесение предшественника кислотной фазы композита сG/УНВ осуществлялось пропиткой исходных образцов УНВ водным раствором d-глюкозы (4,5 М) по влагеомкости. Последующий пиролиз нанесенной глюкозы проводили в печи при 400 °С в токе инертного газа (N<sub>2</sub>). При синтезе композитов с высоким содержанием нанесенной d-глюкозы проводили многостадийную пропитку исходного УНВ раствором предшественника. После каждой стадии образец высушивали в печи и использовали для нанесения следующей порции. Предварительная окислительная обработка углеродных материалов и композитов сG/УНВ производилась выдерживанием образцов в концентрированной азотной кислоте (70 %, 24 ч), либо кипячением углеродного материала с перекисью водорода (33 %).

Сульфирование образцов углеродных материалов УНВ и композитов сG/УНВ проводилось нагреванием углеродного предшественника (1 г) в 10 мл серной кислоты (10 мл, 98 %, 8 ч) или олеума (8 мл, SO<sub>3</sub> 20 %, 8 ч) при температурах 100 – 250 °С, с получением образцов s-УНВ и s-сG/УНВ. Аналогично получали s-сG (сульфатированная карбонизованная d-глюкоза) и s-сС (сульфатированная карбонизованная целлюлоза) при сульфировании образцов сG и сС соответственно. Синтезированный УСМ отделяли на фильтре и промывали дистиллированной водой до отсутствия сульфат-ионов в смывных водах. Полученные образцы сушили при температуре 110 °С.

Исследование текстурных характеристик УСМ (объем пор ( $V_{\text{пор}}$ ) и удельная площадь поверхности ( $S_{\text{уд}}$ )) проводили методом низкотемпературной адсорбции азота на приборе Micrometrics ASAP-2400. Состояние серы в образцах охарактеризовано методом РФЭС (KRATOS ES 300). Содержание сильных кислотных групп ( $-\text{SO}_3\text{H}$ ) оценивалось по методике ионного обмена [15]: перемешивание суспензии 100 мг УСМ в избытке раствора NaCl (1М, 10 мл), отделение полученного SO<sub>3</sub>Na-УСМ и титрование фильтрата стандартизованным раствором NaOH (0,05 М). Суммарное содержание кислотных групп в навеске образца 100 мг (SO<sub>3</sub>H- и COOH-группы) оценивалось методом обратного титрования (перемешивание УСМ с раствором стандартизованного раствора NaOH (0,05 М, 10 мл, 4 ч), отделение УСМ на фильтре и титрование фильтрата раствором HCl (0,05 М)). Также содержание серы в образцах устанавливалось элементным анализом на

CHNS-O анализаторе VARIO EL CUBE (Elementar Analysensysteme GmbH). Проба анализировалась не менее трех раз с последующим усреднением полученных данных. Термогравиметрический анализ УСМ проводили на установке, оснащенной микровесами Мак-Бена [14] (поток аргона 10 мл/мин, скорость изменения температуры 1 °С/мин, диапазон измеряемых температур 25...500 °С).

Каталитическая активность синтезированных образцов тестировалась в жидкофазной реакции этерификации карбоновой кислоты (уксусная (99,7 %, Aldrich) или энантовая (99,7 %, Fluka)) абсолютным метанолом (Fluka). 3 г карбоновой кислоты, двукратный по молям избыток метилового спирта, 10 мл дихлорэтана (растворитель), 5 мас.% УСМ в кислотной форме загружали в коническую колбу, снабженную насадкой Дина-Старка и обратным холодильником. Реакцию проводили при перемешивании в условиях удаления выделяющейся в ходе реакции воды (>80 °С) в виде азеотропной смеси дихлорэтан-вода (96 : 4 об.%). Контроль за степенью конверсии субстратов осуществляли с помощью газовой хроматографии (Кристалл-2000М) и по титрованию непрореагировавшей кислоты.

## 2. Синтез сульфокислотных углерод-углеродных композитов

При синтезе сульфокислотных углеродных материалов (УСМ) сульфироваться могут  $C_{sp2}(H)$  атомы, находящиеся на краевых частях графитоподобных блоков, а также неупорядоченные углеродные фрагменты. Предел сульфирования углеродных материалов (т. е. максимально достижимая концентрация химически связанных сульфогрупп в итоговом УСМ) при сульфировании олеумом (20 %  $SO_3$ ) при 150 °С (24 ч) снижался в ряду: карбонизованная *d*-глюкоза > карбонизованная целлюлоза >> УНВ > МУНТ. Таким образом, увеличение степени карбонизации предшественника УСМ снижало итоговую кислотность материала. Это обусловлено тем, что карбонизованная в инертной среде *d*-глюкоза (или целлюлоза) преимущественно состоит из небольших (<100 нм, данные ПЭМ) по размерам графитоподобных блоков, соединенных алкильными фрагментами. В то же время мезопористые углеродные носители (УНВ, МУНТ) преимущественно состоят из протяженных графеновых слоев с меньшей дефектностью. Нанесение на поверхность УНВ легко-сульфируемой фазы карбонизованной *d*-глюкозы позволяет достичь показателей концентрации сульфогрупп, сравнимых с *s*-cG.

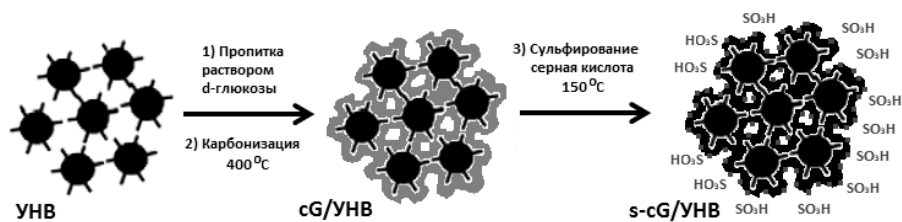


Рис. 2 – Схема синтеза сульфатированных углерод-углеродных композитов s-cG/УНВ

Fig. 2 – Sulfated s-cG/CNF carbon-carbon composites

Методом низкотемпературной адсорбции азота было показано, что текстурные характеристики материалов УНВ практически не изменялись в ходе реакции сульфирования в широком диапазоне температур 100...300 °С (например, для УНВ-285 до (после) сульфирования удельная поверхность составляла  $S_{уд} = 285$  (283)  $m^2/g$  и для образца 30 мас.% cG/УНВ-318 – 104 (99)  $m^2/g$ ). Однако при сульфировании образцов cG, cC и cG/УНВ-318 при температурах свыше 150 °С было отмечено частичное выгорание карбонизованного растительного сырья, приводящее к увеличению удельной поверхности для образца cG/УНВ-318 (104 (212)  $m^2/g$ ).

со снижением концентрации химически-связанных сульфогрупп в итоговом УСМ. Стадию карбонизации необходимо проводить в токе инертного газа. Также при нагревании нанесенных образцов G/УНВ и чистой *d*-глюкозы в атмосфере воздуха происходило быстрое выгорание предшественника кислотной фазы. Таким образом, стадию карбонизации необходимо проводить в инертной среде.

Для получения композитов с высоким содержанием нанесенной фазы *d*-глюкозы использовали многостадийную пропитку УНВ по влагоемкости. При повышении количества нанесенного карбонизованного растительного сырья текстурные характеристики снижались с повышением концентрации сульфогрупп УСМ (рис. 3). Согласно полученным данным, оптимальной массовой долей нанесенной *d*-глюкозы является 30 % ( $m(cG)/m(УНВ) + m(cG)$ )\*100 %), так как в этом случае сочетаются высокие текстурные характеристики и высокая кислотность УСМ.

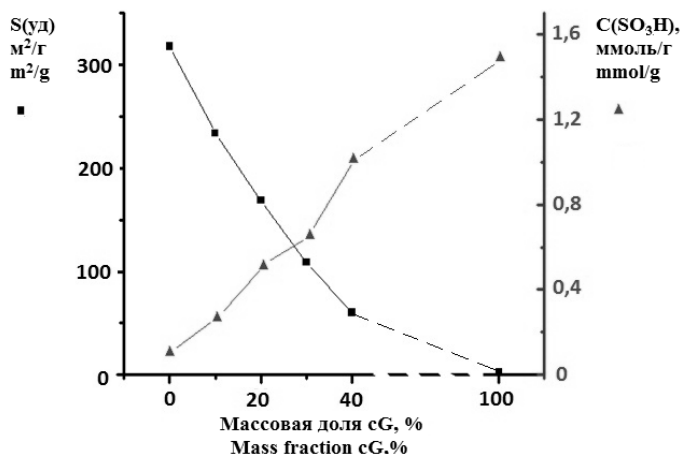


Рис. 3 – Зависимость текстурных характеристик и концентрации сульфогрупп в композитах s-cG/УНВ от количества нанесенной *d*-глюкозы

Fig. 3 – Influence of *d*-glucose loading on s-cG/CNF textural characteristics and sulfuric acid groups concentration

Методом РФЭС было показано, что сера в полученных сульфатированных образцах находится исключительно в  $S^{6+}$  форме (спектр S2p, 168,8 эВ), что соответствует сульфокислотным  $SO_3H$ -группам. Это позволяет использовать данные элементного анализа (количество серы) образцов для характеристики кислотных свойств синтезированных материалов (концентрация сульфогрупп).

Окислительная предобработка углеродных носителей и композитов cG/УНВ перед процессом сульфирования не оказывала существенного влияния на концентрацию сульфогрупп (протестировано на образцах УНВ-318 и 30 мас.% cG/УНВ). В итоговом образце УСМ увеличивалась исключительно концентрация поверхностных  $COOH$ -групп, а не  $SO_3H$ -групп. Этот экспериментальный факт регистрировался по сопоставлению данных обратного титрования УСМ раствором щелочи (нейтрализуются как  $COOH$ -, так и  $SO_3H$ -группы) и по титрованию HCl, полученного ионным обменом в смеси  $NaCl + УСМ = SO_3Na-УСМ + HCl$  (в обмене участвуют только кислые протоны  $SO_3H$ -группы).

Данные термогравиметрического анализа (нагревание 200 мг образца в токе аргона, 20...600 °C, 10 °C/мин) указывают на наличие трех областей термического разложения УСМ: I (40...110 °C) – удаление физадсорбированной воды;

II (250...340 °С) разложение связей C–S и удаление сульфогрупп в виде оксидов серы и воды; III (>400 °С) – разложение углеродного предшественника.

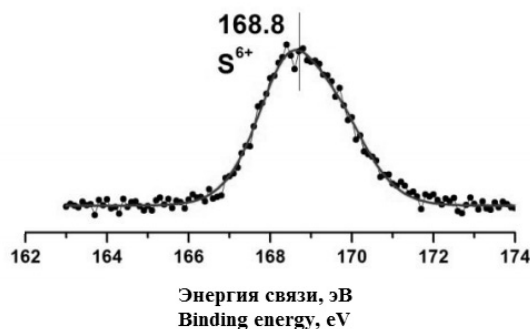


Рис. 4 – РФЭС спектр (S2p) для сульфатированных углеродных нановолокон

Fig. 4 – Sulfated carbon nanofibers XPS spectrum (S2p)

Температурная зависимость реакции сульфирования предшественника УСМ представлена на рис. 5, б. Оптимальной температурой сульфирования, при которой достигалась наибольшая концентрация сульфогрупп на поверхности, является диапазон 150...200 °С. При меньших значениях  $T$  сульфирование протекало не в полном объеме, а при повышении температуры (свыше 200 °С) увеличивался вклад процесса термического разложения связи C–S. Также в случае УСМ, полученных карбонизацией растительного сырья, при температурах свыше 200 °С происходила окислительная деструкция.

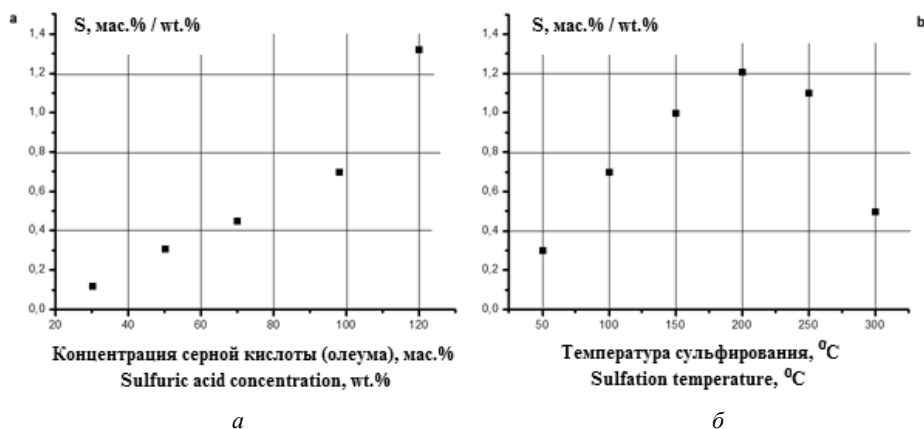


Рис. 5 – Зависимость степени сульфирования УСМ от концентрации сульфорирующего агента (а) и от температуры сульфирования (б)

Fig. 5 – Dependence completeness sulfonation CBSA concentration sulfonating agent (a) and the temperature of sulfonation (b)

Согласно полученным в работе данным реакция сульфирования углеродных носителей, как и ароматических соединений, является обратимой. Выделяющаяся реакционная вода способствует диссоциации серной кислоты с образованием электрофильного протона, что приводит к десульфированию. На рис. 5, а показана зависимость степени (содержание серы) сульфирования УНВ от концентрации

сульфирующей смеси. Разбавление серной кислоты существенно увеличивало скорость реакции десульфирования. Сульфирование предшественников УСМ олеумом исключает возможность нахождения в реакционной смеси воды и приводило к более полному сульфированию углеродного материала.

### 3. Этерификация карбоновых кислот

В ходе работы была показана прямая зависимость между кислотностью образцов и их каталитической активностью (см. таблицу). Для сравнения каталитической активности образцов реакцию останавливали по истечению 2 ч этерификации уксусной (или энантовой кислоты) абсолютным метанолом. При взаимодействии низкомолекулярной карбоновой кислоты (уксусная) с метанолом скорость процесса и выход продукта этерификации ( $Y_{MA}$ , %, табл. 1) зависел только от концентрации сульфокислотных групп катализатора. При этерификации высокомолекулярной карбоновой кислоты (энантовая,  $Y_{ME}$ , %, табл. 1) существенное влияние оказывала также текстурная характеристика носителя.

**Влияние условий синтеза УСМ и углеродного предшественника на концентрацию кислотных групп и каталитические свойства**  
**Influence of the synthesis conditions and CBSA precursor on a concentration of acidic groups and catalytic properties**

УСМ	Количество нанесенной кислотной фазы, мас. %	Условия сульфирования	Свойства УСМ	
			C(SO <sub>3</sub> H), ммоль/г	Y <sub>MA</sub> (Y <sub>ME</sub> ), %
УНВ-318	0	Олеум (20 %), 150 °С	0,2	13
		H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> , 150 °С	0,05	7
		–	0	следы
s-cG/УНВ-318	10	Олеум (20 %), 150 °С	0,4	30
	20	Олеум (20 %), 150 °С	0,62	51
	30	Олеум (20 %), 150 °С	1,03	81 (64)
		H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> , 150 °С	0,99	80
		H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> , 250 °С	0,78	60
	40	Олеум (20 %), 150 °С	1,2	83
50	Олеум (20 %), 150 °С	1,2	81 (31)	
s-cG/УНВ-285	30	Олеум (20 %), 150 °С	0,86	74
s-cG/УНВ-141	30	Олеум (20 %), 150 °С	0,75	67
s-cG	–	Олеум (20 %), 150 °С	1,4	84 (37)
s-cC	–	Олеум (20 %), 150 °С	1,3	84

### Заключение

В ходе работы синтезированы сульфокислотные углерод-углеродные композиты состава SO<sub>3</sub>H-карбонизованная d-глюкоза/УНВ, с массовой долей нанесенной фазы 10...50 % м.д. (d-глюкоза). Найден оптимальный состав композита (мас.д. 30 %) сочетающий высокие текстурные характеристики (>100 м<sup>2</sup>/г) и кислотность (1,2 ммоль/г) УСМ. Полученные материалы протестированы в реакции жидкофазной этерификации карбоновых кислот (уксусная, олеиновая) спиртами. Преимуществом синтезированных материалов по сравнению с образцами пиролизованного растительного сырья и карбонизованными сульфополимерами является наличие углеродного каркаса УНВ, который обеспечивает стабильные текстурные характеристики композита.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Kang S., Ye J., Chang J.** Recent advances in carbon-based sulfonated catalyst: preparation and application // *International Review of Chemical Engineering*. – 2014. – Vol. 5. – P. 133–143.
2. A carbon material as a strong protonic acid / M. Hara, T. Yoshida, A. Takagaki, T. Takata, J.N. Kondo, K. Domen // *Angewandte Chemie International Edition*. – 2004. – Vol. 43. – P. 2955–2958. – doi: 10.1002/anie.200453947.
3. Hydrolysis of carboxylic acid esters catalyzed by a carbon-based solid acid / Z. Fu, H. Wan, Q. Cui, J. Xie, Y. Tang, G. Guan // *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis*. – 2011. – Vol. 104. – P. 313–321. – doi: 10.1007/s11144-011-0348-6.
4. Preparation of a sugar catalyst and its use for highly efficient production of biodiesel / M.-H. Zong, Z.-Q. Duan, W.-Y. Lou, T.J. Smith, H. Wu // *Green Chemistry*. – 2007. – Vol. 9. – P. 434–437. – doi: 10.1039/B615447F.
5. Towards a bio-based industry: benign catalytic esterifications of succinic acid in the presence of water / V. Budarin, R. Luque, D.J. Macquarrie, J.H. Clark // *Chemistry – A European Journal*. – 2007. – Vol. 13. – P. 6914–6919. – doi: 10.1002/chem.200700037.
6. sp<sup>3</sup>-Linked amorphous carbon with sulfonic acid groups as a heterogeneous acid catalyst / S. Suganuma, K. Nakajima, M. Kitano, S. Hayashi, M. Hara // *ChemSusChem*. – 2012. – Vol. 5. – P. 1841–1846. – doi: 10.1002/cssc.201200010.
7. Synthesis and characterization of sulfonated single-walled carbon nanotubes and their performance as solid acid catalyst / H. Yu, Y. Jin, Z. Li, F. Peng, H. Wang // *Journal of Solid State Chemistry*. – 2008. – Vol. 181. – P. 432–438. – doi: 10.1016/j.jssc.2007.12.017.
8. SO<sub>3</sub>H-bearing mesoporous carbon with highly selective catalysis / S. Suganuma, K. Nakajima, M. Kitano, H. Kato, A. Tamura, H. Kondo, S. Yanagawa, S. Hayashi, M. Hara // *Microporous and Mesoporous Materials*. – 2011. – Vol. 143. – P. 443–450. – doi: 10.1016/j.micromeso.2011.03.028.
9. Acid-catalyzed reactions on flexible polycyclic aromatic carbon in amorphous carbon / M. Okamura, A. Takagaki, M. Toda, J.N. Kondo, K. Domen, T. Tatsumi, M. Hara, S. Hayashi // *Chemistry of Materials*. – 2006. – Vol. 18. – P. 3039–3045. – doi: 10.1021/cm0605623.
10. Sulfonic-acid-functionalized porous benzene phenol polymer and carbon for catalytic esterification of methanol with acetic acid / X. Tian, L.L. Zhang, P. Bai, X.S. Zhao // *Catalysis Today*. – 2011. – Vol. 166. – P. 53–59. – doi: 10.1016/j.cattod.2010.03.082.
11. Preparation of a sulfonated activated carbon fiber catalyst with c-irradiation-induced grafting method / Q. Li, S. Chen, L. Zhuang, X. Xu, H. Li // *Journal of Materials Research*. – 2012. – Vol. 27. – P. 3083–3089. – doi: 10.1557/jmr.2012.360.
12. Sulfonated ordered mesoporous carbon as a stable and highly active protonic acid catalyst / X. Wang, R. Liu, M.M. Waje, Z. Chen, Y. Yan, N.K. Bozhilov, P. Feng // *Chemistry of Materials*. – 2007. – Vol. 19. – P. 2395–2397. – doi: 10.1021/cm070278r.
13. Preparation of poly(p-styrenesulfonic acid) grafted multi-walled carbon nanotubes and their application as a solid-acid catalyst / X.H. Zhang, Q.Q. Tang, D. Yang, W. Hua, Y.H. Yue, B.D. Wang, X.H. Zhang, J.H. Hu // *Materials Chemistry and Physics*. – 2011. – Vol. 126. – P. 310–313. – doi: 10.1016/j.matchemphys.2010.11.021.
14. Catalytic synthesis of nanosized feathery carbon structures via the carbide cycle mechanism / I.V. Mishakov, R.A. Buyanov, V.I. Zaikovskii, I.A. Streltsov, A.A. Vedyagin // *Kinetics and Catalysis*. – 2008. – Vol. 49. – P. 868–878.
15. Sulfonation of pyropolimeric fibers derived from phenol-formaldehyde resins / K.R. Benak, L. Dominguez, J. Economy, C.L. Mangun // *Carbon*. – 2002. – Vol. 40. – P. 2323–2332. – doi: 10.1016/S0008-6223(02)00146-X.

## SULFATED CARBON-BASE MATERIAL PREPARATION AND INVESTIGATION OF THEIR CATALYTIC ACTIVITY

Koskin A.P.<sup>1</sup>, Gabova N.E.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Borescov Institute of Catalysis, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

Carbonaceous materials with chemically grafted sulfuric acid groups (CBSA) are promising for a number of commercially important acid-catalyzed reactions (alkylation, esterification, nitration and dehydration). These materials have high textural characteristics (specific surface area and pore volume) and high-concentration acidic groups. It makes possible to use these systems as an alternative to conventional homogeneous acidic catalysts (sulfuric acid, toluenesulphonic acid) used in industry.

In this study, we investigate the CBSA preparation method which includes a step of carbon-carbon composite synthesis (preparation of d-glucose char/carbon nanofibers with the following sulfation of obtained mesoporous materials by the fuming sulfuric acid). We found an optimal ratio of the acid phase precursor (char d-glucose) and carbon nanofibers to combine high textural characteristics (100 m<sup>2</sup>/g) and a high acidity concentration (1.2 mmol/g). The synthesized materials were investigated by low-temperature nitrogen adsorption (for texture characteristics), XPS, elemental analysis and titrimetric methods. The catalytic activity was studied in the liquid-phase esterification of carboxylic acids (RCOOH + CH<sub>3</sub>OH, R = CH<sub>3</sub>, C<sub>6</sub>H<sub>13</sub>).

*Keywords:* Acid catalysis; esterification; carbon-based solid sulphonic-acid materials.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-16-25

### REFERENCES

1. Kang S., Ye J., Chang J. Recent advances in carbon-based sulfonated catalyst: preparation and application. *International Review of Chemical Engineering*, 2014, vol. 5, pp. 133–143.
2. Hara M., Yoshida T., Takagaki A., Takata T., Kondo J.N., Domen K. A carbon material as a strong protonic acid. *Angewandte Chemie International Edition*, 2004, vol. 43, pp. 2955–2958. doi: 10.1002/anie.200453947
3. Fu Z., Wan H., Cui Q., Xie J., Tang Y., Guan G. Hydrolysis of carboxylic acid esters catalyzed by a carbon-based solid acid. *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis*, 2011, vol. 104, pp. 313–321. doi: 10.1007/s11144-011-0348-6
4. Zong M.-H., Duan Z.-Q., Lou W.-Y., Smith T.J., Wu H. Preparation of a sugar catalyst and its use for highly efficient production of biodiesel. *Green Chemistry*, 2007, vol. 9, pp. 434–437. doi: 10.1039/B615447F
5. Budarin V., Luque R., Macquarrie D.J., Clark J.H. Towards a bio-based industry: benign catalytic esterifications of succinic acid in the presence of water. *Chemistry – A European Journal*, 2007, vol. 13, pp. 6914–6919. doi: 10.1002/chem.200700037
6. Suganuma S., Nakajima K., Kitano M., Hayashi S., Hara M. sp<sup>3</sup>-Linked amorphous carbon with sulfonic acid groups as a heterogeneous acid catalyst. *ChemSusChem*, 2012, vol. 5, pp. 1841–1846. doi: 10.1002/cssc.201200010
7. Yu H., Jin Y., Li Z., Peng F., Wang H. Synthesis and characterization of sulfonated single-walled carbon nanotubes and their performance as solid acid catalyst. *Journal of Solid State Chemistry*, 2008, vol. 181, pp. 432–438. doi: 10.1016/j.jssc.2007.12.017
8. Suganuma S., Nakajima K., Kitano M., Kato H., Tamura A., Kondo H., Yanagawa S., Hayashi S., Hara M. SO<sub>3</sub>H-bearing mesoporous carbon with highly selective catalysis. *Microporous and Mesoporous Materials*, 2011, vol. 143, pp. 443–450. doi: 10.1016/j.micromeso.2011.03.028
9. Okamura M., Takagaki A., Toda M., Kondo J.N., Domen K., Tatsumi T., Hara M., Hayashi S. Acid-catalyzed reactions on flexible polycyclic aromatic carbon in amorphous carbon. *Chemistry of Materials*, 2006, vol. 18, pp. 3039–3045. doi: 10.1021/cm0605623
10. Tian X., Zhang L.L., Bai P., Zhao X.S. Sulfonic-acid-functionalized porous benzene phenol polymer and carbon for catalytic esterification of methanol with acetic acid. *Catalysis Today*, 2011, vol. 166, pp. 53–59. doi: 10.1016/j.cattod.2010.03.082



11. Li Q., Chen S., Zhuang L., Xu X., Li H. Preparation of a sulfonated activated carbon fiber catalyst with  $\gamma$ -irradiation-induced grafting method. *Journal of Materials Research*, 2012, vol. 27, pp. 3083–3089. doi: 10.1557/jmr.2012.360
12. Wang X., Liu R., Waje M.M., Chen Z., Yan Y., Bozhilov N.K., Feng P. Sulfonated ordered mesoporous carbon as a stable and highly active protonic acid catalyst. *Chemistry of Materials*, 2007, vol. 19, pp. 2395–2397. doi: 10.1021/cm070278r
13. Zhang X.H., Tang Q.Q., Yang D., Hua W., Yue Y.H., Wang B.D., Zhang X.H., Hu J.H. Preparation of poly(p-styrenesulfonic acid) grafted multi-walled carbon nanotubes and their application as a solid-acid catalyst. *Materials Chemistry and Physics*, 2011, vol. 126, pp. 310–313. doi: 10.1016/j.matchemphys.2010.11.021
14. Mishakov I.V., Buyanov R.A., Zaikovskii V.I., Streltsov I.A., Vedyagin A.A. Catalytic synthesis of nanosized feathery carbon structures via the carbide cycle mechanism. *Kinetics and Catalysis*, 2008, vol. 49, pp. 868–878.
15. Benak K.R., Dominguez L., Economy J., Mangun C.L. Sulfonation of pyropolymeric fibers derived from phenol-formaldehyde resins. *Carbon*, 2002, vol. 40, pp. 2323–2332. doi: 10.1016/S0008-6223(02)00146-X

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Коскин Антон Павлович** – родился в 1980 году, канд. техн. наук, научный сотрудник лаборатории исследования наноструктурированных катализаторов и сорбентов Института катализа СО РАН. Область научных интересов: твердые кислоты, гетерогенный катализ, нитрование ароматических соединений, тонкий органический синтез. Опубликовано 23 научные работы. (Адрес: 630090, Россия, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 5. Email: koskin@catalysis.ru).

**Koskin Anton Pavlovich** (b. 1980) – Candidate of Science (Eng.), researcher, LNCSR department, Borescov Institute of Catalysis. His research interests are currently focused on solid acids, heterogeneous catalysis, aromatic nitration, fine organic chemistry. He is author of 23 scientific papers. (Address: 5, Pr. Akad. Lavrentieva, Novosibirsk, 630128, Russia. Email: koskin@catalysis.ru).



**Габова Наталья Евгеньевна** – родилась в 1994 году, студентка Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: твердые кислоты, гетерогенный катализ, тонкий органический синтез. (Адрес: 630092, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: atashka94@mail.ru).

**Gabova Natalia Evgenievna** (b. 1994) – student of Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on solid acids, heterogeneous catalysis, aromatic nitration, fine organic chemistry. (Address: 5, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630092, Russia. Email: atashka94@mail.ru).

Статья поступила 03 июня 2016 г.  
Received June 03, 2016

## To Reference:

Koskin A.P., Gabova N.E. Sintez i issledovanie kataliticheskoi aktivnosti sul'fokislотноykh uglerodnykh materialov [Sulfated carbon-base material preparation and investigation of their catalytic activity]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 16–25. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-16-25

УДК 51-74:621

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНЗИСТОРНЫХ  
УПРАВЛЯЕМЫХ ВЫПРЯМИТЕЛЕЙ  
В РЕЖИМЕ РЕКУПЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ****А.И. Андриянов<sup>1</sup>, Е.А. Саченко<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Брянский государственный технический университет*<sup>2</sup>*ООО «НПО «Электронтехника»*

В работе предложена кусочно-гладкая математическая модель транзисторного управляемого выпрямителя, предназначенная для изучения его работы в режиме рекуперации электроэнергии. Рассматриваемая математическая модель представляет собой решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих систему автоматического управления с транзисторным управляемым выпрямителем в режиме рекуперации на участке постоянства ее структуры. Это решение может быть применено для всех участков постоянства структуры с приспособыванием при переходе от одного участка к другому. Приведены результаты моделирования временных диаграмм транзисторного управляемого выпрямителя в режиме рекуперации, которые были получены с использованием данной модели. Выполнен сравнительный анализ результатов моделирования на основе предложенной математической модели и аналогичных результатов, полученных с использованием компьютерной модели *MATLAB Simulink*. Доказаны адекватность кусочно-гладкой математической модели и ее применимость для изучения режимов работы преобразователей данного класса. Показано, что предложенная математическая модель имеет ряд преимуществ по сравнению с широко используемыми имитационными моделями, создаваемыми в средах *MATLAB Simulink*, *OrCAD* и т. п., а именно – более высокую скорость расчета и точность. Данная модель может стать основой для построения математического аппарата, предназначенного для исследования нелинейной динамики транзисторных управляемых выпрямителей и оптимальной настройки их системы управления.

*Ключевые слова:* транзисторный управляемый выпрямитель, рекуперация электроэнергии, динамические режимы, кусочно-гладкая математическая модель.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-26-42

**Введение**

Транзисторные управляемые выпрямители (УВ) приобретают все большее распространение в современной промышленности. Их основными достоинствами являются: высокий коэффициент мощности; двунаправленная передача энергии – от питающей сети в нагрузку и наоборот; формирование синусоидальной формы входного тока питающей сети; обеспечение постоянного уровня выходного напряжения.

Наиболее перспективным свойством УВ является их способность обеспечивать рекуперацию электроэнергии в питающую сеть [1], благодаря чему они находят широкое применение на транспорте, в крановом, конвейерном и лифтовом оборудовании, а также для решения задач энергосбережения. В связи с этим возрастают требования к устойчивости и надежности системы управления УВ.

УВ относятся к классу нелинейных систем автоматического управления с импульсной модуляцией и, следовательно, склонны к хаотической динамике [2]. В работах [3–6] рассмотрены некоторые бифуркационные явления, которые могут

возникать в процессе работы УВ, подключенных к реальной питающей сети. Для изучения этих эффектов в [3–5] использовалась усредненная линеаризованная модель УВ [7], которая не учитывает импульсный режим работы преобразователя. Нелинейная часть усредненной модели обусловлена только лишь наличием элементов насыщения в системе управления, например, при гистерезисном управлении [5]. Усредненная модель не может быть применена для исследования всех разновидностей бифуркационных явлений, которые могут наблюдаться в УВ, а также для анализа их нелинейной динамики.

Более широкими возможностями обладают полные динамические модели, учитывающие импульсный режим преобразователя и его динамические нелинейности. На данный момент для исследования динамики УВ используются компьютерные модели, разрабатываемые в средах имитационного моделирования *MATLAB Simulink*, *OrCAD* и т. п. Они учитывают импульсные режимы работы, но при этом расчет ведется с использованием численных методов, что позволяет достичь приемлемой точности лишь при достаточно малом шаге интегрирования. Кроме того, процесс проектирования осложняется необходимостью выбора устойчивого численного метода и его параметров для конкретной задачи. К недостаткам компьютерных моделей относится также низкая скорость расчета. Это делает затруднительным использование моделей данного класса для исследования нелинейной динамики импульсных преобразователей.

Использование кусочно-гладких моделей [2] для описания динамических режимов преобразователей с ШИМ позволяет исключить недостатки компьютерных моделей и создать специальный математический аппарат для изучения нелинейной динамики импульсных преобразователей. Кроме того, данные модели позволяют достичь высокой скорости расчета.

В рамках настоящей работы представлено описание кусочно-гладкой математической модели УВ, работающего в режиме рекуперации, а также результаты сравнительного анализа разработанной модели и компьютерной модели, созданной в *MATLAB Simulink*.

## 1. Разработка математической модели УВ

Наиболее часто УВ используются в составе преобразователей частоты для управления электродвигателем, которые строятся на базе УВ и автономного инвертора напряжения (АИН). Поэтому для исследования особенностей работы УВ в режиме рекуперации в схему замещения данного преобразователя необходимо включить источник энергии, которым для УВ является система «АИН – электродвигатель». Она может быть представлена в виде источника тока с конечным внутренним сопротивлением согласно [8]. На основании этого допущения схема замещения системы автоматического управления УВ может быть представлена, как на рис. 1. На рисунке приняты следующие обозначения:  $U_A, U_B, U_C$  – фазные напряжения питающей сети,  $L_A, L_B, L_C$  – индуктивности дросселей фильтра,  $R_A, R_B, R_C$  – активные сопротивления дросселей фильтра,  $C_\phi$  – емкость конденсатора фильтра,  $I_M$  – источник тока,  $R_I$  – внутреннее сопротивление источника тока, ДТ – датчики входного тока,  $\beta_n$  – коэффициент обратной связи по напряжению,  $\beta_T$  – коэффициент обратной связи по входному току,  $\beta$  – коэффициент усиления датчиков входного напряжения,  $\alpha_n$  – коэффициент пропорционального регулятора напряжения,  $\alpha_T$  – коэффициент пропорционального регулятора тока,  $У$  – блок перемножения сигналов, УВХ – устройство выборки-хранения, ЗГ – задаю-

щий генератор, ГОН – генератор опорного напряжения, К – ШИМ-компаратор,  $U_{осн}$  – сигнал обратной связи по напряжению,  $U_{зн}$  – сигнал задания по напряжению,  $U_{ошн}$  – сигнал ошибки по напряжению,  $U_{ост} = (U_{остA}, U_{остB}, U_{остC})$  – вектор сигналов обратной связи по току фаз  $A, B, C$ ,  $U_{зт} = (U_{зтA}, U_{зтB}, U_{зтC})$  – вектор сигналов задания на ток фаз,  $U_{ошт} = (U_{оштA}, U_{оштB}, U_{оштC})$  – вектор сигналов ошибки по току фаз,  $U_y = (U_{yA}, U_{yB}, U_{yC})$  – вектор сигналов управления фаз,  $U_{зг}$  – напряжение задающего генератора,  $U_{оп}$  – опорное напряжение,  $U_{упр}$  – сигналы управления транзисторами.

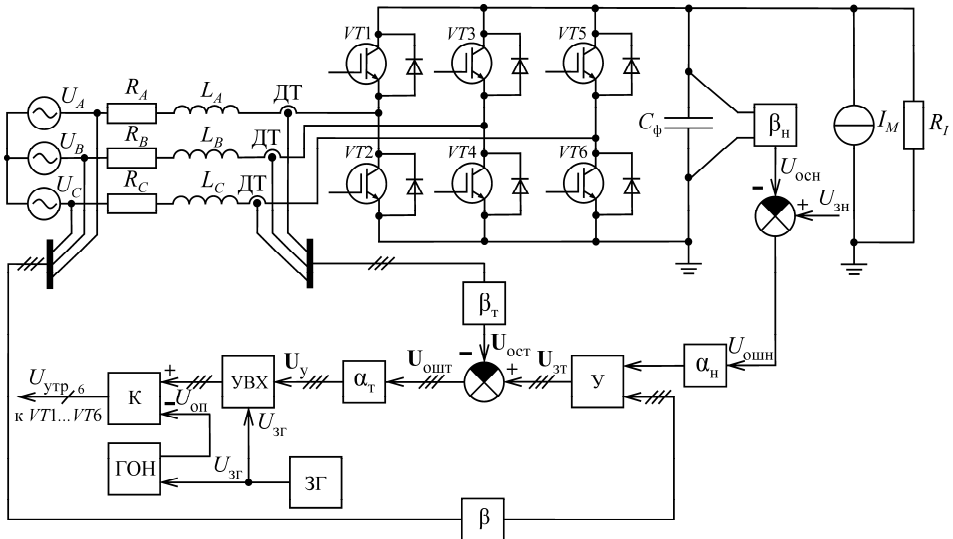


Рис. 1 – Схема замещения системы автоматического управления с УВ

Fig. 1 – Equivalent circuit of the automatic control system with a transistor controlled rectifier (TCR)

Математическая модель рассматриваемого преобразователя может быть представлена в форме системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и относится к классу кусочно-гладких моделей [2].

При составлении математической модели тактовый интервал разбивается на участки гладкости, в пределах которых работа преобразователя описывается системой линейных дифференциальных уравнений. Для УВ максимально возможное число коммутаций на тактовом интервале равно четырем (с учетом коммутации в начале тактового интервала). На рис. 2 представлены участки гладкости для этого случая.

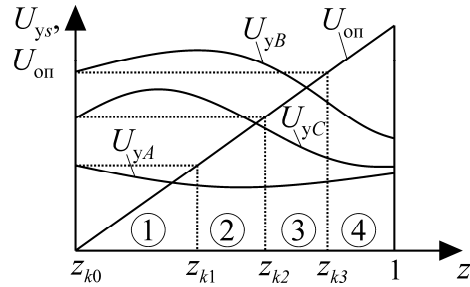
На рисунке приняты следующие обозначения:  $U_{ys}$  – сигнал управления фазы  $s$ ,  $a$  – длительность тактового интервала,  $k$  – номер тактового интервала,  $z_{kp} - p$  -й момент коммутации на тактовом интервале в относительном времени.

При рассмотрении работы преобразователя на тактовом интервале удобно использовать относительное время  $z$ , которое определяется как

$$z = \frac{t - (k - 1)a}{a}.$$

В пределах тактового интервала  $z$  изменяется от 0 до 1. На рис. 2  $z_{k0}$  – начало  $k$ -го тактового интервала в относительном времени ( $z_{k0}$  всегда равно 0).

Рис. 2 – Разбиение тактового интервала УВ на участки гладкости при ШИМ-I  
Fig. 2 – TCR clock period partitioning into smooth parts for PWM-I



В УВ можно выделить четыре участка гладкости.

1. Участок 1:  $z_{k0} < z < z_{k1}$ . На данном участке ключи нижнего плеча всех стоек УВ открыты. Комбинация открытых ключей в соответствии с обозначениями рис. 1 – 2, 4, 6.

2. Участок 2:  $z_{k1} < z < z_{k2}$ . На данном участке ключи нижнего плеча открыты в двух стойках УВ. Комбинации открытых ключей в соответствии с обозначениями рис. 1 – 1, 4, 6 или 2, 3, 6 или 2, 4, 5.

3. Участок 3:  $z_{k2} < z < z_{k3}$ . На данном участке ключи нижнего плеча открыты в одной стойке УВ. Комбинации открытых ключей в соответствии с обозначениями рис. 1 – 1, 3, 6 или 2, 3, 5 или 1, 4, 5.

4. Участок 4:  $z_{k3} < z < 1$ . На данном участке ключи нижнего плеча всех стоек УВ закрыты. Комбинация открытых ключей в соответствии с обозначениями рис. 1 – 1, 3, 5.

Для формирования импульсов управления ключами используется ШИМ первого рода (ШИМ-I), которая наиболее часто применяется в микропроцессорных системах управления импульсными преобразователями. В ШИМ-I каждый момент коммутации определяется выборкой сигнала управления соответствующей фазы в начале тактового интервала [9].

На рис. 2 представлен частный случай, когда первый момент коммутации  $z_{k1}$  определяется сигналом управления фазы  $A$ , второй момент коммутации  $z_{k2}$  определяется сигналом управления фазы  $C$  и третий момент коммутации  $z_{k3}$  определяется сигналом управления фазы  $B$  (последовательность коммутаций:  $A-C-B$ ). Очевидно, что в данном случае возможны шесть различных последовательностей коммутаций.

Схемы замещения силовой части УВ на каждом участке гладкости представлены на рис. 3.

Участкам 1 и 4 соответствует схема рис. 3, *а*. Участку 2 – схема рис. 3, *б*, участку 3 – схема рис. 3, *в*. На рисунке приняты следующие обозначения:  $U_j$  – напряжение  $j$ -й фазы ( $j = 1, 2, 3$ ),  $L_j$  – индуктивность дросселя фильтра  $j$ -й фазы,  $R_j$  – активное сопротивление дросселя фильтра  $j$ -й фазы. Значения этих величин определяются в зависимости от комбинации открытых ключей в соответствии с табл. 1.

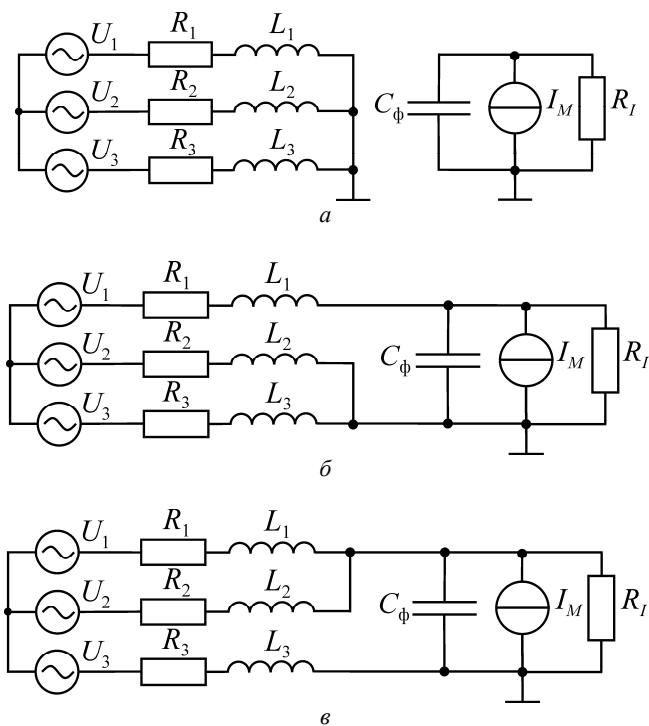


Рис. 3 – Схема замещения УВ при различных комбинациях открытых ключей:

*a* – 1, 3, 5 или 2, 4, 6; *б* – 1, 4, 6 или 2, 3, 6 или 2, 4, 5; *в* – 1, 3, 6 или 2, 3, 5 или 1, 4, 5

Fig. 3 – TCR equivalent circuit for different combinations of the power switches in ON state:

*a* – 1, 3, 5 or 2, 4, 6; *b* – 1, 4, 6 or 2, 3, 6 or 2, 4, 5; *c* – 1, 3, 6 or 2, 3, 5 or 1, 4, 5

Таблица 1 / Table 1

**Параметры схем замещения УВ на участках гладкости**  
**Parameters of TCR equivalent circuit on different smooth parts**

№	Номера открытых ключей	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	Схема замещения
1	1, 3, 5	$U_A$	$U_B$	$U_C$	$R_A$	$R_B$	$R_C$	$L_A$	$L_B$	$L_C$	рис. 3, <i>a</i>
2	2, 4, 6	$U_A$	$U_B$	$U_C$	$R_A$	$R_B$	$R_C$	$L_A$	$L_B$	$L_C$	рис. 3, <i>a</i>
3	1, 4, 6	$U_A$	$U_B$	$U_C$	$R_A$	$R_B$	$R_C$	$L_A$	$L_B$	$L_C$	рис. 3, <i>б</i>
4	2, 3, 6	$U_B$	$U_A$	$U_C$	$R_B$	$R_A$	$R_C$	$L_B$	$L_A$	$L_C$	рис. 3, <i>б</i>
5	2, 4, 5	$U_C$	$U_A$	$U_B$	$R_C$	$R_A$	$R_B$	$L_C$	$L_A$	$L_B$	рис. 3, <i>б</i>
6	1, 3, 6	$U_A$	$U_B$	$U_C$	$R_A$	$R_B$	$R_C$	$L_A$	$L_B$	$L_C$	рис. 3, <i>в</i>
7	2, 3, 5	$U_B$	$U_C$	$U_A$	$R_B$	$R_C$	$R_A$	$L_B$	$L_C$	$L_A$	рис. 3, <i>в</i>
8	1, 4, 5	$U_A$	$U_C$	$U_B$	$R_A$	$R_C$	$R_B$	$L_A$	$L_C$	$L_B$	рис. 3, <i>в</i>

Так как схемы замещения и их параметры для вариантов 1 и 2 табл. 1 одинаковы, всего можно выделить семь принципиально различных типов участка гладкости. Каждый тип участка гладкости характеризуется определенной комбинацией включенных ключей. При этом каждая схема замещения характеризует два или

три типа участка гладкости, но для каждого типа участка параметры схемы замещения индивидуальны.

На каждом участке гладкости схема замещения УВ может быть описана системой линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \quad (1)$$

где  $i$  – номер участка гладкости на тактовом интервале ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $\mathbf{A}_i$  – матрица постоянных коэффициентов размерности  $3 \times 3$  на  $i$ -м участке гладкости,  $\mathbf{B}$  – матрица постоянных коэффициентов размерности  $3 \times 3$ , постоянная для всех участков гладкости,  $\mathbf{v}(t)$  – вектор вынуждающих воздействий размерности  $3 \times 1$   $\mathbf{X} = (i_A, i_B, U_{cф})^T$  – вектор переменных состояния.

В общем виде решение задачи Коши для системы (1) на каждом участке гладкости имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{X}_{0i} + e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_i(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $t$  – текущий момент времени,  $t_0$  – момент времени, соответствующий началу  $i$ -го участка гладкости,  $\mathbf{X}_{0i}$  – вектор начальных условий в момент перехода на  $i$ -й участок гладкости.

При анализе схем замещения участков гладкости были получены численные значения матрицы  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}$  и вектора  $\mathbf{v}(t)$ . Значения матриц  $\mathbf{A}_i$  для каждого типа участка приведены в табл. 2. В таблице используется коэффициент  $N = (L_A L_B + L_B L_C + L_C L_A)^{-1}$ .

Произведение  $\mathbf{B}\mathbf{v}(t)$  может быть представлено в виде

$$\mathbf{B}\mathbf{v}(t) = \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) + B_c \mathbf{v}_c, \quad (3)$$

где  $\mathbf{B}_v$  – матрица постоянных коэффициентов размерности  $3 \times 3$ ;  $B_c$  – постоянный коэффициент равный  $1/C_{ф}$ ;  $\mathbf{v}_v(t)$  – вектор гармонических вынуждающих воздействий размерности  $3 \times 1$ ;  $\mathbf{v}_c$  – вектор постоянных вынуждающих воздействий размерности  $3 \times 1$ .

Матрица  $\mathbf{B}_v$  определяется по выражению

$$\mathbf{B}_v = \begin{pmatrix} N(L_B + L_C) & -NL_C & -NL_B \\ -NL_C & N(L_A + L_C) & -NL_A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор  $\mathbf{v}_v(t)$  определяется как

$$\mathbf{v}_v(t) = E_m (\sin(\omega t + \varphi_A), \sin(\omega t + \varphi_B), \sin(\omega t + \varphi_C))^T,$$

где  $E_m$  – амплитуда напряжения питающей сети,  $\omega$  – угловая частота напряжения питающей сети,  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\varphi_C$  – углы сдвига фазных напряжений питающей сети.

Таблица 2 / Table 2

**Значения матрицы  $A_i$  для различных типов участка гладкости**  
**Matrix  $A_i$  calculation on different smooth parts**

№	Номера открытых ключей	Значение $A_i$ на $i$ -м участке гладкости
1	1, 3, 5 или 2, 4, 6	$A_1 = A_4 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & 0 \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
2	1, 4, 6	$A_2 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & -N(L_B+L_C) \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & NL_C \\ \frac{1}{C_\Phi} & 0 & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
3	2, 3, 6	$A_2 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & NL_C \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & -N(L_A+L_C) \\ 0 & \frac{1}{C_\Phi} & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
4	2, 4, 5	$A_2 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_C R_B] & -N(L_C R_B-L_B R_C) & NL_B \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & NL_A \\ \frac{1}{C_\Phi} & \frac{1}{C_\Phi} & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
5	1, 3, 6	$A_3 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & -NL_B \\ N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & -NL_A \\ \frac{1}{C_\Phi} & \frac{1}{C_\Phi} & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
6	2, 3, 5	$A_3 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & N(L_C R_B-L_B R_C) & N(L_B+L_C) \\ -N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_C R_A] & -NL_A \\ \frac{1}{C_\Phi} & 0 & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$
7	1, 4, 5	$A_3 = \begin{pmatrix} -N[(L_B+L_C)R_A+L_B R_C] & -N(L_C R_B-L_B R_C) & -NL_C \\ -N(L_C R_A-L_A R_C) & -N[(L_A+L_C)R_B+L_A R_C] & N(L_A+L_C) \\ 0 & -\frac{1}{C_\Phi} & -\frac{1}{C_\Phi R_I} \end{pmatrix}$

Вектор  $v_c$  определяется по выражению

$$v_c = (0, 0, I_M)^T,$$

где  $I_M$  – ток источника тока в схеме замещения АИН с электродвигателем.

После подстановки выражения (3) в (2) решение системы (1) может быть представлено в виде

$$X(t) = e^{A_i(t-t_0)} X_{0i} + e^{A_i(t-t_0)} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \left( \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_i(\tau-t_0)} \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) d\tau + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_i(\tau-t_0)} B_c \mathbf{v}_c d\tau \right) = \\ & = e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{X}_{0i} + e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \Psi_1(t) + e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \Psi_2(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Векторная функция  $\Psi_1(t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) = & - \left( \mathbf{A}_i^2 + \omega^2 \mathbf{E} \right)^{-1} \left[ e^{-\mathbf{A}_i(t-t_0)} \times \right. \\ & \left. \times \left( \mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t) \right) - \left( \mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t_0) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t_0) \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица размерности  $3 \times 3$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_v(t)$  – вектор гармонических функций размерности  $3 \times 1$  вида

$$\hat{\mathbf{v}}_v(t) = E_m \left( \cos(\omega t + \varphi_A), \cos(\omega t + \varphi_B), \cos(\omega t + \varphi_C) \right)^T.$$

Векторная функция  $\Psi_2(t)$  имеет вид

$$\Psi_2(t) = \mathbf{A}_i^{-1} \left( \mathbf{E} - e^{-\mathbf{A}_i(t-t_0)} \right) B_c \mathbf{v}_c. \quad (6)$$

Подставим выражения (5) и (6) в (4) и получим решение системы (1) в конечном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{X}_{0i} - e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \left( \mathbf{A}_i^2 + \omega^2 \mathbf{E} \right)^{-1} \left[ e^{-\mathbf{A}_i(t-t_0)} \times \right. \\ & \left. \times \left( \mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t) \right) - \left( \mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t_0) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t_0) \right) \right] + \\ & + e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{A}_i^{-1} \left( \mathbf{E} - e^{-\mathbf{A}_i(t-t_0)} \right) B_c \mathbf{v}_c = \\ = & e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \mathbf{X}_{0i} - \left( \mathbf{A}_i^2 + \omega^2 \mathbf{E} \right)^{-1} \left[ \left( \mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t) \right) - \right. \\ & \left. - e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} \left( \mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(t_0) + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(t_0) \right) \right] + \mathbf{A}_i^{-1} \left( e^{\mathbf{A}_i(t-t_0)} - \mathbf{E} \right) B_c \mathbf{v}_c. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение (7) на  $i$ -м участке гладкости  $k$ -го тактового интервала в относительном времени имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) = & e^{\mathbf{A}_i(z-z_{k(i-1)})a} \mathbf{X}_{0ki} - \left( \mathbf{A}_i^2 + \omega^2 \mathbf{E} \right)^{-1} \left[ \left( \mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(z) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(z) \right) - e^{\mathbf{A}_i(z-z_{k(i-1)})a} \left( \mathbf{A}_i \mathbf{B}_v \mathbf{v}_v(z_{k(i-1)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{v}}_v(z_{k(i-1)}) \right) \right] + \mathbf{A}_i^{-1} \left( e^{\mathbf{A}_i(z-z_{k(i-1)})a} - \mathbf{E} \right) B_c \mathbf{v}_c, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mathbf{X}_{0ki}$  – вектор переменных состояния в начале  $i$ -го участка гладкости  $k$ -го тактового интервала, а векторы  $\mathbf{v}_v(z)$  и  $\hat{\mathbf{v}}_v(z)$  определяются из выражений:

$$\mathbf{v}_v(z) = E_m \begin{pmatrix} \sin(\omega(z+k-1)a + \varphi_A) \\ \sin(\omega(z+k-1)a + \varphi_B) \\ \sin(\omega(z+k-1)a + \varphi_C) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{v}}_v(z) = E_m \begin{pmatrix} \cos(\omega(z+k-1)a + \phi_A) \\ \cos(\omega(z+k-1)a + \phi_B) \\ \cos(\omega(z+k-1)a + \phi_C) \end{pmatrix}.$$

Как упоминалось ранее, в данном случае рассматривается система управления с ШИМ-I, где значения моментов коммутации  $z_{k1}$ ,  $z_{k2}$ ,  $z_{k3}$  определяются значениями компонент вектора сигналов управления  $\mathbf{U}_y$  (рис. 1) в моменты  $z_{k0}$ .

Определим компоненты вектора  $\mathbf{U}_y$  в начале  $k$ -го тактового интервала.

Сигнал управления фазы  $A$  в начале  $k$ -го тактового интервала определяется как

$$\begin{aligned} U_{yA}(z_{k0}, k) &= \alpha_T \left[ \alpha_H (U_{3H} - \beta_H U_{c\phi}(z_{k0})) \times \right. \\ &\quad \left. \times \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \phi_A) - \beta_T i_A(z_{k0}) \right] = \\ &= \alpha_T \left[ \alpha_H (U_{3H} - \beta_H \mathbf{C}_1 \mathbf{X}_{0k1}) \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \phi_A) - \beta_T \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_{0k1} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mathbf{C}_1 = (0, 0, 1)^T$ ,  $\mathbf{C}_2 = (1, 0, 0)^T$  – векторы постоянных коэффициентов, определяющие элементы вектора начальных условий в начале тактового интервала  $\mathbf{X}_{0k1}$ , которые используются в (9).

Аналогично определяются сигналы управления фаз  $B$  и  $C$  в момент  $z_{k0}$ :

$$\begin{aligned} U_{yB}(z_{k0}, k) &= \alpha_T \left[ \alpha_H (U_{3H} - \beta_H U_{c\phi}(z_{k0})) \times \right. \\ &\quad \left. \times \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \phi_B) - \beta_T i_B(z_{k0}) \right] = \\ &= \alpha_T \left[ \alpha_H (U_{3H} - \beta_H \mathbf{C}_1 \mathbf{X}_{0k1}) \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \phi_B) - \beta_T \mathbf{C}_3 \mathbf{X}_{0k1} \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} U_{yC}(z_{k0}, k) &= \alpha_T \left[ \alpha_H (U_{3H} - \beta_H U_{c\phi}(z_{k0})) \times \right. \\ &\quad \left. \times \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \phi_C) - \beta_T i_C(z_{k0}) \right] = \alpha_T \left[ \alpha_H (U_{3H} - \beta_H \mathbf{C}_1 \mathbf{X}_{0k1}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \beta E_m \sin(\omega(k-1)a + \phi_C) + \beta_T (\mathbf{C}_2 \mathbf{X}_{0k1} + \mathbf{C}_3 \mathbf{X}_{0k1}) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{C}_3 = (0, 1, 0)^T$  – вектор постоянных коэффициентов, определяющий второй элемент вектора  $\mathbf{X}_{0k1}$ , который участвует в выражениях (10) и (11).

Относительный момент коммутации фазы  $s$  ( $z_{ks}$ ) определяется из следующего уравнения

$$U_{ys}(z_{k0}, k) = U_{оп}(z_{ks}), \quad (12)$$

где  $s = A, B, C$ . При двухполярном пилообразном сигнале ГОН  $U_{оп}(z) = 2U_{опм}(z-1)$ , где  $U_{опм}$  – амплитуда опорного напряжения. В этом случае моменты коммутации  $z_{ks}$  могут быть выражены из (12) в следующем виде

$$z_{ks} = U_{ys}(z_{k0}, k) / (2U_{опм}) + 0,5, \quad (13)$$

Подставляя выражения (9), (10) и (11) в (13), определяем относительные моменты коммутации ключей стоек, соответствующих фазам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на тактовом интервале ( $z_{kA}$ ,  $z_{kB}$ ,  $z_{kC}$  соответственно). Сравнивая полученные значения между собой, устанавливаем последовательность коммутации ключей стоек, т.е. определяем  $z_{k1}$ ,  $z_{k2}$ ,  $z_{k3}$ . Последовательность коммутаций однозначно определяет набор значений матриц  $A_i$  на тактовом интервале, используемых при расчете переходных процессов (табл. 3).

После определения набора матриц  $A_i$  вычисление решения задачи Коши на тактовом интервале выполняется по формуле (8) с приспособыванием при переходе от участка к участку.

Таблица 3 / Table 3

**Набор матриц  $A_i$  на тактовом интервале в зависимости от последовательности коммутации ключей**  
**The set of matrices  $A_i$  on a clock period for different commutation sequences of the power switches**

№	Моменты коммутации			Матрицы $A_i$			
	$z_{k1}$	$z_{k2}$	$z_{k3}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
1	$z_{kA}$	$z_{kB}$	$z_{kC}$	1	2	5	1
2	$z_{kB}$	$z_{kA}$	$z_{kC}$	1	3	5	1
3	$z_{kA}$	$z_{kC}$	$z_{kB}$	1	2	7	1
4	$z_{kB}$	$z_{kC}$	$z_{kA}$	1	3	6	1
5	$z_{kC}$	$z_{kA}$	$z_{kB}$	1	4	7	1
6	$z_{kC}$	$z_{kB}$	$z_{kA}$	1	4	6	1

### 3. Моделирование процессов рекуперации в УВ с использованием кусочно-гладкой математической модели

Для оценки адекватности разработанной математической модели было выполнено моделирование УВ в режиме рекуперации с использованием кусочно-гладкой модели при ее программной реализации на встроенном языке *MATLAB* и с использованием компьютерной модели основанной на применении численных методов и реализованной в среде имитационного моделирования *Simulink*, которая входит в пакет прикладных программ *MATLAB*. При этом рассматривался следующий набор параметров:  $E_m = 311$  В;  $\omega = 628,32$  рад/с;  $\varphi_A = 0$  рад;  $\varphi_B = -2\pi/3$  рад;  $\varphi_C = 2\pi/3$  рад;  $R_A = R_B = R_C = 0,1$  Ом;  $L_A = L_B = L_C = 5$  мГн;  $C_\phi = 47$  мкФ;  $I_M = 15$  А;  $R_I = 1$  МОм;  $\beta_T = 1$ ;  $\beta = 0,00322$ ;  $\beta_H = 0,018$ ;  $\alpha_H = 6$ ;  $\alpha_T = 0,5$ ;  $\mathbf{X}_0 = (0, 0, 0)^T$ ;  $U_{om} = 10$  В;  $a = 200$  мкс; ограничения коэффициента заполнения на тактовом интервале:  $\gamma_{\min} = 0,05$  и  $\gamma_{\max} = 0,95$ . Для оценки реакции УВ как нелинейной системы на изменение одного из параметров системы управления моделирование осуществлялось при двух разных значениях напряжения задания  $U_{3н}$ : 5 и 2 В. При этом среднее значение выходного напряжения на конденсаторе фильтра  $U_{сф, ср}$  в установившемся режиме составило соответственно 665 и 585 В.

Для моделирования в *MATLAB Simulink* были заданы следующие параметры расчета: обобщенный численный метод для расчета дискретных систем

(discrete (no continuous state)) с фиксированным шагом интегрирования [10]; шаг интегрирования:  $10^{-6}$  с. Моделирование с использованием математической модели выполнялось при числе точек на тактовом интервале равном 200, что соответствует шагу интегрирования, заданному в *MATLAB Simulink*.

На рис. 4 приведены результаты сравнительного моделирования при  $U_{c\phi, cp} = 665$  В.

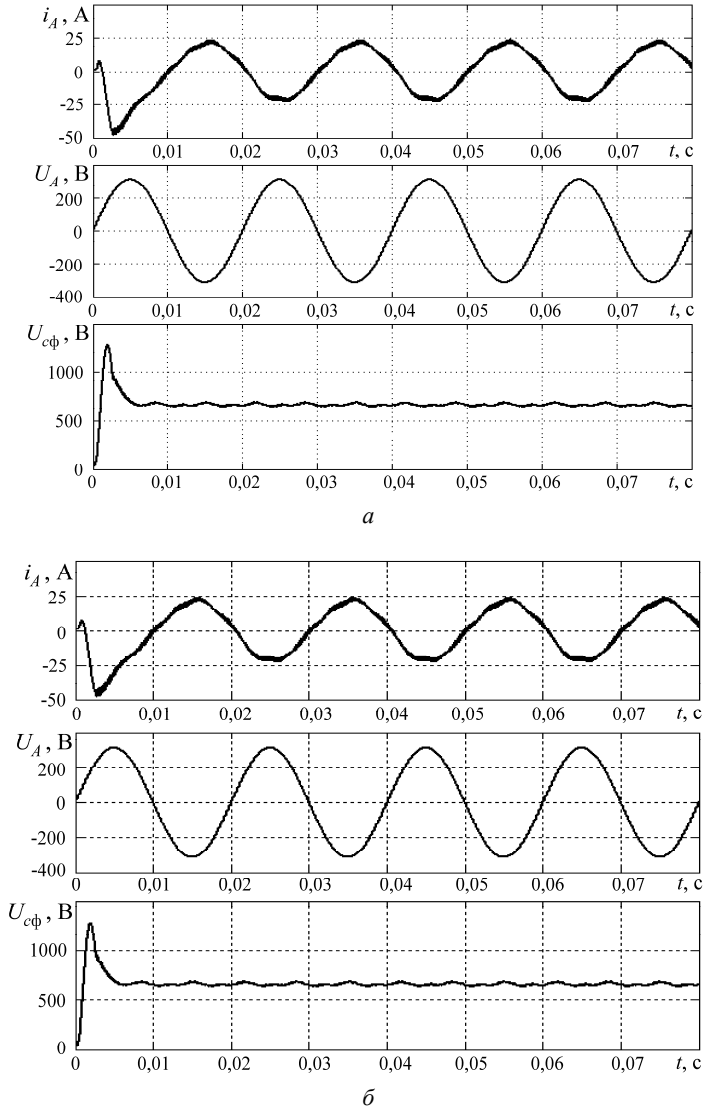


Рис. 4 – Временные диаграммы  $i_A$ ,  $U_A$ ,  $U_{c\phi, cp}$  при  $U_{c\phi, cp} = 665$  В, полученные с использованием:

$a$  – компьютерной модели *MATLAB Simulink*;  $б$  – математической модели

Fig. 4 – Waveforms  $i_A$ ,  $U_A$ ,  $U_{c\phi, cp}$  for  $U_{c\phi, cp} = 665$  V constructed using:

$a$  – *MATLAB Simulink* computer model;  $b$  – the mathematical model

Как видно из рисунка, перегулирование напряжения на конденсаторе  $U_{\text{сф}}$  составляет порядка 200 %, однако его значение может быть уменьшено с использованием задатчика интенсивности  $U_{\text{зн}}$ . По окончании переходного процесса в системе присутствуют малоамплитудные колебания напряжения на конденсаторе, при этом основная часть энергии паразитных гармонических составляющих сосредоточена в гармониках, кратных частоте сетевого напряжения. Форма тока сети имеет практически синусоидальную форму с наличием незначительных искажений.

При использовании ЭВМ на основе процессора *Intel Core i5-4200M* 2,5 ГГц время расчета диаграмм, представленных на рис. 4, для модели *MATLAB Simulink* составило 21 с, для математической модели – 10,2 с. Также стоит отметить, что снижение количества точек для расчета на тактовом интервале при использовании кусочно-гладкой математической модели не влияет на точность расчета фазовых переменных в каждой точке. Следовательно, выбранное количество точек, равное 200, в данном случае может быть избыточным и его снижение еще больше увеличит скорость расчета модели без потери точности. Снижение же количества точек на тактовом интервале при использовании численных методов в *MATLAB Simulink* ведет к уменьшению точности, что недопустимо. Вместе с тем при использовании численных методов ошибка интегрирования имеет тенденцию к накоплению с течением времени, что существенно меньше выражено при использовании кусочно-гладких моделей.

На рис. 5 приведены временные диаграммы абсолютных отклонений  $i_A$  и  $U_{\text{сф}}$  ( $\Delta i_A$  и  $\Delta U_{\text{сф}}$  соответственно) при сравнении результатов, полученных с использованием математической модели и модели *MATLAB Simulink*.

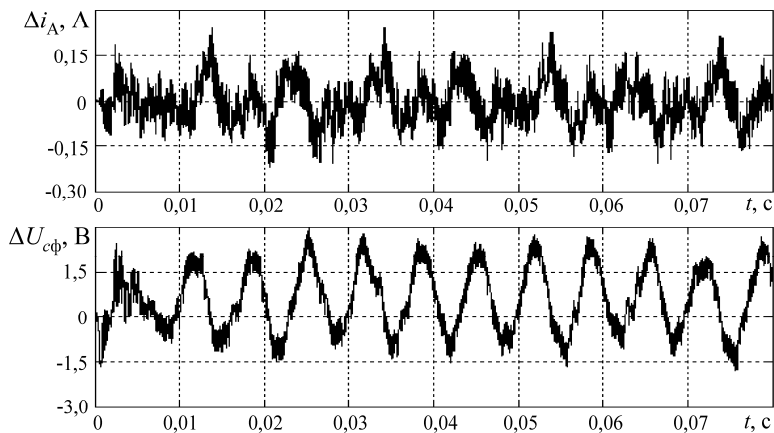


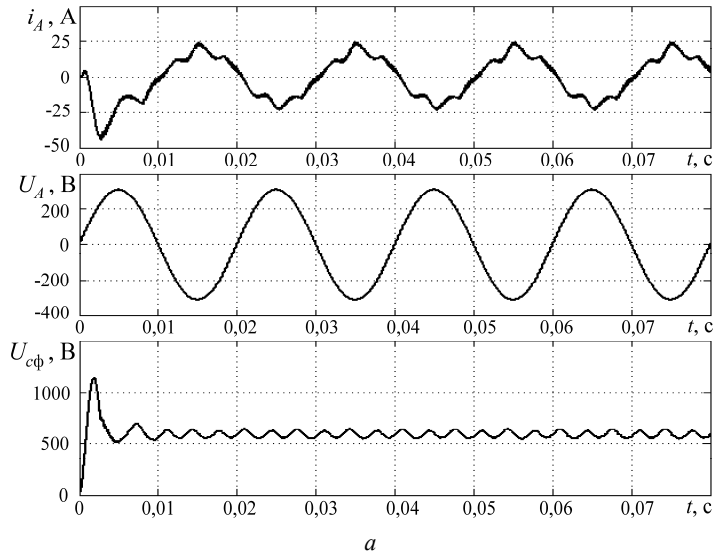
Рис. 5 – Временные диаграммы  $\Delta i_A$ ,  $\Delta U_{\text{сф}}$  при  $U_{\text{сф, ср}} = 665$  В для сравнения результатов моделирования с использованием математической модели и модели *MATLAB Simulink*

Fig. 5 – Waveforms  $\Delta i_A$ ,  $\Delta U_{\text{сф}}$  for  $U_{\text{сф, ср}} = 665$  V constructed for comparison of simulation results of the mathematical model and *MATLAB Simulink* computer model

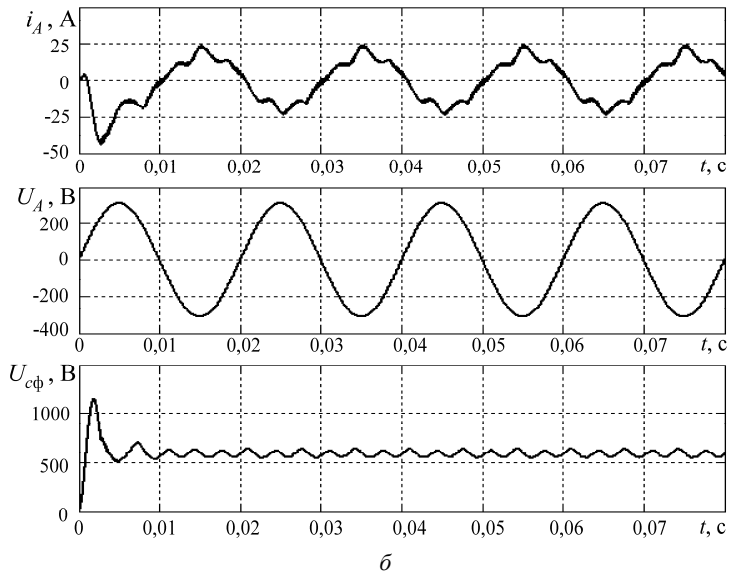
Из рисунка видно, что пиковые отклонения  $i_A$  и  $U_{\text{сф}}$  на выбранном интервале расчета составляют:  $\Delta i_{A\text{max}} = 0,25$  А;  $\Delta U_{\text{сфmax}} = 2,96$  В (1,25 и 0,5 % соответ-

ственно, в относительном выражении). Данные отклонения пренебрежимо малы по сравнению с мгновенными значениями соответствующих сигналов.

На рис. 6 приведены результаты сравнительного моделирования при  $U_{c\phi, cp} = 585 \text{ В}$ .



а



б

Рис. 6 – Временные диаграммы  $i_A$ ,  $U_A$ ,  $U_{c\phi}$  при  $U_{c\phi, cp} = 585 \text{ В}$ , полученные с использованием:

а – компьютерной модели MATLAB Simulink; б – математической модели

Fig. 6 – Waveforms  $\Delta i_A$ ,  $\Delta U_{c\phi}$  for  $U_{c\phi, cp} = 585 \text{ В}$  constructed for comparison of simulation results of *MATLAB Simulink* computer model (a) and the mathematical model (b)

Как видно из рисунка, при снижении  $U_{\text{зн}}$  в системе появляются колебания напряжения на конденсаторе с большой амплитудой, кратные частоте питающей сети. Они обусловлены эффектом перемодуляции, возникающим вследствие насыщения в системе управления. В этом случае сигнал управления  $U_y$  на некоторых тактовых интервалах будет выходить за границы пилообразного опорного напряжения  $U_{\text{оп}}$ . При этом коэффициент заполнения на этих тактовых интервалах будет ограничиваться на уровне  $\gamma_{\text{min}}$  или  $\gamma_{\text{max}}$ . Наблюдаемый режим работы является устойчивым, при этом форма фазных токов существенно отличается от синусоидальной. Как видно из рис. 6, в токе сети присутствует гармоника с частотой 300 Гц. Время расчета данных временных диаграмм для модели *MATLAB Simulink* составило 22 с, для математической модели – 10,5 с.

На рис. 7 приведены временные диаграммы  $\Delta i_A$ ,  $\Delta U_{\text{сф}}$  при  $U_{\text{сф, ср}} = 585$  В. Пиковые абсолютные отклонения  $i_A$  и  $U_{\text{сф}}$  на выбранном интервале расчета также пренебрежимо малы и составляют:  $\Delta i_{A\text{max}} = 0,2$  А,  $\Delta U_{\text{сфmax}} = 2,8$  В (1,5 и 0,5 % соответственно, в относительном выражении).

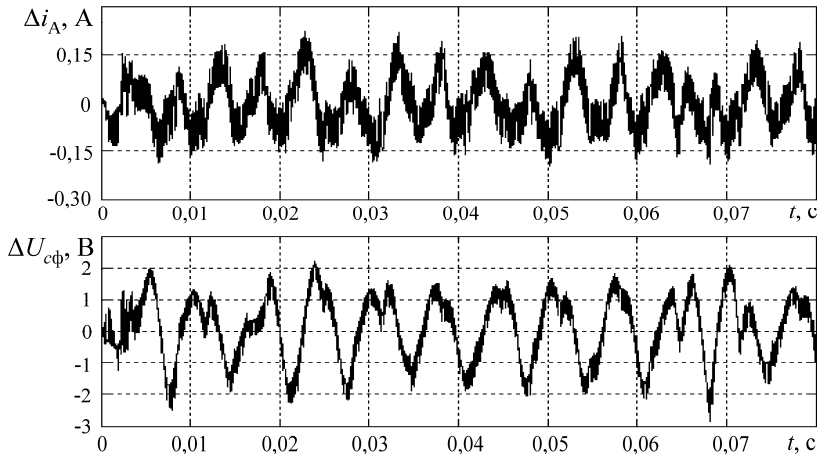


Рис. 7 – Временные диаграммы  $\Delta i_A$ ,  $\Delta U_{\text{сф}}$  при  $U_{\text{сф, ср}} = 585$  В для сравнения результатов моделирования с использованием математической модели и модели *MATLAB Simulink*

*Fig. 7 – Waveforms  $\Delta i_A$ ,  $\Delta U_{\text{сф}}$  for  $U_{\text{сф, ср}} = 585$  V constructed for comparison of simulation results of the mathematical model and *MATLAB Simulink* computer model*

Представленные результаты показывают, что разработанная математическая модель достоверно отображает процессы в УВ в режиме рекуперации и обеспечивает более высокую скорость расчета по сравнению с *MATLAB Simulink*. При одном и том же шаге интегрирования время расчета временных зависимостей на основе математической модели приблизительно в два раза меньше. Разработанная модель исключает проблему выбора устойчивого численного метода, которая характерна для моделей *MATLAB Simulink* при попытках получить достоверные временные зависимости.

### Заключение

1. Предложена кусочно-гладкая математическая модель УВ, имеющая преимущества по скорости расчета перед компьютерными моделями.
2. На основе предложенной математической модели может быть разработан специализированный математический аппарат для бифуркационного анализа УВ в режиме рекуперации и решения задач параметрического синтеза системы управления.
3. Рассмотренная математическая модель может быть легко модифицирована для исследования УВ с системами управления на основе более сложных типов регуляторов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. PWM regenerative rectifiers: state of the art / J.R. Rodriguez, J.W. Dixon, J.R. Espinoza, J. Pontt, P. Lezana // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2005. – Vol. 52, N 1. – P. 5–22.
2. Нелинейная динамика полупроводниковых преобразователей / А.В. Кобзев, Г.Я. Михальченко, А.И. Андриянов, С.Г. Михальченко; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: ТУСУР, 2007. – 224 с.
3. Low-frequency Hopf bifurcation and its effects on stability margin in three-phase PFC power supplies connected to non-ideal power grid / M. Huang, C.K. Tse, S.C. Wong, C. Wan, X. Ruan // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. – 2013. – Vol. 60, N 12. – P. 3328–3340.
4. Interacting bifurcation phenomenon in three-phase voltage source converter connected to non-ideal power grid / M. Huang, C.K. Tse, S.C. Wong, X. Ruan, C. Wan // IECON 2013 – 39<sup>th</sup> Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. – Vienna, Austria, 2013. – P. 8373–8378.
5. Nonlinear behavior and instability in a three-phase boost rectifier connected to a nonideal power grid with an interacting load / C. Wan, M. Huang, C.K. Tse, S.C. Wong, X. Ruan // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2013. – Vol. 28, N 7. – P. 3255–3265.
6. **Zoltan S.** Nonlinear phenomena of controlled three-phase converters: PhD dissertation / Budapest University of Technology and Economics. – Budapest, 2007. – 107 p.
7. **Jian S.** Small-signal methods for AC distributed power systems – a review // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2009. – Vol. 24, N 11. – P. 2545–2554.
8. **Blasko V.** Power conditions and control of regenerative brake // Conference record of the 1998 IEEE Industry Applications Conference: Thirty-Third IAS Annual Meeting. – St. Louis, Missouri, USA, 1998. – Vol. 2. – P. 1504–1510.
9. **Жусубалиев Ж.Т.** Бифуркации и хаос в релейных и широтно-импульсных системах автоматического управления. – М.: Машиностроение-1, 2001. – 120 с.
10. **Солонина А.И.** Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Simulink. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.

### A MATHEMATICAL MODEL OF TRANSISTOR CONTROLLED RECTIFIERS IN THE ELECTRIC POWER REGENERATION MODE

**Andriyanov A.I.<sup>1</sup>, Sachenko E.A.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Bryansk State Technical University, Bryansk, Russia*

<sup>2</sup>*NPO "Electrontechnika", Ltd, Bryansk, Russia*

At present, transistor controlled rectifiers in the electric power regeneration mode are widely used in the electronic power supply industry and are integrated with cranes, conveyor equipment, transport units, etc. One of the most significant issues of the synthesis of transistor controlled rectifier automatic control systems is the absence of adequate mathematical tools for a full description of the considered converter behavior and particularly its nonlinear dynamics. Actually, the most common research and development tool for a switching power converter is its computer model that is implemented with the help of different CAD-systems, such as *MATLAB Simulink*,



OrCAD, etc. However, computer models exhibit a low calculation speed and are hard to utilize for bifurcation analysis of switching converters due to the problem of selecting a proper numerical method providing their stable operation.

It is known that switching power converters are most accurately described by means of piecewise-smooth models. In this paper a piecewise-smooth mathematical model of a transistor controlled rectifier in the regeneration mode is presented. The simulation results of transistor controlled rectifier operation based on the considered model are also shown in the paper. The proposed piecewise-smooth model validity and its applicability for the study of transistor controlled rectifier operation modes are demonstrated. The advantages of the proposed model over widely used computer models are also described.

This model can be utilized to form the basis of mathematical tools for studying non-linear dynamics of transistor controlled rectifiers and to adjust their control system in the optimal way.

*Keywords:* transistor controlled rectifier; electric power regeneration; dynamic modes; piecewise-smooth mathematical model.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-26-42

#### REFERENCES

1. Rodriguez J.R., Dixon J.W., Espinoza J.R., Pontt J., Lezana P. PWM regenerative rectifiers: state of the art. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2005, vol. 52, no. 1, pp. 5–22.
2. Kobzev A.V., Mikhal'chenko G.Ya., Andriyanov A.I., Mikhal'chenko S.G. *Nelineinaya dinamika poluprovodnikovyykh preobrazovatelei* [Nonlinear dynamics of semiconductor converters]. Tomsk, TUSUR Publ., 2007. 224 p.
3. Huang M., Tse C.K., Wong S.C., Wan C., Ruan X. Low-frequency Hopf bifurcation and its effects on stability margin in three-phase PFC power supplies connected to non-ideal power grid. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, vol. 60, no. 12, pp. 3328–3340.
4. Huang M., Tse C.K., Wong S.C., Ruan X., Wan C. Interacting bifurcation phenomenon in three-phase voltage source converter connected to non-ideal power grid. *IECON 2013 – 39<sup>th</sup> Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Vienna, Austria, 2013, pp. 8373–8378.
5. Wan C., Huang M., Tse C.K., Wong S.C., Ruan X. Nonlinear behavior and instability in a three-phase boost rectifier connected to a nonideal power grid with an interacting load. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2013, vol. 28, no. 7, pp. 3255–3265.
6. Zoltan S. *Nonlinear phenomena of controlled three-phase converters*. PhD diss. Budapest University of Technology and Economics. Budapest, 2007. 107 p.
7. Jian S. Small-signal methods for AC distributed power systems – a review. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2009, vol. 24, no. 11, pp. 2545–2554.
8. Blasko V. Power conditions and control of regenerative brake. *Conference record of the 1998 IEEE Industry Applications Conference: Thirty-Third IAS Annual Meeting*, St. Louis, Missouri, USA, 1998, vol. 2, pp. 1504–1510.
9. Zhusubaliev Zh.T. *Bifurkatsii i khaos v releinykh i shirotno-impul'snykh sistemakh avtomaticheskogo upravleniya* [Bifurcations and chaos in relay and pulse-width modulation automatic control systems]. Moscow, Mashinostroenie-1 Publ., 2001. 120 p.
10. Solonina A.I. *Tsifrovaya obrabotka signalov. Modelirovanie v Simulink* [Digital signal processing. Simulation in Simulink]. St. Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2012. 432 p.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Андрьянов Алексей Иванович** – родился в 1979 году, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры «Электронные, радиоэлектронные и электротехнические системы», Брянский государственный технический университет. Область научных интересов: нелинейная динамика импульсных преобразователей. Опубликовано 100 научных работ. (Адрес: 241035, Россия, Брянск, бул. 50 лет октября, д. 7. Email: mail@ahaos.ru).

**Andriyanov Alexey Ivanovitch** (b. 1979) – PhD (Eng.), Associate professor, Associate professor of the dep. of Electronic, Radioelectronic and Electrotechnical Systems, Bryansk State Technical University. His research interests are currently focused on nonlinear dynamics of switching converters. He is the author of 100 scientific papers. (Address: 7, bul. 50-letiya Oktyabrya, Bryansk, 241035, Russian Federation. Email: mail@ahaos.ru).



**Саченко Екатерина Алексеевна** – родилась в 1987 году, инженер, ООО «НПО «Электронтехника», аспирант кафедры «Электронные, радиоэлектронные и электротехнические системы» Брянского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейная динамика импульсных преобразователей. Опубликовано 6 научных работ. (Адрес: 241031, Россия, Брянск, бул. Щорса, д.1. Email: kittie-kat@yandex.ru).

**Sachenko Ekaterina Alexeevna** (b. 1987) – development engineer of ООО ‘NPO ‘Electrontechnica’, postgraduate student of the dep. of Electronic, Radioelectronic and Electrotechnical Systems, Bryansk State Technical University. Her research interests are currently focused on nonlinear dynamics of switching converters. She is the author of 6 scientific papers. (Address: 1, bul. Shchorsa, Bryansk, 241031, Russia. Email: kittie-kat@yandex.ru).

*Статья поступила 01 апреля 2016 г.*

*Received April 01, 2016*

---

To Reference:

Andriyanov A.I., Sachenko E.A. Matematicheskaya model' tranzistornykh upravlyaemykh vupryamitelei v rezhime rekuperatsii elektroenergii [Mathematical model of transistor controlled rectifiers in electric power regeneration mode]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 26–42. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-26-42

УДК 519.2

## РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ БЕРАНА

**В.А. Демин**

*Новосибирский государственный технический университет*

В данной статье предлагаются критерии согласия, в основе которых лежит расстояние Колмогорова между условной функцией надежности, соответствующей проверяемой гипотезе, и непараметрической оценкой функции надежности, предложенной Бераном для различных планов эксперимента. Оценка Берана является обобщением хорошо известной оценки Каплана–Мейера. При расчете оценки Берана используется ранее предложенный алгоритм выбора адаптивного параметра размытости. Методами компьютерного моделирования проведено исследование зависимости распределений статистик критериев от объема выборки, а также числа точек плана эксперимента. В статье также предложено несколько статистик критериев в зависимости от плана эксперимента. Получено практическое подтверждение теоретических предположений о характере сходимости статистик критериев. В результате сравнительного анализа мощности показано, что для рассмотренных пар конкурирующих гипотез предложенные критерии предпочтительней классического критерия типа Колмогорова, применяемого к выборкам остатков, а также критерия типа хи-квадрат для модели пропорциональных интенсивностей. На примере анализа данных о стойкости электроизоляционных жидкостей при различных величинах напряжения построена параметрическая модель ускоренных испытаний и с использованием предложенного критерия проверена гипотеза о виде полученной модели.

*Ключевые слова:* данные типа времени жизни, критерий согласия, оценка Берана, параметрическая регрессионная модель, мощность критерия, план эксперимента.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-43-56

### Введение

Построение статистической модели, описывающей зависимость функции надежности (выживаемости) от объясняющих переменных (ковариат), в качестве которых могут выступать воздействия различного типа, например, температура, давление, возраст пациентов, тип лечения больных, напряжение и другие, является одной из важнейших задач в теории надежности (выживаемости). К наиболее широко используемым на практике регрессионным моделям надежности можно отнести модели ускоренных испытаний [1] и пропорциональных интенсивностей Кокса [2], а также их обобщения [3].

При построении параметрической регрессионной модели привлекается априорная информация о характере зависимости функции надежности от объясняющих переменных, а также о виде распределения отказов. В случае отсутствия какой-либо априорной информации логично использовать непараметрические методы оценивания. К таким методам относится предложенное Р. Бераном обобщение оценки Каплана–Мейера [4] на случай построения регрессионных моделей

---

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности № 2.541.2014К от 17.07.2014.

надежности [5]. В [6] проведено исследование скорости сходимости оценки Берана к истинной условной функции надежности для случайного плана эксперимента. В [7–10] проведено исследование статистических свойств оценки Берана и предложен метод выбора оптимального параметра сглаживания в случае детерминированных дискретных планов эксперимента.

Основной проблемой, возникающей при построении параметрической регрессионной модели надежности, является проверка справедливости предположения о виде регрессионной зависимости и распределении отказов, для чего используются критерии согласия. Подробное исследование распределений статистик и мощности критериев согласия, применяемых к выборкам остатков, для АFT-модели и модели Кокса представлено в работах [11–15]. В частности, в [11] исследуются критерии согласия в случае полных и цензурированных I и II типа выборок, в [14] сформулированы алгоритмы моделирования распределений статистик критериев типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлингга для случайно цензурированных выборок. Непараметрические критерии согласия для модели ускоренных испытаний наряду с примерами их применения представлены в [12]. Более полный обзор литературы, посвященной критериям согласия для регрессионных моделей надежности и выживаемости, можно найти в [15]. Вместе с тем существует и другой подход к построению критериев согласия для параметрических регрессионных моделей, который заключается в использовании непараметрической регрессии. Например, в [16–17] рассматривается критерий согласия для классической регрессионной модели с аддитивной ошибкой.

В настоящей работе предлагается универсальный критерий проверки гипотезы о виде параметрической регрессионной модели надежности, базирующийся на использовании оценки Берана. Основная идея заключается в том, чтобы оценить расстояние между теоретической условной функцией надежности, соответствующей проверяемой гипотезе, и непараметрической оценкой Берана при различных значениях ковариаты. В качестве такого расстояния в работе рассматривается статистика типа Колмогорова. В статье дается также пример построения параметрической регрессионной модели надежности для времени жизни изоляционных жидкостей в зависимости от напряжения.

## 1. Непараметрическая оценка Берана

Обозначим через  $T_x$  время безотказной работы исследуемых технических изделий, которое зависит от скалярной ковариаты, диапазон значений которой определяется условиями эксперимента и представляет собой отрезок числовой прямой. Без потери общности будем считать этот отрезок равным  $[0; 1]$ . Функция надежности определяется соотношением

$$S_x(t) = P(T_x \geq t) = 1 - F(t | x), \quad (1)$$

где  $F(t | x)$  – условная функция распределения случайной величины  $T_x$ . В результате испытаний на надежность  $n$  объектов получена выборка отказов вида:

$$Y = \{(Y_1, x_1), (Y_2, x_2), \dots, (Y_n, x_n)\},$$

где  $Y_i$  – время отказа  $i$ -го объекта;  $x_i$  – значение ковариаты, при котором наблюдался  $i$ -й объект.

План эксперимента, при котором значение ковариаты  $x_i$  представляет собой реализацию случайной величины из некоторого распределения, будем называть случайным планом. Вместе с тем на практике план эксперимента чаще представ-

ляет собой дискретный детерминированный план, в котором объекты отобранной выборки разбиваются на группы, в каждой из которых определено значение ковариаты.

В условиях отсутствия предположений о виде регрессионной зависимости условная функция надежности может быть построена с помощью непараметрической оценки Берана [5]:

$$\tilde{S}_{b_n}(t|x) = \prod_{Y_{(i)} \leq t} \left\{ 1 - \frac{W_n^i(x; b_n)}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} W_n^j(x; b_n)} \right\},$$

где  $x$  – значение ковариаты, при которой оценивается функция надежности;  $W_n^i(x; b_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$  – веса Надарая–Уотсона;  $b_n$  – параметр размытости, который определяется в соответствии с алгоритмом, предложенным в [7].

В [6] для случайного плана эксперимента и фиксированного значения  $x$  показано, что если  $\frac{nb_n^5}{\ln n} = O(1)$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \geq 0} |\tilde{S}_b(t|x) - S_x(t)| = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{nb_n}}\right). \quad (2)$$

Проверим справедливость уравнения (2) с помощью методов компьютерного моделирования. Для этого можно аппроксимировать зависимость расстояния между оценкой Берана и истинной функцией надежности от объема выборки:

$$D_n = \sup_{t \geq 0} |\tilde{S}_b(t|x) - S_x(t)| = \alpha_1 \left(\frac{\ln n}{nb_n}\right)^{0,5} + \varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – случайная ошибка модели, которая удовлетворяет условиям:  $M(\varepsilon) = 0$ ,  $M(\varepsilon^T) = \sigma^2 < \infty$ ,  $\alpha_1$  – параметр, который следует оценить.

Чтобы оценить параметр  $\alpha_1$ , смоделируем  $N = 2000$  выборок размером от 20 до 500 наблюдений при случайном плане. В качестве истинной модели рассмотрим модель Кокса [2]:

$$S_x(t) = (S_0(t))^{r(x; \beta)}$$

с функцией от ковариат вида  $r(x; \beta) = \ln(1 + e^{\beta x})$ ,  $\beta = 2$  и логнормальным базовым распределением с функцией плотности:

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_1 t} \exp\left(-\frac{1}{2\theta_1^2} \ln^2\left(\frac{t}{\theta_2}\right)\right)$$

с параметрами  $\theta_1 = 21,5$ ,  $\theta_2 = 1,6$ . Значения ковариаты моделировались в соответствии с равномерным распределением на интервале  $[0, 1]$ .

По сгенерированным выборкам считалось расстояние  $D_n$  между истинной условной функцией надежности и оценкой Берана при  $x = 0,5$ . В результате получена выборка вида  $\{(D_{n_1}, n_1, b_{n_1}), \dots, (D_{n_l}, n_l, b_{n_l})\}$ , по которой методом

наименьших квадратов оценивался параметр  $\alpha_1$ , входящий в (3). На рис. 1 в зависимости от объема выборки показаны средние значения статистики  $D_n$  и полученная аппроксимация зависимости (3) с оценкой параметра  $\hat{\alpha}_1 = 0,55$ .

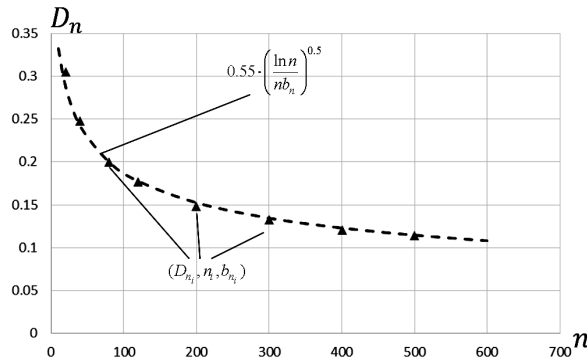


Рис. 1 – Аппроксимация статистики (3) при случайном плане эксперимента для различных объемов выборки

Fig. 1 – Approximation of statistic (3) for different sample sizes for the random plan of experiment

Как видно на рис. 1, функция (3) достаточно точно описывает скорость сходимости оценки, при этом коэффициент детерминации  $R^2 = 0,988$ . Таким образом, результат, полученный в [6], хорошо подтверждается результатами компьютерного моделирования.

## 2. Критерий согласия на основе оценки Берана

В теории надежности условная функция надежности обычно параметризуется с учетом предположений о виде зависимости функции распределения отказов от наблюдаемой ковариаты. Обязательным этапом построения параметрической регрессионной модели надежности является проверка гипотезы вида

$$H_0 : S_x(t) \in \{G(S_0(t; \theta), x, \beta); \beta, \theta \in \Omega\}, \quad (4)$$

где  $G(S_0(t; \theta), x, \beta)$  – некоторая параметрическая регрессионная модель, которая определяет зависимость базовой функции надежности  $S_0(t; \theta)$  от ковариаты  $x$ ;  $\theta$  – вектор параметров базового распределения;  $\beta$  – вектор регрессионных параметров.

В данной работе для проверки гипотезы (4) предлагается непараметрический критерий согласия на основе оценки Берана. Основная идея заключается в использовании расстояния между теоретической функцией надежности и непараметрической оценкой Берана при различных значениях ковариаты.

Одной из наиболее популярных статистик, применяемых для оценки расстояния между функциями надежности, является статистика типа Колмогорова. В случае проверки гипотезы (4) статистика принимает вид

$$\sup_{i=1..n, t>0} |S_{x_i}(t; \theta, \beta) - \tilde{S}_{b_n}(t | x_i)|, \quad (5)$$

где  $S_{x_i}(t; \theta, \beta)$  – условная функция надежности, соответствующая гипотезе  $H_0$ .

Используя результаты исследования сходимости оценки Берана к истинной функции надежности, полученные в предыдущем разделе, можно построить критерий согласия на основе следующей статистики:

$$S_B = \alpha_1 \left( \frac{nb_n}{\ln n} \right)^{0.5} \sup_{i=1..n, t>0} \left| \tilde{S}_b(t|x) - S_x(t) \right|, \quad (6)$$

распределение которой быстро сходится к некоторому предельному закону.

Однако статистика (6) имеет два существенных недостатка. Во-первых, она применима только для случайного плана. В случае дискретного плана необходимо учитывать количество групп и количество элементов в группе. В качестве демонстрации зависимости распределения статистики (6) от количества групп на рис. 2 показаны распределения статистики  $S_B$  при проверке гипотезы относительно описанной в предыдущем разделе модели Кокса (объем выборки  $n = 120$ , количество групп  $m = 4, 10, 20, 40, 60$ ).

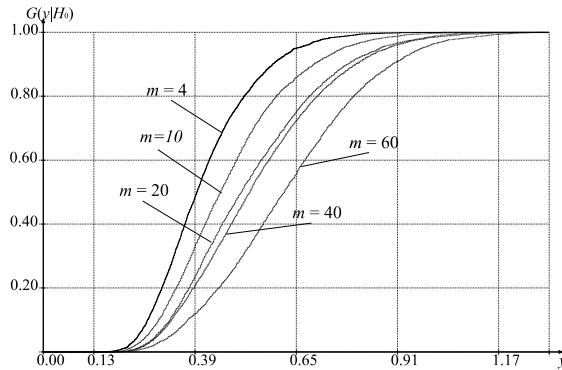


Рис. 2 – Распределения статистики (6) при различном числе групп плана эксперимента

Fig. 2 – The distributions of statistic (6) for different groups number of experimental design

Как следует из рис. 2, распределение статистики (6) существенно зависит от числа групп в плане. То есть при дискретном плане распределения статистики (6) при различных значениях ковариаты с ростом объема выборки не сходятся к одному предельному распределению.

Вторым недостатком данной статистики в контексте построения критерия является то, что она учитывает только одно значение ковариаты. Другими словами, при построении статистики не используются все данные, представленные в выборке, и, следовательно, теряется часть информации об исследуемом явлении. Кроме того, остается открытым вопрос о том, как выбрать значение ковариаты, для которого необходимо рассчитать статистику. Мощность критерия, построенного по одному значению ковариаты, будет заведомо ниже, чем по всем ковариатам.

Следовательно, для построения критерия целесообразно учитывать все значения ковариаты. Поэтому в данной работе при построении критерия согласия для дискретного плана с большим числом элементов в группе (более 6) будем использовать статистику вида

$$S_B = \sup_{i=1..n} \left[ \left( \frac{nb_n}{\ln n} \right)^{0.5} \sup_{t>0} \left| S_{x_i}(t; \theta, \beta) - \tilde{S}_b(t|x_i) \right| \right]. \quad (7)$$

Если количество элементов в каждой группе меньше 6, предлагается использовать статистику вида

$$S_B = \left(\frac{1}{m}\right) \sum_{i=1}^m \left(\frac{nb_n}{\ln n}\right)^{0,5} \sup_{i=1..n, t>0} |S_{x_i}(t; \theta, \beta) - \tilde{S}_{b_n}(t | x_i)|, \quad (8)$$

где  $\tilde{S}_{b_n}(t | x_i)$  – оценка Берана при значении ковариаты  $x_i$ .

Такое разделение позволяет использовать особенности каждого из видов плана эксперимента: дискретного детерминированного или случайного. Статистика (7) предназначена для дискретного плана, так как в этом случае информации о каждом значении ковариаты в плане эксперимента достаточно для того, чтобы использовать супремум. При случайном же плане, либо при планах, в которых количество наблюдений для каждого значения ковариаты невелико, критерий согласия со статистикой (7) будет иметь низкую мощность. Поэтому в этом случае необходимо использовать усредненное расстояние вида (8).

### 3. Исследование распределений статистик и мощности критериев

Исследуем поведение распределений статистик предложенных критериев в зависимости от объема выборки и количества групп. В качестве истинной модели рассмотрим модель ускоренных испытаний [18]:

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\left(\frac{t}{r(x; \beta)}\right)$$

с логарифмически линейной функцией от ковариат  $r(x; \beta) = \ln(1 + e^{\beta x})$  и базовой функцией надежности, соответствующей экспоненциальному распределению.

На рис. 3 и 4 приведены распределения статистик (7) и (8) с объемами выборок  $n = 20, 40, 80, 120, 200, 300$  для количества групп  $m = 10$ .

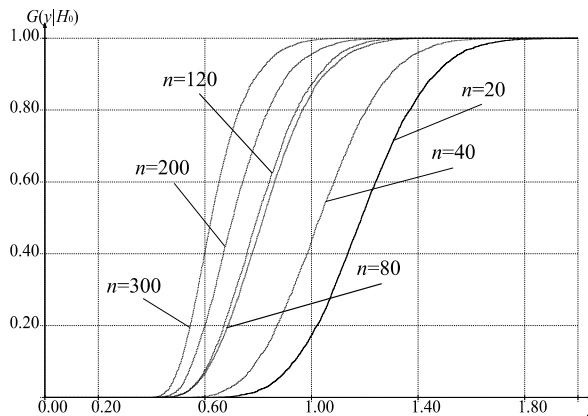


Рис. 3 – Распределения статистики (7) при различных объемах выборки для количества групп  $m = 10$

Fig. 3 – The distributions of statistic (7) for different sample sizes with fixed groups number  $m = 10$



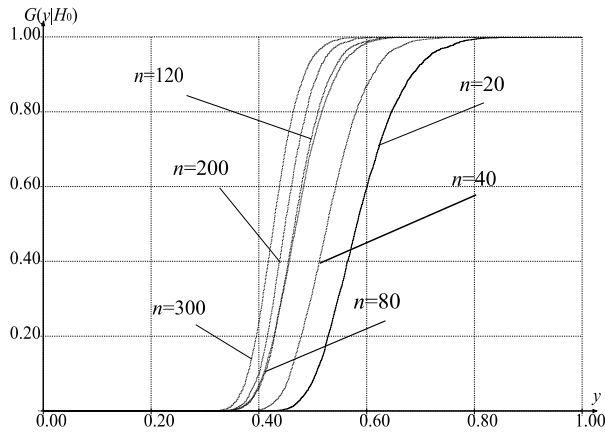


Рис. 4. Распределения статистики (8) при различных объемах выборки для количества групп  $m = 10$

Fig. 4. The distributions of statistic (8) for different sample sizes with fixed groups number  $m = 10$

Как видно на рис. 3 и 4, распределения обеих статистик зависят от объема выборки и сдвигаются влево с увеличением объема выборки.

Теперь рассмотрим поведение распределений статистик (7) и (8) в зависимости от числа групп. На рис. 5 и 6 представлены распределения исследуемых статистик для фиксированного объема выборок  $n = 120$  с различным числом групп:  $m = 4, 10, 20, 30, 40, 60$ . Количество наблюдений в каждой группе одинаково.

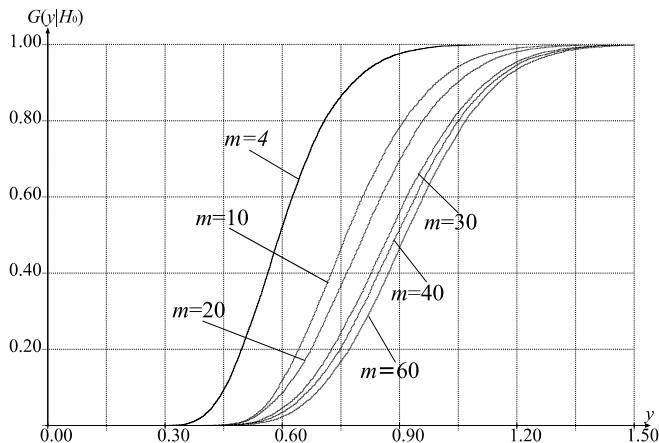


Рис. 5 – Распределения статистики (7) для различного количества групп при объеме выборки  $n = 120$

Fig. 5 – The distributions of statistic (7) for different numbers of groups with fixed sample size  $n = 120$

Как показано на рис. 5, с увеличением количества групп распределения статистики (7) оказываются правее. Однако распределения статистики (8) с ростом количества групп смещаются влево, как видно на рис. 6. Это связано с тем, что статистика (7) соответствует максимальному расстоянию между теоретической функцией надежности и оценкой Берана при значении ковариаты с наилучшей

оценкой. Таким образом, с увеличением количества различных значений ковариаты информация об одном значении уменьшается. В то же время статистика (8) соответствует среднему максимальному расстоянию по всем значениям ковариаты, поэтому с увеличением количества различных значений ковариаты вклад наихудшей оценки уменьшается, и усреднение происходит в большем количестве групп.

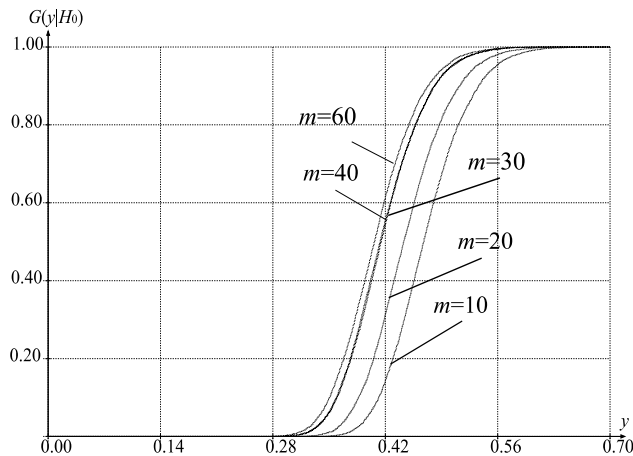


Рис. 6 – Распределения статистики (8) для различного количества групп при объеме выборки  $n = 120$

Fig. 6 – The distributions of statistic (8) for different numbers of groups with fixed sample size  $n = 120$

Далее исследуем мощность предложенного критерия и сравним ее с мощностью классических критериев на основе остатков. Для этого проведем те же эксперименты, что и в [15], и сравним результаты, полученные в случае полных данных для критерия Колмогорова, применяемого к выборкам остатков [11], и для критерия хи-квадрат в случае модели Кокса [15]. В качестве проверяемой гипотезы  $H_0$  рассмотрим модель пропорциональных интенсивностей Кокса с экспоненциальным базовым распределением с параметром масштаба  $\theta_1 = 21,6147$  и параметром  $\beta = 0,2$ . Моделируемые выборки случайных величин объемом  $n = 100$  содержат одну бинарную объясняющую переменную. В качестве конкурирующих гипотез рассмотрим два типа обобщенных моделей с базовым экспоненциальным законом:

$H_1^1$ : модель Ксяя

$$\Lambda_x(t; \beta, \gamma) = \exp(\beta^T \cdot x) \{ \Lambda_0(t) \}^{\exp(\gamma^T \cdot x)}$$

с параметрами  $\beta = 0,2$ ,  $\gamma = 0,5$ ;

$H_1^2$ : SCE модель

$$\Lambda_x(t; \beta, \gamma) = \left( 1 + \exp((\beta + \gamma)^T \cdot x) \Lambda_0(t) \right)^{\exp(-\gamma^T \cdot x)} - 1$$

с параметрами  $\beta = 0,2$ ,  $\gamma = 0,8$ .

Оценки мощности, полученные при уровне значимости  $\alpha = 0,1$ , представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

**Оценки мощности критериев согласия**  
**Estimation of power of the tests**

Конкурирующая гипотеза / Competing hypothesis	Предложенный критерий (7)/ Proposed test (7)	Предложенный критерий (8)/ Proposed test (8)	Критерий Колмогорова/ Kolmogorov test	Критерий хи-квадрат/ Chi-square test
$H_1^1$	0,94	0,88	0,77	0,74
$H_1^2$	0,81	0,76	0,65	0,65

Как следует из результатов табл. 1, предложенный критерий согласия на основе оценки Берана способен различить гипотезы о виде регрессионной зависимости с большей мощностью, чем критерий Колмогорова, основанный на остатках. Кроме того, критерий со статистикой (7) обладает большей мощностью, чем критерий со статистикой (8). Это объясняется тем, что в данном эксперименте количество наблюдений в группе достаточно велико (в каждой группе 50 наблюдений), и статистика (7) была специально разработана для таких случаев.

Алгоритм проверки гипотезы об адекватности построенной модели с помощью предложенных критериев можно сформулировать следующим образом.

1. В соответствии с построенной моделью  $G(S_0(t; \hat{\theta}), x, \hat{\beta})$ , где  $\hat{\theta}, \hat{\beta}$  – ОМП параметров модели по исходной выборке, смоделировать выборку отказов  $Y = \{(Y_1, x_1), (Y_2, x_2), \dots, (Y_n, x_n)\}$ .

2. По полученной выборке оценить параметры модели методом максимального правдоподобия.

3. Вычислить значение статистики (7), либо (8) в зависимости от вида плана эксперимента: статистики (7) для дискретного плана, статистики (8) для случайного плана.

4. Повторить пункты 1–3  $N$  раз, получив в результате эмпирическое распределение статистики критерия  $G_N(S_B | H_0)$ .

5. Проверяемая гипотеза  $H_0$  об адекватности построенной модели отклоняется, если  $\alpha_n = 1 - G_N(S_B | H_0) < \alpha$ , где  $S_B$  – значение статистики соответствующего критерия согласия по исходной выборке.

#### 4. Пример построения параметрической модели по реальным данным

В данном разделе покажем, как работает критерий согласия на примере построения вероятностной модели надежности электроизоляционной системы, в которой отказом считается пробой электроизоляционных жидкостей. Результаты ускоренных испытаний приведены в [19]. В данных испытаниях все объекты были разбиты на семь групп. Внутри каждой группы объекты наблюдались под постоянным повышенным напряжением от 26 до 38 kV. Цель ускоренных испытаний заключалась в оценке функции надежности электроизоляционной системы под «нормальным» напряжением в 20 kV. План испытаний и моменты отказов приведены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

**План испытаний и моменты отказов**  
**Plan of trials and failures times**

Напряжение, kV / Voltage, kV	Количество объектов / Number of objects	Моменты отказов [мин]/ Failures times [min]
26	3	5,79; 1579,52; 2323,7
28	5	68,85; 426,07; 110,29; 108,29; 1067,6
30	11	17,05; 22,66; 21,02; 175,88; 139,07; 144,12; 20,46; 43,40; 194,90; 47,30; 7,74
32	15	0,40; 82,85; 9,88; 89,29; 215,10; 2,75; 0,79; 15,93; 3,91; 0,27; 0,69; 100,58; 27,80; 13,95; 53,24
34	19	0,96; 4,15; 0,19; 0,78; 8,01; 31,75; 7,35; 6,50; 8,27; 33,91; 32,52; 3,16; 4,85; 2,78; 4,67; 1,31; 12,06; 36,71; 72,89
36	15	1,97; 0,59; 2,58; 1,69; 2,71; 25,50; 0,35; 0,99; 3,99; 3,67; 2,07; 0,96; 5,35; 2,90; 13,77
38	8	0,47; 0,73; 1,40; 0,74; 0,39; 1,13; 0,09; 2,38

В [12] проблема выбора базового распределения решена с помощью критериев, основанных на распределении остатков [3,14]. Наиболее подходящим базовым распределением был выбран обобщенный закон Вейбулла. Мы проверили аналогичную гипотезу с использованием критерия согласия со статистикой (8). В результате наиболее подходящим базовым распределением также оказался обобщенный закон Вейбулла.

Вследствие того, что предложенный критерий по сравнению с классическими при проверке гипотезы о виде функции от ковариат обладает большей мощностью, логично для проверки такой гипотезы применить разработанный критерий. В качестве возможных функций от ковариаты рассмотрим следующие:

$$r_1(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 x}, \quad r_2(x) = e^{\beta_0 + \beta_1/x}, \quad r_3(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 \ln x}.$$

В табл. 3 показаны результаты проверки гипотезы о виде функции от ковариаты.

Таблица 3 / Table 3

**Результаты проверки гипотезы о виде функции ковариаты**  
**The results of testing the hypothesis of a covariate function**

Вид функции от ковариат/ Type of covariate function	Достигнутый уровень значимости/ p-value
$r_1(x)$	0,665
$r_2(x)$	0,005
$r_3(x)$	0,680

Так как при проверке гипотезы о функции от ковариат вида  $r_3(x)$  получен наибольший достигнутый уровень значимости, то функция  $r_3(x)$  наилучшим образом описывает данные. Однако для функции  $r_1(x)$  достигнутый уровень значимости лишь незначительно меньше значения, полученного для  $r_3(x)$ . Поэтому использование функции  $r_1(x)$  также допустимо.

Определив вид базового закона и функции от ковариат, мы можем оценить, за какое время работы при напряжении 20 kV с заданными вероятностями наступит пробой изоляционных жидкостей и изоляционная система выйдет из строя (табл. 4).

Таблица 4 / Table 4

**Вероятность пробоя в зависимости от времени работы**  
**Probability of breakdown in time**

Вероятность пробоя / Probability of breakdown	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90
Время работы [мин] / Operating time [min] $r_3(x)$	11 900	29 450	55 000	94 150	162 250	327 350
Время работы [мин] / Operating time [min] $r_1(x)$	2570	6550	12250	21 000	35 900	71 250

Как видно из табл. 4, использование различных функций от ковариат приводит к разным прогнозам. Это связано с тем, что модели с функциями  $r_3(x)$  и  $r_1(x)$  существенно отличаются друг от друга при значениях ковариаты менее 26. Тогда как в исходном эксперименте объекты при напряжениях менее 26 kV не исследовались, а под напряжением 26 kV наблюдалось всего 3 объекта.

Из результатов экспериментов также видно, что с уменьшением напряжения закономерности возникновения отказов меняются нелинейно. Таким образом, вытекает необходимость проведения дополнительных исследований при напряжениях, близких к «нормальному» напряжению в 20 kV, например, при 24 kV и/или при 26 kV.

Если это невозможно, следует рекомендовать работать с жидкостями (производить диагностику, делать замену и пр.) в соответствии с функцией от ковариат  $r_3(x)$  до 12 250 минуты. Однако если к 12 250 минуте ни один объект не будет заменен в результате пробоя или неудовлетворительного технического состояния либо количество таких объектов окажется значительно меньше 50 %, то дальнейшие расчеты, план диагностики и прочее следует производить с учетом модели с функцией от ковариат  $r_3(x)$ .

### Заключение

Таким образом, в статье предлагается критерий согласия, основанный на использовании оценки Берана и расстояния Колмогорова. В зависимости от плана эксперимента рекомендуется применение различных модификаций статистики. Показано, что мощность предложенного критерия превосходит мощность классических критериев, применяемых для проверки гипотезы о виде параметрической модели. Применение предложенного критерия предполагает нахождение требуемого для принятия решения распределения статистики, соответствующего справедливости проверяемой гипотезы  $H_0$ , в результате компьютерного моделирования. В работе сформулирован и реализован алгоритм проверки сложных гипотез об адекватности построенной функции надежности, зависящий от вида плана эксперимента. На примере подбора модели для зависящей от напряжения функции надежности изоляционных систем показаны возможности применения предложенного критерия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Meeker W.Q., Escobar L.A.** Statistical methods for reliability data. – New York: John Wiley and Sons, 1998. – 680 p.
2. **Cox D.R., Roy J.** Regression models and life tables (with Discussion) // Journal of the Royal Statistical Society. – 1972. – Vol. 34. – P. 187–220.
3. **Bagdonavicius V., Nikulin M.** Accelerated life models: modeling and statistical analysis. – Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2002. – 334 p.
4. **Kaplan E.L., Meier P.** Nonparametric estimation from incomplete observations // Journal of the American Statistical Association. – 1958. – Vol. 53. – P. 457–481.
5. **Beran R.** Nonparametric regression with randomly censored survival data: technical report. – Berkeley: University of California, Department of Statistics, 1981.
6. **Keilegom I. van.** Nonparametric estimation of the conditional distribution in regression with censored data: dissertation. – Diepenbeek, 1998. – 206 p.
7. **Demin V., Chimitova E.** An adaptive method for selecting an optimal bandwidth parameter in nonparametric estimate of the conditional reliability function // Proceedings of the International Workshop "Applied methods of statistical analysis. Nonparametric approach – AMSA'2015", Novosibirsk, Belokurikha, 14–19 September 2015. – Novosibirsk: NSTU Publ., 2015. – P. 176–185.
8. **Демин В.А., Чимитова Е.В., Щеколдин В.Ю.** Исследование метода выбора оптимального параметра сглаживания при непараметрическом оценивании регрессионных моделей надежности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 2 (27). – С. 10–18.
9. **Демин В.А., Чимитова Е.В.** Выбор оптимального параметра сглаживания для непараметрической оценки регрессионной модели надежности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 1. – С. 59–65.
10. **Chimitova E., Demin V.** A method for selection of the optimal bandwidth parameter for Beran's nonparametric estimator // Topics in Statistical Simulation: Research Papers from the 7<sup>th</sup> International Workshop on Statistical Simulation. – New York: Springer, 2014. – P. 139–147. – (Springer Proceedings in Mathematics and Statistics; vol. 114).
11. Testing goodness-of-fit of parametric AFT and PH models with residuals / N. Balakrishnan, E. Chimitova, N. Galanova, M. Vedernikova // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2013. – Vol. 42, N 6. – P. 1352–1367.
12. **Галанова Н.С., Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В.** Применение непараметрических критериев согласия к проверке адекватности моделей ускоренных испытаний // Автотметрия. – 2012. – № 6. – С. 53–68.
13. **Чимитова Е.В., Семенова М.А.** Проверка адекватности параметрических регрессионных моделей надежности по усеченным слева и цензурированным справа данным // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2015. – № 1 (26). – С. 104–120.
14. **Чимитова Е.В., Ведерникова М.А., Галанова Н.С.** Непараметрические критерии согласия в задачах проверки адекватности моделей надежности по цензурированным данным // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 4 (25). – С. 115–124.
15. **Семенова М.А.** Разработка алгоритмического обеспечения и исследование обобщенных моделей пропорциональных интенсивностей: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.17. – Новосибирск, 2015. – 154 с.
16. **Keilegom I. Van, Gonzalez-Manteiga W., Sellero C.S.** Goodness-of-fit tests in parametric regression based on the estimation of the error distribution // Test. – 2008. – Vol. 17, iss. 2. – P. 401–415.
17. **Pardo-Fernandez J.C., Keilegom I. van, Gonzalez-Manteiga W.** Goodness-of-fit tests for parametric models in censored regression // The Canadian Journal of Statistics. – 2007. – Vol. 35, N 2. – P. 249–264.
18. **Nelson W.** Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis. – New York: John Wiley and Sons, 2004. – 601 p.
19. **Lawless J.F.** Statistical models and methods for lifetime data. – Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2002. – 664 p.

## RESEARCH AND DEVELOPMENT OF GOODNESS-OF-FIT TESTS BASED ON THE BERAN ESTIMATOR FOR THE PARAMETRIC REGRESSION RELIABILITY MODEL

**Demin V.A.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

In this paper, a new goodness-of-fit test based on the Kolmogorov distance between the conditional reliability function, corresponding to the tested hypothesis, and the nonparametric estimator proposed by Beran is introduced. The nonparametric Beran estimator is a generalization of the well-known Kaplan-Meier estimate. In the paper goodness-of-fit tests are suggested for different experimental designs. Distributions of statistics of the proposed test are studied by computer simulation methods depending on the sample size and the number of points of the experimental design. Comparative analysis of the power of test has shown that for the considered pairs of competing hypotheses the proposed tests are preferable to the classical Kolmogorov test applied to samples of residues, and the chi-square test for the proportional hazard model.

*Keywords:* lifetime data; goodness-of-fit test; the Beran estimator; parametric regression model; power of test; experimental design.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-43-56

### REFERENCES

1. Meeker W.Q., Escobar L.A. *Statistical methods for reliability data*. New York, John Wiley and Sons, 1998. 680 p.
2. Cox D.R., Roy J. Regression models and life tables (with Discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, 1972, vol. 34, pp. 187–220.
3. Bagdonavicius V., Nikulin M. *Accelerated life models: modeling and statistical analysis*. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2002. 334 p.
4. Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association*, 1958, vol. 53, pp. 457–481.
5. Beran R. *Nonparametric regression with randomly censored survival data*: technical report. Berkeley, University of California, Department of Statistics, 1981.
6. Keilegom I. van. *Nonparametric estimation of the conditional distribution in regression with censored data*. Dissertation. Diepenbeek, 1998. 206 p.
7. Demin V., Chimitova E. An adaptive method for selecting an optimal bandwidth parameter in nonparametric estimate of the conditional reliability function. *Proceedings of the International Workshop "Applied methods of statistical analysis. Nonparametric approach – AMSA '2015"*, Novosibirsk, Belokurikha, 14–19 September 2015, pp. 176–185.
8. Demin V.A., Chimitova E.V., Shchekoldin V.Yu. Issledovanie metoda vybora optimal'nogo parametra sglazhivaniya pri neparametricheskom otsenivanii regressionnykh modelei nadezhnosti [The research of optimal choice method of bandwidth parameter for nonparametric estimation of reliability regression models]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2014, no. 2 (27), pp. 10–18.
9. Demin V.A., Chimitova E.V. Vybora optimal'nogo parametra sglazhivaniya dlya neparametricheskoj otsenki regressionnoi modeli nadezhnosti [The choice of the bandwidth parameter for nonparametric regression reliability model]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2013, no. 1, pp. 59–65.
10. Chimitova E., Demin V. A method for selection of the optimal bandwidth parameter for Beran's nonparametric estimator. *Topics in Statistical Simulation: Research Papers from the 7<sup>th</sup> International Workshop on Statistical Simulation. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. New York, Springer, 2014, vol. 114, pp. 139–147.

11. Balakrishnan N., Chimitova E., Galanova N., Vedernikova M. Testing goodness-of-fit of parametric AFT and PH models with residuals. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 2013, vol. 42, no. 6, pp. 1352–1367.
12. Galanova N.S., Lemeshko B.Yu., Chimitova E.V. Using nonparametric goodness-of-fit tests to validate accelerated failure time models. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, vol. 48, iss. 6, pp. 580–592. Translated from *Avtometriya*, 2012, no. 6, pp. 53–68.
13. Chimitova E.V., Semenova M.A. Proverka adekvatnosti parametriceskikh regressionnykh modelei nadezhnosti po usechennym sleva i tsenzurovannym sprava dannym [Testing goodness-of-fit of parametric reliability regression models with left truncated and right censored data]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 1 (26), pp. 104–120.
14. Chimitova E.V., Vedernikova M.A., Galanova N.S. Neparametriceskie kriterii soglasiya v zadachakh proverki adekvatnosti modelei nadezhnosti po tsenzurovannym dannym [Non-parametric goodness-of-fit tests in testing adequacy of reliability models for right censored data]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2013, no. 4 (25), pp. 115–124.
15. Semenova M.A. *Razrabotka algoritmicheskogo obespecheniya i issledovanie obobshchennykh modelei proporsional'nykh intensivnosti*: diss. kand. tekhn. nauk [Development and research of algorithmic support of generalized proportional hazards models. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2015. 154 p.
16. Keilegom I. van, Gonzalez-Manteiga W., Sellero C.S. Goodness-of-fit tests in parametric regression based on the estimation of the error distribution. *Test*, 2008, vol. 17, iss. 2, pp. 401–415.
17. Pardo-Fernandez J.C., Keilegom I. van, Gonzalez-Manteiga W. Goodness-of-fit tests for parametric models in censored regression. *The Canadian Journal of Statistics*, 2007, vol. 35, no. 2, pp. 249–264.
18. Nelson W. *Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis*. New York, John Wiley and Sons, 2004. 601 p.
19. Lawless J.F. *Statistical models and methods for lifetime data*. Hoboken, NJ, John Wiley and Sons, 2002. 664 p.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Демин Виктор Андреевич** – родился в 1988 году, аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: непараметрические регрессионные модели надежности. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: vicdemin@gmail.com).

**Demin Victor Andreevich** (b. 1988) – Ph.D. student of the department of theoretical and applied informatics in the Novosibirsk State Technical University. Research interests are currently focused on nonparametric regression reliability models. (20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: vicdemin@gmail.com).

*Статья поступила 07 апреля 2016 г.*

*Received April 07, 2016*

#### To Reference:

Demin V.A. Razrabotka i issledovanie kriteriev soglasiya dlya parametriceskikh regressionnykh modelei nadezhnosti na osnove otsenki Berana [Research and development of goodness-of-fit tests based on the Beran estimator for the parametric regression reliability model]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 43–56. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-43-56



УДК 519.633.2

**ПРИМЕНЕНИЕ СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ВЕКТОРНОГО МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВ****Н.Б. Иткина, С.И. Марков***Новосибирский государственный технический университет*

Математическое моделирование течения газов необходимо на этапе проектирования летательных аппаратов, освоения новых нефтегазовых месторождений и для реализации сложных систем транспортировки энергетического сырья до потребителей. Возникает проблема прогнозирования безотказных и эффективных режимов функционирования технологического оборудования и, как следствие, необходимость в оценке влияния техногенных воздействий на окружающую среду при эксплуатации данного оборудования. Применение математического моделирования позволяет эффективно решать данный класс инженерных задач. Однако при математическом моделировании процесса течения газов для большинства классических вычислительных схем характерно наличие вычислительной неустойчивости, обусловленной преобладанием конвективного переноса (при достаточном большом значении числа Пекле). Поэтому метод решения должен быть естественным образом адаптируемым к параметрам математической модели и отражать сложную структуру процесса. В данной работе приводятся оригинальная вычислительная схема стабилизированного векторного метода конечных элементов в трехмерной постановке, результаты математического моделирования течения газов, рекомендации по технологии выбора стабилизирующих параметров вычислительной схемы. Впервые исследована возможность применения вычислительной схемы на базе стабилизированного векторного метода конечных элементов со специальным векторным базисом пространства Неделека, что позволяет выполнить условие Ладыженской–Бабушки–Брещи при использовании базисов первого порядка для аппроксимации поля давления и поля скоростей.

*Ключевые слова:* течение газов, система уравнений Навье–Стокса, стабилизированный векторный метод конечных элементов.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-57-67

**Введение**

Задача математического моделирования течения газов является фундаментальной для многих инженерных приложений и достаточно хорошо освещена в литературе [5, 14]. Кроме того, для некоторых частных случаев постановки данной проблемы в средах с простой геометрией существуют аналитические решения [14].

Однако современные прикладные задачи в любой области отличаются многомасштабностью как геометрической (с точки зрения наличия включений разного масштаба), так и физической (контрастность физических характеристик среды). Данная особенность естественным образом приводит к усложнению используемого математического аппарата и вычислительных методов.

Современные вычислительные методы отличаются высоким уровнем сложности и адаптивности к конкретному классу прикладных задач. Данное свойство повышает эффективность применения методов для инженерных расчетов по сравнению с классическими стандартными подходами, такими как классический метод конечных элементов или метод конечных разностей.

---

При финансовой поддержке «Грант президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации».

Необходимо отметить, что для решения широкого круга физических задач существует множество специальных программных продуктов, таких как ANSYS, StarCD, CalculiX и пр. Данные программные комплексы предоставляют широкие возможности для моделирования сложных и сопряженных физических процессов, однако имеют закрытую от пользователя реализацию. Практически это означает, что пользователь не имеет возможности адаптировать вычислительную схему с точки зрения выбора вариационной постановки, построения специфических функций формы или учета функциональной многомасштабности. В результате это отрицательно сказывается на возможности адаптации данных программных продуктов к решению нестандартных проблем.

В качестве примера можно привести не имеющую аналитического решения задачу о течении газа в областях с L-shape конфигурацией (или с наличием острых кромок). При численном моделировании возможно появление нефизических осцилляций решения, что естественно требует специальных мер, таких как сгущение конечноэлементной сетки в районах острых кромок, повышения порядка аппроксимирующих базисных функций или применение специальных стабилизирующих вычислительных схем. Вопрос выбора пути решения описанной проблемы снимается сразу, когда принципиально важно получить результат за ограниченное время. Практически стабилизированные вычислительные схемы позволяют получить физически релевантное решение задачи на более грубых сетках и без повышения порядка аппроксимирующих базисных функций, что значительно снижает вычислительные затраты.

Кроме того, поскольку моделирование процесса течения газов базируется на решении системы уравнений Навье–Стокса, то существует естественная математическая сложность решения данной задачи. Для существования единственного решения системы уравнений Навье–Стокса выбор функциональных пространств для поля давления и поля скоростей должен удовлетворять условию Ладыженской–Бабушки–Бреци.

Фундаментальные исследования по проблеме моделирования течений газов можно найти в работах Kralik, Stiegler, Vostry, Zavorcka [5]. В работах [1–4] приводится анализ существующих вычислительных схем на базе стабилизированных конечноэлементных методов. Однако большинство научных публикаций носит теоретический характер и не содержит информации о выборе стабилизирующих параметров при решении прикладных задач.

В данной работе предлагается оригинальная вычислительная схема стабилизированного векторного метода конечных элементов на базе SUPG-схемы (противопотоковая схема Петрова–Галеркина). Процесс течения газов моделируется путем численного решения системы уравнений Навье–Стокса в трехмерной постановке на тетраэдральных сетках с использованием специальных базисов функциональных пространств. Впервые исследована возможность применения вычислительной схемы на базе стабилизированного векторного метода конечных элементов со специальным векторным базисом пространства Неделека, что позволяет автоматически выполнить условие неразрывности и условие Ладыженской–Бабушки–Бреци при использовании базисов первого порядка для аппроксимации поля давления и поля скоростей. Приводятся результаты математического моделирования течения газов и рекомендации по технологии выбора стабилизирующих параметров вычислительной схемы в зависимости от сеточного числа Пекле.

## 1. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается задача о течении несжимаемого газа в трубе  $\Omega$  диаметром  $l = 1,4$  м и с твердыми стенками. В начальный момент времени газ покоился. Движение газа задается перепадом давления на концах трубы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Расчетная область представлена на рис. 1. Определить скорость газа вдоль границы  $S$ .

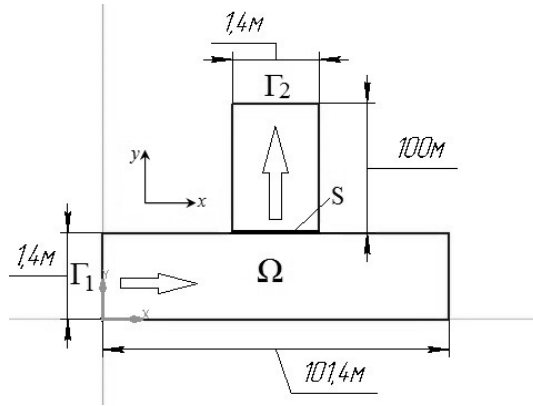


Рис. 1 – Расчетная область  
Fig. 1 – Computational domain

Течение несжимаемого газа в  $\Omega \in R^3$  описывается системой уравнений Навье–Стокса, которая состоит из уравнения движения и уравнения неразрывности [4]:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

с начальными условиями, соответствующими покоящемуся газу,

$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

и краевыми условиями для скорости и давления

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (3)$$

$$p|_{\Gamma_1} = p_1, \quad p|_{\Gamma_2} = p_2,$$

где  $\mathbf{u}$ , м/с – скорость течения газа;  $p$ , Па – давление газа,  $\mathbf{n}$  – нормальный вектор;  $\mu$ , Па·с – коэффициент вязкости газа;  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup> – плотность вещества.

## 2. Вариационная постановка

Решением задачи (1) будем называть пару  $(\mathbf{u}, p)$ , где  $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ ,  $p \in P(\Omega)$ ,

$$V(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\}, \quad (4)$$

$$P(\Omega) = \{ q \mid q \in L_2(\Omega) \}.$$

Аппроксимируем производную по времени в уравнении (1) и запишем

$$\rho \left( \frac{\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j}{h_t} + \gamma(\mathbf{u}_{j+1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_{j+1} \right) = -\nabla p_{j+1} + \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{u}_{j+1}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{j+1} = 0.$$

Тогда дискретная вариационная постановка задачи (5) имеет вид [1]: найти такие  $\mathbf{u}^h \in V^h(\Omega)$ ,  $p^h \in P^h(\Omega)$ , что  $\forall \mathbf{v}^h \in V^h(\Omega)$ ,  $\forall q^h \in P^h(\Omega)$  выполнялось

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^h : \nabla \mathbf{v}^h d\Omega + \frac{\rho}{h_t} \int_{\Omega} \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \rho \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \\ - \int_{\Omega} (p^h \nabla \cdot \mathbf{v}^h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega, \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^h) q^h d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathbf{F} = \frac{\rho}{h_t} \mathbf{u}_j$ ,  $j$  – предыдущий временной слой. Или в виде билинейных форм

$$\begin{aligned} \mu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h + \frac{\rho}{h_t} (\mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h + \rho (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_h = (\mathbf{F}, \mathbf{v})_h, \\ \frac{\rho}{h_t} (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_h = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

## 2. Стабилизированный векторный метод конечных элементов

Стабилизированные конечноэлементные методы формируются на основе стандартного метода конечных элементов с добавлением специальных стабилизирующих операторов. Применение данных операторов обусловлено возникновением нефизических осцилляций решения при использовании конечноэлементной дискретизации задач с преобладающим конвективным переносом. Данный подход рассмотрен в работах L.P. France, F. Brezzi, J. Douglas [2, 3, 6].

Обсудим необходимость применения стабилизированных методов на примере задачи конвекции-диффузии

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + \mathbf{a} \cdot \nabla u = f \text{ в } \Omega \in R^3, \\ u|_{\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mathbf{a}$  – скорость конвекции,  $u$  – решение задачи,  $\lambda$  – коэффициент диффузии.

Вариационная формулировка задачи (8): найти  $u \in H_0^1(\Omega)$ , чтобы  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$(\lambda \nabla u, \nabla v) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u, v) = (f, v) \text{ в } \Omega \in R^3. \quad (9)$$

Положим в (10)  $v = u$  и, применив соотношение Пуанкаре–Фридрихса и неравенство Коши–Шварца, получим оценку

$$\lambda_C \|u\|_1^2 \leq k \|\nabla u\|^2 = (f, u) \leq \|f\| \|u\| \leq \|f\| \|u\|_1, \quad \|u\|_1 \leq \frac{1}{\lambda_C} \|f\|. \quad (10)$$

Оценка (10) в пространстве  $L_2(\Omega)$  с нормой  $\|u\|_1$  определяет основную проблему задачи (8): для малых значений параметра  $\lambda$  малое изменение входных данных  $f$  приводит к большому изменению решения  $u$ . Это означает, что при большом значении числа Пекле (критерия Пекле)

$$\text{Pe} = h \frac{\|\mathbf{a}\|}{\lambda}, \quad (11)$$

где  $h$  – диаметр сферы, описанной вокруг конечного элемента, возможно появление нефизических осцилляций численного решения задачи (8). Новая вариационная формулировка задачи (8) имеет вид [1]: найти  $u \in H_0^1(\Omega)$ , чтобы  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$(\lambda \nabla u, \nabla v) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u, v) + \sum_K \tau_K (-\lambda \nabla u + \mathbf{a} \cdot \nabla u - f, \mathbf{a} \cdot \nabla v) = (f, v) \text{ в } \Omega \in R^3, \quad (13)$$

где  $K$  – конечный элемент.

Для системы уравнений Навье–Стокса стабилизированную схему SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin Method) можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} & \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h + \frac{\rho}{h_t} (\mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h + \rho(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_h - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_h + \\ & + \sum_K \tau_K (\nabla p - \mathbf{F}, \nabla \mathbf{v})_h + \sum_K \tau_K (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{F}, \nabla \mathbf{v})_h = (\mathbf{F}, \mathbf{v})_h, \quad (14) \\ & \frac{\rho}{h_t} (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_h = 0. \end{aligned}$$

Выбор параметра  $\tau$  осуществляется с помощью оценки сеточного числа Пекле (11). Если  $Pe \geq 1$ , то  $\tau = h / 2 \|\mathbf{u}\|$ , иначе  $\tau = h / 2\mu$ . Параметр  $h$  – диаметр сферы, описанной вокруг конечного элемента [3]. Формулы (13) и (14) получены из условия минимизации ошибки (10). Для дополнительной информации о выводе данных соотношений см. работы [1, 2, 6].

### 3. Базисы конечноэлементных пространств

Систему уравнений Навье–Стокса, используемую для описания движения несжимаемой жидкости (газа), можно трактовать, как задачу с ограничением  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Для решения таких задач обычно используется метод Лагранжа. Применение этого подхода в конечноэлементной дискретизации приводит к определению пары  $(\mathbf{u}, p)$ . Существование единственного решения в этом случае обеспечивается выполнением условия Ладыженской–Бабушки–Брецци [4]

$$\inf_{p \in P(\Omega)} \left( \sup_{\mathbf{u} \in V(\Omega)} \frac{(\nabla \mathbf{u}, p)}{\|p\| \|\nabla \mathbf{u}\|} \right) \geq \beta, \quad (15)$$

где  $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ ,  $p \in P(\Omega)$ ,  $\beta > 0$  не зависит от размера конечного элемента.

Выполнение условия может быть гарантировано специальным выбором функциональных пространств для аппроксимации поля давления и поля скоростей. Обратим внимание, что выполнение условия (15) позволяет не строить специальные операторы для однозначного определения поля давления, поскольку решается задача о седловой точке [1], а условие неразрывности выполняется автоматически [1, 6]. Для решения задачи (1)–(3) будем использовать тетраэдральные конечные элементы (рис. 2). Введем барицентрические координаты  $\{\lambda_i, i = \overline{1,4}\}$  на тетраэдре  $\Omega_k$ , см. систему уравнений (16).

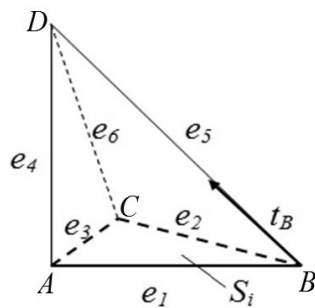


Рис.2 – Тетраэдральный конечный элемент  
Fig.2 – Tetrahedral finite element

Каждая из функций  $\{\lambda_i, i = \overline{1,4}\}$  принимает значение 1 в вершине  $i$  с координатами  $(X_i, Y_i, Z_i)$  и ноль в остальных вершинах тетраэдра. Данный базис будет использован для аппроксимации поля давления.

$$\lambda_i(x, y, z) = \alpha_1^i x + \alpha_2^i y + \alpha_3^i z + \alpha_4^i, \quad i = \overline{1,4}. \quad (16)$$

В соответствии с ЛББ условием (15) для аппроксимации вектора скорости будем использовать полный векторный базис первого порядка пространства [13]:

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in H(\text{div}, \Omega), \int_{\Omega} (\mathbf{w})^2 < \infty, \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w})^2 < \infty \right\}. \quad (17)$$

Для построения такого базиса на каждой грани тетраэдра  $S_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  определим Whitney-функции [12]

$$\gamma_{0,T}^{S_i} = \frac{\lambda_A t_A}{t_A n_{i,T}} + \frac{\lambda_B t_B}{t_B n_{i,T}} + \frac{\lambda_C t_C}{t_C n_{i,T}}, \quad (18)$$

где  $n_{i,T}$  – единичный вектор внешней нормали к грани  $S_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $\lambda_i$  – базисная функция, ассоциированная с  $i$ -й вершиной,  $t_i$  – единичные касательные векторы. Whitney-функции (18) образуют неполный векторный базис первого порядка. Для построения полного базиса первого порядка необходимо добавить к Whitney-функциям линейные face-функции [13]

$$\gamma_{1,T}^{S_i,1} = \frac{\lambda_B t_B}{t_B \cdot n_{i,T}} - \frac{\lambda_A t_A}{t_A \cdot n_{i,T}}, \quad \gamma_{1,T}^{S_i,2} = \frac{\lambda_A t_A}{t_A \cdot n_{i,T}} - \frac{\lambda_C t_C}{t_C \cdot n_{i,T}}. \quad (19)$$

Для построения базиса более высокого порядка необходимо определить *edge*-функции, ассоциированные с ребрами тетраэдра [13]. Пусть вершины  $F, E, D$  определяют грань  $S_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , вершины  $F, E$  определяют ребро  $e_j, D \notin e_j$ . Тогда *edge*-функции определяются с помощью ортогональных полиномов Лежандра  $L_i$

$$\gamma_{k,T}^{S_i,e_j} = \lambda_E \lambda_F L_{k-2}(\lambda_F - \lambda_E) \frac{t_D}{t_D \cdot n_{i,T}}. \quad (20)$$

Построение *edge*-функций (20) может быть неединственным. Предложен вариант, принадлежащий J. Webb [12, 13].

#### 4. Верификация вычислительной схемы SUPG

Рассмотрим стационарное течение газа в прямой трубе при наличии постоянного перепада давления. Диаметр трубы  $l = 1,4$  м, длина –  $L = 100$  м. Внутри трубы течет **бутан** ( $\mu = 7,44$  мкПа·с,  $\rho = 2,700$  кг/м<sup>3</sup>). На границе  $\Gamma_1$  задано давление  $p_1 = 200$  кПа, на границе  $\Gamma_2$  задано давление  $p_2 = 0$  Па. На границах  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  задано условие прилипания  $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$  и непротекания  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Данная задача имеет аналитическое решение [14]:

$$p = -\frac{|p_1 - p_2|}{L} x + p_1, \quad \mathbf{u}_x = \frac{|p_1 - p_2|}{2\mu L} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^2 - y^2 \right). \quad (21)$$

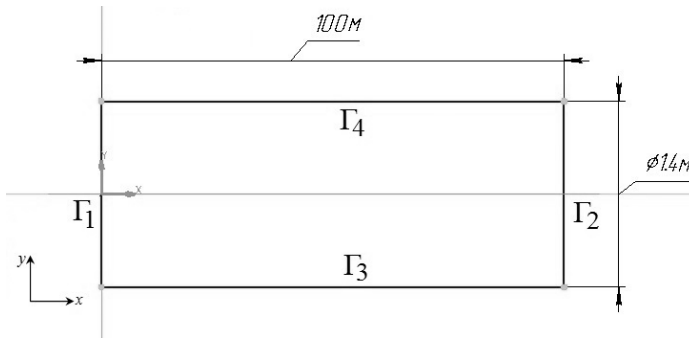


Рис. 3 – Расчетная область

Fig. 3 – Computational domain

Сравним погрешности численных решений с помощью классического метода конечных элементов (МКЭ), стабилизированного (СМКЭ) и с помощью ANSYS 17,0 CFX. Триангуляция расчетной области представлена на рис. 4. Использовано 122,602 элемента, средний размер ребра КЭ 0,1 (м). Точность решения СЛАУ  $\varepsilon = 10^{-12}$ . Норму погрешности решений будем оценивать в пространстве  $L_2(\Omega)$

$$\|\Delta\|_{L_2(\Omega)} = \|I^{\text{точное}} - I^{\text{числ}}\|_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} (I^{\text{точное}} - I^{\text{числ}})^2 d\Omega. \quad (22)$$

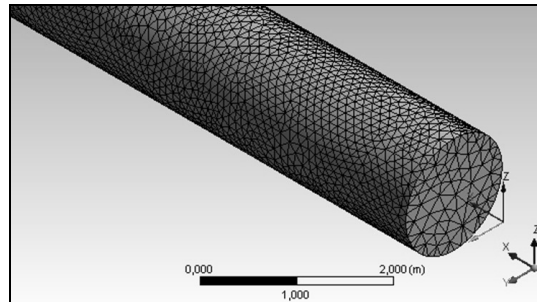


Рис. 4 – Триангуляция расчетной области:  
122,602 элемента, размер ребра 0,1 (м)

Fig. 4 – The computational domain triangulation:  
122,602 elements, the edge size 0,1 (m)

Таблица содержит информацию о времени и погрешности численного решения поставленной задачи разными методами. В качестве решателя СЛАУ для МКЭ и СМКЭ выбран метод BiCGStab с SQ-факторизацией. В ANSYS CFX (Computational Fluid Dynamics) для решения СЛАУ применяется алгебраический многосеточный решатель с использованием двух подходов: итерационный решатель на подпространствах Крылова (объединение GMRES и BiCG) с предобуславливанием Якоби и прямой метод с LU-разложением. Для решения поставленной задачи с помощью пакета ANSYS была выбрана модификация решателя с использованием LU-разложения.

Конвективный член в уравнениях Навье–Стокса вносит не только несимметричность в матрицу СЛАУ, но и закононеопределенность в режиме доминирования конвекции. Практически установлено, что для числа Пекле  $10^3$  итерационные решатели начинают стагнировать и не достигают требуемой точности. Данный

эффект можно наблюдать для классического МКЭ, поскольку время решения задачи установить невозможно из-за стагнирования решателя. Для числа Пекле  $10^{10}$  уже невозможно применять прямые методы, поскольку возникают ограничения на машинную арифметику. Применение схемы SUPG (СМКЭ) позволило получить решение задачи с требуемой точностью, потратив на порядок меньше времени по сравнению с программным комплексом ANSYS.

**Погрешность и время решения задачи**  
**Accuracy and time for solving the problem**

Метод решения	Перепад давления, кПа	Погрешность, давление	Погрешность, скорость	Время решения, с
МКЭ	200	1,55E-1	6,23E+2	стагнация
	400	2,98E-0	8,54E+3	
	1200	6,58E+1	5,79E+5	
ANSYS CFX	200	5,69E-6	2,37E-4	35
	400	4,15E-5	3,81E-3	48
	1200	8,98E-4	8,56E-2	225
СМКЭ	200	2,35E-11	5,89E-5	10
	400	4,62E-11	7,59E-4	13
	1200	5,98E-11	9,25E-4	15

#### 4. Решение поставленной задачи

Аналогично предыдущему случаю рассмотрим течение **бутана**. На границе  $\Gamma_1$  задано давление  $p_1 = 200$  кПа, на границе  $\Gamma_2$  задано давление  $p_2 = 0$  Па. Триангуляция области состоит из 400,131 элемента, размер ребра не более 0,1 (м). На рис. 5 изображены профили скорости вдоль границы  $S$ , полученные с помощью МКЭ, СМКЭ и ANSYS. На графиках представлен модуль скорости.

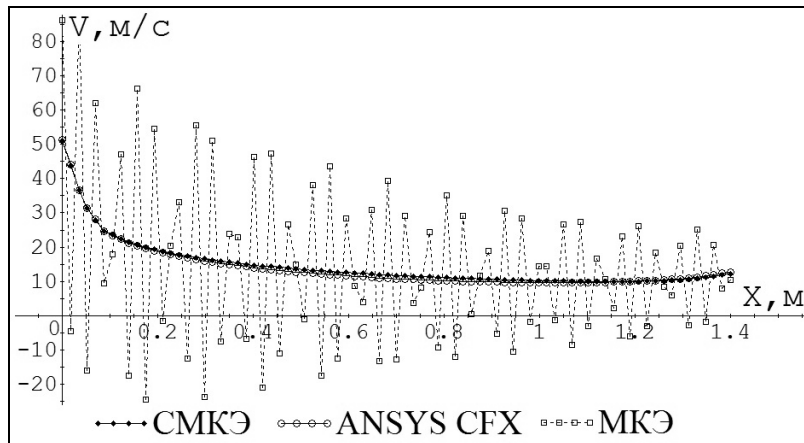


Рис.5 – Поле скоростей бутана вдоль границы  $S$  спустя 0,4 с

Fig.5 – The butane velocity field along the border  $S$  after 0,4 sec

Как можно видеть, решение, полученное с помощью классического метода конечных элементов (МКЭ), имеет нефизичные осцилляции. Время решения задачи с помощью СМКЭ составило 14 с, решение с помощью ANSYS – 51 с. Таким образом, применение стабилизированного подхода позволяет получить физически адекватное решение задачи в 4 раза быстрее.



### Заключение

В данной работе была впервые исследована возможность применения вычислительной схемы на базе стабилизированного векторного метода конечных элементов со специальным векторным базисом пространства  $H(\text{div}, \Omega)$ , что позволяет выполнить условие Ладыженской–Бабушки–Брецци при использовании базисов одного порядка для аппроксимации поля давления и поля скоростей.

Проведена верификация стабилизированной вычислительной схемы на задаче, имеющей аналитическое решение. Сделано сравнение полученных результатов с решениями, полученными с помощью классического метода конечных элементов и программного комплекса ANSYS. Метод показал хорошие результаты при моделировании процесса течения газа в трубе с L-shape конфигурацией, которая является главным тестом на проверку устойчивости всех конечноразностных и конечноэлементных схем при решении сингулярно-возмущенных задач. Метод позволяет получить физически адекватное решение с меньшими вычислительными затратами по сравнению с другими рассмотренными подходами. Данная вычислительная схема может быть использована для решения задач движения жидкостей и газов в достаточно широком диапазоне изменения физических параметров.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Russo A., Brezzi F., Marini L.** On the choice of a stabilizing subgrid for convection-diffusion problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2005. – Vol. 194 (2–5). – P. 127–148.
2. **Hauke G.** A simple subgrid scale stabilized method for the advection-diffusion-reaction equation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2002. – Vol. 191 (27). – P. 2925–2947.
3. **Masud A., Franca L., Hauke G.** Stabilized finite element methods // *Finite element methods: 1970's and beyond*. – Barcelona, Spain: CIMNE, 2003.
4. **Riviere B.** Analysis of a discontinuous finite element method for the coupled Stokes and Darcy problems // *Journal of Scientific Computing*. – 2005. – Vol. 22/23. – P. 479–500.
5. Dynamic modeling of large-scale networks with application to gas distribution / J. Králík, P. Stiegler, Z. Vostř, J. Závorka. – Prague: Academia, 1998. – 360 p.
6. **Burman E., Ern A.** Nonlinear diffusion and discrete maximum principle for stabilized Galerkin approximations of the convection–diffusion–reaction equation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2002. – Vol. 191. – P. 3833–3855.
7. **Burman E., Ern A.** Stabilized Galerkin approximation of convection-diffusion-reaction equations: discrete maximum principle and convergence // *Mathematics of Computation*. – 2005. – Vol. 74. – P. 1637–1652.
8. **Carmo E.G.D. do, Alvarez G.B.** A new upwind function in stabilized finite element formulations, using linear and quadratic elements for scalar convection-diffusion problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2004. – Vol. 193. – P. 2383–2402.
9. **Hundsdorfer W., Verwer J.G.** Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations. – Berlin; New York: Springer, 2003. – 471 p. – (Springer Series in Computational Mathematics; vol. 33).
10. **Vohralik M.** Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients // *Journal of Scientific Computing*. – 2011. – Vol. 46 (3). – P. 397–438. – doi: 10.1007/s10915-010-9410-1.
11. **Kim K.Y.** A posteriori error estimators for locally conservative methods of nonlinear elliptic problems // *Applied Numerical Mathematics*. – 2007. – Vol. 57 (9). – P. 1065–1080.
12. **Webb J.P.** Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1999. – Vol. 47 (8). – P. 1244–1253.

13. **Webb J.P.** Hierarchal scalar and vector tetrahedra // IEEE Transactions on Magnetic. – 1993. – Vol. 29 (2). – P. 1495–1498.
14. **Ольховский И.И.** Курс теоретической механики для физиков. – 3-е изд., доп. и перераб. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 574 с.

## STABILIZED VECTOR FINITE ELEMENT METHOD FOR MODELING GAS FLOWS

**N.B. Itkina, S.I. Markov**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

Mathematical modeling gas flows naturally arises in the aircraft design, the development of new oil and gas fields and the development of energy raw material transport systems to consumers. There is a forecasting problem of the dependable and efficient process equipment operation modes. It is also necessary assess the impact of technogenic effects the environment during the equipment operation in order to prevent technological accidents. The problem decision is based on the development and practical application of engineering calculations using modern and universal methods. A mathematical model of the gas flows is a singularly perturbed problem that causes the instability of most computational schemes for sufficiently large values of the Peclet number. Therefore, the method of solving a problem should be naturally adapted to the parameters of a physical problem and reflect a complex structure of the process. A finite element method is one of the approaches used for such problems. In this paper we present an original computational scheme of a stabilized vector finite element method in 3D. Mathematical modeling results of the gas flows are given. Detailed recommendations on selecting computational scheme stabilizing parameter are proposed. The possibility of using the computational scheme of the stabilized vector finite element method with special vector basis functions of Nedelec's space is studied for the first time. It allows satisfying the Ladyzhenskaya – Babuska – Brezzi condition using first-order basis functions for the pressure and velocity field approximation.

*Keywords:* gas flows, the Navier–Stokes equations, stabilized vector finite element method.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-57-67

### REFERENCES

1. Russo A., Brezzi F., Marini L. On the choice of a stabilizing subgrid for convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194 (2–5), pp. 127–148.
2. Hauke G. A simple subgrid scale stabilized method for the advection-diffusion-reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, vol. 191 (27), pp. 2925–2947.
3. Masud A., Franca L., Hauke G. Stabilized finite elements methods. *Finite element methods: 1970's and beyond*. Barcelona, Spain, CIMNE, 2003.
4. Riviere B. Analysis of a discontinuous finite element method for the coupled Stokes and Darcy problems. *Journal of Scientific Computing*, 2005, vol. 22–23, pp. 479–500.
5. Kralik J., Stiegler P., Vostry Z., Zavorka J. *Dynamic modeling of large-scale networks with application to gas distribution*. Prague, Academia, 1998. 360 p.
6. Burman E., Ern A. Nonlinear diffusion and discrete maximum principle for stabilized Galerkin approximations of the convection–diffusion–reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, vol. 191, pp. 3833–3855.
7. Burman E., Ern A. Stabilized Galerkin approximation of convection-diffusion-reaction equations: discrete maximum principle and convergence. *Mathematics of Computation*, 2005, vol. 74, pp. 1637–1652.
8. Carmo E.G.D. do, Alvarez G.B. A new upwind function in stabilized finite element formulations, using linear and quadratic elements for scalar convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, vol. 193, pp. 2383–2402.
9. Hundsdorfer W., Verwer J.G. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, New York, Springer, 2003, vol. 33. 471 p.

10. Vohralik M. Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients. *Journal of Scientific Computing*, 2011, vol. 46 (3), pp. 397–438. doi: 10.1007/s10915-010-9410-1
11. Kim K.Y. A posteriori error estimators for locally conservative methods of nonlinear elliptic problems. *Applied Numerical Mathematics*, 2007, vol. 57 (9), pp. 1065–1080.
12. Webb J.P. Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1999, vol. 47 (8), pp. 1244–1253.
13. Webb J.P. Hierarchal scalar and vector tetrahedral. *IEEE Transactions on Magnetic*, 1993, vol. 29 (2), pp. 1495–1498.
14. Ol'khovskii I.I. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki dlya fizikov* [Theoretical mechanics for physicists]. Moscow, MSU Publ., 1978. 574 p.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Иткина Наталья Борисовна** – родилась в 1959 году, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры вычислительных технологий, факультет прикладной математики и информатики, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: неконформные конечно-элементные методы. Опубликовано 93 научных работы. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: itkina.nat@yandex.ru).

**Itkina Natalya Borisovna** (b. 1959) – Ph.D. in Engineering, Associate Professor at the department of computational technologies of the Novosibirsk state technical university. Her research interests are currently focused on nonconforming finite element method. She is author of 93 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: itkina.nat@yandex.ru).



**Марков Сергей Игоревич** – родился в 1991 году, аспирант кафедры Вычислительных технологий, факультет прикладной математики и информатики, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: неконформные конечноэлементные методы. Опубликовано 30 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: www.sun91@list.ru).

**Markov Sergey Igorevich** (b. 1991) – postgraduate student at the Department of Computational Technologies of the Novosibirsk state technical university. His research interests are currently focused on nonconforming finite element method. He is author of 30 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: www.sim91@list.ru).

*Статья поступила 31 марта 2016 г.  
Received March 31, 2016*

## To Reference:

Itkina N.B., Markov S.I. Primenenie stabilizirovannogo vektornogo metoda konechnykh elementov dlya modelirovaniya techeniya gazov [Stabilized vector finite element method for modeling gas flows]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 57–67. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-57-67

УДК 621.45.023:504

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИСТЕЧЕНИЯ СТРУЙ  
ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ АВИАДВИГАТЕЛЕЙ****Т.А. Коротаева<sup>1,2</sup>, А.О. Турчинович<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН,*<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет*

Одним из важных этапов эксплуатации воздушных судов является «гонка двигателей», предназначенная для проверки работоспособности силовых установок. Этап осуществляется на специальной площадке с газоотбойником – преградой для отклонения выхлопных струй загрязняющих веществ и защиты персонала и окружающей среды от раскаленных газов. Целью исследования являются оценка эффективности газоотбойников сплошной и ячеистой конструкций и их влияние на рассеивание загрязняющих веществ.

В работе численно моделируется обтекание трехмерной конфигурации летательного аппарата, стоящего на площадке для гонки двигателей, оборудованной струеотклоняющим щитом. Из сопел двигателя истекают продукты сгорания, состав которых соответствует режиму максимальной тяги. Полагается, что продукты сгорания авиатоплива являются химическими активными веществами. При этом кинетическая модель ограничивается рассмотрением продуктов сгорания авиатоплива, которые определены Международной организацией гражданской авиации (ИКАО) как наиболее опасные, к тому же часть из этих веществ способна вступать в реакции с кислородом воздуха с дополнительным образованием загрязняющих веществ. Задача решается в рамках уравнений Навье–Стокса, дополненных кинетическими уравнениями взаимодействия продуктов сгорания авиатоплива с кислородом воздуха, которая решается численно с помощью программного продукта Ansys Fluent. Анализ поведения струй загрязняющих веществ и их взаимодействия с газоотбойниками различных конфигураций позволяет сделать выводы об эффективности струеотклоняющих устройств.

*Ключевые слова:* самолет, «гонка двигателей», газоотбойник, загрязняющие вещества, численное моделирование, химические реакции.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-68-77

**Введение**

Возрастающая роль авиатранспорта в грузо- и пассажироперевозках приводит к увеличению количества аэропортов и их пропускной способности. Это неизбежно ведет к обострению экологической обстановки в районах их расположения.

Для защиты населения от негативного воздействия воздушных судов нормативными документами устанавливаются санитарно-защитные зоны – территории с особым режимом использования, непригодные для жилой застройки. Установление границ санитарно-защитных зон для аэропортов и аэродромов в каждом конкретном случае осуществляется на основании фактического уровня концентраций загрязняющих веществ, шума и электромагнитного излучения. Для установления санитарно-защитных зон аэропортов и аэродромов по уровню химического загрязнения необходимо провести расчет уровней концентраций загрязняющих веществ в приземном пограничном слое, полученных при эксплуатации воздушных судов в условиях стандартного взлетно-посадочного цикла и при «гонке двигателей». Гонка предполагает запуск двигателей воздушного судна на всех режимах их работы в течение определенного времени, которое может дости-

гать 30 мин в зависимости от типа двигателя. За это время в окружающую среду поступает значительное количество загрязняющих веществ, уровень которых определяется программой гонки.

Для защиты персонала и окружающей среды от высокотемпературных и высокоскоростных струй продуктов сгорания авиатоплива воздушное судно располагают на специальной площадке, оборудованной струеотклоняющими устройствами – газотбойниками, поверхность которых может быть различной (сплошной, ячеистой и т. д.).

Общепринятым для инженерной оценки уровня загрязнения является использование методики [1]. Однако она дает весьма приближенную оценку загрязнения. Существуют также методики и подходы, не получившие пока широкого применения в инженерной практике, позволяющие более детально оценить загрязнение, полученное при эксплуатации воздушных судов. Среди современных отечественных ученых, чьи работы посвящены моделированию распространения загрязняющих веществ от воздушных судов, наиболее передовыми являются работы О.А. Каргышева и Ю.В. Медведева [2], А.Л. Стасенко [3], А.М. Старика [4]. В работе [2] представлена методика, в которой учтено наибольшее число параметров рассматриваемой задачи из всех возможных. Рассмотрен весь цикл рассеивания загрязняющих веществ: от выброса струями двигателей воздушных судов до рассеивания облака загрязняющих веществ в атмосфере. В работе А.Л. Стасенко с соавторами [3] рассматривается истечение осесимметричных струй с химически реагирующими компонентами. Основные процессы в выхлопной струе, ответственные за формирование аэрозольных компонентов, загрязняющих атмосферу, а также оценка влияния эмиссии авиационных двигателей на атмосферные процессы приведены в работе [4]. В работе [5] предлагается методика для определения уровня загрязнений от движущихся воздушных судов. Следует отметить, что взаимодействие выхлопных струй с газотбойником и его влияние на распространение загрязняющих веществ не рассматривалось ни в одной из работ. Кроме того, под вопросом остается оценка эффективности используемых газотбойников на площадке для опробования силовых установок. Поэтому целью настоящего исследования является оценка эффективности газотбойников сплошной и ячеистой конструкций.

## 1. Постановка задачи

Оценить эффективность газотбойника и выявить особенности течения вблизи него можно с помощью численного моделирования процесса истечения выхлопных химически активных струй и их взаимодействия со струеотклоняющим устройством.

Для этого в работе рассматривается самолет в приземном слое атмосферы, стоящий на площадке для гонки двигателей, схема которой приведена на рис. 1. Воздушное судно запускает двигатели на режиме максимальной тяги.

Схема задачи для численного решения совпадает с приведенной на рис. 1. В качестве условий в набегающем потоке приняты атмосферное давление 101 325 Па, температура окружающей среды 17 °С. Направление ветра со скоростью 5 м/с совпадает с направлением истекающих из двигателя струй. Объектом исследований является самолет с четырьмя двигателями АИ-20М. Истечение из сопел (состав смеси, температура, скорость) соответствует режиму максимальной тяги.

Для проведения исследования были построены трехмерные математические модели самолета и газотбойника. При этом поверхность самолета была упрощена, так как построение расчетной сетки при пространственном моделировании

усложняется реальной геометрией самолета и газоотбойного щита, расположенного под углом к земле. В том числе пренебрегли моделированием винтов, установленных на двигателе, ввиду того, что при гонке двигателей лопасти винта стоят в положении минимального сопротивления вращению, согласно инструкции по эксплуатации и техническому обслуживанию авиационного турбовинтового двигателя АИ-20М, и не образуют спутного течения за ними.

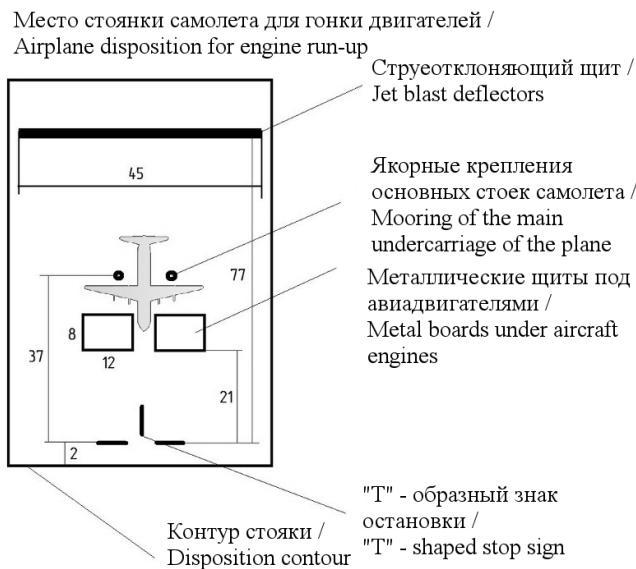


Рис. 1 – Схема для расположения самолетов на площадке для гонки двигателей

Fig. 1 – Schematic of aircraft disposition in run-up area

Расчетная область представляет собой параллелепипед, включающий обтекаемую поверхность самолета и газоотбойный щит. Построение области осуществлялось с использованием ANSYS Design Modeler (academic). На рис. 2 приведены трехмерные модели рассматриваемых объектов.

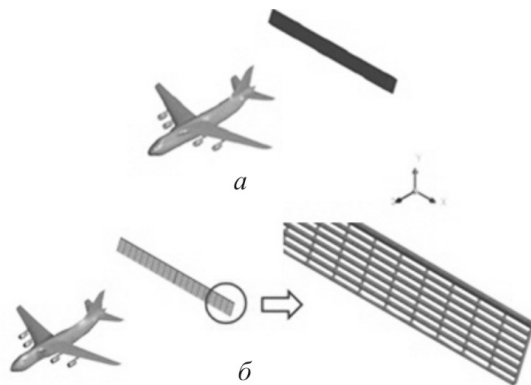


Рис. 2 – Трехмерная модель самолета и газоотбойников:

а – сплошной, б – ячеистый

Fig. 2 – 3-D models of airplane and jet blast deflectors (JBD):

а – solid faced JBD, б – mesh faced JBD

Параметры газообойников: габариты, углы наклона к поверхности земли, геометрия ячеек ячеистого газоотбойника, направляющая поток выхлопных газов вверх, воссозданы согласно реальным особенностям конструкций, используемых на одном из российских аэродромов.

Следующий этап в подготовке к математическому моделированию это определение разностной сетки. С помощью ANSYS Meshing построена разностная сетка, состоящая из ~1,5 млн ячеек. В окрестности самолета и газоотбойника проведено сгущение сетки для более детального описания течения выхлопных газов.

В качестве кинетической модели рассматривается модель полного сгорания топлива, которая осуществляется при максимальном режиме работы авиадвигателей. Предполагается, что основными веществами в выхлопных газах являются  $\text{NO}_x$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{C}_n\text{H}_m$ , сажа, выброс которых контролирует ИКАО. При полном сгорании топлива выброс несгоревших углеводородов считается пренебрежимо малым. Исходя из этого, химически активными веществами при полном сгорании топлива могут быть монооксиды углерода и азота, которые способны окислиться кислородом воздуха до соответствующих диоксидов:



Учитывая высокую скорость и температуру истекающих струй продуктов сгорания авиатоплива, рассматривается движение вязкого, сжимаемого газа, описываемого уравнениями Навье–Стокса. Для получения численного решения используется метод конечных объемов, встроенный в ANSYS FLUENT.

В качестве настроек решателя приняты: связанный решатель ‘density-based’, схема решения – нестационарная неявная второго порядка точности аппроксимации, в качестве модели турбулентности используется SST  $k-\omega$ . Для расчета распространения загрязняющих веществ подключаются кинетические уравнения для определения концентраций химических компонент.

Граничными условиями являются: на срезе сопел условия массового расхода, на поверхности самолета и на газоотбойнике – условия прилипания. На внешних границах расчетной области задаются условия в набегающем потоке с постоянными коэффициентами турбулентной диффузии и скоростью ветра.

Расчет газодинамического течения в трехмерной области с учетом химических реакций достаточно сложен и требует больших затрат машинного времени и ресурсов.

## 2. Верификация

Истечение в спутный поток осесимметричной химически активной струи выхлопных газов рассматривается в работе в качестве модельной задачи для верификации предлагаемого подхода, разработанной кинетической модели и настроек решателя. В качестве граничных условий для численного решения задачи об истечении осесимметричной струи используются следующие условия: на верхней границе области – условия в окружающей среде ‘pressure-far-field’, на выходной границе – условия на выходе ‘pressure-outlet’, на входной границе области – на срезе сопла – условия массового расхода ‘mass-flow-inlet’, на остальной части – твердая стенка ‘wall’.

Газодинамические параметры на срезе сопла и химический состав продуктов сгорания авиатоплива соответствуют этапу минимальной тяги двигателей с характеристиками, приведенными в работе [6]. Задавались температура газов 537 °С и давление 89 770 Па.

Параметры в области решения: атмосферное давление 101 325 Па, температура окружающей среды 17 °С, скорость ветра 5 м/с.

В результате расчета получена газодинамическая структура течения, характерная для дозвуковой осесимметричной струи. На рис. 3, *а* показаны распределения концентраций угарного газа на начальном участке струи. Характер изменения концентрации того же вещества вдоль оси струи при удалении от среза сопла можно видеть на рис. 3, *б*. Концентрации веществ даны в долях ПДК. Штриховой линией обозначены экспериментальные данные [6], сплошной – результаты проведенного моделирования (рис. 3, *б*). Как видно из рисунка, расчетные значения хорошо согласуются с экспериментальными данными [6], что позволяет судить о достоверности результатов моделирования распространения загрязняющих веществ от двигателей воздушных судов, представленных в следующем разделе.

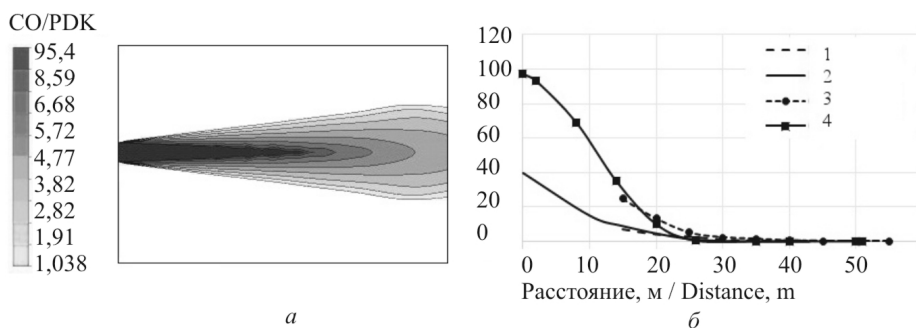


Рис. 3 – Распределение загрязняющих веществ вдоль оси осесимметричной выхлопной струи:

*а* – распределение долей ПДК для CO вдоль оси; *б* – сравнение значений долей ПДК (1) экспериментальных для NO<sub>x</sub>; (2) расчетных NO<sub>x</sub>; (3) экспериментальных для CO; (4) расчетных для CO

Fig. 3 – Distribution of the polluting substances along an axis of an axisymmetric exhaust stream:

*a* – the distribution of shares of permissible level of pollution for CO along an axis; *b* – comparison of values maximum allowable concentration (1) experimental for NO<sub>x</sub>; (2) calculation value for NO<sub>x</sub>; (3) experimental for CO; (4) calculation value for CO

### 3. Полученные результаты

Примеры результатов, полученных при моделировании обтекания тела самолетной конфигурации, с истекающими из сопел продуктов сгорания, и взаимодействие со сплошным газоотбойником можно видеть на рис. 4–6.

На рис. 4, *а* приведено распределение скорости в плоскости, проходящей через двигатели параллельно поверхности земли. Максимальная скорость истечения газов из сопел располагается на срезе сопел и составляет 254 м/с. Из рисунка видно, что струи взаимодействуют с корпусом самолета и друг с другом, сливаясь в единый поток с каждой стороны фюзеляжа в районе хвостовой части. Вниз по потоку препятствием на их пути является газоотбойник. При столкновении с ним струи теряют скорость и меняют траекторию движения. При этом скорость струй становится сопоставимой со скоростью ветра. Дальнейшее развитие течения можно видеть на рис. 4, *б*. Из рисунка видно, что поток выхлопных струй взаимодействует с газоотбойником, что приводит к активному образованию сложных пространственных вихревых структур за преградой.



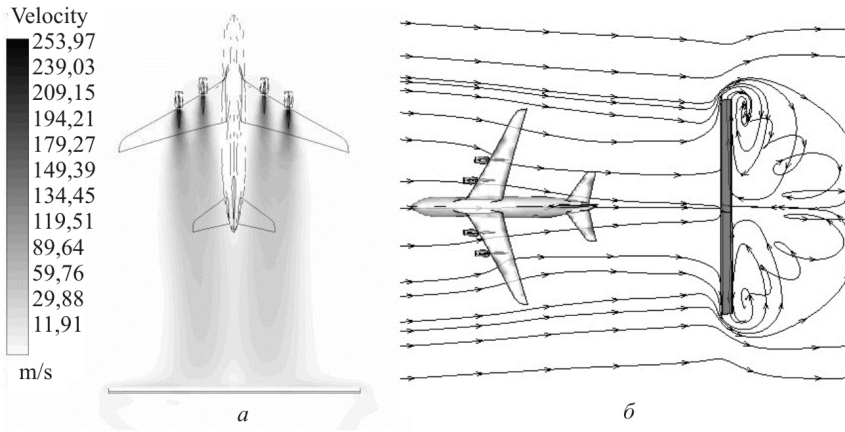


Рис. 4 – Истечение газов из сопел:

*a* – распределение скорости в плоскости, проходящей через двигатели параллельно поверхности земли; *б* – вихревая картина потока при взаимодействии выхлопных струй со сплошным газоотбойником

Fig. 4 – The expiration of gases from nozzles:

*a* – velocity pattern in symmetry plane of engines parallel to the ground; *b* – vortex flow pattern at interaction between exhaust jets and solid faced JBD

Характер распространения загрязняющих веществ может быть определен при численном моделировании с учетом кинетической модели, определяющей реакции взаимодействия продуктов сгорания с кислородом воздуха (1), (2). На рис. 5 приведено распространение диоксида азота в плоскости, проходящей через двигатели и его пространственное распределение.

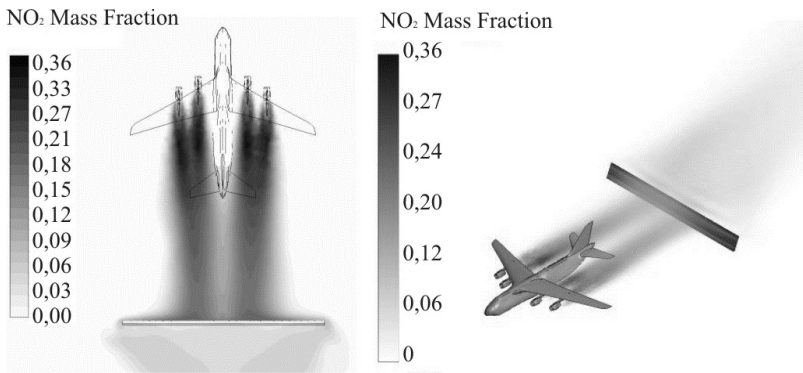


Рис 5 – Распределение NO<sub>2</sub>

Fig. 5 – Distribution of NO<sub>2</sub> mass fraction

Максимальные массовые доли NO<sub>2</sub>, как результат окисления на воздухе монооксида оксидов (2), образуются на некотором отдалении от сопел авиадвигателей. При этом образование диоксидов в струе происходит вплоть до газоотбойника. Сталкиваясь с преградой, поток загрязняющих веществ меняет траекторию движения и перетекает через нее. За преградой значения массовых долей уменьшаются.

Рис. 6 показывает результаты, полученные при моделировании обтекания тела самолетной конфигурации, с истекающими из сопел продуктами сгорания,

и ячеистым газоотбойником. На рис. 6, *а* представлены линии тока. Как видно из рисунка, происходит протекание потока через отверстия в преграде и за газоотбойником не образуются вихри. На рис. 6, *б* показано распространение диоксида азота.

Расчет распространения и образования загрязняющих веществ показывает, что если газоотбойник ячеистый, происходит протекание потока сквозь ячейки. По этой причине уровень загрязнения ниже перед преградой, а за ней выше, чем в случае со сплошным газоотбойником. За счет расположения ячеек под углом происходит соответствующий разворот потока, что способствует большему рассеиванию загрязняющих веществ (рис. 6, *б*). Например, максимальные доли ПДК  $\text{NO}_2$  при ячеистой конструкции газоотбойника меньше на 5,3 % по сравнению со сплошной.

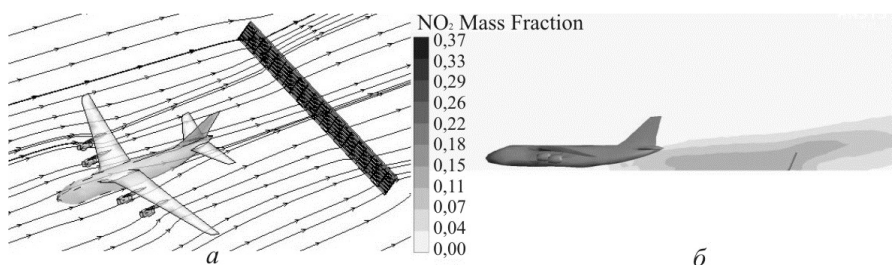


Рис. 6 – Трехмерная визуализация взаимодействия потока с ячеистой преградой:

*а* – вихревая картина, *б* – распространение диоксида азота

Fig. 6 – Pattern of interaction between flow and meshed faced blast fence:

*а* – Streamlines, *б* – Nitrogen dioxide distribution

На рис. 7 приведено сравнение результатов для рассмотренных вариантов.

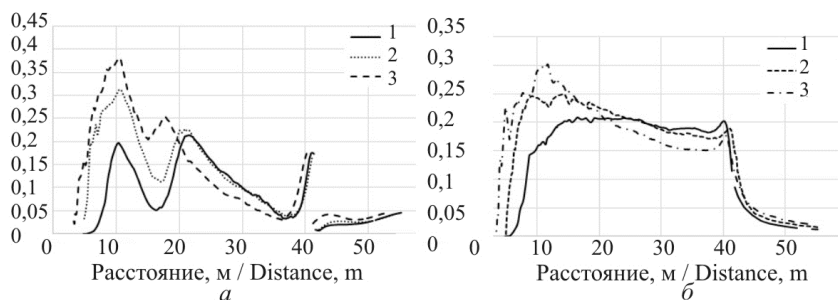


Рис. 7 – Распределение  $\text{NO}_2$ :

1 – вдоль поверхности земли; 2 – на уровне двух метров; 3 – вдоль оси симметрии двигателя; *а* – при сплошном газоотбойнике; *б* – при ячеистом газоотбойнике

Fig. 7 – The distribution  $\text{NO}_2$ :

1 – along the ground surface; 2 – at the level of two meters; 3 – along an engine axis of symmetry; *а* – solid faced JBD; *б* – the mesh faced JBD

На рис. 7, *а* можно видеть распределение массовых долей диоксида азота при сплошном газоотбойнике вдоль оси струи, на уровне двух метров от земли и вдоль поверхности земли. Из рисунка видно, что при сплошном газоотбойнике отмечается резкое уменьшение загрязняющих веществ в области между воздушным судном и струеотклоняющим устройством и их скопление перед преградой,

после которой уровень загрязнения существенно снижается. При взаимодействии с ячеистым газоотбойником (рис. 7, б) загрязнение постепенно убывает, перед газоотбойником уровень диоксидов азота незначительно возрастает и, проходя через ячейки, убывает по экспоненте. При этом за сплошной преградой образование загрязняющих веществ становится более интенсивным в вихревых образованиях, что приводит к увеличению массовых долей. Из рисунка видно, что массовые доли продуктов реакции между выхлопными газами и воздухом убывают монотонно при ячеистой преграде. Такой характер распределения объясняется тем, что за газоотбойниками не наблюдаются вихри. При этом отмечается, что наименьшие массовые доли загрязняющих веществ отмечаются на земле, максимальные – на уровне двигателей.

#### 4. Выводы

Для этапа «гонка двигателей» проведено исследование взаимодействия струй обработавшего топлива с газоотбойником с использованием численного решения уравнений Навье–Стокса с учетом химической активности продуктов сгорания авиатоплива.

В работе приводятся результаты трехмерного моделирования распространения химически активных загрязняющих веществ с использованием кинетической модели, которая для случая полного сгорания топлива описывает реакции монооксидов азота и углерода с кислородом воздуха в смеси сажи, угарного газа, монооксида азота, диоксидов азота и углерода, молекулярного кислорода и молекулярного азота. Данный подход позволяет ясно увидеть пространственный характер распределения загрязняющих веществ и вихревую структуру потока. Струи, выходя из сопел двигателей, взаимодействуют друг с другом, смешиваются с воздухом, сливаясь в единый поток с каждой стороны от фюзеляжа в районе хвоста. Далее этот поток натекает на газоотбойник. В случае сплошного газоотбойника часть потока огибает преграду с боков, а часть перетекает через верх, чему способствует его наклонная геометрия. Взаимодействуя со щитом, струи теряют скорость, она становится сопоставимой со скоростью ветра, массовые доли загрязняющих веществ уменьшаются. При взаимодействии со сплошным газоотбойником происходит образование пространственных вихрей за ним и на боковом удалении от него. При ячеистом газоотбойнике данных особенностей не наблюдается, загрязняющие вещества протекают через ячейки и отклоняются вверх за счет наклона ячеек. При этом взаимодействие продуктов сгорания авиатоплива с кислородом воздуха в обоих рассматриваемых случаях осуществляется на некотором удалении от сопел.

Проведенное численное исследование позволяет определить особенности течения, область их воздействия на поля концентрации загрязняющих веществ, а также оценить уровень загрязнения в зависимости от структуры поверхности газоотбойника и сделать выводы о его эффективности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Методика расчета выбросов загрязняющих веществ двигателями воздушных судов гражданской авиации / Государственный научно-исследовательский институт гражданской авиации, Центр экологической безопасности гражданской авиации. – М., 2007. – 21 с.
2. **Картышев О.А., Медведев Ю.В.** Расчет концентраций загрязняющих веществ от передвижных и стационарных источников аэропортового комплекса // Авиационный экологический вестник. – 2009. – № 2. – С. 71–76.

3. **Кашеваров А.В., Потопов Ю.Ф., Стасенко А.Л.** Влияние вида горючего на физико-химические свойства струй самолетов и распространение их компонентов в окрестности аэропорта // Ученые записки ЦАГИ. – 2001. – Т. 32, № 3/4. – С. 165–175.
4. **Старик А.М., Фаворский О.Н.** Эмиссия из авиационных двигателей и воздействие авиации на атмосферные процессы и климат // Экологические проблемы авиации. – М.: Торус Пресс, 2010. – С. 207–233. – (Труды ЦИАМ; № 1347).
5. **Голубева А.О., Ларичкин В.В., Коротаева Т.А.** Численный расчет рассеивания загрязняющих веществ от эксплуатации самолетов на прилегающих к аэропортам и аэродромам территориях // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2014. – № 1 (22). – С. 52–61.
6. **Родюков И.С.** Геоэкологическая оценка приземного слоя атмосферы на территории аэродромного комплекса: дис. ... канд. геогр. наук: 25.00.36. – Воронеж, 2005. – 117 с.

## SIMULATION OF THE SPATIAL JET EXHAUST OF AIRCRAFT ENGINE COMBUSTION PRODUCTS

**Korotaeva T.A.<sup>1,2</sup>, Turchinovich A.O.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Siberian branch of Russian academy of sciences Khristianovich institute of theoretical and applied mechanics, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The engine ground running procedure (GRP) is one of the most important stages of the aircraft operation which involves checking engine performance capabilities. The stage is carried out in a special run-up area equipped with a jet blast deflector (JBD). The JBD is a barrier to redirect jet exhausts in a non-dangerous direction and to protect the personnel and the environment from hot gases. The aim of the study is to evaluate the effect of solid or meshed JBDs on the dispersion of pollutants. In the present paper, numerical simulation is used to achieve the objectives of the study. An aircraft is located in a run-up area with a JBD. The engines are run at a full thrust mode resulting in complete fuel combustion. The study only considers combustion products that are defined by ICAO as most dangerous. In addition, some of them can react with atmospheric oxygen forming pollutants. The motion of a viscous compressible gas described by the Navier–Stokes equations with due regard for chemically active exhausts has also been considered. The paper presents the results of 3-D modeling of reactive pollutant propagation using a kinetic model that describes the reaction of nitrogen monoxide and carbon with oxygen in the mixture of soot, carbon monoxide, nitrogen monoxide, nitrogen dioxide and carbon, molecular oxygen and molecular nitrogen. Conclusions on the effectiveness of solid or meshed JBDs are made based on the analysis of the pollutant jet behavior and their interaction with the JBD.

*Keywords:* airplane; engine run-up; jet blast deflectors; pollutants; numerical simulation; chemical reactions.

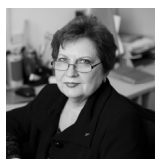
DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-68-77

### REFERENCES

1. *Metodika rascheta vybrosov zagryaznyayushchikh veshchestv dvigatelyami vozdushnykh sudov grazhdanskoj aviatsii* [The methodology for calculating emissions of pollutants from engines of civil aircraft]. Moscow, GosNII GA Publ., TsEB GA Publ., 2007. 21 p.
2. Kartyshev O.A., Medvedev Yu.V. Raschet kontsentratsii zagryaznyayushchikh veshchestv ot peredvizhnykh i stacionarnykh istochnikov aeroportovogo kompleksa [Calculation of concentrations of pollutants from mobile and stationary sources of the airport complex]. *Aviatsionnyi ekologicheskii vestnik*, 2009, no. 2, pp. 71–76.
3. Kshevarov A.V., Potapov Yu.F., Stasenko A.L. Vliyanie vida goryuchego na fiziko-khimicheskie svoistva strui samoletov i rasprostranenie ikh komponentov v okrestnosti aeroporta [Fuel type influence on the physicochemical properties of the jet aircraft and distribution of the jet components in the vicinity of the airport]. *Uchenye zapiski TsAGI – TsAGI Science Journal*, 2001, no. 3–4, pp. 165–175. (In Russian).

4. Starik A.M., Favorskii O.N. Emissiya iz aviatsionnykh dvigatelei i vozdeistvie aviatsii na atmosferynye protsessy i klimat [Emissions from aircraft engines and the impact of aviation on the climate and atmospheric processes]. *Ekologicheskie problemy aviatsii* [Ecological problems of aviation]. Moscow, Torus Press Publ., 2010, pp. 207–233.
5. Golubeva A.O., Larichkin V.V., Korotaeva T.A. Chislenniye raschet rasseivaniya zagryaznyayushchikh veshchestv ot ekspluatatsii samoletov na prilgayushchikh k aeroportam i aerodromam territoriyakh [Numerical calculation of the dispersion of pollutants from the operation of aircraft around airports and airfield territories]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2014, no. 1 (22), pp. 52–61.
6. Rodyukov I.S. *Geoekologicheskaya otsenka prizemnogo sloya atmosfery na territorii aerodromnogo kompleksa*. Diss. kand. geogr. nauk [Geoecological estimation of the surface layer of the atmosphere in the territory of the airport complex. PhD geography sci. diss.]. Voronezh, 2005. 117 p.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Корогаева Татьяна Александровна** – родилась в 1962 году, д-р физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории физических проблем управления газодинамическими течениями Института теоретической и прикладной механики СО РАН, профессор кафедры инженерных проблем экологии Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: вычислительная аэродинамика. Опубликовано 111 научных работ. (Адрес: 630090, Россия, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1. Email: korta@itam.nsc.ru).

**Korotaeva Tatiana Alexandrovna** (b. 1962) – Doctor of Science (Phys.&Math), Assistant Professor, Senior Researcher of Physical Problems of Gasdynamic Flows Laboratory of the Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of Russian Academy of Science, professor of Engineering ecology problem department of the Novosibirsk state technical university. Research interest is currently focused on the computational aerodynamics. She is author of more than 100 scientific papers. (Address: 4/1, Institutskaya St., Novosibirsk, 630090, Russia. e-mail: korta@itam.nsc.ru).



**Турчинович Анна Олеговна** – родилась в 1988 году, ассистент кафедры инженерных проблем экологии Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: математическое моделирование, транспортная экология. Опубликовано 15 печатных работ. Адрес (630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, д. 20. e-mail: golubevaa@ngs.ru).

**Turchinovich Anna Olegovna** (b. 1988) assistant of Engineering ecology problem department of the Novosibirsk state technical university. Area of research: mathematical simulation, transport ecology. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: golubevaa@ngs.ru)

Статья поступила 11 апреля 2016 г.

Received April 11, 2016

## To Reference:

Korotaeva T.A., Turchinovich A.O. Modelirovanie prostranstvennogo istecheniya strui produktov sgoraniya aviadvigately [Simulation of the spatial pollutant jets of products of combustion of aircraft engines]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 68–77. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-68-77

УДК 004.946

## АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЧАСТИЦ ТКАНИ С ГРАНЯМИ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ОБЪЕКТА ПРИ КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

**И.Е. Ландовская**

*Новосибирский технологический институт (филиал) Московского  
государственного университета дизайна и технологии*

В данной статье представлен алгоритм, который позволяет производить компьютерное моделирование взаимодействия частиц ткани деталей изделия с гранями твердотельного объекта, на поверхности которого происходит сборка. При моделировании ткань описывается системой взаимосвязанных частиц, движение которых осуществляется по законам механики и предполагает решение системы дифференциальных уравнений с начальными условиями для нахождения траекторий движения частиц с использованием схемы с перешагиванием. Объект, на поверхности которого происходит моделирование, представляет собой множество ориентированных в пространстве треугольных граней. В статье показана общая схема процесса моделирования сборки изделия и описан метод получения многогранных объектов с использованием графических сред, таких как *AutoCAD* и *3ds Max*, приведены фрагменты алгоритмов экспорта объектов из среды создания и редактирования трехмерной графики *AutoCAD*. В подтверждение эффективности предложенного алгоритма обработки взаимодействий частиц ткани с гранями объекта показаны результаты компьютерного моделирования сборки базовой конструкции на поверхности манекена торса женской фигуры и падения ткани на стул, а также представлены данные численных экспериментов, отражающие зависимость времени моделирования от размерности задачи и параметров алгоритма.

*Ключевые слова:* твердотельный многогранный объект, компьютерное моделирование ткани, метод частиц, поиск столкновений, скольжение частицы ткани по грани объекта, сила трения, схема с перешагиванием.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-78-93

### **Введение**

Компьютерные модели уже давно стали обычным инструментом математического моделирования, который применяется в физике, механике, биологии, химии и прочих науках. Модели, как правило, используют для приближенной оценки поведения систем, слишком сложных для аналитического исследования или для получения новых знаний об изучаемом объекте.

Компьютерное моделирование тканых материалов является востребованным во многих сферах деятельности, таких как: дизайн интерьеров, индустрия моды, создание кино- и мультфильмов, разработка компьютерных игр и др. Большое количество российских и зарубежных исследователей занимаются разработками в данной области науки. В настоящее время существующие методы деформационного моделирования поверхностей тканей в пространстве можно разделить на три основные группы: физические, геометрические и гибридные. Каждая группа, безусловно, имеет свои достоинства и недостатки, но наиболее эффективными в плане воспроизведения поведения реальных материалов стали именно физические методы. При таком подходе тканый материал рассматривается как система взаимосвязанных частиц, находящихся в узлах сетки модели. Движение частиц ткани описывается законами механики, а процесс моделирования сводится к решению

системы дифференциальных уравнений с начальными условиями и нахождению траекторий движения этих частиц. Наиболее известными из авторов работ данной тематики являются D. Vreen, D. House и M. Wozny [1], D. Baraff и A. Witkin [2].

Моделирование тканых материалов считается одной из особенно трудных задач компьютерной графики еще и потому, что процесс взаимодействия ткани с окружающей средой крайне сложно поддается описанию с помощью математических формул. А при сборке изделия на поверхности многогранного объекта к задаче моделирования поведения ткани в пространстве прибавляется еще и процедура обработки взаимодействий, возникающих между ними в процессе моделирования. Следует отметить, что процедура «прямой» обработки столкновений сама по себе уже является крайне ресурсоемкой задачей, так как для объекта, представленного совокупностью  $M$  треугольных граней и ткани, состоящей из  $N$  частиц, на каждом шаге интегрирования должно быть осуществлено  $MN$  операций проверки. Таким образом, если, например, объект состоит из 4800 граней, а детали изделия представлены 4850 частицами ткани (результат сборки представлен на рис. 6, а), то на каждой итерации моделирования будет производиться более 23 млн операций проверки столкновений. Поэтому естественно, что некоторые исследователи, работающие в области моделирования ткани, предложили свои решения указанной проблемы. Так, в области взаимодействия ткани с объектом при компьютерном моделировании стали известны работы таких авторов, как X. Provot [3], J. Mezger, S. Kimmerle, O. Etmuss [4] и др.

Как правило, процесс взаимодействия «сводится» многими авторами только к возвращению частицы ткани на поверхность объекта. При подобном подходе получается, что в процессе всего моделирования частицы ткани «бьются» о грани объекта с которыми произошло их изначальное столкновение, по сути не меняя своего местоположения после взаимодействия. Это существенно отличается от поведения ткани в реальности, где происходит скольжение материала по поверхности объекта. Еще одним важным фактором, характерным для реального мира, является наличие силы трения, которая позволяет материалу задерживаться на поверхности объектов, мешая его полному проскальзыванию.

Таким образом, основной задачей данной работы является разработка алгоритма обработки взаимодействий частиц ткани с гранями твердотельного объекта при компьютерном моделировании изделий, который должен:

- 1) уменьшить количество операций проверки взаимодействий относительно «прямой» обработки столкновений;
- 2) обеспечить возможность «скольжения» частиц материала вдоль граней объекта;
- 3) предоставить возможность имитации силы трения, возникающей при взаимодействии ткани с объектом.

Кроме того, следует рассмотреть методы получения самих многогранных объектов на поверхности которых и будет происходить моделирование ткани.

### 1. Общая схема процесса моделирования

Общая схема процесса моделирования сборки изделий из тканых материалов на поверхности твердотельного многогранного объекта может быть представлена в виде четырех основных этапов (рис. 1):

- 1) построение сетки частиц деталей;
- 2) создание соединений между деталями;
- 3) расстановка объектов и деталей;
- 4) моделирование процесса сборки изделия на поверхности твердотельного многогранного объекта.

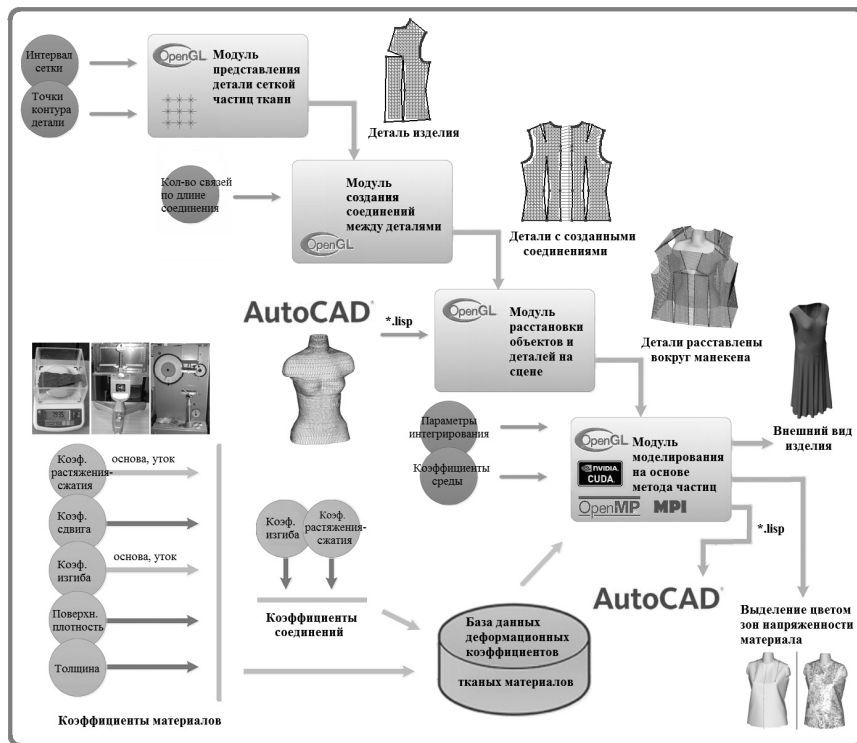


Рис. 1 – Общая схема процесса моделирования сборки изделий из тканых материалов на поверхности твердотельного многогранного объекта

Fig. 1 – General scheme of simulation process of the fabric product assembly on the solid plane-bounded object's surface

На основе представленной схемы было разработано программное обеспечение для виртуального трехмерного моделирования поведения тканых материалов (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015611779), позволяющее проводить численные эксперименты и оценивать результаты компьютерной сборки изделий из ткани на поверхности твердотельного многогранного объекта. Программа реализована с использованием стандарта *OpenGL* и механизмов реализации параллельных программ *OpenMP*, *MPI* и *CUDA*, что позволяет ускорить процесс моделирования и получить более наглядные результаты, примеры которых представлены на рис. 6.

Как видно из рис. 1, чтобы получить необходимые входные данные, перед началом моделирования должно быть проведено несколько подготовительных этапов:

- экспериментальное получение коэффициентов деформации выбранного тканого материала;
- определение координат основных точек контуров деталей изделия;
- построение объекта, на поверхности которого будет происходить сборка.

Методы получения коэффициентов деформации тканого материала подробно описаны в статье [5]. Определение координат основных точек контуров деталей изделия происходит после построения выкройки детали на миллиметровой бумаге или в программе для построения выкроек, например *RedCafe*. А чтобы получить объект, на поверхности которого будет происходить сборка, следует воспользоваться программой для редактирования трехмерной графики *AutoCAD*.



## 2. Построение многогранных объектов для моделирования

Построение объекта, на поверхности которого будет происходить сборка, может осуществляться в любой среде создания и редактирования трехмерной графики, например, таких как *AutoCAD*, *3ds Max*, *Rhinoceros*, *Poser*, *Maya* и других. Единственным условием является то, чтобы поверхность объекта была представлена множеством точек, на основе которых может быть построена триангулированная модель.

После завершения построения объекта он должен быть импортирован в *AutoCAD*, откуда с помощью программ на языке *LISP* объект преобразуется в нужный формат для загрузки в приложение для виртуального трехмерного моделирования поведения тканых материалов.

В графической среде *AutoCAD* существует возможность представления объекта набором граней, наиболее распространенными из которых являются треугольные и четырехугольные, а также их совокупность. Для загрузки в приложение для виртуального трехмерного моделирования поведения тканых материалов объект должен быть представлен исключительно набором треугольных граней, точки которых расположены в определенном порядке.

Для выгрузки из *AutoCAD* объекта, представленного набором треугольных граней, используется программа на языке *LISP*, фрагмент алгоритма которой представлен на псевдокоде в листинге 1:

```

...
открыть для записи файл a
присвоить переменной i значение 0
НАЧАЛО ЦИКЛА пока значение i меньше количества граней объекта
    сохранить координаты первой вершины грани в r1
    сохранить координаты второй вершины грани в r2
    сохранить координаты третьей вершины грани в r3
    записать в файл r1, r2, r3
    увеличить значение i на 1
КОНЕЦ ЦИКЛА
закрыть файл a

```

*Листинг 1* – Фрагмент алгоритма экспорта объекта, представленного набором треугольных граней из *AutoCAD*

*Listing 1* – Fragment of the algorithm to export the object that presented as a set of triangular faces from the *AutoCAD*

Для выгрузки из *AutoCAD* объекта, представленного набором четырехугольных граней (рис. 2), используется программа на языке *LISP*, фрагмент алгоритма которой представлен также на псевдокоде в листинге 2:

```

...
открыть для записи файл a
присвоить переменной i значение 0
НАЧАЛО ЦИКЛА пока значение i меньше количества граней объекта
    сохранить координаты первой вершины грани в r1
    сохранить координаты второй вершины грани в r2
    сохранить координаты третьей вершины грани в r3
    сохранить координаты четвертой вершины грани в r4
    записать в файл r1, r2, r3
    записать в файл r3, r4, r1
    увеличить значение i на 1

```

**КОНЕЦ ЦИКЛА**закрывать файл *a*

Листинг 2 – Фрагмент алгоритма экспорта объекта, представленного набором четырехугольных граней из *AutoCAD*

Listing 2 – Fragment of the algorithm to export the object that presented as a set of quadrangular faces from the *AutoCAD*

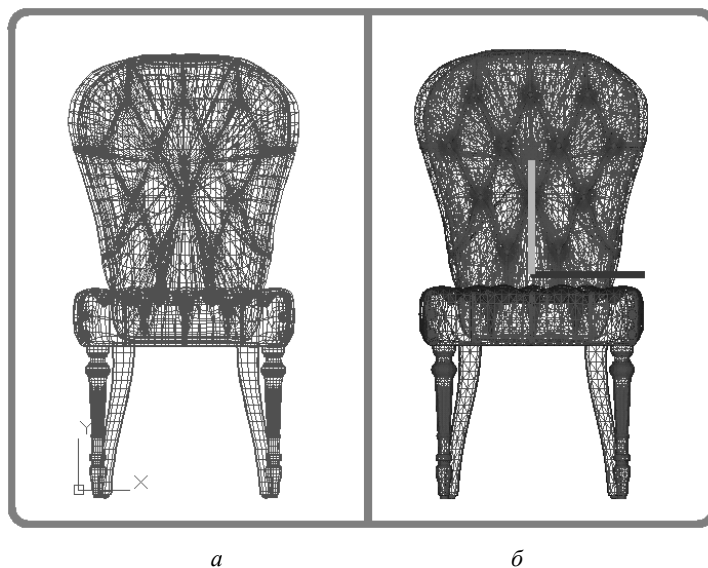


Рис. 2 – Многогранный объект:

*a* – объект в *AutoCAD*, представленный набором четырехугольных граней; *б* – триангулированный объект

Fig. 2 – Plane-bounded object:

*a* – *AutoCAD* object presented as a set of quadrangular faces; *b* – triangulated object

Для выгрузки из *AutoCAD* объекта, представленного совокупностью треугольных и четырехугольных граней, используется программа на языке *LISP*, основой которой являются представленные выше алгоритмы.

### 3. Моделирование тканых материалов методом частиц

В области компьютерного моделирования изделий из ткани само тканое полотно принято рассматривать как систему взаимосвязанных частиц (сетку частиц). Исходными данными для построения сеточной модели детали изделия является ее контур (выкройка), который в общем случае представляет собой произвольный многоугольник (рис. 3).

Движения всей системы могут быть описаны обобщенными перемещениями в трехмерном пространстве:

$$r_{ij}(t) = \{x_{ij}(t), y_{ij}(t), z_{ij}(t)\},$$

где  $x_{ij}(t), y_{ij}(t), z_{ij}(t)$  – координаты частицы ткани в трехмерном пространстве;  $t$  – время.

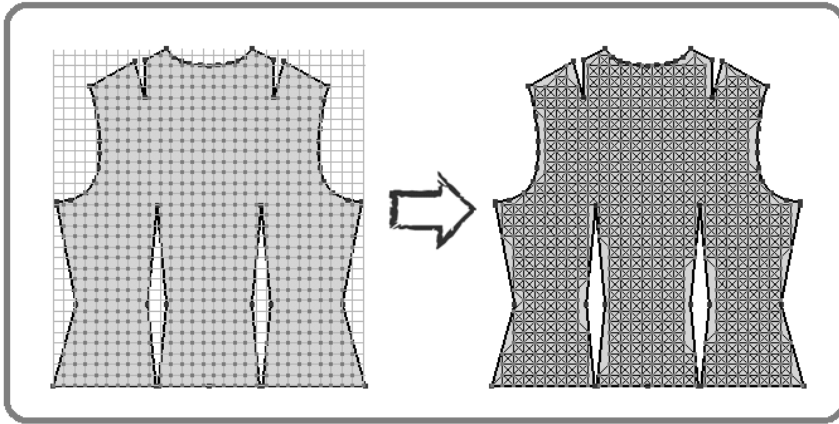


Рис. 3 – Пример представления контура детали системой частиц  
 Fig. 3 – Example of presenting the part profile by system of particles

На каждом временном слое находят положения узлов в пространстве. При этом каждая из частиц модели обладает некоторой массой, находится в гравитационном поле, взаимодействует с окружающей средой и соседними частицами (между частицами ткани детали возникают взаимодействия растяжения-сжатия, изгиба и сдвига, как описано в статье [6]). Следовательно, уравнение движения частицы  $P_{ij}$  будет иметь следующий вид:

$$m_{ij}r_{ij}'' = m_{ij}g - m_{ij}c_{ij}r_{ij}' + \sum_{kl \in R_{ij,kl}} F_{int}(r_{ij}, r_{kl}),$$

где  $m_{ij}$  – масса частицы;  $c_{ij}$  – константа демпфирования; составляющая  $c_{ij}r_{ij}'$  представляет собой потери энергии, связанные с взаимодействием частицы с окружающей средой;  $g$  – ускорение свободного падения. Последняя составляющая уравнения движения представляет собой результирующую силу взаимодействий между частицами;  $R_{ij,kl}$  – множество индексов узлов, связанных с узлом  $P_{ij}$ .

Для решения системы пользуются схемой с перешагиванием (leapfrog scheme) [7]. Это обусловлено тем, что для воспроизведения на компьютере реального поведения ткани число частиц в моделируемом материале должно быть велико, и кроме того, каждое дополнительное вычисление силы требует больших временных затрат.

Схема с перешагиванием является методом второго порядка точности и в сравнении с классическим явным методом Эйлера обладает большей устойчивостью, что позволяет на порядок увеличить шаг интегрирования [8]:

$$\begin{aligned} V^{(n+1)} &= V^{(n)} + hM^{-1}F(r^{(n)}, V^{(n)}), \\ r^{(n+1)} &= r^{(n)} + hV^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $r^{(n)}$  и  $V^{(n)}$  – векторы положений и скоростей частиц на  $n$ -м шаге интегрирования;  $h$  – шаг интегрирования;  $F(r, V)$  – вектор-функция, описывающая

действие внутренних и внешних сил на ткань;  $M$  – матрица инерции – диагональная матрица, описывающая распределение масс частиц ткани.

Начальные условия:  $r|_{t_0} = r^{(0)}, V|_{t_0} = 0$ .

#### 4. Алгоритм обработки взаимодействий частиц ткани с гранями объекта

В процессе моделирования твердотельный многогранный объект, на поверхности которого производится сборка, является неподвижным, а изменение координат происходит только у частиц ткани за счет действия на них различных сил, имитирующих воздействие окружающей среды. К их числу относятся: стягивающая сила, сила тяжести, сопротивление воздуха, сила трения об объект и пр.

Как уже было отмечено ранее, поверхность объекта представляет собой конечный набор точек, которые являются вершинами составляющих его треугольных граней. В процессе моделирования движения тканого материала в пространстве после каждого шага интегрирования наступает этап, на котором происходит определение частиц ткани, взаимодействовавших с гранями объекта, и последующая корректировка их местоположений и скоростей. Таким образом, процесс взаимодействия ткани с объектом можно условно разделить на два главных этапа:

- 1) определение частиц ткани, столкнувшихся с объектом на данной итерации;
- 2) корректировка местоположений и скоростей этих частиц.

В процессе корректировки координат частицы ткани стоит учитывать и тот факт, что реальный материал обладает таким параметром, как толщина полотна. Поэтому при компьютерном моделировании следует принудительно приподнимать частицы ткани над гранями объекта на величину, равную толщине материала.

##### 4.1. Определение столкновений частиц ткани с гранями объекта

На этом этапе происходит проверка пересечений траекторий движения частиц ткани с гранями твердотельного объекта. Чтобы уменьшить количество процедур проверки и соответственно сократить время, затрачиваемое на эту операцию, вокруг объекта строится параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат и проходят через точки объекта, имеющие минимальное и максимальное значение вдоль рассматриваемой оси, как показано на рис. 4, а.

Пусть  $x_{ij}^{tk,p(n)}, y_{ij}^{tk,p(n)}, z_{ij}^{tk,p(n)}$  – координаты  $ij$ -й частицы ткани  $p$ -й детали изделия на  $n$ -м шаге интегрирования;  $ij = \overline{1, N^{tk,p}}$ ,  $N^{tk,p}$  – количество частиц ткани в  $p$ -й детали,  $p \in D$ ;  $D$  – множество индексов деталей изделия, а  $x_{\min}^{ob,w}, x_{\max}^{ob,w}, y_{\min}^{ob,w}, y_{\max}^{ob,w}, z_{\min}^{ob,w}, z_{\max}^{ob,w}$  – минимальные и максимальные значения координат  $w$ -го объекта вдоль осей  $x, y$  и  $z$  соответственно;  $w \in OB$ ,  $OB$  – множество индексов объектов моделирования. Тогда частицы ткани, попадающие в область данного объекта, должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} x_{\min}^{ob,w} \leq x_{ij}^{tk,p(n)} \leq x_{\max}^{ob,w}, \\ y_{\min}^{ob,w} \leq y_{ij}^{tk,p(n)} \leq y_{\max}^{ob,w}, \\ z_{\min}^{ob,w} \leq z_{ij}^{tk,p(n)} \leq z_{\max}^{ob,w}. \end{cases} \quad (2)$$

В результате этих действий исключаются из дальнейшего рассмотрения все частицы ткани, находящиеся вне области данного объекта, и, следовательно, не

имеющие возможности взаимодействия с ним на рассматриваемом шаге интегрирования.

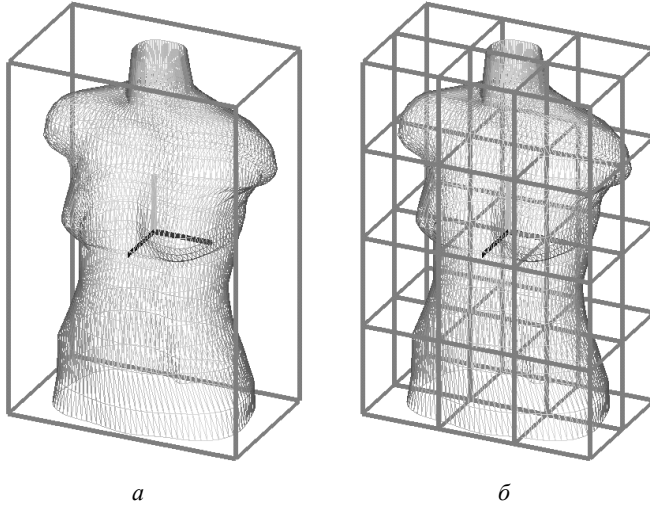


Рис. 4 – Пример разбиения области многогранного объекта на ячейки  
Fig. 4 – Example of plane-bounded object area subdivision to the cells

Далее вся область объекта разбивается на заданное количество ячеек, представляющих собой одинаковые по размерам параллелепипеды, ребра которых параллельны осям координат (рис. 4, б). Для каждой ячейки составляется список граней объекта, входящих в нее. Определение принадлежности грани той или иной ячейке происходит исходя из положения ее вершин, и в зависимости от размеров конкретной грани она может принадлежать как одной, так и нескольким смежным ячейкам.

Для всех частиц ткани, которые удовлетворяют условиям (2), происходит определение конкретного номера ячейки области объекта, в которой находится данная частица. Следует отметить, что именно одинаковые размеры параллелепипедов позволяют без труда вычислить номера ячейки, в которой на данный момент располагается частица материала по каждой из координатных осей, а затем перейти к номеру в линейно упорядоченной последовательности ячеек:

$$n_{ya,x}^{ob,w} = \frac{(x_{ij}^{tk,p(n)} - x_{min}^{ob,w}) \cdot N_{ya,x}^{ob,w}}{x_{max}^{ob,w} - x_{min}^{ob,w}} + 1,$$

$$n_{ya,y}^{ob,w} = \frac{(y_{ij}^{tk,p(n)} - y_{min}^{ob,w}) \cdot N_{ya,y}^{ob,w}}{y_{max}^{ob,w} - y_{min}^{ob,w}} + 1,$$

$$n_{ya,z}^{ob,w} = \frac{(z_{ij}^{tk,p(n)} - z_{min}^{ob,w}) \cdot N_{ya,z}^{ob,w}}{z_{max}^{ob,w} - z_{min}^{ob,w}} + 1,$$

$$n_{ya}^{ob,w} = n_{ya,x}^{ob,w} \cdot N_{ya,y}^{ob,w} \cdot N_{ya,z}^{ob,w} + n_{ya,y}^{ob,w} \cdot N_{ya,z}^{ob,w} - 1,$$

где  $N_{ya,x}^{ob,w}, N_{ya,y}^{ob,w}, N_{ya,z}^{ob,w}$  – количество ячеек разбиения  $w$ -го объекта вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $n_{ya,x}^{ob,w}, n_{ya,y}^{ob,w}, n_{ya,z}^{ob,w}$  – номера ячеек  $w$ -го объекта по каждой из координатных осей, в которых находится проверяемая частица ткани  $P_{ij}^{tk,p(n)}(x_{ij}^{tk,p(n)}, y_{ij}^{tk,p(n)}, z_{ij}^{tk,p(n)})$ , а  $n_{ya}^{ob,w}$  – номер в линейной последовательности ячеек  $w$ -го объекта;  $w \in OB$ ,  $OB$  – множество индексов объектов моделирования.

После определения номера ячейки разбиения объекта, в котором оказалась конкретная частица ткани, производится проверка пересечений траектории движения этой частицы со всеми гранями объекта, находящимися в этой ячейке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} - x_{ij}^{tk,p(n-1)}}{x_{ij}^{tk,p(n)} - x_{ij}^{tk,p(n-1)}} = \frac{y_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} - y_{ij}^{tk,p(n-1)}}{y_{ij}^{tk,p(n)} - y_{ij}^{tk,p(n-1)}} = \frac{z_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} - z_{ij}^{tk,p(n-1)}}{z_{ij}^{tk,p(n)} - z_{ij}^{tk,p(n-1)}}, \\ \left| \begin{array}{ccc} x_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} - x_{gr,q,1}^{ob,w} & y_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} - y_{gr,q,1}^{ob,w} & z_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} - z_{gr,q,1}^{ob,w} \\ x_{gr,q,2}^{ob,w} - x_{gr,q,1}^{ob,w} & y_{gr,q,2}^{ob,w} - y_{gr,q,1}^{ob,w} & z_{gr,q,2}^{ob,w} - z_{gr,q,1}^{ob,w} \\ x_{gr,q,3}^{ob,w} - x_{gr,q,1}^{ob,w} & y_{gr,q,3}^{ob,w} - y_{gr,q,1}^{ob,w} & z_{gr,q,3}^{ob,w} - z_{gr,q,1}^{ob,w} \end{array} \right| = 0, \\ \min(x_{ij}^{tk,p(n-1)}, x_{ij}^{tk,p(n)}) \leq x_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} \leq \max(x_{ij}^{tk,p(n-1)}, x_{ij}^{tk,p(n)}), \\ \min(y_{ij}^{tk,p(n-1)}, y_{ij}^{tk,p(n)}) \leq y_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} \leq \max(y_{ij}^{tk,p(n-1)}, y_{ij}^{tk,p(n)}), \\ \min(z_{ij}^{tk,p(n-1)}, z_{ij}^{tk,p(n)}) \leq z_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} \leq \max(z_{ij}^{tk,p(n-1)}, z_{ij}^{tk,p(n)}), \\ S_{gr,q}^{ob,w} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{T_{gr,q,1}^{ob,w} T_{gr,q,2}^{ob,w}} \times \overrightarrow{T_{gr,q,1}^{ob,w} T_{gr,q,3}^{ob,w}} \right|, \\ S_{T1,T2}^R = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{R_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,1}^{ob,w}} \times \overrightarrow{R_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,2}^{ob,w}} \right|, \\ S_{T2,T3}^R = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{R_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,2}^{ob,w}} \times \overrightarrow{R_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,3}^{ob,w}} \right|, \\ S_{T1,T3}^R = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{R_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,1}^{ob,w}} \times \overrightarrow{R_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,3}^{ob,w}} \right|, \\ S_{gr,q}^{ob,w} = S_{T1,T2}^R + S_{T2,T3}^R + S_{T1,T3}^R, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $x_{ij}^{tk,p(n-1)}, y_{ij}^{tk,p(n-1)}, z_{ij}^{tk,p(n-1)}$  и  $x_{ij}^{tk,p(n)}, y_{ij}^{tk,p(n)}, z_{ij}^{tk,p(n)}$  – координаты  $ij$ -й частицы ткани  $p$ -й детали изделия на  $(n-1)$ -м и  $n$ -м шаге интегрирования соответственно;  $ij = 1, N^{tk,p}$ ,  $N^{tk,p}$  – количество частиц ткани в  $p$ -й детали;  $p \in D$ ,  $D$  – множество индексов деталей;  $T_{gr,q,1}^{ob,w}(x_{gr,q,1}^{ob,w}, y_{gr,q,1}^{ob,w}, z_{gr,q,1}^{ob,w})$ ,  $T_{gr,q,2}^{ob,w}(x_{gr,q,2}^{ob,w}, y_{gr,q,2}^{ob,w}, z_{gr,q,2}^{ob,w})$ ,  $T_{gr,q,3}^{ob,w}(x_{gr,q,3}^{ob,w}, y_{gr,q,3}^{ob,w}, z_{gr,q,3}^{ob,w})$  – три вершины  $q$ -й грани  $w$ -го объекта, не лежащие на одной прямой;  $q = 1, N_Q^{ob,w}$ ,  $N_Q^{ob,w}$  – количе-

ство граней  $w$ -го объекта, находящихся в рассматриваемой ячейке разбиения объекта;  $w \in OB$ ,  $OB$  – множество индексов объектов моделирования;  $R_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} \left( x_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}, y_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}, z_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)} \right)$  – точка пересечения траектории движения  $ij$ -й частицы ткани  $p$ -й детали изделия на  $n$ -м шаге интегрирования с плоскостью, в которой лежит  $q$ -я грань  $w$ -го объекта.

Естественно, что чем меньше граней объекта попадает в ячейку, тем быстрее происходит поиск грани, с которой произошло столкновение частицы ткани. Но в то же время размер ячеек, на которые разбивается объект, не должен превышать размеров его граней или расстояния, преодолеваемого частицей ткани за один шаг интегрирования.

**4.2. Корректировка координат частиц ткани**

После нахождения грани, с которой произошло столкновение частицы ткани, и определения координат точки их пересечения из (3), должна следовать корректировка местоположения этой частицы. Изменение координат частицы материала должно осуществляться относительно точки пересечения ее траектории движения с гранью (рис. 5, а) так, чтобы частица снова оказалась вне объекта.

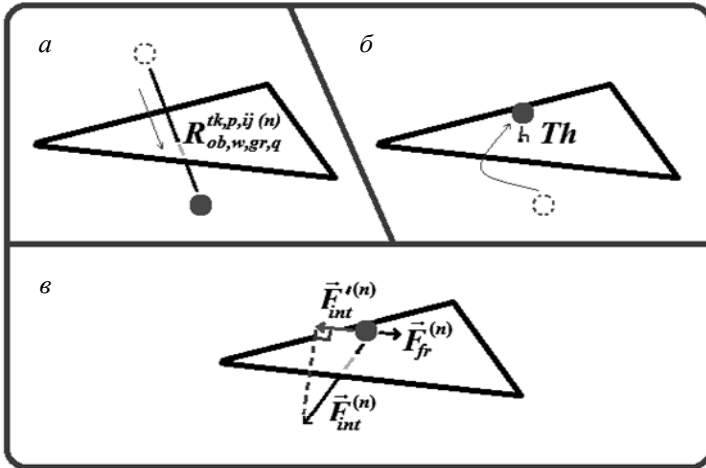


Рис. 5 – Движение частицы ткани при столкновении с гранью объекта  
 Fig. 5 – Fabric particle movement at the moment of collision with object face

Как было отмечено ранее, для того, чтобы имитировать толщину материала, частицы, находящиеся на поверхности объекта, должны отстоять от его граней на величину, равную толщине моделируемой ткани  $Th$ . Поэтому возврат частицы ткани на поверхность грани объекта должен осуществляться по нормали к этой грани, проходящей через точку пересечения на величину  $Th$  (рис. 5, б). Новые координаты частицы ткани можно получить, решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x - x_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}}{A} = \frac{y - y_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}}{B} = \frac{z - z_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}}{C}, \\ \sqrt{\left(x - x_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}\right)^2 + \left(y - y_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}\right)^2 + \left(z - z_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}\right)^2} = Th, \end{cases} \quad (4)$$

где  $R_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}(x_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}, y_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)}, z_{ob,w,gr,q}^{tk,p,ij(n)})$  – точка пересечения траектории движения  $ij$ -й частицы ткани  $p$ -й детали изделия с  $q$ -й гранью  $w$ -го объекта на  $n$ -м шаге интегрирования;  $A, B, C$  – координаты нормального вектора плоскости  $\overline{N_{gr,q}^{ob,w}} = \overline{T_{gr,q,1}^{ob,w}} \times \overline{T_{gr,q,2}^{ob,w}} \times \overline{T_{gr,q,3}^{ob,w}}$ , а точки  $T_{gr,q,1}^{ob,w}(x_{gr,q,1}^{ob,w}, y_{gr,q,1}^{ob,w}, z_{gr,q,1}^{ob,w})$ ,  $T_{gr,q,2}^{ob,w}(x_{gr,q,2}^{ob,w}, y_{gr,q,2}^{ob,w}, z_{gr,q,2}^{ob,w})$ ,  $T_{gr,q,3}^{ob,w}(x_{gr,q,3}^{ob,w}, y_{gr,q,3}^{ob,w}, z_{gr,q,3}^{ob,w})$  являются вершинами  $q$ -й грани  $w$ -го объекта ( $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ ).

Так как система (4) имеет два решения  $H(x, y, z)$  и  $H'(x', y', z')$ , а искомая точка должна находиться вне объекта и, следовательно, быть наиболее приближенной к положению частицы ткани на предыдущем шаге интегрирования, воспользуемся (5) для вычисления расстояний:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(x - x_{ij}^{tk,p(n-1)})^2 + (y - y_{ij}^{tk,p(n-1)})^2 + (z - z_{ij}^{tk,p(n-1)})^2}, \\ d_2 &= \sqrt{(x' - x_{ij}^{tk,p(n-1)})^2 + (y' - y_{ij}^{tk,p(n-1)})^2 + (z' - z_{ij}^{tk,p(n-1)})^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если  $d_1 < d_2$ , то  $H(x, y, z)$  является искомым решением, иначе искомым решением является  $H'(x', y', z')$ . Помимо положения частицы ткани необходимо еще изменить ее скорость, воспользовавшись (1).

Далее, чтобы обеспечить скольжение ткани по поверхности объекта, движение всех частиц, которые на предыдущем шаге взаимодействовали с гранями, будет осуществляться следующим образом: если выполняется условие (6), то сила  $\vec{F}_{int}^{(n)}$ , действующая на частицу на  $n$ -м шаге интегрирования, будет вычисляться как проекция результирующего вектора силы  $\vec{F}_{int}^{(n)} = \{f_{x_{int}}^{(n)}, f_{y_{int}}^{(n)}, f_{z_{int}}^{(n)}\}$  на плоскость, в которой на  $(n-1)$ -м шаге интегрирования находилась частица ткани, и которая параллельна плоскости ранее пересеченной этой частицей грани (7), как показано на рис. 5, в. Тем самым, во-первых, исключается проверка столкновений этой частицы со всеми остальными гранями объекта, а во-вторых устраняются повторные столкновения частицы и ранее пересеченной грани, что обеспечивает скольжение материала. Если для частицы ткани условие (6) не выполняется, т. е. частица на данном шаге интегрирования уже не находится внутри области ранее пересеченной грани, то проверка переходит к (2) – поиску пересечений с областью всего объекта.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} - x_{ij}^{tk,p(n)}}{A} &= \frac{y_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} - y_{ij}^{tk,p(n)}}{B} = \frac{z_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} - z_{ij}^{tk,p(n)}}{C}, \\ S_{gr,q}^{ob,w} &= \frac{1}{2} \left| \overline{T_{gr,q,1}^{ob,w}} \times \overline{T_{gr,q,2}^{ob,w}} \times \overline{T_{gr,q,3}^{ob,w}} \right|, \\ S_{T1,T2}^M &= \frac{1}{2} \left| \overline{M_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,1}^{ob,w}} \times \overline{M_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,2}^{ob,w}} \right|, \\ S_{T2,T3}^M &= \frac{1}{2} \left| \overline{M_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,2}^{ob,w}} \times \overline{M_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,3}^{ob,w}} \right|, \\ S_{T1,T3}^M &= \frac{1}{2} \left| \overline{M_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,1}^{ob,w}} \times \overline{M_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} T_{gr,q,3}^{ob,w}} \right|, \\ S_{gr,q}^{ob,w} &= S_{T1,T2}^M + S_{T2,T3}^M + S_{T1,T3}^M, \end{aligned} \right. \quad (6)$$



где  $P_{ij}^{tk,p(n)} \left( x_{ij}^{tk,p(n)}, y_{ij}^{tk,p(n)}, z_{ij}^{tk,p(n)} \right)$  – проверяемая  $ij$ -я частица ткани  $p$ -й детали изделия на  $n$ -м шаге интегрирования;  $ij = \overline{1, N^{tk,p}}$ ,  $N^{tk,p}$  – количество частиц ткани в  $p$ -й детали;  $p \in D$ ,  $D$  – множество индексов деталей изделия;  $M_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} \left( x_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)}, y_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)}, z_{ob,w,gr,q'}^{tk,p,ij(n)} \right)$  – проекция частицы  $P_{ij}^{tk,p(n)}$  на  $q$ -ю грань  $w$ -го объекта;  $A, B, C$  – координаты нормального вектора плоскости ранее пересеченной  $ij$ -й частицей  $q$ -й грани  $w$ -го объекта с вершинами в точках  $T_{gr,q,1}^{ob,w} \left( x_{gr,q,1}^{ob,w}, y_{gr,q,1}^{ob,w}, z_{gr,q,1}^{ob,w} \right)$ ,  $T_{gr,q,2}^{ob,w} \left( x_{gr,q,2}^{ob,w}, y_{gr,q,2}^{ob,w}, z_{gr,q,2}^{ob,w} \right)$ ,  $T_{gr,q,3}^{ob,w} \left( x_{gr,q,3}^{ob,w}, y_{gr,q,3}^{ob,w}, z_{gr,q,3}^{ob,w} \right)$  ( $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ ).

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{fx - \left( fx_{int}^{(n)} + x_{ij}^{tk,p(n-1)} \right)}{A_2} &= \frac{fy - \left( fy_{int}^{(n)} + y_{ij}^{tk,p(n-1)} \right)}{B_2} = \frac{fz - \left( fz_{int}^{(n)} + z_{ij}^{tk,p(n-1)} \right)}{C_2}, \\ \frac{A}{A_2} &= \frac{B}{B_2} = \frac{C}{C_2}, \\ A_2 \left( fx - x_{ij}^{tk,p(n-1)} \right) &+ B_2 \left( fy - y_{ij}^{tk,p(n-1)} \right) + C_2 \left( fz - z_{ij}^{tk,p(n-1)} \right) = 0, \\ \vec{F}_{int}^{(n)} &= \left\{ fx - x_{ij}^{tk,p(n-1)}, fy - y_{ij}^{tk,p(n-1)}, fz - z_{ij}^{tk,p(n-1)} \right\}, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где  $A, B, C$  – координаты нормального вектора плоскости, проходящей через вершины  $T_{gr,q,1}^{ob,w} \left( x_{gr,q,1}^{ob,w}, y_{gr,q,1}^{ob,w}, z_{gr,q,1}^{ob,w} \right)$ ,  $T_{gr,q,2}^{ob,w} \left( x_{gr,q,2}^{ob,w}, y_{gr,q,2}^{ob,w}, z_{gr,q,2}^{ob,w} \right)$ , и  $T_{gr,q,3}^{ob,w} \left( x_{gr,q,3}^{ob,w}, y_{gr,q,3}^{ob,w}, z_{gr,q,3}^{ob,w} \right)$  ранее пересеченной  $ij$ -й частицей  $q$ -й грани  $w$ -го объекта;  $A_2, B_2, C_2$  – координаты нормального вектора плоскости, в которой находилась  $ij$ -я частица на  $(n-1)$ -м шаге интегрирования, и которая параллельна плоскости  $q$ -й грани  $w$ -го объекта ( $A_2 \neq 0, B_2 \neq 0, C_2 \neq 0$ ).

Стоит отметить, что ввиду малого расстояния, преодолеваемого частицей ткани за один шаг интегрирования по сравнению с размерами граней объекта, после вычисления новых координат частицы ткани в процессе скольжения следует производить проверку пересечения ее траектории движения только со смежными гранями, чтобы исключить попадание частицы внутрь объекта.

Немаловажную роль при моделировании взаимодействия ткани с объектом играет сила трения, которая препятствует скольжению. У текстильных материалов силы трения и сцепления проявляются одновременно. Их характеристикой служит сила тангенциального сопротивления, т. е. сила, которая препятствует перемещению двух тел в плоскости их касания, или коэффициент тангенциального сопротивления (КТС). Существует несколько различных методов определения КТС, а его значение для различных материалов изменяется в широких пределах и зависит от волокнистого состава, переплетения, плотности, отделки, покрытия и т. д. [9]. Но в силу того, что расчеты силы тангенциального сопротивления для реальных условий представляют большие сложности, а получение КТС экспериментальным путем для различных видов тканей и множества материалов поверхностей объектов является очень трудозатратным процессом, следует представить

силу тангенциального сопротивления как вектор  $\vec{F}_{fr}^{(n)}$ , противоположно направленный вектору  $\vec{F}_{int}^{(n)}$ , величина которого определяется в процентах от  $\vec{F}_{int}^{(n)}$  (рис. 5, в). Таким образом, итоговая сила  $\vec{F}_{int}^{n(n)}$ , действующая на частицу ткани на  $n$ -м шаге интегрирования при скольжении вдоль грани объекта с учетом силы тангенциального сопротивления, может быть вычислена как

$$\vec{F}_{int}^{n(n)} = \vec{F}_{int}^{(n)} - \vec{F}_{fr}^{(n)}.$$

## 5. Результаты моделирования

На рис. 6 представлены результаты моделирования. Для придания процессу большей реалистичности при вычислениях учитываются коэффициенты среды, такие как сила тяжести, сопротивление воздуха, сила трения об объект и др. Стоит отметить, что объекты, на поверхности которых происходит моделирование, могут в значительной степени различаться по количеству составляющих их граней, что напрямую влияет на время получения результатов. Так объект, представляющий собой манекен торса женской фигуры, состоит из 4800 граней, а объект, выступающий в качестве стула, – из 49 350 граней.

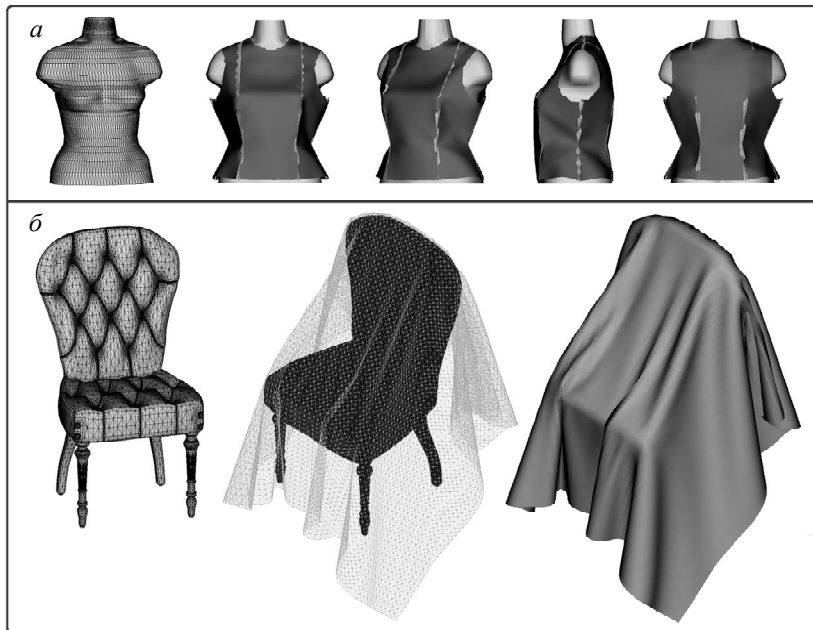


Рис. 6 – Результаты моделирования:

*a* – сборка базовой конструкции на поверхности манекена торса женской фигуры; *б* – падение ткани на стул

Fig. 6 – Simulation results:

*a* – basic construction assembly on the surface of the female body form; *b* – fabric drop on a chair

В таблице представлены данные численных экспериментов, отражающие зависимость времени выполнения 1000 итераций моделирования от количества ячеек, на которые происходит его разбиение. Результаты были получены с использованием процессора *intel core i7-4770* микроархитектуры *haswell*.

Результаты измерения времени моделирования  
Measurement data of the simulation time

Количество частиц ткани	Количество граней объекта	Количество ячеек разбиения объекта вдоль осей $x, y, z$	Время взаимодействия ткани с объектом, с	Время моделирования, с
4850	4800	1×1×1	612,28	618,07
4850	4800	5×5×5	12,78	18,58
4850	4800	15×23×7	3,44	9,29
4850	4800	50×70×30	1,10	6,93
4850	4800	100×250×50	1,25	7,07
6530	49350	1×1×1	4653,65	4644,33
6530	49350	50×50×50	1,06	10,39
6530	49350	100×250×50	0,62	9,97
6530	49350	400×600×300	0,81	10,14

Стоит заметить, что время вычислений напрямую зависит не только от количества частиц ткани и количества граней объекта, но в не меньшей степени и от того, как располагается ткань относительно объекта в процессе моделирования, иными словами от того, какое количество частиц ткани взаимодействует с объектом на конкретной итерации процесса моделирования.

### Заключение

Эффективность описанных в работе методов и алгоритмов была неоднократно подтверждена на практике множеством численных экспериментов. Для проведения вычислений было разработано программное обеспечение, которое позволяет производить компьютерное моделирование сборки изделий из тканых материалов, а также осуществлять численную и визуальную оценку полученных результатов.

Уникальность данной работы заключается в предложенном алгоритме обработки взаимодействий частиц ткани с гранями твердотельного объекта, которые представляют собой ориентированные в пространстве треугольники. Описанный алгоритм не только позволяет сократить количество операций проверки взаимодействий частиц ткани с гранями объекта, но и обеспечивает возможность «скольжения» материала по поверхности объекта, при этом позволяя учитывать при вычислениях силу трения, возникающую в процессе их соприкосновения. В итоге, можно с уверенностью говорить о том, что при использовании данного алгоритма не только значительно уменьшается время моделирования, но и на качественном уровне достигается повышение реалистичности получаемых результатов.

Описанные в данной статье методы и алгоритмы представляют интерес для специалистов в области создания систем автоматизации геометрического моделирования и проектирования, систем виртуальной реальности и компьютерной помощи для специалистов швейной промышленности, а также дизайнеров одежды и мебельного производства.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Breen D., House D., Wozny M.** Predicting the drape of woven cloth using interacting particles // Computer Graphics and Interactive Techniques: Proceedings of the 21<sup>st</sup> Annual Conference, (SIGGRAPH '94). – New York, 1994. – P. 365–372.
2. **Baraff D., Witkin A.** Large steps in cloth simulation // Proceedings of the 25<sup>th</sup> Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH'98, Orlando, Florida, 19–24 July 1998. – New York, USA, 1998. – P. 43–54. – doi: 10.1145/280814.280821.
3. **Provot X.** Collision and self-collision handling in cloth model dedicated to design garments // Computer Animation and Simulation '97: Proceedings of the Eurographics Workshop, Budapest, Hungary, 2–3 September 1997. – Vienna: Springer, 1997. – P. 177–189.

4. **Mezger J., Kimmerle S., Etmuss O.** Hierarchical techniques in collision detection for cloth animation // *Journal of WSCG*. – 2003. – Vol. 11, N 2. – P. 322–329.
5. Экспериментальное исследование деформационных свойств и компьютерное моделирование тканых материалов на основе метода частиц / В.Д. Фроловский, В.В. Ландовский, И.Е. Ландовская, Т.О. Бунькова // *Автоматизация. Современные технологии*. – 2015. – № 11. – С. 22–26.
6. **Ландовская И.Е., Фроловский В.Д., Ландовский В.В.** Соединение деталей при компьютерном моделировании сборки изделий из тканых материалов с учетом их деформационных свойств // *Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации*. – 2015. – № 3 (28). – С. 61–74.
7. **Hockney W., Eastwood J.** *Computer simulation using particles*. – New York: CRC Press, 1988. – 540 p.
8. **Ландовский В.В., Фроловский В.Д.** Исследование методов интегрирования дифференциальных уравнений в задаче моделирования поведения ткани на основе метода частиц // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 287–298.
9. *Промышленная технология одежды: справочник* / П.П. Кокеткин, Т.Н. Кочегура, В.И. Барышникова, И.В. Сафронова. – М.: Легпромбытиздат, 1988. – 640 с.

## A PROCESSING ALGORITHM OF FABRIC PARTICLE INTERACTION WITH SOLID OBJECT FACES DURING COMPUTER SIMULATION

**Landovskaya I.E.**

*Novosibirsk Institute of Technology, a Branch of the Moscow State Technology  
and Design University, Novosibirsk, Russia*

The algorithm that allows computer simulation of the fabric particle interaction with faces of a solid object whose surface is used for assembly is presented in the paper. During the simulation process the fabric is described by a system of coupled particles whose movement obeys the laws of motion and requires solving a differential equation system with boundary conditions to find a particle path by using the leapfrog scheme. An object on whose surface simulation is carried out is a set of triangular faces oriented in space. The scheme of the article assembly simulation process and the method for obtaining plane-bounded object by using such graphic environments as *AutoCAD* and *3ds Max* are described in the paper. The fragments of the algorithm for object export from the creation and editing environment of the three-dimensional graphics *AutoCAD* are also presented. To confirm the effectiveness of the proposed algorithm of processing the fabric particle interaction with solid object faces, the results of computer simulation of the basic design assembly on the surface of a female body dummy and a fabric drop to the chair are presented. Also, the results of numerical experiments that show the dependence of the simulation time on the problem dimension and algorithm parameters are described.

*Keywords:* solid plane-bounded object; fabric computer simulation; particle method; collision detection; fabric particle slipping on the object's face; frictional force; leapfrog scheme.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-78-93

### REFERENCES

1. Breen D., House D., Wozny M. Predicting the drape of woven cloth using interacting particles. *Computer Graphics and Interactive Techniques: Proceedings of the 21<sup>st</sup> Annual Conference, (SIGGRAPH '94)*. New York, 1994, pp. 365–372.
2. Baraff D., Witkin A. Large steps in cloth simulation. *Proceedings of the 25<sup>th</sup> Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH'98*, Orlando, Florida, 19–24 July 1998, pp. 43–54. doi: 10.1145/280814.280821
3. Provot X. Collision and self-collision handling in cloth model dedicated to design garments. *Computer Animation and Simulation '97: Proceedings of the Eurographics Workshop*, Budapest, Hungary, 2–3 September 1997, pp. 177–189.

4. Mezger J., Kimmerle S., Etmuss O. Hierarchical techniques in collision detection for cloth animation. *Journal of WSCG*, 2003, vol. 11, no. 2, pp. 322–329.
5. Frolovskii V.D., Landovskii V.V., Landovskaya I.E., Bun'kova T.O. Eksperimental'noe issledovanie deformatsionnykh svoistv i komp'yuternoe modelirovanie tkanykh materialov na osnove metoda chastits [Experimental study of deformation properties and computer modeling of woven materials from a particles method]. *Avtomatizatsiya. Sovremennye tekhnologii – Automation. Modern Technology*, 2015, no. 11, pp. 22–26.
6. Landovskaya I.E., Frolovskii V.D., Landovskii V.V. Soedinenie detalei pri komp'yuternom modelirovanii sborki izdelii iz tkanykh materialov s uchedom ikh deformatsionnykh svoistv [Part connection in computer simulation of the fabric product fitting taking into account their deformation properties]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 61–74.
7. Hockney W., Eastwood J. *Computer simulation using particles*. New York, CRC Press, 1981. 540 p.
8. Landovskii V.V., Frolovskii V.D. Issledovanie metodov integrirvaniya differentsial'nykh uravnenii v zadache modelirovaniya povedeniya tkani na osnove metoda chastits [Integration methods in the problem of modelling a fabric based on the particles method]. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki – Numerical Analysis and Applications*, 2006, vol. 9, no. 3, pp. 287–298. (In Russian)
9. Koketkin P.P., Kochegura T.N., Baryshnikova V.I., Safronova I.V. *Promyshlennaya tekhnologiya odezhdyy* [Clothes manufacturing process]. Moscow, Legprombytzdat Publ., 1988. 640 p.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Ландовская Ирина Евгеньевна** – родилась в 1987 году, в декабре 2015 года успешно закончила аспирантуру Новосибирского государственного технического университета (НГТУ). С 2012 года ведущий инженер-программист Центра информационных технологий Новосибирского технологического института (филиала) Московского государственного университета дизайна и технологии. Область научных интересов: компьютерное моделирование поведения тканых материалов. Опубликовано 20 научных работ. (Адрес: 630099, Россия, Новосибирск, Красный проспект, 35. Email: nairy@rambler.ru).

**Landovskaya Irina Evgenievna** (b. 1987) – successfully finished the post-graduate program at the Novosibirsk State Technical University (NSTU) in December 2015. Since 2012 work on the position of Principal Software Engineer at the Information Technologies Center Novosibirsk Institute of Technology (branch) «Moscow State Technology and Design University». Area of research: computer-aided simulation of the fabric materials behavior. She is author of 20 scientific papers. (Address: 35, Krasny Prospekt, Novosibirsk, 630099, Russia. Email: nairy@rambler.ru).

Статья поступила 26 мая 2016 г.

Received May 26, 2016

## To Reference:

Landovskaya I.E. Algoritm obrabotki vzaimodeistvii chastits tkani s ganyami tverdotel'nogo ob'ekta pri komp'yuternom modelirovanii [A processing algorithm of fabric particle interaction with solid object faces during computer]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 78–93. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-78-93

УДК 621.313.282.2

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО УДАРНОГО УЗЛА С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

Л.А. Нейман, В.Ю. Нейман

*Новосибирский государственный технический университет*

Развитие современных методов анализа и синтеза предполагает повышенный интерес к совершенствованию моделей электромеханических систем, в том числе ударного действия, наиболее полно отражающих взаимные связи параметров электрической, магнитной и механической подсистем при возбуждении периодических ударных нагрузок и взаимодействии с деформируемой средой. В качестве объекта исследований рассматривается классический вариант электромагнитного ударного привода, включающего в себя многомассовую колебательную систему с упругими связями и возбуждаемую периодическим магнитным полем катушки, получающей питание от однофазного источника напряжения промышленной частоты по однополупериодной схеме выпрямления. Разработана математическая модель динамики четырехмассовой колебательной системы электромагнитного ударного узла, учитывающая возможности в проведении всестороннего анализа электромеханических процессов. Основу математической модели составляют дифференциальные уравнения, описывающие электрическое равновесие нелинейной системы электропривода и механическое взаимодействие поступательно движущихся инерционных масс, полученные методом Лагранжа, а также массивы значений опорных точек потокосцепления и электромагнитного усилия, полученные с помощью расчета магнитного поля. Особенностью модели является возможность учета взаимосвязанных электромеханических процессов в переходных и квазиустановившихся режимах, учитывающих нелинейность магнитных характеристик двигателя, степень подвижности инерционных масс, свойства упругих связей, внешние воздействия, сопровождаемых различного рода потерями энергии в магнитной и механической системе электромагнитного ударного узла. Полученные результаты расширяют возможности динамического расчета, а также решение вопросов, связанных с анализом и синтезом электромагнитного ударного узла.

*Ключевые слова:* электромагнитный ударный узел, электромагнитный двигатель, математическая модель, механическая колебательная система, упругие связи, метод Лагранжа, потери энергии, силы трения скольжения.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-94-107

### Введение

В различных областях техники широкое применение находят механизмы и устройства виброударного действия, использующие в качестве привода электромагнитный двигатель колебательного движения [1–5].

Ударный и виброударный режимы работы обеспечиваются в результате возвратно-поступательного движения ударной массы (бойка), периодически взаимодействующей с магнитным полем намагничивающей катушки и рабочим инструментом.

Тенденция преимущественного применения вариантов схем механизмов и машин с электромагнитным виброударным приводом подробно рассмотрена в работах [6, 7].

Отсутствие промежуточных механизмов для преобразования электрической энергии в поступательное движение ударной массы является одним из главных

достоинств электромагнитных ударных узлов. Однако даже в самой своей простейшей конфигурации электромагнитный ударный узел представляет собой сравнительно сложную динамическую систему с несколькими степенями подвижности исполнительных механизмов, связанных упругими связями.

Механическая колебательная система имеет в своем составе традиционные массоинерционные, упругие и диссипативные звенья, в разной степени по времени взаимодействующие или только частично вступающие в контакт между собой в процессе движения, что определенным образом связано с процессами рассеяния (поглощения) энергии как за счет собственных демпфирующих свойств упругих связей и сил сухого трения, так и за счет изменения физических свойств конструкционных материалов в процессе соударений.

Методы расчета механизмов и устройств с электромагнитным приводом довольно широко известны и вместе с тем продолжают совершенствоваться [8–12].

В особенности сложности возникают при расчетах нестационарных режимов, зависящих от скорости и частоты, свойств упругих связей механической системы, нагрева и т. д. [13–17].

Как правило, проведение расчета при оперировании большим числом взаимосвязанных факторов сопровождается значительными трудностями, связанными с необходимостью построения математической модели, наиболее точно отражающей динамическое состояние электромеханической системы ударного узла. Следует также понимать, что упрощение связей существенно ограничивает возможности динамического расчета, а полученные результаты могут отличаться от процессов в реальных технических системах, что затрудняет их дальнейшее использование даже в рамках качественного анализа.

В этой связи разработка математической модели динамики электромагнитного ударного узла, наиболее объективно отражающей взаимосвязи параметров электромеханической системы для изучения закономерностей движения ударной массы и эффективности процесса энергопреобразования при передаче энергии ударом, а также влияния внешних воздействий, связанных с условиями работы, такими как изменение параметров питающего источника, изменение скорости восстановления и величины отскока ударной массы бойка, усилия нажатия и т. д., следует считать решением актуальной задачи.

Целью настоящей работы является разработка математической модели четырехмассовой колебательной системы электромагнитного ударного узла, учитывающей возможности проведения всестороннего анализа электромеханических процессов с учетом внешних воздействий, свойств упругих связей и сил сухого трения.

## 1. Электромагнитный ударный узел с упругими связями

Конструктивная схема электромагнитного ударного узла приведена на рис. 1. Возвратно-поступательное движение ударной массы бойка 1 возникает в результате его взаимодействия с магнитным полем катушки 2. Под действием электромагнитных сил боек 1 разгоняется и наносит удар по рабочему инструменту 3, генерируя в нем за короткий промежуток времени силовой ударный импульс. Обратный ход бойка осуществляется за счет потенциальной энергии сжатой пружины 5 и частично за счет кинетической энергии при отскоке бойка 1 от рабочего инструмента 3. Расположенные на одной оси цилиндрический боек 1, магнитопровод 4 и размещенная внутри магнитопровода катушка 2 определяют конфигурацию геометрии магнитной цепи электромагнитного двигателя.

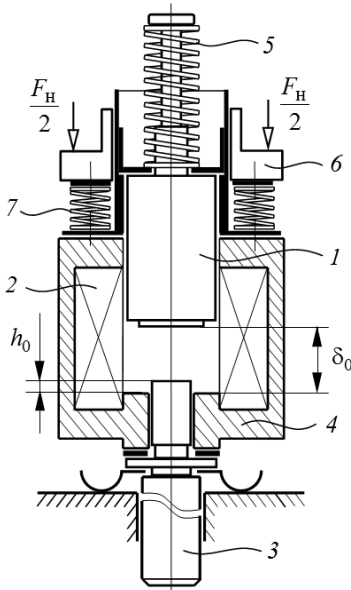


Рис. 1 – Конструктивная схема электромагнитного ударного узла  
Fig. 1 – The design concept of the electromagnetic impact unit

Для гашения имеющихся место вибраций между корпусом 6 и ударным узлом применяется виброизолирующее устройство в виде одной или нескольких цилиндрических пружин 7 заданной жесткости. Усилие нажатия  $F_H$  обеспечивает устойчивую связь ударного узла с рабочим инструментом при возбуждении периодических ударных нагрузок и взаимодействии с деформируемой средой.

Следует указать, что движение ударной массы бойка и рабочего инструмента в направляющих, а также имеющая место вибрация ударного узла относительно корпуса вызывают дополнительные потери энергии вследствие возникающих сил трения, препятствующих их движению.

Катушка получает питание от однофазного источника напряжения промышленной частоты по однополупериодной схеме выпрямления.

Полный рабочий цикл ударного узла осуществляется за время одного периода напряжения, что при частоте  $f = 50$  Гц обеспечивает синхронную частоту ударов бойка  $n_{уд}$  и длительность времени рабочего цикла  $t_{ц}$ :

$$n_{уд} = \frac{60 f}{2p} = 3000 \text{ уд/мин}; \quad t_{ц} = \frac{2p}{f} = 0,02 \text{ с},$$

где  $2p = 1$  – число периодов напряжения в течение времени рабочего цикла.

## 2. Методы решения

Механическая и магнитная подсистемы электромагнитного ударного узла связаны зависимостью электромагнитного усилия  $f_{эм} = f(i, x_1)$  от величины протекающего тока  $i$  в катушке и координаты положения ударной массы бойка  $x_1$ , а связь магнитной и электрической подсистемы – зависимостью величины потокоцепления  $\psi = f(i, x_1)$  и в общем случае описывается уравнением электрического равновесия системы

$$u(t) = ir + \frac{d\psi(i, x_1)}{dt}, \quad (1)$$

где  $u(t)$  – напряжение на обмотке катушки;  $r$  – активное сопротивление обмотки катушки.

Рассматривая движение взаимодействующих инерционных масс относительно выбранной системы координат, можно видеть, что система имеет четыре степени свободы. С учетом установленных связей системы и действующих в системе обобщенных сил, соответствующим потенциальной энергии, энергии рассеяния и внешним воздействиям, на рис. 2 рассмотрена расчетная динамическая модель электромеханической ударной системы (рис. 1).



В качестве обобщенных координат принимаем линейные перемещения центра масс: перемещение бойка  $x_1$  массой  $m_1$ ; перемещение рабочего инструмента  $x_2$  массой  $m_2$ ; перемещение электромагнитного двигателя  $x_3$  массой  $m_3$  и перемещение сборного корпуса  $x_4$  массой  $m_4$ .

Принимая положение устойчивого равновесия за начало отсчета обобщенной координаты и за нулевой уровень потенциальной энергии, рассмотрим малые колебания динамической системы относительно положения ее статического равновесия. Колебания системы в пространстве будут описываться зависимостью обобщенных координат  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  от времени, отсчитываемых от положения равновесия.

Уравнения движения механической системы получим на основании уравнений Лагранжа второго рода [18].

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} + Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $\Pi$  – потенциальная энергия системы;  $\Phi$  – диссипативная функция системы (функция Рэлея);  $Q_i$  – обобщенная сила внешних воздействий системы, соответствующая  $i$ -й обобщенной координате;  $x_i$  – обобщенные координаты;  $\dot{x}_i$  – обобщенные скорости;  $N$  – число степеней свободы механической системы.

Рассматривая движения масс  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_4$  относительно обобщенных координат, последовательно определим величины, входящие в (2):

- кинетическая энергия механической системы для поступательно движущихся масс

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2} + \frac{m_4 \dot{x}_4^2}{2}; \quad (3)$$

- потенциальная энергия упругих связей механической системы

$$\Pi = \frac{k_1 (x_1 - x_3)^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} + \frac{k_3 (x_3 - x_2)^2}{2} + \frac{k_0 (x_4 - x_3)^2}{2}, \quad (4)$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_0$ , – коэффициенты жесткости упругих связей;

- диссипативная функция (функция Рэлея)

$$\Phi = \frac{b_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)^2}{2} + \frac{b_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{b_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2}{2} + \frac{b_0 (\dot{x}_4 - \dot{x}_3)^2}{2}, \quad (5)$$

где  $b_1, b_2, b_3, b_0$ , – коэффициенты вязкого трения упругих связей;

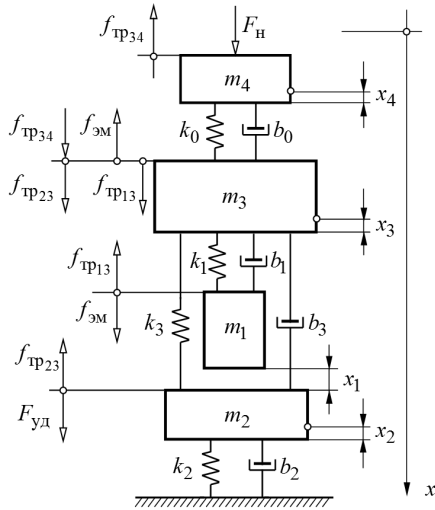


Рис. 2 – Расчетная динамическая модель многомассовой электромеханической системы

Fig. 2 – Calculated dynamic model multimass electromechanical system

- обобщенные силы внешних воздействий и сил трения

$$Q_{x_1} = f_{\text{эм}}(i, x_1) - f_{\text{тр}13} \operatorname{sign} \dot{x}_1; \quad Q_{x_2} = -f_{\text{тр}23} \operatorname{sign} \dot{x}_2;$$

$$Q_{x_3} = (f_{\text{тр}13} + f_{\text{тр}23} + f_{\text{тр}34}) \operatorname{sign} \dot{x}_3 - f_{\text{эм}}(i, x_1); \quad Q_{x_4} = -f_{\text{тр}34} \operatorname{sign} \dot{x}_4 + F_{\text{н}},$$

где  $f_{\text{эм}}(i, x_1)$  – вынуждающая электромагнитная сила;  $f_{\text{тр}13}, f_{\text{тр}23}, f_{\text{тр}34}$  – силы сухого трения скольжения;  $F_{\text{н}}$  – постоянная величина усилия нажатия.

Выполнив согласно (2) операции дифференцирования по выбранным обобщенным координатам, скоростям и времени выражений кинетической (3), потенциальной (4) энергий и функции Рэля (5), а также учитывая выражения для обобщенных сил, сил трения скольжения и уравнения электрического равновесия (1), получим систему уравнений динамического состояния электромеханической системы (рис. 2) без учета ударного взаимодействия:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = i r + \frac{d\psi(i, x_1)}{dt}; \\ m_1 \frac{dx_1^2}{dt^2} + b_1 \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + k_1 (x_1 - x_3) = f_{\text{эм}}(i, x_1) - f_{\text{тр}13} \operatorname{sign} \frac{dx_1}{dt}; \\ m_2 \frac{dx_2^2}{dt^2} + b_2 \frac{dx_2}{dt} - b_3 \left( \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + k_2 x_2 - k_3 (x_3 - x_2) = -f_{\text{тр}23} \operatorname{sign} \frac{dx_2}{dt}; \\ m_3 \frac{dx_3^2}{dt^2} - b_1 \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + b_3 \left( \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - b_0 \left( \frac{dx_4}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) - k_1 (x_1 - x_3) + \\ + k_3 (x_3 - x_2) - k_0 (x_4 - x_3) = -f_{\text{эм}}(i, x_1) + (f_{\text{тр}13} + f_{\text{тр}23} + f_{\text{тр}34}) \operatorname{sign} \frac{dx_3}{dt}; \\ m_4 \frac{dx_4^2}{dt^2} + b_0 \left( \frac{dx_4}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + k_0 (x_4 - x_3) = -f_{\text{тр}34} \operatorname{sign} \frac{dx_4}{dt} + F_{\text{н}}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Отметим, что под действием внешней периодической силы  $f_{\text{эм}}(i, x_1)$  в механической системе возникают сложные колебания, являющиеся результатом наложения вынужденных и свободных колебаний системы. На участке рабочего хода движение бойка осуществляется в магнитном поле катушки за время  $t_p$ , равное длительности протекания тока  $i(t)$  в цепи.

$$i(t) \approx \begin{cases} i(t), & \text{при } n t_{\text{ц}} \leq t \leq n t_{\text{ц}} + t_p, \\ 0, & \text{при } n t_{\text{ц}} + t_p \leq t \leq (n+1) t_{\text{ц}}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (7)$$

где  $n$  – число полных циклов;  $t_{\text{ц}}$  – длительность времени рабочего цикла;  $t_p$  – длительность времени рабочего хода, равная по времени протекающему в цепи току.

Движение бойка осуществляется в квазиустановившемся режиме работы, а наличие ограничителей движения ударной массы не позволяет бойку выходить за установленные пределы  $0 \leq x \leq \delta_0 - h_0$ :

$$x_1(t) \approx \begin{cases} \delta_0 - h_0 = \max, & \text{при } t = nt_{ц} + t_p, \\ 0, & \text{при } t = nt_{ц}, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

где  $h_0$  – величина выхода рабочего инструмента (нижний ограничитель);  $\delta_0$  – начальный рабочий воздушный зазор (верхний ограничитель).

Это означает, что на участке рабочего хода боек проходит свой путь  $x_1 = \delta_0 - h_0$  за время  $t_p$ , равное времени протекания тока в цепи. При этом величина рабочего воздушного зазора  $\delta(t) = \delta_0 - x_1(t)$ .

Необходимо также учесть, что при частично упругом ударе не вся кинетическая энергия бойка переходит рабочему инструменту. Часть этой энергии возвращается обратно в колебательную систему в период холостого хода бойка и частично расходуется на деформацию и нагревание тел при ударе и зависит от свойств среды, параметров ударной системы и параметров импульса сил, воздействующих на среду [19].

При составлении модели предполагалось, что сопротивление среды, оказываемое перемещению инструмента, зависит от жесткости и демпфирующих свойств введенных упругих связей, а эффективность передачи энергии в эту среду зависит только от параметров элементов ударной системы. Разделяя процесс прямого центрального удара двух тел на две стадии, можно получить скорости центра масс бойка и рабочего инструмента после частично упругого удара [18]:

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = \bar{v} + k_B (\bar{v} - \bar{v}_1), \\ \bar{v}_2 = \bar{v} + k_B (\bar{v} - \bar{v}_2), \end{cases} \quad (9)$$

где  $v_1, v_2$  – скорости центра масс бойка и рабочего инструмента до удара;  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  – скорости центра масс бойка и рабочего инструмента по окончании удара;  $\bar{v}$  – скорость центра масс абсолютно неупругого удара;  $k_B$  – коэффициент восстановления скорости.

Скорость центра масс в абсолютно неупругом ударе

$$\bar{v} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (10)$$

Полагая, что в колебательной системе на момент удара скорость рабочего инструмента  $v_2 \approx 0$ , то скорость центра масс тел после окончания удара, принимая во внимание (9) и (10),

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = v_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{m_1}{m_2} - k_B \right), \\ \bar{v}_2 = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + k_B). \end{cases} \quad (11)$$

Направление движения бойка при ударе изменяется на противоположное:  $\bar{v}_1 \leq 0$ . Коэффициент отскока бойка, зависящий от параметров ударной системы, учитывая знак скорости,

$$k_{от} = \frac{-\bar{v}_1}{v_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( k_B - \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (12)$$

Влияние параметров ударной системы с потерями кинетической энергии на деформацию в виде зависимости  $k_{от} = f(m_1/m_2, k_B)$  рассмотрено на диаграмме,

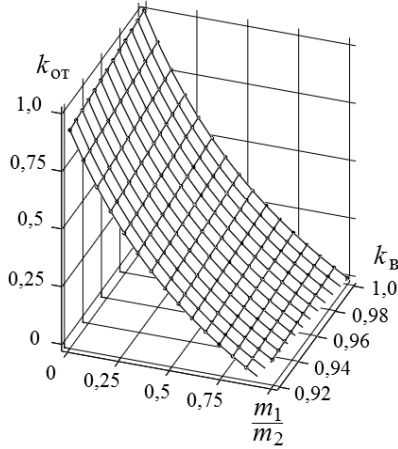


Рис. 3 – Зависимость коэффициента отскока  $k_{от} = f(m_1/m_2, k_B)$

Fig. 3 – The dependence of the coefficient of rebound  $k_{reb} = f(m_1/m_2, k_{res})$

приведенной на рис. 3, отражающей относительную величину скорости бойка после удара (скорости отскока) по отношению к скорости бойка перед ударом.

Кинетическая энергия, возвращаемая в механическую систему при отскоке бойка,

$$T_1 = \frac{m_1 \bar{v}_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \left[ \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( k_B - \frac{m_1}{m_2} \right) \right]^2.$$

Полезная работа, совершаемая электромагнитным двигателем, имеет импульсный характер и может быть оценена как кинетическая энергия бойка, переходящая рабочему инструменту при ударе,

$$T_2 = \frac{m_2 \bar{v}_2^2}{2} = \frac{m_2 v_1^2}{2} \left[ \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + k_B) \right]^2.$$

Потери кинетической энергии при ударе составят

$$\Delta T = T - T_1 - T_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \left[ 1 - k_{от}^2 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 + k_B)^2 \right],$$

где  $T = \frac{m_1 v_1^2}{2}$  – кинетическая энергия бойка перед ударом.

Коэффициент эффективности передачи энергии удара при учете потерь кинетической энергии на деформацию тел

$$k_{эф} = \frac{T - T_1}{T} = 1 - \left[ \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( k_B - \frac{m_1}{m_2} \right) \right]^2.$$

Зависимость  $k_{эф} = f(m_1/m_2, k_B)$ , отражающая относительную величину энергии, переданной в деформируемую среду по отношению к полной кинетической энергии бойка за время рабочего цикла, приведена на диаграмме рис. 4.

Окончательный процесс движения электромеханической системы следует рассмат-

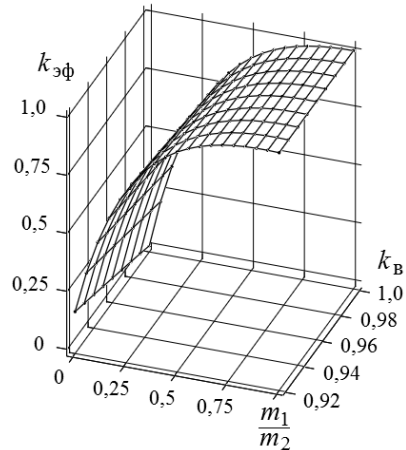


Рис. 4 – Зависимость коэффициента эффективности  $k_{эф} = f(m_1/m_2, k_B)$

Fig. 4 – Dependence of the efficiency factor  $k_{ef} = f(m_1/m_2, k_{res})$

ривать как результат наложения вынужденных, свободных колебаний и периодических ударных импульсов сил, обусловленных потерями энергии.

Принимая последнее во внимание, выражения (7), (8), (11), (12) совместно с уравнениями (6) позволяют реализовать математическую модель динамического состояния многомассовой электромеханической системы с электромагнитным возбуждением (см. рис. 1) в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = i r + \frac{d\psi(i, x_1)}{dt}; \\ m_1 \frac{dx_1^2}{dt^2} = \begin{cases} \tilde{\lambda}_1 + f_{\text{эм}}(i, x_1) - f_{\text{тр}13} \operatorname{sign} \frac{dx_1}{dt} & \text{при } nt_{\text{ц}} \leq t \leq nt_{\text{ц}} + t_{\text{п}}; \\ \frac{m_1 \bar{v}_1}{t_{\text{п}}} + \tilde{\lambda}_1 - f_{\text{тр}13} \operatorname{sign} \frac{dx_1}{dt} & \text{при } nt_{\text{ц}} + t_{\text{п}} \leq t \leq (n+1)t_{\text{ц}}; \end{cases} \\ m_2 \frac{dx_2^2}{dt^2} = \frac{m_2 \bar{v}_2}{t_{\text{п}}} + \tilde{\lambda}_2 - f_{\text{тр}23} \operatorname{sign} \frac{dx_2}{dt}; \\ m_3 \frac{dx_3^2}{dt^2} = \tilde{\lambda}_3 + (f_{\text{тр}13} + f_{\text{тр}23} + f_{\text{тр}34}) \operatorname{sign} \frac{dx_3}{dt} - f_{\text{эм}}(i, x_1); \\ m_4 \frac{dx_4^2}{dt^2} = \tilde{\lambda}_4 + F_{\text{н}} - f_{\text{тр}34} \operatorname{sign} \frac{dx_4}{dt}, \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\text{где } \tilde{\lambda}_1 = -b_1 \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) - k_1(x_1 - x_3);$$

$$\tilde{\lambda}_2 = -b_2 \frac{dx_2}{dt} + b_3 \left( \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - k_2 x_2 + k_3(x_3 - x_2);$$

$$\tilde{\lambda}_3 = b_1 \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) - b_3 \left( \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + b_0 \left( \frac{dx_4}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + k_1(x_1 - x_3) -$$

$$-k_3(x_3 - x_2) + k_0(x_4 - x_3); \quad \tilde{\lambda}_4 = -b_0 \left( \frac{dx_4}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) - k_0(x_4 - x_3).$$

Полученная система дифференциальных уравнений (13) динамического состояния электромагнитного ударного узла (см. рис. 1) позволяет производить всесторонний анализ периодических электромеханических процессов при учете нелинейности цепи двигателя, влияния параметров механической колебательной системы и внешних воздействий, сопровождаемых различного рода потерями энергии.

Для реализации математической модели динамики электромагнитного ударного узла можно воспользоваться одним из подходов, рассмотренных в [15, 20].

На первом этапе расчета с помощью решения полевой задачи определяются значения потокоцепления  $\psi(i, x_1)$  и электромагнитного усилия  $f_{\text{эм}}(i, x_1)$  в зависимости от тока  $i$  и обобщенной координаты  $x_1$  положения бойка в установленных пределах (5), (6), которые затем представляются в виде массива опорных точек статических параметров [21].

На втором этапе полученные массивы значений статических параметров  $\psi(i, x_1)$  и  $f_{\text{эм}}(i, x_1)$  используются при расчете динамики электромагнитного ударного узла.

Для решения полевой задачи можно рекомендовать стандартные программы конечноэлементного моделирования магнитного поля, такие как FEMM, ELCUT или ANSYS [22–24]. Для решения динамической части задачи целесообразно воспользоваться аппаратом структурного моделирования в среде Matlab Simulink [25].

### Заключение

Разработана математическая модель динамики четырехмассовой колебательной системы электромагнитного ударного узла, наиболее полно отражающая взаимосвязи параметров электрической, магнитной и механической подсистем при возбуждении периодических ударных нагрузок и взаимодействии с деформируемой средой.

Несмотря на отсутствие промежуточных механизмов и кажущуюся простоту решения в вопросе преобразования электрической энергии в кинетическую энергию поступательно движущейся массы бойка, показано, что с точки зрения описания электромеханических процессов электромагнитный ударный узел даже в самом простейшем варианте представляет собой сравнительно сложную и многофакторную динамическую систему с большим набором связанных переменных.

Особенностью модели является возможность учета совокупности взаимосвязанных электромеханических процессов в переходных и квазиустановившихся режимах, учитывающих нелинейность магнитных характеристик двигателя, степень подвижности инерционных масс, свойства упругих связей, внешние воздействия, определяемые условиями работы и сопровождаемые различного рода потерями энергии, что, следовательно, позволяет более точно определять основные характеристики системы, варьируя значительным набором входных параметров и производить исследования рабочих режимов с большим без ограничения набором выходных переменных или их расчетных интегральных показателей: энергии удара, КПД, действующего значения тока, мощности и т. д.

Полученные результаты являются хорошим основанием в проведении дальнейших исследований, которые при реализации математической модели средствами структурного моделирования в среде Matlab Simulink позволяют обеспечить более широкие возможности динамического расчета и, следовательно, качественного решения вопросов, связанных с анализом и синтезом электромагнитного ударного узла.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ивашин В.В., Кудинов А.К., Певчев В.П.** Электромагнитные приводы для импульсных и виброимпульсных технологий // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2012. – № 1. – С. 72–75.
2. **Усанов К.М., Угаров Г.Г., Мошкин В.И.** Линейный импульсный электромагнитный привод машин с автономным питанием. – Курган: Изд-во Курган. гос. ун-та, 2006. – 284 с.
3. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Низкочастотные ударные электромагнитные машины и технологии // Актуальные проблемы в машиностроении. – 2014. – № 1. – С. 256–259.
4. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Исследование двухкатушечной синхронной электромагнитной машины с инерционным реверсом бойка // Современные проблемы теории машин. – 2014. – № 2. – С. 109–110.
5. Прессовое оборудование с линейным электромагнитным приводом для механизации технологических процессов ударной сборки и штамповки мелких изделий / В.А. Аксютин, Л.А. Нейман, В.Ю. Нейман, А.А. Скотников // Актуальные проблемы в машиностроении. – 2015. – № 2. – С. 220–224.

6. **Нейман В.Ю.** К вопросу о рационализации рабочих процессов и выбора конструктивных схем электромагнитных ударных машин // Автоматизированные электромеханические системы: коллективная монография / Новосибирский государственный технический университет; под ред. В.Н. Аносова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – С. 155–169.
7. **Нейман В.Ю., Скотников А.А., Нейман Л.А.** Структурный анализ синхронных электромагнитных машин ударного действия // Автоматизированные электромеханические системы: сборник научных трудов / под общ. ред. В.Н. Аносова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – С. 106–120.
8. **Ряшенцев Н.П., Тимошенко Е.М., Фролов А.В.** Теория, расчет и конструирование электромагнитных машин ударного действия. – Новосибирск: Наука, 1970. – 260 с.
9. **Мошкин В.И.** Сравнение магнитных циклов импульсного линейного электромагнитного двигателя с учетом мощности потерь в его обмотке // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321, № 4. – С. 93–96.
10. Оптимизация геометрии линейных электромагнитных двигателей с использованием конечноэлементного моделирования магнитного поля / Ю.Г. Соловейчик, В.Ю. Нейман, М.Г. Персова, М.Э. Рояк, Ю.Б. Смирнова, Р.В. Петров // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2005. – № 2. – С. 24–28.
11. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Повышение точности аналитического расчета радиальных сил одностороннего магнитного притяжения некоаксиальных элементов магнитопровода // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2015. – № 1 (58). – С. 246–256.
12. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Применение метода проводимостей для учета силы одностороннего магнитного притяжения асимметричного электромагнита // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2015. – № 2 (97). – С. 214–218.
13. **Усанов К.М., Каргин В.А., Волгин А.В.** Оценка эффективности энергопреобразований в электромагнитной ударной машине с упругим возвратным элементом // Труды Кубанского государственного аграрного университета. – 2008. – № 1. – С. 86–87.
14. **Татевосян А.А., Татевосян А.С.** Расчет оптимальных параметров электромагнитного привода колебательного движения // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 325, № 4. – С. 121–132.
15. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Динамическая модель электромагнитного привода колебательного движения для систем генерирования низкочастотных вибраций // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2015. – № 3 (28). – С. 75–87.
16. **Исмагилов Ф.Р., Саттаров Р.Р., Гумерова М.Б.** Математическое моделирование динамических режимов электромагнитных демпфирующих элементов // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2010. – Т. 14, № 5 (40). – С. 86–90.
17. **Саттаров Р.Р., Исмагилов Ф.Р.** Периодические режимы в электромагнитных вибрационных преобразователях // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2010. – Т. 14. – № 1 (36). – С. 50–55.
18. **Добронравов В.В., Никитин Н.Н.** Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1983. – 576 с.
19. **Манжосов В.К., Лукутина Н.О., Невенчанная Т.О.** Динамика и синтез электромагнитных генераторов силовых импульсов. – Фрунзе: Илим, 1985. – 119 с.
20. Расчет динамики включения электромагнита постоянного тока / Ю.А. Бахвалов, Б.Н. Лобов, Г.В. Могилевский, А.Г. Никитенко // Электротехника. – 1982. – № 1. – С. 48–51.
21. **Нейман Л.А., Шабанов А.С., Нейман В.Ю.** Решение задачи учета нелинейных свойств динамической модели электромагнитного привода // Теория и практика современной науки: материалы XIX международной научно-практической конференции. – М., 2015. – С. 58–63.
22. **Буль О.Б.** Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов: магнитные цепи, поля и программа FEMM: учебное пособие. – М.: Академия, 2005. – 336 с.

23. **Андреева Е.Г., Семина И.А., Татевосян А.В.** Исследование поля магнитной системы открытого типа с помощью программного пакета ANSYS // Динамика систем, механизмов и машин. – 2014. – № 1. – С. 173–175.
24. **Татевосян А.С., Татевосян А.А.** Расчет электрических и магнитных полей методом конечных элементов с применением комплекса программ ELCUT: учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. – 96 с.
25. **Черных И.В.** Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink. – М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2008. – 288 с.

## A DYNAMIC MATHEMATICAL MODEL OF THE ELECTROMAGNETIC IMPACT UNIT WITH SPRING LINKAGES

**Neyman L.A., Neyman V.Yu.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

Mechanisms and devices with electromagnetic impact actuators are widely applied in industry in many technological and manufacturing processes. The development of modern analysis and synthesis methods opens great possibilities of improving electromagnetic impact systems. The research subject is relevant as dynamic design capabilities extend when a complex problem of the analysis and synthesis of an electromechanical oscillatory system with an electromagnetic impact actuator is solved. The research is focused on a single-inductor version of the electromagnetic impact unit containing a mechanical oscillatory system with spring linkages. Based on the research results a dynamic mathematical model of the multi-mass oscillatory system of the electromagnetic impact unit with spring linkages has been developed. This model makes it possible to design electromechanical processes in stationary and transient modes. The model is based on differential equations of the electric balance of an electric drive non-linear system and a mechanical interaction of reciprocating inertia masses. These differential equations are obtained by the Lagrange method. The model is characterized by the capability of considering interrelated electromechanical processes with respect to motor magnetic characteristics of non-linearity, an inertial mass mobility degree, spring linkage properties, external actions and power loss in the magnetic and mechanical system of the electromagnetic impact unit. The obtained results extend the capabilities of dynamic design and help to solve problems associated with the analysis and synthesis of the electromagnetic impact unit.

*Keywords:* electromagnetic impact node; electromagnetic motor; mathematical model; mechanical oscillatory system; spring linkages; Lagrange method; power loss; sliding friction force.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-94-107

### REFERENCES

1. Ivashin V.V., Kudinov A.K., Pevchev V.P. Elektromagnitnye privoda dlya impul'snykh i vibroimpul'snykh tekhnologii [Electromagnetic drive for pulse technology and vibroimpulsnyh]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika – Russian Electromechanics*, 2012, no. 1, pp. 72–75.
2. Usanov K.M., Ugarov G.G., Moshkin V.I. *Lineinyi impul'snyi elektromagnitnyi privod mashin s avtonomnym pitaniem* [Linear pulse electromagnetic drive the machine with with autonomous-powered]. Kurgan, Kurgan State University Publ., 2006. 284 p.
3. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Nizkochastotnye udarnye elektromagnitnye mashiny i tekhnologii [Low-frequency impact electromagnetic machines and technology]. *Aktual'nye problemy v mashinostroenii – Actual problems in machine building*, 2014, no. 1, pp. 256–259.
4. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Issledovanie dvukhkatushechnoi sinkhronnoi elektromagnitnoi mashiny s inertsionnym reversom boika [Research two-coil synchronous electromagnetic machine with inertial reversal the firing pin]. *Sovremennye problemy teorii mashin – Modern problems of theory of machines*, 2014, no. 2, pp. 109–110.



5. Aksyutin V.A., Neyman L.A., Neyman V.Yu., Skotnikov A.A. Pressovoe oborudovanie s lineinym elektromagnitnym privodom dlya mekhanizatsii tekhnologicheskikh protsessov udarnoi sborki i shtampovki melkikh izdelii [Pressure equipment with a linear electromagnetic drive for the mechanization of technological processes shock assembly and stamping small parts]. *Aktual'nye problemy v mashinostroenii – Actual problems in machine building*, 2015, no. 2, pp. 220–224.
6. Neyman V.Yu. K voprosu o ratsionalizatsii rabochikh protsessov i vybora konstruktivnykh skhem elektromagnitnykh udarnykh mashin [On the question of the rationalization the working process and the selection of designs schemes electromagnetic percussion machines]. *Avtomatizirovannye elektromekhanicheskie sistemy* [Automated electromechanical systems]. Ed. by V.N. Anosov. Novosibirsk, NSTU Publ., 2004, pp. 155–169.
7. Neyman V.Yu., Skotnikov A.A., Neyman L.A. [Structural analysis of synchronous electromagnetic percussion machines]. *Avtomatizirovannye elektromekhanicheskie sistemy: sbornik nauchnykh trudov* [Automated electromechanical systems: collection of scientific papers]. Ed. by V.N. Anosov. Novosibirsk, NSTU Publ., 2011, pp. 106–120.
8. Ryashentsev N.P., Timoshenko E.M., Frolov A.V. *Teoriya, raschet i konstruirovaniye elektromagnitnykh mashin udarnogo deistviya* [Theory, calculation and design of electromagnetic percussion machines]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1970. 260 p.
9. Moshkin V.I. Sravnenie magnitnykh tsiklov impul'snogo lineinogo elektromagnitnogo dvigatelya s uchetom moshchnosti poter' v ego obmotke [Comparing magnetic pulse cycles linear electromagnetic motor based on the power loss in its winding]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 4, pp. 93–96. (In Russian)
10. Soloveichik Yu.G., Neyman V.Yu., Persova M.G., Royak M.E., Smirnova Yu.B., Petrov R.V. Optimizatsiya geometrii lineinykh elektromagnitnykh dvigatelei s ispol'zovaniem konechnoelementnogo modelirovaniya magnitnogo polya [Optimization of geometry linear electromagnetic motors using finite element modeling of the magnetic field]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika – Russian Electromechanics*, 2005, no. 2, pp. 24–28. (In Russian)
11. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Povyshenie tochnosti analiticheskogo rascheta radial'nykh sil odностороннего магнитного притяжения некоаксиальных элементов магнитопровода [Improving the accuracy of analytical calculation unilateral radial forces of magnetic attraction coaxial magnetic elements]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 1 (58), pp. 246–256.
12. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Primenenie metoda provodimostei dlya ucheta sily odностороннего магнитного притяжения асимметричного электромагнита [Application conductivities method to account for the strength of a unilateral asymmetric magnetic attraction of the electromagnet]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Irkutsk State Technical University*, 2015, no. 2 (97), pp. 214–218.
13. Usanov K.M., Kargin V.A., Volgin A.V. Otsenka effektivnosti energopreobrazovaniy v elektromagnitnoi udarnoi mashine s uprugim vozvratnym elementom [Evaluating the effectiveness of energy conversion in the electromagnetic shock machine with a resilient return element]. *Trudy Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta – Proceedings of the Kuban State Agrarian University*, 2008, no. 1, pp. 86–87.
14. Tatevosyan A.A., Tatevosyan A.S. Raschet optimal'nykh parametrov elektromagnitnogo privoda kolebatel'nogo dvizheniya [The calculation of the optimal parameters of the vibrational motion of the electromagnetic actuator]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 325, no. 4, pp. 121–132. (In Russian)
15. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Dinamicheskaya model' elektromagnitnogo privoda kolebatel'nogo dvizheniya dlya sistem generirovaniya nizkochastotnykh vibratsii [The dynamic model of the electromagnetic actuator of the vibrational motion for systems generate high-

- frequency vibration]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 75–87.
16. Ismagilov F.R., Sattarov R.R., Gumerova M.B. Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh rezhimov elektromagnitnykh dempfirovuyushchikh elementov [Mathematical modeling of dynamic modes of electromagnetic damping elements]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Ufa State Aviation Technical University*, 2010, vol. 14, no. 5 (40), pp. 86–90.
  17. Sattarov R.R., Ismagilov F.R. Periodicheskie rezhimy v elektromagnitnykh vibratsionnykh preobrazovatelyakh [Periodic modes in the electromagnetic vibration converters]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Ufa State Aviation Technical University*, 2010, vol. 14, no. 1 (36), pp. 50–55.
  18. Dobronravov V.V., Nikitin N.N. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* [Course of theoretical mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1983. 576 p.
  19. Manzhosov V.K., Lukutina N.O., Nevenchannaya T.O. *Dinamika i sintez elektromagnitnykh generatorov silovykh impul'sov* [The dynamics and synthesis of electromagnetic power pulse generators]. Frunze, Ilim Publ., 1985. 119 p.
  20. Bakhvalov Yu.A., Lobov B.N., Mogilevskii G.V., Nikitenko A.G. Raschet dinamiki vklucheniya elektromagnita postoyannogo toka [Calculation inclusion DC electromagnet dynamics]. *Elektrotehnika – Russian Electrical Engineering*, 1982, no. 1, pp. 48–51. (In Russian).
  21. Neyman L.A., Shabanov A.S., Neyman V.Yu. [The solution of the problem accounting non-linear properties of the dynamic model of the electromagnetic actuator]. *Teoriya i praktika sovremennoi nauki: materialy XIX mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [The theory and practice of modern science: Proceedings of the XIX International Scientific and Practical Conference]. Moscow, 2015, pp. 58–63.
  22. Bul' O.B. *Metody rascheta magnitnykh sistem elektricheskikh apparatov: magnitnye tsepi, polya i programma FEMM* [Methods for calculating the magnetic systems of electric devices: magnetic circuit, field and program FEMM]. Moscow, Akademia Publ., 2005. 336 p.
  23. Andreeva E.G., Semina I.A., Tatevosyan A.A. Issledovanie polya magnitnoi sistemy otкрытого tipa s pomoshch'yu programmnoho paketa ANSYS [Investigation of the magnetic field open-type system using ANSYS software package]. *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin – Dynamics of systems, mechanisms and machines*, 2014, no. 1, pp. 173–175.
  24. Tatevosyan A.S., Tatevosyan A.A. *Raschet elektricheskikh i magnitnykh polei metodom konechnykh elementov s primeneniem kompleksa programm ELCUT* [Calculation of electric and magnetic fields by finite element method using ELCUT programs in]. Omsk, OmSTU Publ., 2015. 96 p.
  25. Chernykh I.V. *Modelirovanie elektrotekhnicheskikh ustroystv v MATLAB, SimPowerSystems i Simulink* [Simulation of electrical devices in MATLAB, SimPowerSystems and Simulink]. Moscow, DMK Press Publ., St. Petersburg, Piter Publ., 2008. 288 p.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Нейман Людмила Андреевна** – родилась в 1966 году, канд. техн. наук, доцент кафедры электротехнических комплексов Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: линейные синхронные электромагнитные машины и технологии. Опубликовано более 70 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: neyman31@gmail.com).

**Neyman Lyudmila Andreevna** (b. 1966) – Candidate of Sciences (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of Electrotechnological Units Department of the Novosibirsk State Technical University. Research interests: linear synchronous electromagnetic machine and technology. She is author of 70 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: neyman31@gmail.com).



**Нейман Владимир Юрьевич** – родился в 1960 году, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретических основ электротехники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов – силовые электромагнитные импульсные системы. Автор и соавтор более 200 научных и учебно-методических работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: nv.nstu@ngs.ru).

**Neyman Vladimir Yurievich** – was (b. 1960), Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Theory of Electrical Engineering, Novosibirsk State Technical University. Research interests – power electromagnetic pulse systems. Author and co-author of over 200 scientific and educational works. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: nv.nstu@ngs.ru).

*Статья поступила 26 апреля 2016 г.*

*Received April 26, 2016*

---

To Reference:

Neyman L.A., Neyman V.Y. Matematicheskaya model' dinamiki elektromagnitnogo udarnogo uzla s upru-gimi svyazyami [A dynamic mathematical model of the electromagnetic impact unit with spring linkages]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 94–107. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-94-107

УДК 531.19:533.72

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ****К.А. Финников***Сибирский федеральный университет*

Традиционные методы расчета коэффициентов переноса в разреженных газах основаны на разложении первого приближения функции распределения частиц в ряд по какому-либо базису функций. В ряде случаев могут оказаться полезными альтернативные методы, основанные на статистическом моделировании движения частиц. В качестве подобного метода в данной статье предлагается вариант метода пробных частиц, модифицированный таким образом, чтобы плотность пробных частиц аппроксимировала первое приближение к функции распределения в методе Чепмена–Энскога. Основными особенностями метода являются следующие. Во-первых, это введение дополнительной характеристики пробной частицы – статистического веса, учитываемого в виде множителя при определении вклада пробных частиц в функцию распределения. Во-вторых, это специальный алгоритм моделирования столкновений пробных частиц с фоновыми, отражающий структуру линеаризованного столкновительного члена в уравнении для первого приближения функции распределения. В данном алгоритме столкновение приводит к исчезновению пробной частицы, вступившей в столкновение, и рождению трех новых, в результате чего вместо траектории единичной пробной частицы рассчитывается тернарное дерево траекторий. Траектории частиц зависимы друг от друга в пределах одного дерева, но различные деревья траекторий могут рассчитываться независимо. Это обеспечивает неограниченную возможность масштабирования алгоритма в многопроцессорных системах, характерную для других методов пробных частиц. Рассмотрен случай однокомпонентного газа с центральным потенциалом межчастичного взаимодействия (потенциалы твердых сфер и Леннард–Джонса). В случае газа твердых сфер результаты, полученные с использованием разработанного метода, идентичны известным эталонным аналитическим результатам. Расчеты коэффициентов переноса в инертном газе с использованием потенциала Леннард–Джонса сопоставлялись с данными эксперимента. Расхождение составляет около 1 %, что соответствует точности приближения потенциала межатомного взаимодействия формулой Леннард–Джонса. Разработанный метод может использоваться как параллельно с традиционным, в целях контроля вычислительных погрешностей и отсутствия ошибок в аналитических вычислениях, так и самостоятельно.

*Ключевые слова:* коэффициенты переноса, разреженный газ, приближение Чепмена–Энскога, метод пробных частиц, вязкость, теплопроводность, статистическое моделирование.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-108-122

**Введение**

Определение коэффициентов переноса разреженных газов на основании данных о потенциалах межчастичных взаимодействий является одним из основных приложений кинетической теории. Соотношения, описывающие явления переноса, появляются в результате применения приближения малых чисел Кнудсена к уравнению Больцмана, в первом порядке такого приближения [1]. Основным результатом здесь является уравнение для первого приближения функции рас-

---

Работа выполнена при частичном финансировании РФФ (соглашение № 14-19-00312).

предела  $f^1$  или, в случае многокомпонентного газа, система таких уравнений, в которой фигурируют  $f^1$  всех компонент. В случае однокомпонентного газа уравнение для  $f^1$  содержит известные слагаемые, пропорциональные пространственным и временным производным газодинамических параметров, которые в совокупности мы обозначим как  $R(\mathbf{v})$ , и линейный оператор, действующий на  $f^1$ -столкновительный член:

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{v}) + St(f^1) = 0; \quad St(f^1) = \\
 = n \int [f^0(\mathbf{v}')f^1(\mathbf{V}') + f^0(\mathbf{V}')f^1(\mathbf{v}') - f^0(\mathbf{v})f^1(\mathbf{V}) - f^0(\mathbf{V})f^1(\mathbf{v})] \times \\
 \times |\mathbf{v} - \mathbf{V}| I(|\mathbf{v} - \mathbf{V}|) d\mathbf{V} d\Omega. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Нахождение  $f^1$  и ее моментов – потоков частиц, импульса и энергии и в дальнейшем коэффициентов переноса является задачей скорее технической, но в то же время достаточно сложной и вычислительно затратной. Наиболее употребителен способ решения этой задачи путем разложения  $f^1$  в ряд с использованием полиномов Сонина. В результате такого разложения уравнение (1) сводится к системе линейных уравнений и, в итоге, выводятся выражения для коэффициентов переноса, включающие интегралы столкновений  $\Omega^{l,s}(T)$ . Последние определяются законами парного взаимодействия частиц. Расчет интегралов столкновений может быть достаточно трудоемким, особенно в случае нецентрального характера взаимодействия частиц, и зачастую требует привлечения методов Монте-Карло. Получаемые таким способом значения коэффициентов переноса имеют как статистическую погрешность, так и погрешность, связанную с обрывом разложения  $f^1$  в ряд. Если первая может быть снижена путем простого увеличения объема статистики, то уменьшение второй требует существенного усложнения расчетных выражений и увеличения числа необходимых интегралов столкновений. В некоторых случаях разложение по полиномам Сонина сходится достаточно медленно. Так, расчет коэффициентов переноса электронной компоненты в плазме может потребовать не менее 5–10 слагаемых ряда [2]. Аналогичной особенностью обладают все смеси сильно различающихся по молекулярной массе компонент, в частности гелий-ксеноновая смесь, имеющая важное практическое значение [3]. Медленная сходимость разложения связана со сложной зависимостью времени релаксации скорости более легкой молекулы от ее энергии. Вычисления коэффициентов переноса существенно усложняются в случае многокомпонентного газа, при рассмотрении газа частиц, имеющих внутренние степени свободы.

Таким образом, представляет интерес разработка альтернативных методов расчета коэффициентов переноса в разреженных газах, основанных на прямом моделировании движения частиц. Примером такого подхода является работа [4], в которой развивается расчетный метод, основанный на моделировании равновесного состояния газа и применении формул Грина–Кубо. Особенностью данного метода является то, что в нем необходимо моделировать коллектив достаточно большого (порядка нескольких тысяч) числа молекул. В настоящее время метод опробован только для случая газа твердых сфер.

Методы пробных частиц являются мощным инструментом, позволяющим напрямую решать уравнение Больцмана путем расчета множества траекторий частиц. Этим методам присуща простота алгоритма, сохраняющаяся при необходимости учитывать большое количество столкновительных процессов, возможность применения параллельных расчетов на неограниченном числе процессоров, возможность получения решения уравнения Больцмана, погрешность которого обусловлена практически только конечностью статистической выборки [5]. Отмеченные особенности относятся к тем случаям использования методов пробных частиц, в которых искомой является функция распределения частиц, сталкивающихся только с частицами других сортов, неподвижными или имеющими известную функцию распределения; последние называются фоновыми или полевыми. В таких случаях уравнение Больцмана линейно, из чего вытекает возможность независимого расчета траекторий частиц.

Уравнение (1), имеющее структуру, отличную от структуры уравнения Больцмана для пробных частиц, в то же время схоже с последним в том, что оно линейно и по своей природе является уравнением переноса частиц в пространстве скоростей. Это дает основания полагать, что некоторая модификация метода пробных частиц может быть использована для получения решения (1). Подобный метод может использоваться для расчета коэффициентов переноса как совместно с традиционными методами, с целью взаимного контроля расчетных результатов, так и независимо от них, в тех случаях, когда он будет более удобным и вычислительно экономичным.

Целью настоящей работы является адаптация метода пробных частиц к задаче расчета коэффициентов переноса. Будет рассмотрен случай однокомпонентного газа и обсуждена возможность обобщения метода на случай многокомпонентных смесей.

### 1. Адаптация метода пробных частиц

Общей чертой методов пробных частиц является то, что решаемые с помощью них уравнения (уравнение Больцмана, родственные ему уравнения переноса нейтронов и радиационного переноса тепла) выражают сохранение числа частиц и их перенос в фазовом пространстве. Уравнение (1) можно интерпретировать аналогичным образом, но применительно не к полной концентрации частиц в фазовом пространстве, а к ее возмущению. Тогда  $R(\mathbf{v})$  в (1) получает смысл источника, обусловленного наличием возмущающих факторов – неоднородности газодинамических параметров. Интеграл столкновений выражает перераспределение возмущения концентрации по пространству скоростей. В результате перераспределения возмущения последнее затухает, поскольку источник всегда дает нуль при интегрировании по направлениям. Процесс генерирования и затухания возмущения может быть смоделирован процессом рождения и гибели пробных частиц. При этом алгоритм моделирования рождения и гибели пробных частиц нуждается в следующих модификациях.

I. Поскольку как источник возмущения, так и  $f^1$  знакопеременны, необходимо учесть возможность отрицательного вклада пробной частицы в  $f^1$ . Для этого пробным частицам присваивается специальная характеристика  $w$ , которая в дальнейшем будет именоваться *весом*. Вес частицы используется в качестве дополни-

тельного множителя при определении вклада пробной частицы в возмущение функции распределения и может иметь как положительную, так и отрицательную величину.

II. Поскольку частицы, которые рассматриваются как пробные, принадлежат к тому же сорту, что и фоновые частицы, процесс столкновения между ними требует специального описания. Изменение скорости фоновой частицы в результате столкновения вносит дополнительное возмущение, которое можно описать, используя введенную выше дополнительную характеристику пробной частицы – вес. Пусть пробная частица с весом  $w$  и скоростью  $\mathbf{v}$  сталкивается с фоновой частицей, имеющей скорость  $\mathbf{V}$ , и в результате первая приобретает скорость  $\mathbf{v}'$ , а вторая – скорость  $\mathbf{V}'$ . Тогда результат столкновения можно представить как совокупность следующих событий:

1) исчезновение пробной частицы;

2) возникновение трех новых пробных частиц: со скоростью  $\mathbf{v}'$  и весом  $w$ , со скоростью  $\mathbf{V}$  и весом  $-w$ , со скоростью  $\mathbf{V}'$  и весом  $w$ . Такое описание процесса столкновений соответствует структуре подынтегрального выражения в столкновительном члене (1), содержащего 4 слагаемых. Аналогично, в обычном методе пробных частиц изменение скорости пробной частицы, идентичное исчезновению частицы с прежним значением скорости и появлению – с новым, отражает структуру столкновительного члена в уравнении Больцмана, содержащего два слагаемых.

Таким образом, особенностью метода пробных частиц в применении к рассматриваемой задаче является то, что столкновение пробной частицы с фоновой должно моделироваться как исчезновение пробной частицы, вступившей в процесс столкновения, и появление трех новых пробных частиц. Все множество частиц, порождаемых одной, может быть представлено в виде тернарного дерева, ветви которого соответствуют частицам, а точки ветвления – столкновениям. Время существования каждой пробной частицы ограничено ее свободным пробегом и ее скорость постоянна. В дальнейшем мы будем пользоваться понятиями *первичная частица* для первоначально инициируемых пробных частиц и *дерево частиц* для множеств частиц, порождаемых первичными. Будет удобным считать, что первичные частицы сами принадлежат к деревьям, порождаемым ими.

С формальной точки зрения, дерево частиц должно развиваться неограниченно. На практике приходится использовать те или иные критерии прерывания расчета дерева. В качестве условия прекращения расчета выберем истечение определенного периода времени  $t_{\text{tree}}$  с момента старта первичной частицы дерева. Уточним, что каждая частица дерева либо исчезает в результате столкновения, либо достигает времени  $t_{\text{tree}}$ . Конечность  $t_{\text{tree}}$  порождает погрешность результата, в добавление к обычной погрешности статистических методов, связанной с конечностью количества рассчитанных деревьев частиц.

Алгоритм расчета дерева частиц наиболее удобно построить на основе принципа рекурсии, поскольку часть дерева, порождаемая любой из его частиц, сама является тернарным деревом. Общая структура рекуррентно вызываемой процедуры выглядит следующим образом.

Процедура Расчет Дерева (параметры: скорость  $\mathbf{v}$ , вес  $w$ , время от момента старта первичной частицы дерева  $t$ ).

Начало.

1. Выбрать следующие случайные величины, взаимосвязанные и зависящие от  $\mathbf{v}$ , плотности и температуры газа и потенциала взаимодействия частиц:  $\tau$  – время движения частицы до столкновения,  $\mathbf{V}$  – скорость частицы фона, с которой произойдет столкновение,  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{V}'$  – скорости частиц после столкновения.

2. Если  $\tau > t_{\text{tree}} - t$ , то  $\tau := t_{\text{tree}} - t$ .

3. Учесть вклад частицы в возмущение, описываемый величинами  $\mathbf{v}$ ,  $\tau$ ,  $w$ .

4. Если  $\tau < t_{\text{tree}} - t$ , то:

4.1. Выполнить РасчетДерева ( $\mathbf{v}'$ ,  $w$ ,  $t + \tau$ );

4.2. Выполнить РасчетДерева ( $\mathbf{V}'$ ,  $w$ ,  $t + \tau$ );

4.3. Выполнить РасчетДерева ( $\mathbf{V}$ ,  $-w$ ,  $t + \tau$ ).

Конец процедуры.

Дерево частиц, порождаемое первичной пробной частицей со скоростью  $\mathbf{v}_0$  и весом  $w_0$ , рассчитывается в процессе выполнения описанной процедуры, вызываемой с параметрами  $(\mathbf{v}_0, w_0, 0)$ . Расчеты деревьев, порожденных разными первичными частицами, могут проводиться параллельно.

Выбор времени движения частицы до столкновения и других параметров, которые должны быть определены в п. 1 вышеприведенного алгоритма, может производиться различными способами. Здесь возможно применение прямого метода определения искомого вектора случайных величин с использованием обратной функции распределения [6]. В настоящем исследовании использовался метод, более отвечающий его целям и являющийся, возможно, более вычислительно затратным, но в то же время алгоритмически простым. Свободный пробег частицы рассматривается как совокупность шагов достаточно малой временной продолжительности. Если длительность шага достаточно мала для того, чтобы вероятность столкновения даже в течение достаточно большого количества шагов  $N_{\text{step}}$  была малой, возможные столкновения на  $N_{\text{step}}$  последовательных шагов могут считаться статистически независимыми. Поэтому на каждом шаге скорость фоновых частиц может определяться в соответствии с их собственной функцией распределения (максвелловской), а вероятность столкновения – рассчитываться исходя из величины относительной скорости пробной и фоновой частицы и полного сечения столкновения, зависящего от этой скорости. Использование этого метода вносит погрешность, связанную с конечностью вероятности столкновения в течение единичного временного шага. Влияние этой погрешности будет видно из расчетных результатов. Отметим, что и использование метода, использующего обратную функцию распределения, также вносит погрешность, связанную с конечностью массива значений обратной функции.

Возмущение, создаваемое произвольным источником  $R(\mathbf{v})$ , может быть определено в результате усреднения по деревьям, первичные частицы которых имеют распределение по скоростям и весам, соответствующие форме  $R(\mathbf{v})$ . Сформулируем следующее утверждение, доказательство которого выходит за рамки настоящего исследования: если первичные частицы имеют случайные скорости, подчиняющиеся функции распределения  $f_i(\mathbf{v})$  и им присваиваются веса, описываемые такой зависимостью  $w(\mathbf{v})$ , что

$$f_i(\mathbf{v})w(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v}),$$



то для решения уравнения для  $f^1(\mathbf{v})$  действует следующее слабое предельное соотношение

$$\frac{1}{N} \sum_i \tau_i w_i \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^p) \xrightarrow{N \rightarrow \infty \wedge t_{\text{tree}} \rightarrow \infty} f^1(\mathbf{v}), \quad (2)$$

где  $N$  – количество первичных частиц, суммирование производится по всем частицам всех деревьев,  $\tau_i, w_i, \mathbf{v}_i^p$  – времена существования частиц, их веса и скорости. Поясним, что понятие слабого предела подразумевает равенство между любыми моментами правой и левой частей (2), достигаемое в указанном пределе; это понятие используется здесь по той причине, что левая часть (2) в отличие от  $f^1(\mathbf{v})$  – неограниченная функция.

Соотношение (2) используется для вывода выражений для моментов  $f^1(\mathbf{v})$ , в том числе – потоков импульса и энергии. Так, компонента потока импульса определяется следующим образом:

$$\tau_{xy} = mn \int v_x v_y f^1(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \approx mn \frac{1}{N} \sum_i \tau_i w_i v_{ix}^p v_{iy}^p, \quad (3)$$

точное равенство достигается в пределе  $N \rightarrow \infty, t_{\text{tree}} \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим случай возмущения, создаваемого сдвигом средней скорости газа. Пусть средняя скорость газа  $\mathbf{u} = (u_x(y), 0, 0)$ . Тогда в локально-сопровождающей системе отсчета

$$R(\mathbf{v}) = -\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{m v_x v_y}{kT} f^0(\mathbf{v}). \quad (4)$$

Для такой формы источника возможным (не единственным) вариантом является следующий выбор функции распределения и весовой функции первичных частиц:

$$f_i(\mathbf{v}) = f^0(\mathbf{v}); \quad w(\mathbf{v}) = -\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{m v_x v_y}{kT}. \quad (5)$$

После расчета необходимого числа деревьев частиц, скорости и веса которых определяются в соответствии с (5), данные расчета используются для определения  $\tau_{xy}$  согласно (3); далее очевидным образом находится коэффициент вязкости.

Аналогичным образом рассматривается случай неоднородности температуры и рассчитывается коэффициент теплопроводности. Описанный порядок действий является простейшим методом рассмотрения явлений переноса с помощью адаптированного метода пробных частиц.

Результаты расчетов коэффициентов переноса, полученные с использованием описанного метода для газа твердых сфер, показаны на рисунке 1. Расчетные коэффициенты вязкости и теплопроводности приведены в отношении к аналитическим, полученным методом Чепмена–Энскога в приближении одного полинома Сонина [1]. В расчетах варьировалась величина  $t_{\text{tree}}$  с целью наблюдения динамики сходимости результатов по этой величине. Для удобства анализа результаты

приведены в зависимости от параметра, производного от  $t_{tree}$  – среднего числа поколений частиц в дереве, приблизительно пропорционального  $t_{tree}$ . Количество рассчитываемых деревьев выбиралось таким, чтобы погрешность статистического усреднения не превышала 1 %, и составляло от 10 до 20 тысяч. Величина временного шага при расчете свободного пробега частиц выбиралась такой, чтобы вероятность столкновения в течение шага не превышала в одном случае, 0,1, в другом случае – 0,2. Полученные в этих двух случаях результаты отличаются друг от друга не более чем на 0,5 %.

Как можно заметить, сходимость результатов по  $t_{tree}$  является достаточно медленной, особенно для коэффициента теплопроводности. При этом увеличение числа поколений частиц на единицу приводит к увеличению расчетных затрат втрое. Для 17 поколений частиц получение приведенных результатов требует около 300 часов расчетного времени на процессорном ядре с частотой 2 ГГц. В следующем разделе будет показано, какие усовершенствования возможны в описанном методе применительно к частным задачам – задачам расчета коэффициентов вязкости и теплопроводности.

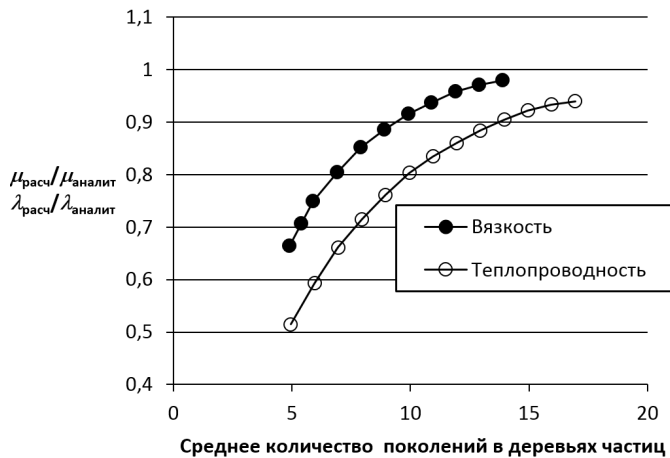


Рис. 1 – Отношение расчетных коэффициентов переноса в газе твердых сфер к аналитическим

Fig. 1 – Calculated transport coefficients in a hard sphere gas in relation to analytical ones

## 2. Итерационный алгоритм

Медленная сходимость результата при увеличении  $t_{tree}$  показывает, что нецелесообразно улучшать точность расчетов путем простого увеличения этого параметра. Погрешность конечного  $t_{tree}$  связана с пренебрежением вкладом, который вносят в  $f^1$  частицы дерева после истечения этого интервала времени от начала старта первичной частицы. Учесть их вклад можно итерационным способом. Будем рассматривать каждую частицу дерева, существующую на момент обрыва расчета  $t = t_{tree}$ , как первичную, порождающую собственное дерево частиц, и

определять вклад этого дерева в  $f^1$  на основе уже имеющейся информации. Для максимально эффективной организации итерационного процесса необходимо учесть аксиальную симметрию рассеяния при столкновении частиц. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения (1), получаемое для точечного источника возмущения:

$$\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + St(f^1) = 0: f^1(\mathbf{v}) = K(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0).$$

Для  $K(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)$ , как частного случая решения (1), действует соотношение (2), при

$$f_i(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0), w(\mathbf{v}) = 1.$$

По причине аксиальной симметрии процесса рассеяния  $K(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)$  зависит от угла между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_0$ , но не от направлений каждого из них по отдельности. Для произвольной формы источника искомое возмущение определяется как

$$f^1(\mathbf{v}) = \int K(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)R(\mathbf{v}_0)d\mathbf{v}_0.$$

Подставим сюда источник (4), а полученное выражение используем для определения компоненты потока импульса. Выполняя интегрирование по направлениям, приходим к следующему выражению для коэффициента вязкости:

$$\mu = \frac{1}{10} n \int m v^2 \int \frac{m v_0^2}{kT} f_0(v_0) \int_0^\pi K(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) (\cos^2 \theta - 1/3) d\Omega_0 d\mathbf{v}_0 d\mathbf{v},$$

где  $\theta$  – угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_0$ . Вводя функцию

$$K_\mu(v_0) = \int m v^2 \int_0^\pi K(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) (\cos^2 \theta - 1/3) d\Omega_0 d\mathbf{v}, \tag{5}$$

приведем выражение для коэффициента вязкости к следующему виду:

$$\mu = n \int \frac{m v_0^2}{kT} f_0(v_0) K_\mu(v_0) d\mathbf{v}_0. \tag{6}$$

Функция  $K_\mu(v_0)$  подлежит непосредственному определению из расчетов деревьев пробных частиц. Подставляя соотношение (2) в (5), получаем

$$K_\mu(v_0) \approx \frac{1}{10} \frac{1}{N} \sum_i \tau_i w_i m (v_i^p)^2 (\cos^2 \theta_i - 1/3), \tag{7}$$

где данные в правой части получены для деревьев частиц, первичные частицы которых имеют скорость  $\mathbf{v}_0$  (направление этого вектора не имеет значения, но должно быть фиксировано в процессе расчета конкретного дерева) и вес 1;  $\theta_i$  – углы между  $\mathbf{v}_i^p$  и  $\mathbf{v}_0$ . Функцию  $K_\mu(v_0)$  следует рассчитывать для дискретного набора скоростей  $v_0 = h_v, 2h_v, \dots, N_v h_v$ , в котором максимальное значение должно в несколько раз превышать тепловую скорость. Значения  $K_\mu(v_0)$  обновляются в

ходе итераций. На каждой итерации ее значения, полученные на предыдущей итерации, используются для учета вклада в сумму в выражении (7) от частиц, существующих на момент обрыва расчета дерева,  $t = t_{\text{tree}}$ . Пусть на момент обрыва расчета дерева существует пробная частица со скоростью  $\mathbf{v}^p$  и весом  $w$ . Вклад ее и тех частиц, которые она в дальнейшем может породить, в сумму (7) равен

$$\frac{3}{2}w\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)K_{\mu}(\mathbf{v}^p),$$

где  $\theta$  – угол между  $\mathbf{v}^p$  и  $\mathbf{v}_0$ , а значение  $K_{\mu}(\mathbf{v}^p)$  определяется путем интерполяции по массиву значений  $K_{\mu}$ , взятых с предыдущей итерации.

Аналогичным образом рассматривается случай неоднородности температуры и определяется коэффициент теплопроводности; для него

$$\lambda = \frac{n}{T} \int \left( \frac{mv_0^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) v_0 f_0(v_0) K_{\lambda}(v_0) d\mathbf{v}_0,$$

$$K_{\lambda}(v_0) \approx \frac{1}{N} \sum_i \tau_i w_i \frac{m(v_i^p)^3}{2} \cos\theta_i, \quad (8)$$

а вклад частицы со скоростью  $\mathbf{v}^p$  и весом  $w$  вклад в сумму (8) равен

$$\cos\theta w K_{\lambda}(\mathbf{v}^p).$$

Отметим, что коэффициенты вязкости и теплопроводности могут рассчитываться совместно, с использованием одних и тех же данных расчетов деревьев частиц.

В итерационном варианте метода исключается погрешность, связанная с конечностью  $t_{\text{tree}}$ . Величина  $t_{\text{tree}}$  влияет только на скорость сходимости итерационного процесса. Последняя растет с увеличением  $t_{\text{tree}}$ , однако вместе с этим растут и затраты на выполнение итерации. Оптимальной с точки зрения вычислительной скорости является такая величина  $t_{\text{tree}}$ , при которой в среднем в дереве происходит одно разветвление.

Итерационный вариант метода отличается наличием погрешности, связанной с конечностью массивов значений  $K_{\mu}$ ,  $K_{\lambda}$ . В ходе тестирования алгоритма было выяснено, что при использовании кубического сплайна для интерполяции значений  $K_{\mu}$ ,  $K_{\lambda}$  результат практически перестает зависеть от количества элементов массива уже при количестве элементов выше 30. При этом увеличение количества элементов массивов не вызывает роста длительности расчета, если критерием окончания расчета выбрать достижение требуемой погрешности статистического усреднения. Дело в том, что с ростом количества элементов растет и объем статистики, набираемый в процессе выполнения единичной итерации. Поэтому были зафиксированы следующие параметры алгоритма: количество элементов массивов  $K_{\mu}$ ,  $K_{\lambda}$  – 100, диапазон скоростей для определения этих функций – от 0 до  $5\sqrt{2kT/m}$ .

Результаты расчетов коэффициентов переноса в газе твердых сфер с помощью итерационного алгоритма приведены в табл. 1. Расчетные результаты приведены в отношении к аналитическим, полученным в приближении Чепмена–Энскога при пяти слагаемых в разложении по полиномам Сонина [7], рассматриваемым как эталонные. Расчеты проводились до достижения погрешности статистического усреднения 0,02 % при доверительной вероятности 99 %. Приведены результаты, полученные для различных величин временного шага, используемых при расчете свободного пробега. Длительность временного шага характеризуется средней вероятностью столкновения на протяжении шага. Результаты демонстрируют очень быструю сходимость по величине временного шага. Фактически, уже при максимальной из рассмотренных величин шага погрешность составляет доли процента. Возможным объяснением этого явления является то, что корректное распределение по длительности свободного пробега и скоростям фоновой частицы реализуется не для каждой конкретной частицы в отдельности, а для большого количества моделируемых частиц. Расчетные результаты свидетельствуют о возможности использования метода для высокоточных расчетов коэффициентов переноса.

Таблица 1 / Table 1

**Коэффициенты переноса в газе твердых сфер, в отношении к эталонным значениям.  $\bar{P}_{coll}$  – приведенный временной шаг (средняя вероятность столкновения в течение временного шага)**  
**Transport coefficients in a hard sphere gas in relation to the reference values.  $\bar{P}_{coll}$  is the reduced time step (mean probability of collision during a time step)**

$\bar{P}_{coll}$	$\mu_{расч}/\mu_{эксп}$	$\lambda_{расч}/\lambda_{эксп}$
Приближение Чепмена–Энскога, один полином Сонина		
–	0,984	0,977
Метод пробных частиц		
0,6	1,0018	1,0025
0,4	1,0009	1,0021
0,2	0,9997	1,0014
0,1	0,9989	1,0003
0,05	0,9989	1,0004

Получение результатов для минимального временного шага, с погрешностью статистического усреднения 0,02 %, потребовало 14 часов расчетного времени на процессорном ядре с частотой 2 ГГц. Получение результата с погрешностью усреднения 0,2 %, что примерно на порядок меньше погрешности метода Чепмена–Энскога при использовании одного полинома Сонина, возможно при максимальной величине временного шага и в 100 раз меньшем объеме статистики, что соответствует расчетному времени 42 секунды.

Описанный метод применим к случаю газа с более сложным потенциалом межчастичного взаимодействия. В сравнении с потенциалом твердых сфер случай потенциалов взаимодействия, не обращающихся в нуль при конечных расстояниях, отличается необходимостью искусственно ограничивать радиус взаимодействия некоторой величиной  $\rho_{max}$ . При определении вероятности столкно-

вения на временном шаге используется полное сечение столкновения, равное  $\pi r_{\max}^2$ . Конечность  $\rho_{\max}$  порождает дополнительную погрешность результата. Полный список источников погрешности результата включает следующее.

1. Конечность статистической выборки.
2. Конечность количества временных шагов за время свободного пробега.
3. Конечность  $\rho_{\max}$ .
4. Погрешность численного интегрирования при расчете угла рассеяния.
5. Конечность массивов значений  $K_{\mu}$ ,  $K_{\lambda}$ .

Как уже отмечалось, вклад п. 5 может быть сделан сколь угодно малым без увеличения объемов вычислений. Удобным способом оценки вклада п. 3, 4 является использование расчетных процедур для определения угла рассеяния в традиционном методе расчета коэффициентов переноса – путем расчета интегралов столкновений  $\Omega^{l,s}$ . Как показывают расчетные результаты, вклад этих источников легко может быть снижен до величин менее 0,01 %. В случае потенциала Леннард–Джонса для этого достаточно выбрать  $\rho_{\max} \geq 4\sigma$  и количество интервалов численного интегрирования не менее 40.

В табл. 2 приведены результаты расчета коэффициентов переноса в аргоне для температуры 300 К. Межатомное взаимодействие описывалось потенциалом Леннард–Джонсом с параметрами  $\sigma = 3,42 \cdot 10^{-10}$  м,  $\varepsilon/k = 117,8$  К [8]. Погрешность статистического усреднения составляет 0,1 % при доверительной вероятности 99 %. Расчетные результаты приведены в отношении к экспериментальным значениям коэффициентов переноса:  $\mu = 2,272 \cdot 10^{-5}$  Па·с,  $\lambda = 0,01781$  Вт/м·К [9]. Как и в случае с потенциалом твердых сфер, наблюдается достаточно быстрая сходимость по параметру точности метода – средней вероятности столкновения на временном шаге. Отклонение расчетного результата от экспериментальных данных составляет около 1 %. Как показали результаты расчетов для случая потенциала твердых сфер, погрешность метода достаточно мала и, следовательно, отмеченное отклонение можно связать в первую очередь с неточностью выражения потенциала Леннард–Джонса.

Таблица 2/Table 2

**Расчетные коэффициенты переноса в отношении к экспериментальным (аргон, в расчетах используется потенциал Леннард–Джонса)**

**Transport coefficients in a hard sphere gas in relation to the measured values (argon, Lennard–Jones potential was used in calculations)**

$\bar{P}_{coll}$	$\mu_{расч}/\mu_{эксп}$	$\lambda_{расч}/\lambda_{эксп}$
Приближение Чепмена–Энскога, один полином Сонина		
–	1,017	1,008
Метод пробных частиц		
0,4	1,017	1,012
0,2	1,014	1,010
0,1	1,013	1,010
0,05	1,013	1,009

### Заключение

Метод расчета коэффициентов переноса на основе модифицированного алгоритма пробных частиц продемонстрировал свою работоспособность. Как показал опыт использования метода, с его помощью возможно рассчитывать коэффициенты вязкости и теплопроводности однокомпонентного газа за приемлемое время с точностью, сопоставимой с точностью традиционного метода или превышающей ее. Аналогично известным и широко используемым методам пробных частиц разработанный метод допускает применение параллельных вычислений на неограниченном числе процессоров. Сравнительно небольшой необходимый объем памяти для реализации алгоритма – порядка нескольких сотен байт – делает возможным использование графических ускорителей (GPU).

Обсудим возможные направления обобщения метода и его приложения. Обобщение метода на случай произвольного числа компонент может быть выполнено на основе следующих соображений:

- наличие неоднородности является источником возмущения функции распределения в каждой из компонент;

- источник возмущения в одной из компонент вызывает возмущение в функциях распределения всех компонент, и каждое дерево частиц может включать частицы всех сортов. Соответственно вместо единичной функции  $K_{\mu}$  необходимо рассчитывать массив таких функций размерностью  $N_c \times N_c$ , где  $N_c$  – количество компонент; то же относится и к  $K_{\lambda}$ ;

- необходимо рассматривать дополнительный тип возмущения – градиент массовой доли компоненты, приводящий к возникновению потоков массы и энергии.

Обобщение на случай частиц, в столкновениях которых происходит изменение внутреннего состояния (вращательного и колебательного), также не создает принципиальных трудностей, особенно в более простом варианте метода, который позволяет рассчитывать коэффициенты переноса с точностью порядка 10 %. Для этого будет достаточным задавать случайное внутреннее состояние первичных частиц деревьев и частиц фона, с которыми происходят столкновения пробных частиц. В более точном варианте метода, итерационном, необходимо определять  $K_{\mu}$ ,  $K_{\lambda}$  как функции не только модуля скорости, но и внутреннего состояния первичной частицы.

В качестве возможных приложений метода следует, в первую очередь, назвать задачи определения коэффициентов переноса в многокомпонентных смесях. Аналитические выражения для определения коэффициентов переноса, выведенные в теории Чепмена–Энскога, существенно усложняются уже при переходе от однокомпонентного газа к двухкомпонентному. Вследствие этого вместо непосредственного применения теории Чепмена–Энскога широко используются разнообразные правила смесей, связывающих значения коэффициентов переноса в смеси с их значениями в чистых газах [10]. Представленный метод, после его обобщения на случай многокомпонентных смесей, можно рекомендовать для независимой проверки результатов, получаемых как в методах, основанных на разложении  $f^1$  в ряд, так и с использованием правил смесей.

Еще одной возможной областью приложения метода является определение параметров межчастичного взаимодействия на основе данных о коэффициентах

переноса. При решении этой задачи необходимо как можно точнее рассчитывать коэффициенты переноса при заданном потенциале взаимодействия. Метод пробных частиц позволяет достичь любой требуемой точности путем увеличения объема вычислений; наибольший вклад в погрешность имеет статистическую природу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Рудяк В.Я.** Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. – Новосибирск: Наука, 1987. – 272 с.
2. **Митчнер М., Кругер Ч.** Частично ионизованные газы. – М.: Мир, 1976. – 497 с.
3. Космические ядерные энергетические установки суб- и мегаваттного класса. Ч. 1 – концепции реакторов (обзор) / Ю.Г. Драгунов, Б.А. Габараев, В.В. Ужанова, М.С. Беляков, М.М. Селиверстов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2014. – № 2. – С. 95–107.
4. **Рудяк В.Я., Лежнев Е.В.** Стохастическое моделирование вязкости разреженных газов // Доклады АН ВШ РФ. – 2015. – № 3 (28). – С. 99–108. – doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-99-108.
5. **Белоцерковский О.М., Хлопков Ю.И.** Методы Монте-Карло в прикладной математике и вычислительной аэродинамике // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 8. – С. 1494–1518.
6. **Котов В.Э.** Методика учета движения фона при моделировании транспорта частиц методом Монте-Карло // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез. – 2002. – Вып. 3/4. – С. 169–175.
7. **Haviland J.K.** The solution of two molecular flow problems by the Monte Carlo method // Methods of Computational Physics. – 1965. – Vol. 4. – P. 109–209.
8. **White J.A.** Lennard–Jones as a model for argon and test of extended renormalization group calculations // Journal of Chemical Physics. – 1999. – Vol. 111, N 20. – P. 9352–9356. – doi: 10.1063/1.479848.
9. Pure and pseudo-pure fluid thermophysical property evaluation and the open-source thermophysical property Library CoolProp / I.H. Bell, J. Wronski, S. Quoilin, V. Lemort // Industrial & Engineering Chemistry Research. – 2014. – Vol. 53, N 6. – P. 2498–2508. – doi: 10.1021/ie4033999.
10. **Reid R.C., Prausnitz J.M., Sherwood T.K.** The properties of gases and liquids. – New York: McGraw-Hill, 1977. – 688 p.

#### APPLICATION OF THE MONTE CARLO TEST PARTICLE METHOD TO CALCULATE TRANSPORT COEFFICIENTS IN DILUTED GASES

**Finnikov K.A.**

*Siberian Federal University, Russia*

Conventional methods of calculating transport coefficients in diluted gases are based on the expansion of the first-order Chapman–Enskog velocity distribution function. Alternative methods based on statistical simulation of particle motion can be useful in some cases. An example of such a method is proposed in the present paper. It is a version of the Monte-Carlo test particle method modified in such a way that the density of test particles approximates to the first-order velocity distribution function. The main features of the method are as follows. First, a statistical weight as an additional characteristic of a test particle is introduced. This statistical weight is taken into account as a multiplier in determining the contribution of a particle to the velocity distribution function. Second, it is a special algorithm of simulating collisions between test particles and background particles that reflects the structure of the linearized collision term in the equation for the first approximation of the velocity distribution function. In this algorithm a collision leads



to colliding test particle vanishing and the appearance of three new test particles. As a result, instead of a single test particle trajectory, a ternary tree of trajectories is calculated. Trajectories of test particles are interdependent within a tree of trajectories, but different trees are calculated separately. This provides an unlimited scalability of the algorithm in multiprocessor systems similarly to other test particle methods. The case of a monocomponent gas with a central potential of interparticle interaction (hard sphere and Lennard–Jones potentials) is examined. The results obtained with use of the proposed method for hard sphere gas are identical to the known analytical results. Calculated transport coefficients in an inert gas described by the Lennard–Jones interatomic potential are compared with experimental data. The disagreement is about 1 %, which corresponds to the accuracy of the approximation of interatomic interaction by the Lennard–Jones expression. The proposed method can be used both independently and in combination with conventional methods to cross-check calculation errors.

*Keywords:* transport coefficients; diluted gas; test particle method; Chapman–Enskog expansion; viscosity; thermal conductivity; Monte–Carlo simulation.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-108-122

## REFERENCES

1. Rudyak V.Ya. *Statisticheskaya teoriya dissipativnykh protsessov v gazakh i zhidkostyakh* [Statistical theory of dissipative processes in gases and liquids]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1987. 272 p.
2. Mitchner M., Kruger Ch.H. *Partially ionized gases*. New York, A Wiley-Interscience Publ., 1973. 518 p. (Russ. ed.: Mitchner M., Kruger Ch. *Chastichno ionizovannye gazy*. Moscow, Mir Publ., 1976. 497 p.).
3. Dragunov Yu.G., Gabaraev B.A., Uzhanova V.V., Belyakov M.S., Seliverstov M.M. Kosmicheskie yadernye energeticheskie ustanovki sub- i megavattnogo klassa. Ch. 1 – kontseptsii reaktorov (obzor) [Sub-megawatt and megawatt class space nuclear power facilities. Pt. 1 – conceptions of reactors (review)]. *Problemy mashinostroeniia i avtomatizatsii – Engineering & Automation Problems*, 2014, no. 2, pp. 95–107.
4. Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Stokhasticheskoe modelirovanie vyazkosti raz-rezhennykh gazov [Stochastic simulation of rarefied gas viscosity]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 99–108. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-99–108
5. Belotserkovskii O.M., Khlopkov Yu.I. Monte Carlo methods in applied mathematics and computational aerodynamics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 8, pp. 1418–1441. doi: 10.1134/S0965542506080124. Translated from *Zhurnal vysshei matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2006, vol. 46, no. 8, pp. 1494–1518.
6. Kotov V.E. Metodika ucheta dvizheniya fona pri modelirovanii transporta chastits metodom Monte-Karlo [Method for taking into account the motion of background in Monte-Carlo simulation of particle transport]. *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Termoyadernyi sintez – Problems of Atomic Science and Engineering. Series “Thermonuclear Fusion”*, 2002, iss. 3–4, pp. 169–175.
7. Haviland J.K. The solution of two molecular flow problems by the Monte-Carlo method. *Methods of Computational Physics*, 1965, vol. 4, pp. 109–209.
8. White J.A. Lennard-Jones as a model for argon and test of extended renormalization group calculations. *Journal of Chemical Physics*, 1999, vol. 111, no. 20, pp. 9352–9356. doi: 10.1063/1.479848
9. Bell I.H., Wronski J., Quoilin S., Lemort V. Pure and pseudo-pure fluid thermophysical property evaluation and the open-source thermophysical property Library CoolProp. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2014, vol. 53, no. 6, pp. 2498–2508. doi: 10.1021/ie4033999
10. Reid R.C., Prausnitz J.M., Sherwood T.K. *The properties of gases and liquids*. New York, McGraw-Hill, 1977. 688 p.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Финников Константин Андреевич** – родился в 1974 году, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теплофизики Сибирского федерального университета. Область научных интересов: физика низкотемпературной плазмы, вычислительная гидродинамика, методы статистического моделирования. Опубликовано 48 научных работ. (Адрес: 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79. Email: kfinnikov@sfu-kras.ru).

**Finnikov Konstantin Andreevich** (b. 1974) – PhD, Associated Professor, Thermophysics department, Siberian Federal University. His research interests are currently focused on low-temperature plasma physics, computational fluid dynamics, Monte Carlo simulation methods. He is author of 48 scientific papers. (Address: 79 Svobodny ave., Krasnoyarsk, 660041, Russia. Email: kfinnikov@sfu-kras.ru).

*Статья поступила 21 апреля 2016 г.  
Received April 21, 2016*

---

To Reference:

Finnikov K.A. Primenenie metoda probnykh chastits dlya vychisleniya koeffitsientov perenosa v razrezhennykh gazakh [Application of test particle Monte Carlo method to calculation of transport coefficients of diluted gases]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 108–122. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-108-122

УДК 519.254

**АДАПТИВНАЯ ДЕМОДУЛЯЦИЯ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ  
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ПОМЕХОВОЙ ОБСТАНОВКИ****Н.С. Хайло***Новосибирский государственный технический университет*

Предложен адаптивный асимптотически робастный инвариантный (ААРИ) алгоритм демодуляции сигналов с неизвестным энергетическим параметром в аддитивном шуме с неизвестным распределением. Алгоритм основан на использовании расширенной модели приближенно-финитных распределений ( $q$ -точечной модели). Адаптация достигается путем оценки неизвестных параметров  $q$ -точечной модели и последующей оптимизации алгоритма. В работе показано, что в случае распределений шума с тяжелыми хвостами ААРИ-алгоритм, основанный на расширенной  $q$ -точечной модели, обеспечивает значительный выигрыш в пороговом отношении сигнал/шум по сравнению с классическим алгоритмом, основанным на использовании согласованного коррелятора. В случае гауссовского шума и больших объемов выборки ААРИ-алгоритм практически не уступает классическому алгоритму.

*Ключевые слова:* адаптивная демодуляция сигналов, априорная неопределенность, случайная помеха, фазовая манипуляция, робастность.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-123-134

**Введение**

В большинстве практических задач связи распределения шума известны лишь частично. Например, может быть известно, что многомерная функция распределения вероятности отсчетов шума является приближенно гауссовской, но ковариационная функция может быть неизвестна, или могут возникнуть другие препятствия, такие как искажение наблюдаемого сигнала импульсным шумом неизвестной мощности. В работах [1] и [2] показано, что импульсная модель шума является достаточно точным описанием для многих каналов связи. Импульсный шум характеризуется распределениями с тяжелыми хвостами и может быть описан с помощью ряда статистических моделей. Однако, если при построении демодулятора принимается фиксированное распределение шума, то при отклонении его реального распределения от принятой модели эффективность алгоритма может значительно снизиться.

Для преодоления этой проблемы многими авторами предложены различные робастные параметрические и непараметрические подходы (см., например, обзор в [3]). Для улучшения качества статистических процедур были разработаны подходы, основанные на использовании свойств широкополосных сигналов. Современные телекоммуникационные системы используют, как правило, сигналы с большой базой  $\Delta f T$  ( $\Delta f$  – полоса частот, занимаемая системой,  $T$  – длительность сигнала), поэтому многие авторы применяют асимптотический подход, используют оценку плотности распределения вероятностей (ПРВ) и адаптивные методы (например, [4–9]). В работах [9] и [10] предложен робастный детектор, в котором каждый чип проходит через робастную нелинейность, прежде чем попадает на коррелятор, после которого следует решающее устройство. Нелинейный процессор применяется для борьбы с импульсным шумом. Характеристики такого детектора в значительной степени зависят от параметра ограничения, выбор кото-

рого становится затруднительным в случае изменчивости шума [11]. В работах [12] и [13] предложены расширенная модель  $\varepsilon$ -загрязненных распределений,  $q$ -точечная модель и модель с конечной дисперсией, которые являются моделями смешанного типа: параметрическая модель для параметров масштаба и сдвига ПРВ и непараметрическая – для формы ПРВ. Там же предложены алгоритмы демодуляции сигналов, синтезированные на основе совместного использования асимптотического подхода, принципов инвариантности и минимакса. С помощью  $q$ -точечной модели был получен асимптотически робастный инвариантный (АРИ) алгоритм, обладающий устойчивостью характеристик к изменению вида функции распределения шума. В работе [14] предложена процедура адаптации АРИ-алгоритма по обучающей выборке к фактическому распределению шума.

В данной работе предлагается модификация АРИ-алгоритма, предложенного в [13], для демодуляции сигналов с прямым расширением спектра. Адаптация достигается за счет оценки неизвестных параметров  $q$ -точечной модели по той же выборке, по которой демодулируется сигнал, и последующей оптимизации алгоритма. Приводится сравнительный анализ эффективности предложенного алгоритма с широко используемым классическим алгоритмом на основе согласованного коррелятора, оптимальным для приема сигналов на фоне гауссовского шума. Показано, что в случае, когда шум характеризуется распределением с тяжелыми хвостами, предложенный алгоритм обеспечивает значительный (до 10–12 дБ) выигрыш в пороговом отношении сигнал/шум и почти не уступает алгоритму на основе согласованного коррелятора в случае гауссовского шума при больших значениях базы сигнала.

### 1. Математические модели сигнално-помеховой обстановки

Как и в работе [13], рассматривается когерентная демодуляция цифрового сигнала в канале с аддитивным шумом с априорно неизвестным маргинальным распределением. Модуляция осуществляется с помощью соответствующих сигналов из созвездия  $\mathbb{S}_n = \left\{ \bar{S}_n^{(k)} = (S_1^{(k)}, \dots, S_n^{(k)})^T, k = 1, \dots, M \right\}$ , верхний индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования,  $(S_1^{(k)}, \dots, S_n^{(k)})^T$  – вектор отсчетов комплексной огибающей  $k$ -го сигнала созвездия. Наблюдаемые данные представляют собой  $n$ -мерный вектор  $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_n)^T$ , составленный из отсчетов комплексной огибающей наблюдаемого процесса, который в случае передачи  $k$ -го сигнала может быть представлен в следующем виде:

$$\bar{x}_n = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \bar{S}_n^{(k)} + \bar{\xi}_n, \quad \bar{S}_n^{(k)} \in \mathbb{S}_n,$$

где  $\bar{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  – вектор отсчетов комплексной огибающей шума;  $\lambda \in (0, \infty)$  – параметр масштаба сигнала. Для того чтобы энергия сигнала не стремилась к бесконечности с ростом размера наблюдаемой выборки, принята следующая нормировка:

$$1/\sqrt{n} \left\| \bar{S}_n^{(k)} \right\| = 1 \quad \forall k = 1, \dots, M, \forall n = 1, 2, \dots$$

Квадратурные составляющие  $\operatorname{Re} \bar{\xi}_n = (\operatorname{Re} \xi_1, \dots, \operatorname{Re} \xi_n)^T$  и  $\operatorname{Im} \bar{\xi}_n = (\operatorname{Im} \xi_1, \dots, \operatorname{Im} \xi_n)^T$  вектора отсчетов шума  $\bar{\xi}_n$  полагаются статистически незави-

симыми с одинаковыми неизвестными маргинальными ПРВ  $p_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$ . Распределение выборки  $\bar{x}_n$  в отсутствие сигнала принадлежит семейству распределений

$$\mathbf{P}_{0,n} = \left\{ w_n(\bar{x}_n | \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} w\left(\frac{\operatorname{Re} x_i}{\sigma}\right) w\left(\frac{\operatorname{Im} x_i}{\sigma}\right), \sigma \in (0, \infty), w \in \mathbf{W} \right\}, \quad (1)$$

а при наличии  $k$ -го сигнала – семейству распределений

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k,n} &= \left\{ w_n\left(\bar{x}_n \left| \lambda, \bar{S}_n^{(k)}, \sigma \right.\right) = \\ &= w_n\left[\bar{x}_n - \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \bar{S}_n^{(k)} \left| \sigma \right.\right], w_n(\bar{x}_n | \sigma) \in \mathbf{P}_{0,n}, \lambda \in (0, \infty) \right\}, k=1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметры  $\lambda$  и  $\sigma$  приняты априорно неопределенными, для них устанавливается лишь множество ожидаемых значений без определения на нем какого-либо априорного распределения,  $\mathbf{W}$  – класс распределений с нулевым математическим ожиданием.

Для представления априорной неопределенности распределения шума используется  $q$ -точечная модель, в которой в качестве класса распределений  $\mathbf{W}$  принят класс

$$\mathbf{W}_q = \left\{ w: \int_{-1}^1 w(t) dt = q, I(w) < \infty \right\}, \quad (3)$$

где  $I(w)$  – информация Фишера о сдвиге,

$$I(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_w^2(t) w(t) dt = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi'_w(t) w(t) dt \right|,$$

$\psi_w(t) = -\frac{d}{dt} \ln w(t)$  – логарифмическая производная ПРВ  $w(t)$ ;  $q \in (0, 1]$  – параметр модели.

Для данной модели найдено распределение с минимальной информацией Фишера о сдвиге (наименее благоприятное распределение), которое играет важную роль при синтезе асимптотически робастных алгоритмов [4].

$$w_{0q}(t) = \begin{cases} \frac{C}{\cos^2(A/2)} \cos^2[At/2], & |t| \leq 1, \\ C \exp[-B(|t|-1)], & |t| > 1, \end{cases} \quad (4)$$

где параметр  $C = \cos^2(A/2)/(1+2/B)$ . Параметры  $A$  и  $B$  зависят от  $q$  и задаются системой уравнений  $B = A \operatorname{tg}(A/2)$ ,  $\int_{-1}^1 w_{0q}(t) dt = q$ .

В работах [12], [13] предложено расширение модели (3) за счет введения априорно неопределенного параметра масштаба  $\sigma$ . Расширение основано на возможности представления практически любой ПРВ в виде

$$p(t) = (1/\sigma)w(t/\sigma), \sigma \in (0, \infty), w(t) = \sigma p(\sigma t) \in \mathbf{W}_q.$$

Чтобы обеспечить принадлежность плотности  $w(\cdot)$  классу  $\mathbf{W}_q$ , необходимо определить параметр масштаба  $\sigma$  из следующего уравнения:

$$\int_{-1}^1 \sigma p(\sigma t) dt = q. \quad (5)$$

Таким образом, используя в (1) и (2) в качестве класса распределений  $\mathbf{W}$  класс  $\mathbf{W}_q$  и вычисляя параметр масштаба  $\sigma$  из выражения (5), мы используем расширенную  $q$ -точечную модель для представления априорной неопределенности наблюдаемых данных.

Задачу демодуляции сигналов сформулируем как задачу проверки многоальтернативных сложных статистических гипотез:

$$H_k : \bar{S}_n = \bar{S}_n^{(k)}, \lambda \in (0, \infty), \sigma \in (0, \infty), w \in \mathbf{W}_q, k = 1, \dots, M,$$

где  $\bar{S}_n \in \mathbb{S}_n$  – неизвестный принятый сигнал. В соответствии с результатами работы [13] для преодоления априорной неопределенности параметров  $\lambda$  и  $\sigma$  распределений (1) и (2) будем использовать принцип инвариантности к группе масштабных преобразований наблюдаемой выборки, в соответствии с которым оптимальный алгоритм отыскивается среди инвариантных к масштабным преобразованиям алгоритмов. В этом случае проверяемые гипотезы могут быть сформулированы как

$$H_k : \bar{S}_n = \bar{S}_n^{(k)}, \omega \in (0, \infty), w \in \mathbf{W}_q, k = 1, \dots, M,$$

где параметр  $\omega = \lambda/\sigma$ .

## 2. Адаптивная оптимизация АРИ-алгоритма

В работах [12] – [14] показано, что решающая функция АРИ-алгоритма демодуляции сигналов имеет вид

$$\varphi_n^{(k)}(\bar{x}_n) = \begin{cases} 1, & k = \arg \max_l T_n[\bar{x}_n, S_n^{(l)}, \hat{\sigma}(\bar{x}_n)], \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6)$$

где решающая статистика

$$T_n[\bar{x}_n, \bar{S}_n^{(l)}, \hat{\sigma}(\bar{x}_n)] = (1/\sqrt{n}) \times \\ \times \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^n S_i^{(l)} \left[ \Psi_{0q} \left( \frac{\operatorname{Re} x_i}{\hat{\sigma}(\bar{x}_n)} \right) - j \Psi_0 \left( \frac{\operatorname{Im} x_i}{\hat{\sigma}(\bar{x}_n)} \right) \right] \right\}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (7)$$

где  $\hat{\sigma}(\bar{x}_n)$  – эквивариантная и  $\sqrt{n}$  – состоятельная оценка параметра масштаба  $\sigma$  распределения шума;  $\Psi_{0q}(t) = -\frac{d}{dt} \ln w_{0q}(t)$  – логарифмическая производная наименее благоприятной ПРВ (4) для  $q$ -точечной модели.

В настоящей работе используется оценка

$$\hat{\sigma}(\bar{x}_n) = \frac{1}{2} [z_{(p)}(\operatorname{Re} \bar{x}_n) + z_{(p)}(\operatorname{Im} \bar{x}_n)], \quad (8)$$

где  $z_{(p)}(\operatorname{Re} \bar{x}_n)$  и  $z_{(p)}(\operatorname{Im} \bar{x}_n)$   $p$ -е порядковые статистики векторов  $\bar{z}(\operatorname{Re} \bar{x}_n) = (|\operatorname{Re} x_1|, \dots, |\operatorname{Re} x_n|)^T$  и  $\bar{z}(\operatorname{Im} \bar{x}_n) = (|\operatorname{Im} x_1|, \dots, |\operatorname{Im} x_n|)^T$ ;  $p = \operatorname{int}\{nq\} + 1$ ,  $\operatorname{int}\{t\}$  – целая часть числа  $t$ ;  $q$  – задаваемый заранее параметр модели (5). Несмотря на то что выражение (8) дает оценку параметра масштаба распределения аддитивной смеси сигнала и шума, при большой базе сигнала ее можно использовать в качестве приближенных оценок параметра масштаба распределения шума, так как максимальное значение сигнала обычно оказывается значительно меньше, чем среднеквадратическое значение шума. Оценка (8) является эквивариантной и  $\sqrt{n}$ -состоятельной [4], поэтому ее использование при вычислении решающей статистики (7) является оправданным.

Эффективность робастных АРИ-алгоритмов определяется средней асимптотической вероятностью  $P_e = \sum_{k=1}^m p_k P_e^{(k)}$  ошибочной демодуляции, где  $p_k$  – априорная вероятность того, что передается  $k$ -й сигнал созвездия;  $P_e^{(k)}$  – условная вероятность ошибочной демодуляции при условии, что передается  $k$ -й сигнал. Каждая вероятность  $P_e^{(k)}$  определяется предельным распределением ( $n \rightarrow \infty$ ) статистики (7) при  $l = k$ . Согласно центральной предельной теореме, предельным распределением этой статистики является гауссовское распределение со средним

$$\mu(\omega, w) = \sqrt{2}\omega \mathbf{E}_w \{ \psi'_{0q} \}$$

и дисперсией

$$\delta_w^2 = 2 \mathbf{E}_w \{ \psi_{0q}^2 \},$$

где  $\omega = \lambda/\sigma$ ,  $\lambda^2$  – энергия сигнала;  $w$  – фактическое распределение из класса  $\mathbf{W}_q$ ;  $\mathbf{E}_w \{ \cdot \}$  – оператор усреднения по распределению  $w$ ;  $\psi'_{0q} = \frac{d}{dt} \psi_{0q}(t)$ .

Средняя асимптотическая вероятность ошибочной демодуляции  $P_e$  инвариантна относительно априорных вероятностей, так как вероятности  $P_e^{(k)}$  равны из-за симметрии пространственного положения сигналов рассматриваемых созвездий относительно общего центра. Она определяется параметром

$$d(\omega, w) = \omega \frac{\mathbf{E}_w \{ \psi'_{0q} \}}{\sqrt{\mathbf{E}_w \{ \psi_{0q}^2 \}}}$$

и, таким образом, вероятность  $P_e$  зависит от параметра  $\omega$

и от фактической ПРВ  $w$ :  $P_e = P_e(\omega, w)$ .

При использовании АРИ-алгоритмов вероятность ошибочной демодуляции удовлетворяет неравенству  $P_e(\omega, w) \leq P_e(\omega, w_{0q}) \forall w \in \mathbf{W}$ . Тогда  $P_e(\omega, w_0)$  является верхней границей вероятности ошибочной демодуляции для всех  $\omega \in (0, \infty)$ .

Исходя из равенства  $|\mathbf{E}_{w_{0q}} \{ \psi'_{0q} \}| = \mathbf{E}_{w_{0q}} \{ \psi_{0q}^2 \}$  и неравенства  $\mathbf{E}_{w_{0q}} \{ \psi'_{0q} \} > 0$ , для модели (5) эта граница определяется равенством

$$d(\omega, w_{0q}) = \omega \sqrt{I(w_{0q})} = \frac{\lambda}{\sigma_q} \sqrt{I(w_{0q})}$$

и может быть рассчитана заранее для принятой модели априорной неопределенности ПРВ шума. В случае использования  $q$ -точечной модели параметр  $q \in (0, 1]$  можно выбрать произвольно. Поэтому для фактической плотности распределения шума  $p(t)$ , оптимальное значение  $q_{opt}$  этого параметра может быть определено таким образом, чтобы минимизировать вероятность ошибочной демодуляции. Тогда оптимальное значение

$$q_{opt} = \arg \max_q \left[ \frac{|\mathbf{E}_w \{\psi'_{0q}\}|}{\sigma_q \sqrt{\mathbf{E}_w \{\psi_{0q}^2\}}} \right], \quad (9)$$

где  $\sigma_q$  – параметр масштаба такой, что плотность  $w(t) = \sigma_q p(\sigma_q t)$  принадлежит классу  $\mathbf{W}_q$  модели (3) с параметром  $q$ ;  $p(\cdot)$  – фактическая ПРВ шума. Вычисление  $q_{opt}$  с помощью выражения (9) представляется затруднительным. Поэтому вместо того, чтобы использовать выражение (9), мы минимизируем верхнюю границу  $P_e(\omega, w_{0q})$ . В этом случае целевая функция имеет вид

$$h(q) = \frac{|\mathbf{E}_{w_{0q}} \{\psi'_{0q}\}|}{\sigma_q \sqrt{\mathbf{E}_{w_{0q}} \{\psi_{0q}^2\}}} = \frac{\sqrt{I(w_{0q})}}{\sigma_q}, \quad (10)$$

а оптимальное значение параметра  $q$ :  $q_{opt} = \arg \max_q [h(q)]$ .

В качестве примера рассмотрим два типа фактического распределения шума  $p(t)$ : обобщенное гауссовское распределение с ПРВ

$$p_{GG}(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\Gamma(2/\alpha)\Gamma(3/\alpha)\Gamma(1/\alpha)}} \exp \left\{ - \left[ \frac{|t|}{\sqrt{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(3/\alpha)}} \right]^\alpha \right\}, \quad (11)$$

где  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$  – гамма-функция,  $\alpha$  – параметр формы,

и  $\varepsilon$ -загрязненное распределение с ПРВ

$$p_{\varepsilon c}(t) = (1 - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^2 \right\} + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\kappa} t^2 \right\} \quad (12)$$

при  $\kappa = 100$ . Распределения (11) и (12) являются априорно неизвестными. Распределение (11) имеет конечную информацию Фишера и дисперсию равную единице для всех  $\alpha > 0,5$ . При  $\alpha = 2$  распределение (11) совпадает с гауссовским распределением, при  $\alpha = 1$  – с двусторонним распределением Лапласа. При  $\alpha < 2$  это распределение имеет более тяжелые хвосты по сравнению с гауссовским распределением. Распределение (12) также имеет конечную информацию Фишера, его дисперсия зависит от параметров  $\varepsilon$  и  $\kappa$  и равна  $\sigma_{\varepsilon c}^2 = 1 - \varepsilon + \varepsilon\kappa$ . Зависимости оптимального значения  $q_{opt}$  параметра  $q$  от параметров  $\alpha$  и  $\varepsilon$  этих распределений показаны на рис. 1, а, б соответственно.



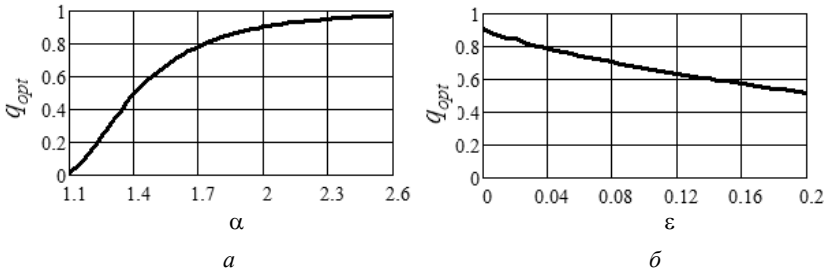


Рис. 1 – Зависимость оптимального значения  $q_{opt}$  параметра  $q$  от параметра  $\alpha$  обобщенного распределения Гаусса (а) и от параметра  $\varepsilon$   $\varepsilon$ -загрязненного распределения (б)

Fig. 1 – Dependence of the optimal value  $q_{opt}$  of the parameter  $q$  on the parameter  $\alpha$  of the generalized Gaussian distribution (a) and on the parameter  $\varepsilon$  of the  $\varepsilon$ -contaminated distribution (b)

Как видно из рис. 1, для гауссовского распределения шума ( $\alpha = 2$  и  $\varepsilon = 0$  для ПРВ (11) и (12)) оптимальное значение параметра  $q$  равно  $q_{opt} = 0,9$ .

Используя состоятельную оценку

$$\hat{h}(q) = \frac{\sqrt{I(w_{0q})}}{\hat{\sigma}_q(\bar{x}_n)} \tag{13}$$

величины (10) в качестве приближенного значения целевой функцией, мы адаптируем процедуру оптимизации алгоритма к фактической помеховой обстановке.

Таким образом процедура адаптации АРИ-алгоритма (6) по параметру  $q$  состоит в следующем. Используя вектор  $\bar{x}_n$  отсчетов наблюдаемого процесса, формируются оценки  $\hat{\sigma}_{q_j}(\bar{x}_n)$  параметра масштаба для фиксированного набора  $\{q_j, j \in J\}$  значений параметра  $q$ . Затем, с помощью целевой функции (13), находится оценка  $\hat{q}_{opt}$  оптимального значения параметра  $q$  согласно выражению

$$\hat{q}_{opt} = \arg \max_{j \in J} \frac{\sqrt{I(w_{0q_j})}}{\hat{\sigma}_{q_j}(\bar{x}_n)}.$$

Полученная оценка  $\hat{q}_{opt}$  используется в функциях безынерционного преобразования действительной и мнимой части наблюдаемого вектора отсчетов  $\Psi_{0\hat{q}_{opt}} \left[ \frac{\text{Re } x_i}{\hat{\sigma}(\bar{x}_n)} \right]$  и  $\Psi_{0\hat{q}_{opt}} \left[ \frac{\text{Im } x_i}{\hat{\sigma}(\bar{x}_n)} \right]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Соответственно в качестве оценки параметра масштаба используется оценка  $\hat{\sigma}(\bar{x}_n) = \hat{\sigma}_{\hat{q}_{opt}}(\bar{x}_n)$ . Далее на основе полученных значений вычисляется решающая статистика (7) алгоритма демодуляции (6), который становится адаптивным АРИ-алгоритмом.

Очевидно, что эффективность адаптивного алгоритма зависит от точности оценки масштабного параметра, которая, в свою очередь, зависит от размера выборки, используемой для оценки. Ниже на примере демодуляции широкополосного ФМ-2 сигнала, принимаемого на фоне аддитивного независимого шума,

будет показано, что при большой базе сигнала (больше 500) в случае гауссовского шума адаптивный АРИ-алгоритм практически не уступает по эффективности оптимальному для этого случая алгоритму на основе согласованного коррелятора, и значительно превосходит его при распределениях шума с тяжелыми хвостами.

### 3. Пример

В случае двоичной фазовой манипуляции созвездие  $\mathbb{S}_n$  состоит из двух противоположных сигналов  $\bar{S}_n^{(1)}$  и  $\bar{S}_n^{(2)}$ . Эти сигналы равновероятны, объем выборки  $n$  равен базе сигнала и

$$\bar{S}_n^{(1)} = -\bar{S}_n^{(2)} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T,$$

где  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  – известная псевдослучайная  $M$ -последовательность длины  $n$  принимающая значения из множества  $\{\pm 1\}$ .

Для сравнения с адаптивным АРИ-алгоритмом рассматривались следующие алгоритмы: алгоритм на основе согласованного коррелятора, а также оптимизированный АРИ-алгоритм, в котором вместо оценок  $\hat{q}_{opt}$  и  $\hat{\sigma}_{\hat{q}_{opt}}(\bar{x}_n)$  использовались истинные значения параметров  $q_{opt}$  и  $\sigma_{q_{opt}}$ , соответствующие фактическому распределению шума.

На рис. 2 и 3 показаны зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум для  $\varepsilon$ -загрязненного распределения шума и для обобщенного распределения Гаусса соответственно при объеме наблюдаемой выборки. Зависимости получены методом компьютерного моделирования по 100 000 экспериментов. Сплошные линии соответствуют адаптивному АРИ-алгоритму, пунктирные линии соответствуют алгоритму на основе согласованного коррелятора, штрихпунктирные линии соответствуют оптимизированному АРИ-алгоритму.

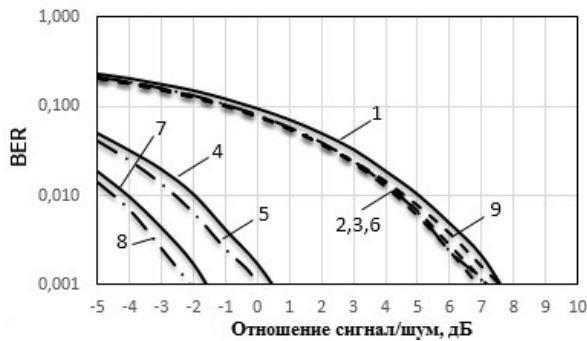


Рис. 2 – Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум в случае  $\varepsilon$ -загрязненного распределения шума с параметром  $\varepsilon = 0$  (кривые 1, 2, 3);  $\varepsilon = 0,05$  (кривые 4, 5, 6);  $\varepsilon = 0,1$  (кривые 7, 8, 9)

Fig. 2 – BER performances in the case of  $\varepsilon$ -contaminated noise distribution with parameter  $\varepsilon = 0$  (curves 1, 2, 3);  $\varepsilon = 0,05$  (curves 4, 5, 6);  $\varepsilon = 0,1$  (curves 7, 8, 9)

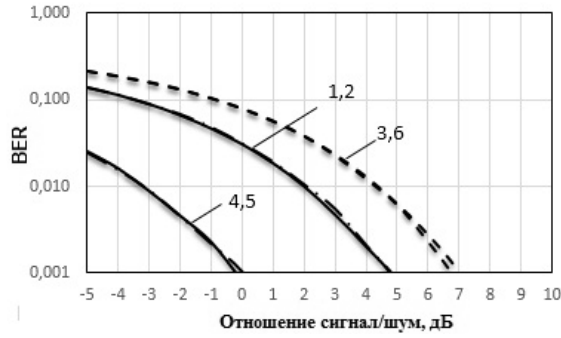


Рис. 3 – Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум в случае обобщенного гауссовского распределения шума с параметром  $\alpha=1$  (кривые 1, 2, 3);  $\alpha=0,6$  (кривые 4, 5, 6)

Fig. 3 – BER performances in the case of the generalized Gaussian noise distribution with parameter  $\alpha=1$  (curves 1, 2, 3);  $\alpha=0,6$  (curves 4, 5, 6)

Результаты моделирования показывают, что ААРИ-алгоритм, разработанный на основе расширенной  $q$ -точечной модели, обеспечивает значительный энергетический выигрыш по сравнению с алгоритмом, основанным на использовании согласованного коррелятора, при распределениях шума с тяжелыми хвостами. В случае гауссовского распределения шума ААРИ-алгоритм имеет энергетические потери, не превышающие 0,5 дБ при  $n=127$ , относительно алгоритма, на основе согласованного коррелятора. При размерах наблюдаемой выборки более 500 (рис. 4) энергетические потери адаптивного АРИ-алгоритма составляют не более 0,1 дБ.

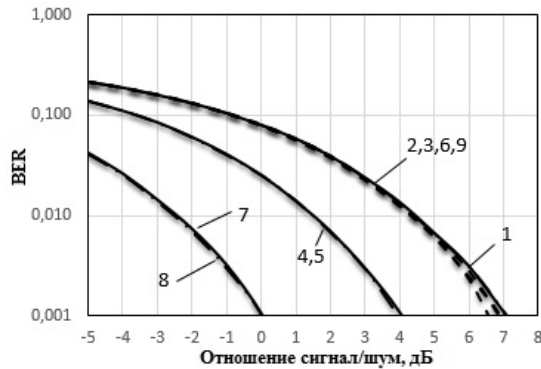


Рис. 4 – Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум адаптивного АРИ-алгоритма в случае гауссовского шума (кривые 1, 2, 3); обобщенного гауссовского распределения шума с параметром  $\alpha=1$  (кривые 4, 5, 6) и  $\epsilon$ -загрязненного распределения шума с параметром  $\epsilon=0,05$  (кривые 7, 8, 9) при  $n=511$

Fig. 4 – BER performances for adaptive ARI-algorithm in the case of Gaussian noise (curves 1, 2, 3); generalized Gaussian noise distribution with parameter  $\alpha=1$  (curves 4, 5, 6) and  $\epsilon$ -contaminated distribution with parameter  $\epsilon=0,05$  (curves 7, 8, 9) with  $n=511$

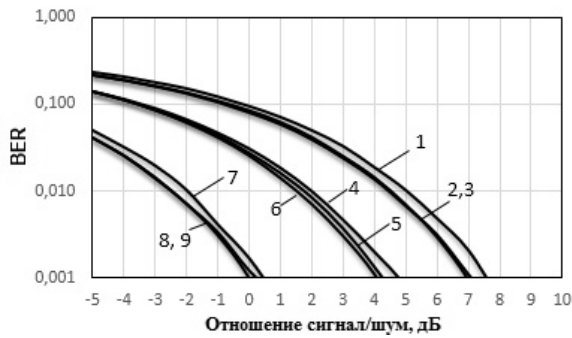


Рис. 5 – Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум адаптивного АРИ-алгоритма в случае гауссовского шума (кривые 1, 2, 3); обобщенного гауссовского распределения шума с параметром  $\alpha = 1$  (кривые 4, 5, 6) и  $\epsilon$ -загрязненного распределения шума с параметром  $\epsilon = 0,05$  (кривые 7, 8, 9)

Fig. 5 – BER performances for adaptive ARI-algorithm in the case of Gaussian noise (curves 1, 2, 3); generalized Gaussian noise distribution with parameter  $\alpha = 1$  (curves 4, 5, 6) and  $\epsilon$ -contaminated distribution with parameter  $\epsilon = 0,05$  (curves 7, 8, 9)

На рис. 5 представлены характеристики адаптивного АРИ-алгоритма, полученные при различном объеме выборки:  $n = 127$  (кривые 1, 4, 7),  $n = 511$  (кривые 2, 5, 8),  $n = 2047$  (кривые 3, 6, 9). С ростом размера наблюдаемой выборки повышается точность оценивания параметров  $q$  и  $\sigma_q$ , а следовательно, и эффективность адаптации алгоритма к распределению шума. Видно, что при  $n > 500$  вероятность ошибки на бит практически перестает зависеть от объема выборки.

### Заключение

Предложен адаптивный АРИ-алгоритм, основанный на расширенной  $q$ -точечной модели распределения шума. На примере демодуляции ФМ-2 широкополосного сигнала показано, что данный алгоритм обеспечивает значительный энергетический выигрыш по сравнению с алгоритмом, основанным на использовании согласованного коррелятора в случае распределений шума с тяжелыми хвостами. В случае гауссовского шума и большой (более 500) базы сигнала энергетические потери предложенного алгоритма не превышают 0,1 дБ.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Blackard K.L., Rappaport T.S., Bostian C.W.** Measurements and models of radio frequency impulsive noise for indoor wireless communications // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1993. – Vol. 11, N 9. – P. 991–1001.
2. **Middleton D.** Non-Gaussian noise models in signal processing for telecommunications: new methods and results for class a and class b noise models // IEEE Transactions on Information Theory. – 1999. – Vol. 45, N 4. – P. 1129–1149.
3. **Kassam S., Poor V.** Robust techniques for signal processing: a survey // Proceedings of the IEEE. – 1985. – Vol. 73. – P. 433–481.
4. **Huber P.J.** Robust statistics. – New York: John Wiley and Sons, 1981.
5. Robust statistics. The approach based on influence function / F.R. Hampel, E.M. Ronchetti, P.J. Rousseeuw, W.A. Stahel. – New York: Wiley, 1986.

6. **Mutapcic A., Kim S.-J.** Robust signal detection under model uncertainty // *IEEE Signal Processing Letters*. – 2009. – Vol. 16, N 4. – P. 287–290.
7. **Miller J.H., Thomas J.B.** Detectors for discrete-time signals in non-Gaussian noise // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 1972. – Vol. IT-18. – P. 241–250.
8. **Епанечников В.А.** Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // *Теория вероятностей и ее применения*. – 1969. – Т. 14, № 1. – С. 156–161.
9. **Aazhang B., Poor H.V.** Performance of DS/SSMA communications in impulsive channels. II. Hard limiting correlation receivers // *IEEE Transactions on Communications*. – 1988. – Vol. 36, N 1. – P. 88–97.
10. **Delic H., Nosani A.** Robust detection in DS-CDMA // *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. – 2002. – Vol. 51, N 1. – P. 155–170.
11. **Güney N., Delic H., Koca M.** Robust detection of ultra-wideband signals in Non-Gaussian noise // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. – 2006. – Vol. 54, N 4. – P. 1724–1730.
12. **Богданович В.А., Вострецов А.Г.** Применение принципов инвариантности и робастности при разработке алгоритмов демодуляции для широкополосных систем связи // *Радиотехника и электроника*. – 2009. – Т. 54, № 11. – С. 1353–1361.
13. **Богданович В.А., Вострецов А.Г.** Асимптотически робастные алгоритмы демодуляции сигналов с подавлением помех множественного доступа // *Радиотехника и электроника*. – 2010. – Т. 55, № 8. – С. 953–960.
14. **Богданович В.А., Вострецов А.Г., Коломенский К.Ю.** Робастная демодуляция широкополосных сигналов // *Радиотехника и электроника*. – 2007. – Т. 52, № 7. – С. 822–830.
15. **Franks L.E.** *Signal theory*. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969.

## ADAPTIVE DETECTION OF WIDEBAND SIGNALS IN UNCERTAIN NOISE ENVIRONMENTS

**Khailo N.S.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

An adaptive asymptotically robust invariant (AARI) detection algorithm is proposed. This algorithm is used for the detection of signals with some unknown parameters observed in additive noise with an unknown distribution. It is based on the extended model of approximately finite probability distributions (the q-point model). Adaptation is achieved by estimating and optimizing the algorithm for the actually unknown parameters of the q-point model. It is demonstrated that for the case of heavy-tailed noise distributions, the AARI detector based on the extended q-point model outperforms significantly the correlation detector. In the case of the Gaussian noise and a large-sized sample, the AARI detector provides almost the same performance as the correlation detector.

*Keywords:* adaptive signal detection; a priori uncertainty; random noise; phase-shift keying; robustness.

DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-123-134

### REFERENCES

1. Blackard K.L., Rappaport T.S., Bostian C.W. Measurements and models of radio frequency impulsive noise for indoor wireless communications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 11, no. 9, pp. 991–1001.
2. Middleton D. Non-Gaussian noise models in signal processing for telecommunications: new methods and results for class a and class b noise models *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 4, pp. 1129–1149.
3. Kassam S., Poor V. Robust techniques for signal processing: a survey. *Proceedings of the IEEE*, 1985, vol. 73, pp. 433–481.
4. Huber P.J. *Robust statistics*. New York, John Wiley and Sons, 1981.
5. Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. *Robust statistics. The approach based on influence function*. New York, Wiley, 1986.

6. Mutapcic A., Kim S.-J. Robust signal detection under model uncertainty. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 287–290.
7. Miller J.H., Thomas J.B. Detectors for discrete-time signals in non-Gaussian noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, vol. IT-18, pp. 241–250.
8. Epanechnikov V.A. Neparаметричeskaya otsenka mnogomernoi plotnosti veroyatnosti [Non-parametric estimate of multivariate probability density]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*, 1969, vol. 14, no. 1, pp. 156–161.
9. Aazhang B., Poor H.V. Performance of DS/SSMA communications in impulsive channels. II. Hard limiting correlation receivers. *IEEE Transactions on Communications*, 1988, vol. 36, no. 1, pp. 88–97.
10. Deliç H., Hocanm A. Robust detection in DS-CDMA. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2002, vol. 51, no. 1, pp. 155–170.
11. Güney N., Deliç H., Koca M. Robust detection of ultra-wideband signals in Non-Gaussian noise. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2006, vol. 54, no. 4, pp. 1724–1730.
12. Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G. Application of the invariance and robustness principles in the development of detection algorithms for wideband communications systems. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2009, vol. 54, no. 11, pp. 1283–1291. Translated from *Radiotekhnika i elektronika*, 2009, vol. 54, no. 9, pp. 1353–1361.
13. Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G. Asimptoticheski robastnye algoritmy demodulyatsii signalov s podavleniem pomekh mnozhestvennogo dostupa [Asymptotically robust algorithms of signal detection with multiple access interference mitigation]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*, 2010, vol. 55, no. 8, pp. 953–960. (In Russian)
14. Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G., Kolomenskii K.Yu. Robastnaya demodulyatsiya shirokopolosnykh signalov [Robust detection of the wideband signals]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*, 2007, vol. 52, no. 7, pp. 822–830. (In Russian)
15. Franks L.E. *Signal theory*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1969.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Хайло Никита Сергеевич** – родился в 1991 году, аспирант 2-го года обучения Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: статистическая теория обработки сигналов в условиях априорной неопределенности. Опубликовано 5 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: xfront17@bk.ru).

**Khailo Nikita Sergeevich** (b. 1991) – postgraduate student, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the statistical theory of signal processing in conditions of a priori uncertainty. He is author of 5 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, Russia. Email: xfront17@bk.ru).

*Статья поступила 25 мая 2016 г.  
Received May 25, 2016*

---

#### To Reference:

Khailo N.S. Adaptivnaya demodulyatsiya shirokopolosnykh signalov v usloviyakh neopredelennoi pomekhovoi obstanovki [Adaptive detection of wideband signals in uncertain noise environments]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2016, no. 2 (31), pp. 123–134. doi: 10.17212/1727-2769-2016-2-123-134

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК  
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Выпуск 2(31) апрель–июнь 2016**

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*

Корректор *И.Е. Семенова*

Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции

Издание соответствует коду 95 2000 ОК 005-93 (ОКП)

---

Подписано в печать 30.06.2016. Бумага офсетная. Формат 70×108 1/16

Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 11,9. Печ. л. 8,5. Изд. № 173. Заказ № 1149

---

Отпечатано в типографии

Новосибирского государственного технического университета

630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20