

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

2015

июль–сентябрь

№ 3 (28)



Выходит четыре раза в год

ISSN 1727-2769

Учредители

*Академия наук высшей школы России
Новосибирское отделение Академии наук высшей школы*

Главный редактор

А.Г. Вострецов, д-р техн. наук, проф., засл. деятель науки РФ

Заместитель главного редактора

В.Н. Васюков, д-р техн. наук, проф.

Редакционный совет

М. Грайцар, PhD, проф. (Словакия)

А. Загоскин, PhD (Великобритания)

Е.В. Ильичев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Германия)

М.Н. Клымаш, д-р техн. наук, проф. (Украина)

К. Аругюнов, д-р физ.-мат. наук

И.С. Грузман, д-р техн. наук, проф.

В.Г. Дубровский, д-р физ.-мат. наук, проф.

Б.А. Князев, д-р физ.-мат. наук, проф.

Г.В. Майер, д-р физ.-мат. наук, проф., засл. деятель науки РФ

В.К. Макуха, д-р техн. наук, проф.

В.Я. Рудяк, д-р физ.-мат. наук, проф.

С.А. Харитонов, д-р техн. наук, проф.

Г.М. Шумский, д-р техн. наук, проф.

Ответственный секретарь

Д.О. Соколова, канд. техн. наук

Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций в 2002 г. (свидетельство ПИИ № 77-11517 от 04.01.2002 г.)

Адрес редакции: 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, НГТУ, корп. 4, ком. 415,
телефон: (383) 346-15-37, факс: (383) 346-02-09. Email: danvshrf@corp.nstu.ru

© Новосибирское отделение АН ВШ, 2015 г.

SCIENTIFIC JOURNAL

**PROCEEDINGS
OF THE RUSSIAN HIGHER SCHOOL
ACADEMY OF SCIENCES**

2015

July–September

№ 3 (28)



Journal is published quarterly

ISSN 1727-2769

Journal was established by

*Russian Higher Education Academy of Science
Novosibirsk Branch of Higher Education Academy of Science*

Chief Editor

A.G. Vostretsov, D.Sc. (Eng.), Prof., Honoured Science Worker of Russian Federation

Deputy Chief Editor

V.N. Vasyukov, D.Sc. (Eng.), Prof.

Editorial Council

M. Grajcar, PhD, Prof. (Slovakia)
A. Zagoskin, PhD (United Kingdom)
E.V. Ilyichev, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof. (Germany)
M.M. Klymash, D.Sc. (Eng.), Prof. (Ukraine)
K. Arutyunov, D.Sc. (Phys.&Math.)
I.S. Gruzman, D.Sc. (Eng.), Prof.
V.G. Dubrovsky, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.
B.A. Knyazev, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.
G.V. Mayer, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof., Honoured Science Worker of Russian Federation
V.K. Makukha, D.Sc. (Eng.), Prof.
V.Ya. Rudyak, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.
S.A. Haritonov, D.Sc. (Eng.), Prof.
G.M. Shumsky, D.Sc. (Eng.), Prof.

Executive Secretary

D.O. Sokolova, C.Sc.(Eng.)

Editor Address: Office 415, 20 bld. 4, Karl Marx av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation.
Tel: +7 (383) 346-15-37. Fax: +7 (383) 346-02-09. Email: danvshrf@corp.nstu.ru

© Novosibirsk Branch of Higher Education Academy of Science, 2015 r.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Арутюнов К.Ю.

Квантовые размерные эффекты в металлических наноструктурах..... 7

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Артюшенко В.В., Киселев А.В., Степанов М.А.

Задание отражающих свойств распределенных объектов в терминах шумов координат..... 17

Бизяев А.А., Вострецов А.Г., Яковицкая Г.Е.

Регистрационно-диагностический комплекс РДК РЭМИ-3 и экспериментальные исследования разрушения горных пород в условиях подземных горных выработок Таштагольского месторождения..... 29

Вострецов А.Г., Кривецкий А.В., Радченко С.Е., Пицун Д.К.

Определение состояния квантового бита на основе переходов Джозефсона при помощи метода максимального правдоподобия..... 39

Драгунов В.П., Драгунова Л.С.

Влияние массы подвижного электрода на функционирование МЭМ систем 50

Ландовская И.Е., Фроловский В.Д., Ландовский В.В.

Соединение деталей при компьютерном моделировании сборки изделий из тканых материалов с учетом их деформационных свойств..... 61

Нейман Л.А., Нейман В.Ю.

Динамическая модель электромагнитного привода колебательного движения для систем генерирования низкочастотных вибраций..... 75

СОДЕРЖАНИЕ

Персова М.Г., Трубачева О.С.

О подходе к решению обратной задачи вызванной
поляризации при восстановлении границ аномальных
по поляризуемости объектов.....88

Рудяк В.Я., Лежнев Е.В.

Стохастическое моделирование вязкости разреженных газов 99

Хабаров В.И., Теселкин А.А., Косолапов К.П.

Планирование экспериментов для оценки матрицы
транспортных корреспонденций.....109

CONTENTS

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Arutyunov K.Yu.

Quantum size effects in metallic nanostructures 7

TECHNICAL SCIENCES

Artyushenko V.V., Kiselev A.V., Stepanov M.A.

Definition of reflective properties of distributed objects
in terms of angle noises 17

Bizyaev A.A., Vostretsov A.G., Yakovitskaya G.E.

The recording-diagnostic equipment RDK REMI-3
and experimental investigation of rock fracturing under conditions
of underground working in the Tashtagolsky field 29

Vostretsov A.G., Krivetskiy A.V., Radchenko S.E., Pitsun D.K.

3JJ Q-bit state identification using the maximum-likelihood
method 39

Dragunov V.P., Dragunova L.S.

An influence of the mobile electrode weight on functioning
MEMS 50

Landovskaya I.E., Frolovsky V.D., Landovsky V.V.

Part connection in computer simulation of the fabric product
fitting taking into account their deformation properties 61

Neyman L.A., Neyman V.Yu.

Oscillatory motion electromagnetic drive dynamic
model for low-frequency vibration generation systems 75

CONTENTS

Persova M.G., Trubacheva O.S.

On an approach to solving induced polarization inverse problems
under recovery of boundaries of an object with anomalous
polarizability88

Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V.

Statistical simulation of rarefied gas viscosity99

Khabarov V.I., Tesselkin A.A., Kosolapov K.P.

Design of experiments for transport correspondence matrix estimation109

УДК 538.94

**КВАНТОВЫЕ РАЗМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ
В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОСТРУКТУРАХ****К.Ю. Арутюнов**

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский институт электроники и математики,
Институт физических проблем РАН им. П.Л. Капицы*

При достижении геометрических размеров некоего объекта определенных характерных масштабов начинают проявляться явления, связанные с пониженной размерностью системы. Современные нанотехнологические методы позволяют воспроизводимо изготавливать твердотельные структуры суб-100 нм размеров, где уже могут давать ощутимый вклад различные квантовые размерные эффекты. В данной работе использовался метод взрывной электроннолучевой литографии и направленного вакуумного напыления для изготовления металлических нанопроводов из висмута (полуметалл) и титана (сверхпроводник). Далее физическим травлением в направленной плазме аргона сечение нанопроводов последовательно уменьшалось. Между актами травления измерялись электрические свойства структур при низких температурах, позволяющие проследить развитие соответствующих квантовых размерных эффектов. В висмутовых наноструктурах с уменьшением их поперечных размеров были обнаружены осцилляции сопротивления и резкое его увеличение при достижении суб-70 нм масштабов. Эффект может быть интерпретирован как квантовый размерный эффект, связанный с квантованием энергетического спектра электронов проводимости. В сверхпроводящих системах с уменьшением сечения нанопровода заметно увеличивалась ширина сверхпроводящего перехода. В самых тонких образцах конечное сопротивление наблюдалось при температурах, существенно меньших, чем критическая температура материала. Феномен может быть также объяснен некоей разновидностью квантового размерного эффекта для квазиодномерного сверхпроводника – эффектом квантового проскальзывания фазы. Оба явления находятся в хорошем согласии с существующими модельными представлениями. Наличие квантовых размерных эффектов накладывает фундаментальные ограничения на использование наноэлектронных элементов сверхмалых размеров.

Ключевые слова: квазиодномерные металлические каналы, размерное квантование, неравновесная сверхпроводимость, нанотехнология.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-7-16

Введение

Постоянная тенденция на увеличение степени интеграции микро- и наноэлектронных цепей предполагает, что основные свойства базовых элементов остаются качественно неизменными при соответствующем сокращении размеров. Одна из серьезнейших проблем современной электронной инженерии – катастрофический рост тепловыделения, достигающий в последних поколениях микропроцессоров впечатляющей величины порядка 100 Вт/см². Радикальным решением, снимающим проблему джоулевого разогрева, может быть использование сверхпроводящих

Статья подготовлена в ходе проведения исследования (№ 15-01-0153) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2015–2016 гг. и с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.

материалов в критических узлах системы. Другой проблемой является электрической пробой и/или квантовое туннелирование в диэлектрических слоях гибридных элементов (транзисторы, конденсаторы) сверхмалых размеров. На решение этой проблемы – разработку технологии изготовления «стойких» диэлектрических слоев нанометровых толщин – в настоящее время выделяются большие средства и затрачиваются огромные усилия. Однако, учитывая фундаментальный характер проблемы, трудно ожидать серьезного прогресса. Помимо обозначенных чисто «классических» проблем, миниатюризация электронных блоков неизбежно приводит к возникновению принципиальных ограничений, связанных с различными размерными, в том числе – квантовыми, эффектами [1].

В настоящей работе изучается влияние уменьшения сечения металлических нанопроводов на их электрическую проводимость. Нами были исследованы системы с нормальной электронной проводимостью (висмут) и сверхпроводящие образцы (титан), где ток переносится куперовскими парами электронов. И в том, и в другом случае удается показать, что при достижении определенных размеров электрические свойства таких объектов начинают радикально отличаться от поведения массивных проводников. В тонких каналах из нормального металла квантование энергетических уровней электронов проводимости приводит к периодическим осцилляциям сопротивления и его резкому увеличению при достижении некоего критического диаметра. В сверхпроводящих нанопроводах квантовые флуктуации параметра порядка приводят к существенному уширению формы сверхпроводящего перехода и в самых тонких образцах – к конечному сопротивлению при температурах, существенно меньших, чем критическая температура массивного материала.

1. Эксперимент

Металлические нанопровода изготавливались стандартным методом взрывной электроннолучевой литографии и направленного вакуумного напыления электронной пушкой. Титан напылялся в вакууме порядка 10^{-9} мБар на подложку из оксидированного кремния. Висмутовые пленки осаждались в вакууме порядка 10^{-6} мБар на подогреваемую до температуры $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ слюдяную подложку. Для обеспечения стекания заряда, перед загрузкой в камеру электронного литографа слюдяные подложки с резистом дополнительно покрывались ~ 5 нм слоем алюминия. Типичный размер образца, предназначенного для проведения измерений сопротивления 4-контактным методом, составлял $d = 40$ нм (толщина) $\times w = 60$ нм (ширина) $\times L = 5$ мкм (длина) для титана и 100 нм $\times 300$ нм $\times 1$ мкм для висмута. Перед проведением электрических измерений все наноструктуры тщательно анализировались при помощи растрового электронного и сканирующего силового микроскопов (рис. 1). Только те образцы, которые не обнаруживали очевидных структурных дефектов, исследовались далее.

Электрические измерения проводились автоматизированной системой при низких и сверхнизких температурах в криостате с жидким гелием и/или рефрижераторе растворения He^3He^4 . В более ранних работах та же самая измерительная установка и многоступенчатая система радиочастотных фильтров использовалась при измерениях вольт-амперных характеристик (ВАХ) туннельных контактов металл–изолятор–сверхпроводник. Анализ формы таких ВАХ позволяет получить электронную температуру образца, которая в наших измерениях превосходила фонную температуру не более чем на 15 мК при базовой температуре порядка 20 мК [2–4]. При регистрации характеристик при фиксированной температуре температурный контроллер с пропорционально-интегрально-дифференциальной обратной связью обеспечивал стабильность поддержания температуры на уровне ± 1 мК.

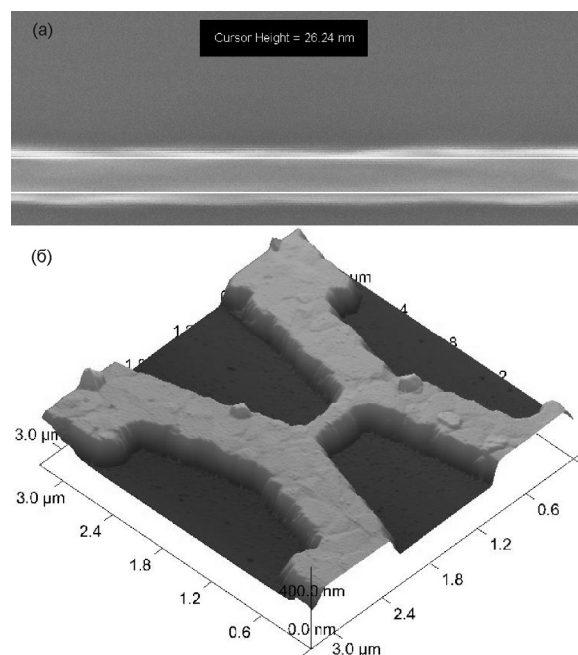


Рис. 1 – Микрофотография фрагмента титанового нанопровода, полученная растровым электронным микроскопом (а); микрофотография фрагмента висмутовой наноструктуры, полученная сканирующим силовым микроскопом (б)

Fig. 1 – SEM image of a typical titanium nanowire (a); AFM image of a bismuth nanostructure (b)

После каждого цикла измерений электрического сопротивления образцы вынимались из криостата и помещались в вакуумную камеру, оборудованную ионной пушкой. Физическим травлением в направленной низкоэнергетической плазме аргона сечение нанопроводов последовательно уменьшалось. Предварительная калибровка на сонпыленных тонких пленках и анализ профиля при помощи сканирующего силового микроскопа позволяют контролированно, с шагом в несколько нанометров, уменьшать эффективное сечение $\sigma = dw$ наноструктуры, достигая суб-10 нм размеров [5]. Примечательно, что метод позволяет достигать шероховатости поверхности на уровне ± 1 нм [6]. Низкая энергия бомбардирующих ионов инертного газа $\sim 0,5$ кэВ обеспечивает крайне низкую дефектность поверхности на уровне нескольких атомных слоев.

2. Квантовый размерный эффект в висмутовых наноструктурах

Примером проявления квантовых свойств электрона с массой m_e является квантование его энергетических уровней при помещении в «потенциальную яму» с характерным размером a :

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2 m_e} n^2, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

Формально, квантование энергетических уровней должно проявляться и для электронов проводимости с эффективной массой m^* . С уменьшением характерного размера a (толщины пленки или диаметра провода) при равенстве энергий n -го

уровня и энергии Ферми E_F должна наблюдаться особенность кинетических свойств электронов – например, электрической проводимости. Однако для типичных металлов с эффективной массой $m^* \approx m_e$ и энергией Ферми E_F порядка нескольких эВ элементарный расчет показывает, что квантование спектра становится заметным на масштабах порядка межатомного расстояния. Очевидно, что экспериментальное наблюдение соответствующего явления в таких материалах весьма затруднительно [7].

Квантовые размерные эффекты (КРЭ) должны особо явно проявляться в металлах с малой эффективной массой m^* и энергией Ферми E_F – например, в висмуте или сурьме. В первых экспериментах по наблюдению КРЭ в висмуте исследовалась электрическая проводимость тонких висмутовых пленок [8–11]. В самом деле, удалось показать, что с изменением толщины пленки проводимость меняется немонокотным образом. Однако удовлетворительного согласия между экспериментальными данными и предсказаниями теории в тех ранних экспериментах установить не удалось. Модельное описание эксперимента затруднено по причине сильной анизотропии спектра висмута. Поверхность Ферми висмута представляет из себя сложную многосвязную структуру, состоящую из трех электронных («легкие» L-электроны) и одной дырочной («тяжелые» T-дырки) поверхностей. Для однозначной интерпретации необходимо изготовить монокристаллическую структуру с известной ориентацией относительно кристаллографических осей, что достаточно проблематично.

В более поздних работах было показано, что в квазиодномерных висмутовых каналах, наиболее «выгодно» ориентированных вдоль соответствующей кристаллографической оси [10–12], можно ожидать перехода металл–диэлектрик, связанного с выходом нижнего уровня E_1 на уровень Ферми при диаметрах нанопровода порядка 50 нм [12]. До достижения этого критического размера КРЭ будет проявляться как осцилляции проводимости, соответствующие равенству энергии $E_n(\sigma)$ и энергии Ферми, достаточно жестко фиксированной «тяжелыми» T-дырками, размерным квантованием спектра которых можно пренебречь [13–14].

В этой работе мы использовали метод последовательного уменьшения диаметра висмутового нанопровода травлением в направленном пучке низкоэнергетической плазмы инертного газа [5]. Стартуя с эффективного диаметра $\sigma^{1/2} = (dw)^{1/2} \approx 250$ нм, где d – толщина, w – ширина образца, нам удалось проследить зависимость сопротивления от эффективного сечения висмутового нанопровода вплоть до 20 нм масштабов. После каждого акта ионного травления размеры образца контролировались силовым микроскопом атомного разрешения. Результирующая погрешность измерения сечения образца порядка ~ 2 нм определяется двумя основными факторами. Первый – проблема нахождения иглой силового микроскопа границы раздела металла и (травленной) подложки. Второй – так называемый эффект деконволюции изображения, связанный с конечными размерами иглы, который особенно негативно проявляется при анализе топографии трехмерных объектов.

Типичная зависимость электрического сопротивления R висмутового нанопровода от эффективного диаметра σ показана на рис. 2. При температурах жидкого гелия хорошо прослеживаются немонокотность зависимости $R(\sigma)$ и резкое увеличение сопротивления при диаметрах $\sigma^{1/2} \sim 50$ нм, которая нами интерпретируется как проявление КРЭ. Нами были затрачены значительные усилия для получения висмутовых наноструктур с размером центральной части образца в виде единичного монокристаллита с размером порядка нескольких микрометров. Тем не менее, по всей видимости, нам так и не удалось реализовать ситуации, когда вклад в электрическое сопротивление дает только центральная (монокристаллическая)

часть образца. Подводящие электроды, выполненные в конфигурации для 4-контактных измерений, изготовлены из того же самого материала – висмута (рис. 1, б). Исходя из сказанного, к сожалению, наши результаты могут рассматриваться скорее как качественная демонстрация наличия КРЭ, а количественное сравнение с теорией проблематично из-за неопределенности кристаллографической ориентации «тела» образца и вклада подводящих контактов.

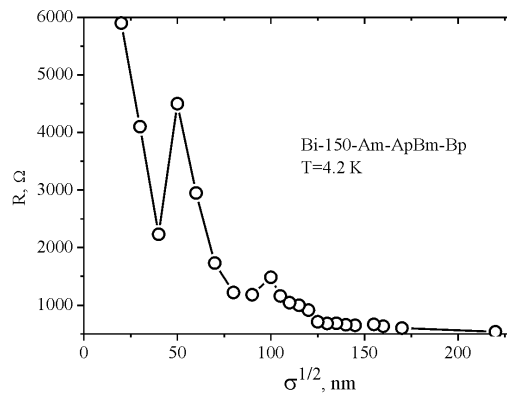


Рис. 2 – Зависимость сопротивления от эффективного сечения висмутового нанопровода после нескольких актов ионного травления

Fig. 2 – Resistance vs. effective diameter for the same bismuth nanowire after several sessions of ion milling

3. Квантовые флуктуации в титановых нанопроводах

С развитием нанотехнологий за последнее время значительно увеличился интерес к проблеме квазиодномерной сверхпроводимости [15]. Один из наиболее интересных явлений – эффект проскальзывания фазы, приводящий к появлению конечного сопротивления в тонких сверхпроводящих каналах. Проскальзывание фазы – быстрое зануление модуля параметра порядка $\Delta = |\Delta|e^{i\phi}$ и одновременное «прокручивание» его фазы ϕ на $\sim 2\pi$ – может быть стимулировано термическими [15–17] (thermally activate phase slips TAPS) и квантовыми флуктуациями [15, 18–19] (quantum phase slip QPS). В первом случае конечное падение напряжения V_{eff} на образце наблюдается в непосредственной близости от критической температуры $T \sim T_c$ и описывается выражением [15]:

$$V_{\text{eff}} = \frac{8\sqrt{6\pi}}{e} k_B T \frac{L}{\xi(T)} \sqrt{\frac{\delta F}{k_B T}} e^{-\frac{\delta F}{k_B T}} \sinh \left[\frac{\pi h I}{2e k_B T} \right], \quad (2)$$

где I – измерительный ток; δF – энергия потенциального барьера, разделяющего состояния с разницей фаз $\delta\phi = 2\pi$; $\xi(T)$ – зависящая от температуры длина когерентности [15–17, 20]. Ранние эксперименты в тонких монокристаллах олова подтвердили наличие вклада термических флуктуаций (2) в области $\delta T \sim 10$ мК ниже критической температуры [21, 22].

Более поздние исследования показали, что квантовая природа сверхпроводимости приводит к возможности проскальзывания фазы за счет квантовых флуктуаций параметра порядка, которые должны присутствовать при любых температурах с частотой [15, 18–19]:

$$\Gamma_{QPS} = \frac{S_{QPS}}{(h/\Delta)\xi(T)} L e^{-S_{QPS}}, \quad (3)$$

где действие $S_{QPS} = A(R_Q/R_N)(L/\xi(T))$; $R_Q = h/(2e)^2 = 6,47$ кОм; R_N – сопротивление образца в нормальном состоянии; $A \approx 1$ – численная константа. В последнее десятилетие эффект квантового проскальзывания фазы активно исследовался [15]. Например, было продемонстрировано, что этот механизм приводит к подавлению незатухающих экранирующих токов в сверхпроводящих кольцах мезоскопических размеров [23] и возникновению кулоновской блокады в сверхтонких сверхпроводящих каналах, помещенных в высокоомное окружение [24, 25].

В настоящей работе мы исследовали форму сверхпроводящего перехода $R(T)$ тонких титановых каналов. В типичной для таких экспериментов конфигурации стабилизации измерительного тока I эффективное сопротивление, задаваемое процессом квантовых проскальзываний фазы (3), может быть записано как

$$R_{QPS}(T) \equiv \frac{V_{\text{eff}}}{I} = \frac{h\Gamma_{QPS}}{2eI}. \quad (4)$$

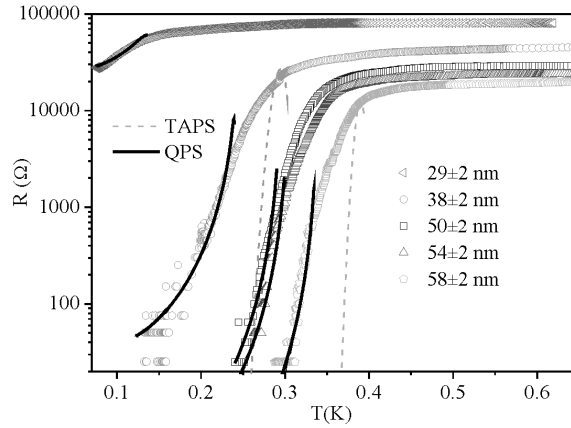


Рис. 3 – Зависимость сопротивления от температуры одного и того же титанового нанопровода после нескольких актов ионного травления. Эффективный диаметр каждого образца указан на рисунке. Сплошные линии соответствуют модели квантовых проскальзываний фазы для каждого образца. Штрихованные линии соответствуют модели термических активаций и построены для двух образцов – 38 и 58 нм

Fig. 3 – Resistance vs. temperature for the same titanium nanowire after several sessions of ion sputtering. The effective diameters of each sample are indicated in the plot. Solid lines correspond to QPS model for each sample. Dashed lines are fits using TAPS model and are plotted for sample 38 and 58 nm

Четкое разделение вклада квантовых флуктуаций (4) от вклада термического механизма (2) возможно при температурах, существенно ниже критической $T \ll T_c$, где вероятность последнего становится неизмеримо малой. Типичная зависимость сопротивления от температуры одного и того же титанового нанопровода после нескольких актов ионного травления приведена на рис. 3. Хорошо видно, что при

низких температурах термический механизм (2) – штрихованные линии на рис. 3 – дает существенно меньшие значения эффективного сопротивления по сравнению с данными эксперимента. В то время как квантовый механизм (3–4) – сплошные линии на рис. 3 – дает вполне разумное согласие с экспериментом. Следует отметить, что сравнение с экспериментом вкладов, определяемых процессами проскальзывания фазы – термического (2) или квантового (3) – строго говоря, правомочно в пределе, когда оба процесса являются «редкими» или, формально, когда эффективное сопротивление образца $R(T) \ll R_N$.

Заключение

В работе экспериментально исследовались температурные зависимости сопротивления висмутовых и титановых нанопроводов. В висмутовых наноструктурах с уменьшением их поперечных размеров были обнаружены осцилляции сопротивления и резкое его увеличение при достижении суб-70 нм масштабов. Эффект может быть интерпретирован как квантовый размерный эффект, связанный с квантованием энергетического спектра электронов проводимости. В сверхпроводящих титановых системах с уменьшением сечения нанопровода заметно увеличивалась ширина сверхпроводящего перехода. Феномен может быть объяснен эффектом квантового проскальзывания фазы. Оба явления находятся в хорошем согласии с существующими модельными представлениями. Наличие квантовых размерных эффектов накладывает фундаментальные ограничения на использование нанoeлектронных элементов сверхмалых размеров.

Благодарности

Автор хочет выразить благодарность М. Згирски, Л. Лейно, Я. Лехтинен, К.-П. Рииконен и П. Ялканен, без участия и помощи которых появление этой работы не было бы возможным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tringides M.C., Jatochowski M., Bauer E.** Quantum size effects in metallic nanostructures // *Physics Today*. – 2007. – Vol. 60, iss. 4. – P. 50–54. – doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2731973>.
2. **Arutyunov K.Yu., Auraneva H.-P., Vasenko A.S.** Spatially resolved measurement of nonequilibrium quasiparticle relaxation in superconducting Al // *Physical Review B*. – 2011. – Vol. 83, iss. 10. – P. 104509-1–104509-7. – doi: [10.1103/PhysRevB.83.104509](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.104509).
3. Microrefrigeration by quasiparticle tunneling in NIS and SIS junctions / J.P. Pekola, A.J. Manninen, M.M. Leivo, K.Yu. Arutyunov, J.K. Suoknuuti, T.I. Suppala, B. Collaudin // *Physica B: Condensed Matter*. – 2000. – Vol. 280, iss. 1–4. – P. 485–490. – doi: [10.1016/S0921-4526\(99\)01842-6](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(99)01842-6).
4. **Arutyunov K.Yu., Hongisto T.T.** Normal-metal-insulator-superconductor interferometer // *Physical Review B*. – 2004. – Vol. 70, iss. 6. – P. 064514-1–064514-6. – doi: [10.1103/PhysRevB.70.064514](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.70.064514).
5. Ion beam shaping and downsizing of nanostructures / M. Zgirski, K.-P. Riikonen, V. Tuboltsev, P. Jalkanen, T.T. Hongisto, K.Yu. Arutyunov // *Nanotechnology*. – 2008. – Vol. 19, N 5. – P. 055301-1–055301-6. – doi: [10.1088/0957-4484/19/05/055301](https://doi.org/10.1088/0957-4484/19/05/055301).
6. Evidence of quantum phase slip effect in titanium nanowires / J.S. Lehtinen, T. Sajavaara, K.Yu. Arutyunov, M.Yu. Presnjakov, A. Vasiliev // *Physical Review B*. – 2012. – Vol. 85, iss. 9. – P. 094508-1–094508-7. – doi: [10.1103/PhysRevB.85.094508](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.094508).
7. **Rubio R., Agraït N., Vieira S.** Atomic-sized metallic contacts: mechanical properties and electronic transport // *Physical Review Letter*. – 1996. – Vol. 76, iss. 13. – P. 2302–2305. – doi: [10.1103/PhysRevLett.76.2302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.2302).
8. **Ogrin Yu.V., Lutskii V.N., Elinson M.I.** Observation of quantum size effects in thin bismuth films // *JETP Letters*. – 1966. – Vol. 3, iss. 3. – P. 71–73.

9. **Sandomirskii V.B.** Quantum size effect in a semimetal film // Soviet Physics JETP. – 1967. – Vol. 25, N 1. – P. 101–106.
10. **Komnik Yu.F., Bukhshtab E.I.** Observation of the quantum and classical size effects in polycrystalline thin bismuth films // Soviet Physics JETP. – 1968. – Vol. 27, N 1. – P. 34–37.
11. **Duggal V.P., Rup R.** Thickness-dependent oscillatory behavior of resistivity and Hall coefficient in thin single-crystalline bismuth films // Journal of Applied Physics. – 1969. – Vol. 40, iss. 2. – P. 492–495. – doi: 10.1063/1.1657426.
12. **Lin Y.-M., Sun X., Dresselhaus M.S.** Theoretical investigation of thermoelectric transport properties of cylindrical Bi nanowires // Physical Review B. – 2000. – Vol. 62, iss. 7. – P. 4610–4623. – doi: 10.1103/PhysRevB.62.4610.
13. **Farhangfar S.** Quantum size effects in a one-dimensional semimetal // Physical Review B. – 2006. – Vol. 74, iss. 20. – P. 205318-1–205318-5. – doi: 10.1103/PhysRevB.74.205318.
14. **Farhangfar S.** Quantum size effects in solitary wires of bismuth // Physical Review B. – 2007. – Vol. 76, iss. 20. – P. 205437-1–205437-5. – doi: 10.1103/PhysRevB.76.205437.
15. **Arutyunov K.Yu., Golubev D.S., Zaikin A.D.** Superconductivity in one dimension // Physics Reports. – 2008. – Vol. 464, iss.1–2. – P. 1–70. – doi: 10.1016/j.physrep.2008.04.009.
16. **Langer J.S., Ambegaokar V.** Intrinsic resistive transition in narrow superconducting channels // Physical Review. – 1967. – Vol. 164, iss. 2. – P. 498–510. – doi: 10.1103/PhysRev.164.498.
17. **McCumber D.E., Halperin B.I.** Time scale of intrinsic resistive fluctuations in thin superconducting wires // Physical Review B. – 1970. – Vol. 1, iss. 3. – P. 1054–1070. – doi: 10.1103/PhysRevB.1.1054.
18. Quantum phase slips and transport in ultrathin superconducting wires / Zaikin A.D., Golubev D.S., A. van Otterlo, G.T. Zimányi // Physical Review Letters. – 1997. – Vol. 78, iss. 8. – P. 1552–1555. – doi: 10.1103/PhysRevLett.78.1552.
19. **Golubev D.S., Zaikin A.D.** Quantum tunneling of the order parameter in superconducting nanowires // Physical Review B. – 2001. – Vol. 64, iss. 1. – P. 014504-1–014504-14. – doi: 10.1103/PhysRevB.64.014504.
20. **Golubev D.S., Zaikin A.D.** Thermally activated phase slips in superconducting nanowires // Physical Review B. – 2008. – Vol. 78, iss. 14. – P. 144502-1–144502-8. – doi: 10.1103/PhysRevB.78.144502.
21. **Lukens J.E., Warburton R.J., Webb W.W.** Onset of quantized thermal fluctuations in one-dimensional superconductors // Physical Review Letters. – 1970. – Vol. 25, iss. 17. – P. 1180–1183. – doi: 10.1103/PhysRevLett.25.1180.
22. **Newbower R.S., Beasley M.R., Tinkham M.** Fluctuation effects on the superconducting transition of tin whisker crystals // Physical Review B. – 1972. – Vol. 5, iss. 3. – P. 864–867. – doi: 10.1103/PhysRevB.5.864.
23. Quantum phase slip phenomenon in ultra-narrow superconducting nanorings / K.Yu. Arutyunov, T.T. Hongisto, J.S. Lehtinen, L.I. Leino, A.L. Vasiliev // Scientific Reports. – 2012. – Vol. 2. – P. 293-1–293-7. – doi: 10.1038/srep00293.
24. **Lehtinen J.S., Zakharov K., Arutyunov K.** Coulomb blockade and Bloch oscillations in superconducting Ti nanowires // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 109, iss. 18. – P. 187001-1–187001-5. – doi: 10.1103/PhysRevLett.109.187001.
25. **Hongisto T.T., Zorin A.B.** Single-charge transistor based on the charge-phase duality of a superconducting nanowire circuit // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 108, iss. 9. – P. 097001-1–097001-5. – doi: 10.1103/PhysRevLett.108.097001.

QUANTUM SIZE EFFECTS IN METALLIC NANOSTRUCTURES

Arutyunov K.Yu.

*National Research University Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Moscow, Russian Federation
P.L. Kapitza Institute for Physical Problems RAS, Moscow, Russian Federation*

Quantum size phenomena develop when the dimension(s) of a system approach certain characteristic scales. Modern nanotechnology enables routine and reproducible fabrication of nanostructures with sub-100 nm features where such effects might be pronounced. In this research we used lift-off lithography and vacuum metal deposition to fabricate bismuth (semimetal) and

titanium (superconductor) nanowires. Then low energy argon ion beam etching was used to progressively reduce the cross section of the structures. Electron transport properties were measured at low temperatures between the sessions of etching. Oscillations of electric resistance and its pronounced increase below ~ 70 nm scales were observed when bismuth nanowire cross section was reduced. The observation can be interpreted as a manifestation of electron spectra size quantization in narrow semimetal channels. We observed broadening of the resistive transition in superconductors with reduction of the nanowire cross section. In the thinnest samples finite resistance was observed even at temperatures much lower than the bulk critical temperature. The phenomenon can be understood as manifestation of the quantum phase slip effect specific for ultra narrow superconducting channels. Both quantum size effects (in semimetals and superconductors) are in good agreement with the existing models. The existence of quantum size phenomena in metallic systems imposes fundamental limitations on the utilization of such ultra-small components in nanoelectronic circuits.

Keywords: quasi-one-dimensional metallic channels, size quantization, non-equilibrium superconductivity, nanotechnology

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-7-16

REFERENCES

1. Tringides M.C., Jatochowski M., Bauer E. Quantum size effects in metallic nanostructures. *Physics Today*, 2007, vol. 60, iss. 4, pp. 50–54. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2731973>
2. Arutyunov K.Yu., Auraneva H.-P., Vasenko A.S. Spatially resolved measurement of nonequilibrium quasiparticle relaxation in superconducting Al. *Physical Review B*, 2011, vol. 83, iss. 10, pp. 104509-1–104509-7. doi: 10.1103/PhysRevB.83.104509
3. Pekola J.P., Manninen A.J., Leivo M.M., Arutyunov K.Yu., Suoknuuti J.K., Suppala T.I., Collaudin B. Microrefrigeration by quasiparticle tunneling in NIS and SIS junctions. *Physica B: Condensed Matter*, 2000, vol. 280, iss. 1–4, pp. 485–490. doi: 10.1016/S0921-4526(99)01842-6
4. Arutyunov K.Yu., Hongisto T.T. Normal-metal-insulator-superconductor interferometer. *Physical Review B*, 2004, vol. 70, iss. 6, pp. 064514-1–064514-6. doi: 10.1103/PhysRevB.70.064514
5. Zgirski M., Riikonen K.-P., Tuboltsev V., Jalkanen P., Hongisto T.T., Arutyunov K.Yu. Ion beam shaping and downsizing of nanostructures. *Nanotechnology*, 2008, vol. 19, no. 5, pp. 055301-1–055301-6. doi: 10.1088/0957-4484/19/05/055301
6. Lehtinen J.S., Sajavaara T., Arutyunov K.Yu., Presnjakov M.Yu., Vasiliev A. Evidence of quantum phase slip effect in titanium nanowires. *Physical Review B*, 2012, vol. 85, iss. 9, pp. 094508-1–094508-7. doi: 10.1103/PhysRevB.85.094508
7. Rubio R., Agrait N., Vieira S. Atomic-Sized Metallic Contacts: Mechanical Properties and Electronic Transport. *Physical Review Letter*, 1996, vol. 76, iss. 13, pp. 2302–2305. doi: 10.1103/PhysRevLett.76.2302
8. Ogrin Yu.V., Lutskii V.N., Elinson M.I. Observation of quantum size effects in thin bismuth films. *JETP Letters*, 1966, vol. 3, iss. 3, pp. 71–73.
9. Sandomirskii V.B. Quantum size effect in a semimetal film. *Soviet Physics JETP*, 1967, vol. 25, no. 1, pp. 101–106.
10. Komnik Yu.F., Bukhshtab E.I. Observation of the quantum and classical size effects in polycrystalline thin bismuth films. *Soviet Physics JETP*, 1968, vol. 27, no. 1, pp. 34–37.
11. Duggal V.P., Rup R. Thickness-dependent oscillatory behavior of resistivity and Hall coefficient in thin single-crystalline bismuth films. *Journal of Applied Physics*, 1969, vol. 40, iss. 2, pp. 492–495. doi: 10.1063/1.1657426.
12. Lin Y.-M., Sun X., Dresselhaus M.S. Theoretical investigation of thermoelectric transport properties of cylindrical Bi nanowires. *Physical Review B*, 2000, vol. 62, iss. 7, pp. 4610–4623. doi: 10.1103/PhysRevB.62.4610
13. Farhangfar S. Quantum size effects in a one-dimensional semimetal. *Physical Review B*, 2006, vol. 74, iss. 20, pp. 205318-1–205318-5. doi: 10.1103/PhysRevB.74.205318
14. Farhangfar S. Quantum size effects in solitary wires of bismuth. *Physical Review B*, 2007, vol. 76, iss. 20, pp. 205437-1–205437-5. doi: 10.1103/PhysRevB.76.205437
15. Arutyunov K.Yu., Golubev D.S., Zaikin A.D. Superconductivity in one dimension. *Physics Reports*, 2008, vol. 464, iss. 1–2, pp. 1–70. doi: 10.1016/j.physrep.2008.04.009

16. Langer J.S., Ambegaokar V. Intrinsic resistive transition in narrow superconducting channels. *Physical Review*, 1967, vol. 164, iss. 2, pp. 498–510. doi: 10.1103/PhysRev.164.498
17. McCumber D.E., Halperin B.I. Time scale of intrinsic resistive fluctuations in thin superconducting wires. *Physical Review B*, 1970, vol. 1, iss. 3, pp. 1054–1070. doi: 10.1103/PhysRevB.1.1054
18. Zaikin A.D., Golubev D.S., Otterlo A. van, Zimányi G.T. Quantum phase slips and transport in ultrathin superconducting wires. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 78, iss. 8, pp. 1552–1555. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.1552
19. Golubev D.S., Zaikin A.D. Quantum tunneling of the order parameter in superconducting nanowires. *Physical Review B*, 2001, vol. 64, iss. 1, pp. 014504-1–014504-14. doi: 10.1103/PhysRevB.64.014504
20. Golubev D.S., Zaikin A.D. Thermally activated phase slips in superconducting nanowires. *Physical Review B*, 2008, vol. 78, iss. 14, pp. 144502-1–144502-8. doi: 10.1103/PhysRevB.78.144502
21. Lukens J.E., Warburton R.J., Webb W.W. Onset of quantized thermal fluctuations in one-dimensional superconductors. *Physical Review Letters*, 1970, vol. 25, iss. 17, pp. 1180–1183. doi: 10.1103/PhysRevLett.25.1180
22. Newbower R.S., Beasley M.R., Tinkham M. Fluctuation effects on the superconducting transition of tin whisker crystals. *Physical Review B*, 1972, vol. 5, iss. 3, pp. 864–867. doi: 10.1103/PhysRevB.5.864
23. Arutyunov K.Yu., Hongisto T.T., Lehtinen J.S., Leino L.I., Vasiliev A.L. Quantum phase slip phenomenon in ultra-narrow superconducting nanorings. *Scientific Reports*, 2012, vol. 2, pp. 293-1–293-7. doi: 10.1038/srep00293
24. Lehtinen J.S., Zakharov K., Arutyunov K. Coulomb blockade and Bloch oscillations in superconducting Ti nanowires. *Physical Review Letters*, 2012, vol. 109, iss. 18, pp. 187001-1–187001-5. doi: 10.1103/PhysRevLett.109.187001
25. Hongisto T.T., Zorin A.B. Single-charge transistor based on the charge-phase duality of a superconducting nanowire circuit. *Physical Review Letters*, 2012, vol. 108, iss. 9, pp. 097001-1–097001-5. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.097001

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Арутюнов Константин Юрьевич – родился в 1962 году, д-р физ.-мат. наук, профессор Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики». Область научных интересов: нанотехнология, физика низких температур, мезоскопика. Опубликовано более 100 научных работ. (Адрес: 109028, Россия, Москва, улица Таллинская, дом 34. Email: karutyunov@hse.ru).

Arutyunov Konstantin Yurievich (b. 1962) – Doctor of Science (Phys.& Math.), professor, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research University Higher School of Economics. His research interests are currently focused on nanotechnology, low temperature physics and mesoscopics. He is author of more than 100 scientific papers. (Address: 34, Tallinskaya street, Moscow, 109028, Russian Federation. Email: karutyunov@hse.ru).

*Статья поступила 3 июня 2015 г.
Received June 3, 2015*

To Reference:

Arutyunov K. Yu. Kvantovye razmernyye efekty v metallicheskih nanostrukturakh [Quantum size effects in metallic nanostructures]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 7–16. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-7-16

УДК 621.396.96

ЗАДАНИЕ ОТРАЖАЮЩИХ СВОЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ В ТЕРМИНАХ ШУМОВ КООРДИНАТ

В.В. Артюшенко, А.В. Киселев, М.А. Степанов

Новосибирский государственный технический университет

Рассмотрено задание отражающих свойств поверхностно распределенных объектов через параметры распределения шумов координат. При этом поверхность отражающего объекта представляется в виде совокупности взаимно неперекрывающихся фрагментов, каждый из которых замещается простейшей моделью. Предложены геометрические модели, которые могут быть использованы для замещения фрагментов поверхности. Для каждой модели получены выражения, позволяющие определить параметры распределения шумов координат при заданных мощностях излучателей модели и расстояниях между ними. Получены выражения, позволяющие синтезировать модели с требуемыми параметрами распределения шумов координат. Показано, что по параметрам распределения шумов координат отдельных участков поверхности можно определить соответствующие параметры всего объекта в целом. Полученные результаты могут быть использованы для синтеза математических моделей, применяемых при имитации отражений от распределенных объектов и при создании программно-аппаратных комплексов имитации электромагнитных полей, отраженных от поверхности земли, атмосферных неоднородностей, поверхности моря и др.

Ключевые слова: поверхностно распределенный объект, имитация отражений, шумов координат, геометрическая модель, кажущийся центр излучения.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-17-28

Введение

Рост требований к точности решения большинства задач ближней радиолокации и точности самих радиолокационных измерителей приводит к тому, что при их создании и испытании все более актуальной становится задача моделирования отражений от распределенных объектов с учетом их шумов координат (например, земной поверхности, морской поверхности, атмосферных неоднородностей и др.) [1, 2]. Под шумами координат (ШК) понимается следующее явление. При отражении от распределенного объекта нормаль к фазовому фронту суммарной электромагнитной волны, создаваемой на апертуре приемной антенны всеми точечными рассеивателями, совокупностью которых можно представить этот объект, указывает на положение так называемого кажущегося центра излучения (КЦИ). Поскольку число точечных рассеивателей велико, а их расположение в пространстве и величина вклада в общий отраженный сигнал являются случайными, то положение КЦИ флуктуирует случайным образом относительно некоторого значения (также употребляется термин «блуждание» КЦИ). Эти флуктуации и носят название шумов координат (также – угловых шумов) [3–4].

Описание статистических характеристик ШК протяженных объектов приводится в работах ряда отечественных и зарубежных авторов [4–8]. Плотность распределения вероятностей (ПРВ) мгновенного значения положения КЦИ описывается выражением

$$W(\Delta\gamma) = \frac{\mu_\gamma}{2(1 + \mu_\gamma^2 \Delta\gamma^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

где $\Delta\gamma = \gamma - m_\gamma$ – мгновенное значение отклонения КЦИ по некоторой обобщенной координате γ от математического ожидания m_γ ; μ_γ – параметр, определяющий эффективную «ширину» распределения. Таким образом, ПРВ определяется двумя параметрами – m_γ , μ_γ .

Вполне очевидно, что для моделирования отраженных электромагнитных полей отражающие свойства поверхностно распределенных объектов целесообразно задавать в терминах ШК, т. е. через параметры ПРВ (1). По сути, через m_γ и μ_γ , значения которых изменяются по поверхности объекта.

Рассмотрим возможность задания отражающих свойств через представление поверхности объекта в виде совокупности простейших геометрических моделей. При этом модели должны адекватно замещать участки поверхности объекта, которые не перекрываются и накрывают всю эту поверхность. Такой подход к заданию отражающих свойств распределенных объектов хорошо согласуется с широко распространенным методом математического моделирования электромагнитных полей, основанном на использовании полигональных моделей объектов [2, 9–11]. Полигональная модель представляет поверхность объекта в виде конечной совокупности простейших плоских геометрических элементов (например, треугольников). При использовании рассматриваемого подхода каждый такой элемент будет замещаться геометрической моделью.

Цель работы: обосновать возможность представления двумерного распределенного объекта в виде совокупности простейших моделей.

1. Принцип декомпозиции

Для представления поверхности в виде совокупности моделей требуется доказать, что все модели элементарных фрагментов в совокупности позволяют имитировать отражение от распределенного объекта в целом. Для этого необходимо подтвердить, что при адекватном моделировании статистических характеристик ШК отдельных фрагментов достигается адекватное моделирование тех же характеристик для всего объекта в целом.

Разобьем поверхность двумерного распределенного объекта на совокупность N фрагментов с площадями S_i , $i = 1, 2, \dots, N$ (рис. 1). Форма и размеры фрагментов в общем случае произвольные.

Математическое ожидание ПРВ ШК распределенного объекта (1) определяется следующим соотношением [4]:

$$m_\gamma = \frac{\iiint_{y,x,z} y F_r(y, x, z) dx dy dz}{\iiint_{y,x,z} F_r(y, x, z) dx dy dz}, \quad (2)$$

где $F_r(y, x, z)$ – функция распределения плотности интенсивности отражений от объекта [4]; области интегрирования по x , y ограничены поверхностью отражающего объекта.

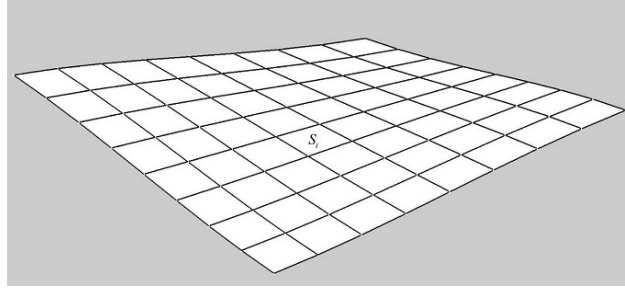


Рис. 1 – Декомпозиция сложного объекта

Fig. 1 – Decomposition of a complex object

Параметр μ_γ [4]:

$$\mu_\gamma^2 = \frac{\int \int \int_{y x z} F_r(y, x, z) dx dy dz}{\int \int \int_{y x z} (y - m_\gamma)^2 F_r(y, x, z) dx dy dz}. \quad (3)$$

Рассмотрим входящие в выражения (2), (3) составляющие по отдельности. Разбив область интегрирования на части, ограниченные размерами фрагментов, и учитывая, что рассматриваемый объект – поверхностно распределенный, придем к следующим соотношениям:

$$\int \int \int_{y x z} F_r(y, x, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} F_r(y, x) dy dx; \quad (4)$$

$$\int \int \int_{y x z} y F_r(y, x, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} y F_r(y, x) dy dx;$$

$$\int \int \int_{y x z} (y - m_\gamma)^2 F_r(y, x, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} (y - m_\gamma)^2 F_r(y, x) dy dx,$$

где S_i – область интегрирования для i -го фрагмента поверхности.

При адекватном моделировании ШК фрагмента поверхности выполняется равенство следующих характеристик:

$$\iint_{S_i} F_r(y, x) dy dx = \iint_{S_{mi}} F_r(y, x) dy dx; \quad (5)$$

$$\iint_{S_i} y F_r(y, x) dy dx = \iint_{S_{mi}} y F_r(y, x) dy dx;$$

$$\iint_{S_i} (y - m_\gamma)^2 F_r(y, x) dy dx = \iint_{S_{mi}} (y - m_\gamma)^2 F_r(y, x) dy dx,$$

где индексом m отмечен параметр геометрической модели, а индексом i – параметр, соответствующий i -му фрагменту поверхности или его модели.

При выполнении условий (5) можно записать следующее:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} F_r(y, x) dydx &= \sum_{i=1}^N \iint_{S_{mi}} F_{rmi}(y, x) dydx ; \\ \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} y F_r(y, x) dydx &= \sum_{i=1}^N \iint_{S_{mi}} y F_{rmi}(y, x) dydx ; \\ \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} (y - m_\gamma)^2 F_r(y, x) dydx &= \sum_{i=1}^N \iint_{S_{mi}} (y - m_{\gamma mi})^2 F_{rmi}(y, x) dydx . \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая выражения (4) и (6), получаем:

$$\begin{aligned} \iiint_{y x z} F_r(y, x, z) dx dy dz &= \sum_{i=1}^N \iint_{S_{mi}} F_{rmi}(y, x) dydx ; \\ \iiint_{y x z} y F_r(y, x, z) dx dy dz &= \sum_{i=1}^N \iint_{S_{mi}} y F_{rmi}(y, x) dydx ; \\ \iiint_{y x z} (y - m_\gamma)^2 F_r(y, x, z) dx dy dz &= \sum_{i=1}^N \iint_{S_{mi}} (y - m_{\gamma mi})^2 F_{rmi}(y, x) dydx . \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, адекватное моделирование статистических характеристик ШК отдельных фрагментов поверхности гарантирует адекватное моделирование тех же характеристик для всего объекта в целом.

Рассмотрим ряд простейших геометрических моделей, которые могут быть использованы для замещения фрагментов.

2. Четырехточечная модель

Доказав возможность замещения распределенного объекта совокупностью моделей, рассмотрим некоторые простейшие пригодные для этого модели.

Хорошо известен способ замещения протяженных объектов двухточечной моделью [4, 12–13]. Она представляет собою два разнесенных в пространстве излучателя, к которым подводятся некоррелированные узкополосные нормальные случайные процессы. При этом положение КЦИ флуктуирует в соответствии с распределением (1). Недостатком двухточечной модели при имитации отражений от поверхностно распределенных объектов является невозможность независимого управления одноименными параметрами ПРВ ШК по двум ортогональным координатным осям [14–15]. Кроме того, такая модель не позволяет независимо друг от друга изменять параметры m_γ и μ_γ при визировании вдоль одной из осей. Это значительно ограничивает возможность практического применения данной модели.

В качестве развития указанной модели рассмотрим четырехточечную модель – рис. 2 ($\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2$ – мощности сигналов, излучаемых из точек модели).

Функцию распределения плотности интенсивности сигналов излучающих точек можно представить в виде

$$F_r(x, y) = \sigma_1^2 \delta(y - l_s) \delta(y - l_s) + \sigma_2^2 \delta(x + l_c) \delta(y + l_s) + \sigma_3^2 \delta(x + l_c) \delta(y - l_s) + \sigma_4^2 \delta(x - l_c) \delta(y + l_s), \quad (8)$$

где $l_s = \frac{L}{2} \sin(\psi)$; $l_c = \frac{L}{2} \cos(\psi)$; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция.

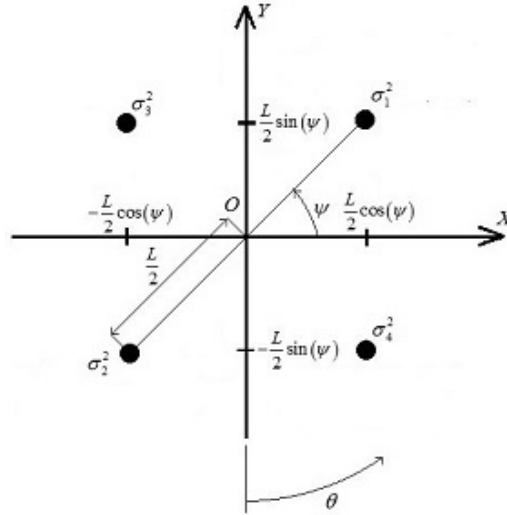


Рис. 2 – Четырехточечная модель двумерного отражающего объекта

Fig. 2 – The four-point model of a two-dimensional reflective object

Параметры ПРВ ШК, определенные в соответствии с выражениями (2), (3) и (8):

$$m_\gamma = \frac{L}{2} \frac{(\sigma_4^2 - \sigma_3^2) \cos(\psi + \theta) + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cos(\psi - \theta)}{(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + (\sigma_4^2 + \sigma_1^2)}, \quad (9)$$

$$\mu_\gamma^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{4 \left[\frac{\left((\sigma_3^2 + \sigma_4^2) \cos^2(\psi + \theta) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cos^2(\psi - \theta) \right) - \left[(\sigma_4^2 - \sigma_3^2) \cos(\psi + \theta) + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cos(\psi - \theta) \right]^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2} \right]},$$

где θ – угол визирования модели (рис. 2).

Можно показать, что математическое ожидание m_γ и параметр μ_γ при визировании вдоль оси OY ($\theta = 0$) определяются суммарной мощностью пар излучателей 1–4 и 2–3 и не зависят от соотношения мощностей излучателей в этих парах. Соответствующие параметры вдоль оси OX ($\theta = -\pi/2$) определяются суммарной мощностью пар излучателей 2–4 и 1–3 и не зависят от соотношения мощностей излучателей в этих парах. Следовательно, перераспределяя мощность

в парах точек 1–3 и 2–4, можно установить нужное положение КЦИ относительно оси OY , сохранив при этом заданное положение КЦИ относительно оси OX . Таким образом, в отличие от двухточечной модели данная модель позволяет осуществлять независимое управление параметрами ПРВ ШК вдоль ортогональных осей.

В частном случае равных мощностей излучателей, когда $\sigma_i^2 = \sigma^2$ для $i = 1, 2, 3, 4$, $\psi = \pi/4$ (излучатели расположены в вершинах квадрата), выражения для параметров ПРВ ШК (9) приобретают вид

$$m_\gamma = 0, \quad \mu_\gamma^2 = \frac{16}{L^2}. \quad (10)$$

Таким образом, при расположении излучателей в вершинах квадрата рассматриваемая модель становится инвариантной к углу визирования (т. е. параметры ПРВ ШК не изменяются при изменении угла визирования)

Построение такой модели сводится к расположению излучающих точек с равными мощностями излучения в вершинах квадрата с размером стороны:

$$L' = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}\mu_\gamma}.$$

3. Пятиточечная модель

Легко заметить, что при визировании вдоль одной из осей координат конфигурация рис. 2 сводится к двухточечной модели, а следовательно, также не позволяет независимо друг от друга изменять параметры m_γ и μ_γ . Данное ограничение существенно и приводит к тому, что при решении задачи имитации есть возможность задавать либо угловое положение объекта, либо его угловые размеры. От этого ограничения свободна пятиточечная модель.

Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 2, при наличии еще одного излучателя в центре (рис. 3).

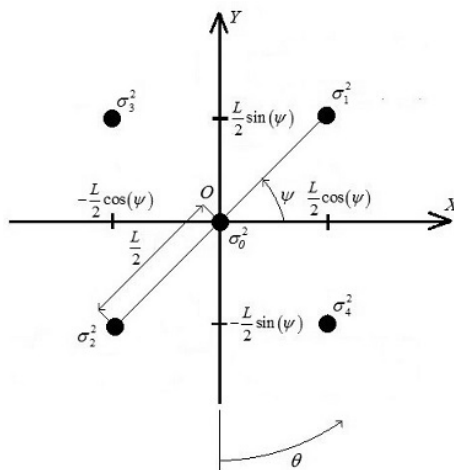


Рис. 3 – Пятиточечная модель двумерного отражающего объекта

Fig. 3 – The five-point model of a two-dimensional reflective object

Функция распределения плотности интенсивности сигналов излучающих точек отличается от (8) наличием еще одного члена $\sigma_0^2 \delta(x) \delta(y)$.

Параметры ПРВ ШК, определенные в соответствии с выражениями (2), (3) и (8):

$$m_\gamma = \frac{L}{2} \frac{(\sigma_4^2 - \sigma_3^2) \cos(\psi + \theta) + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cos(\psi - \theta)}{(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + (\sigma_4^2 + \sigma_1^2) + \sigma_0^2}, \quad (11)$$

$$\mu_\gamma^2 = \frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{\left[\left((\sigma_3^2 + \sigma_4^2) \cos^2(\psi + \theta) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cos^2(\psi - \theta) \right) - \frac{L^2}{4} \frac{\left[(\sigma_4^2 - \sigma_3^2) \cos(\psi + \theta) + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cos(\psi - \theta) \right]^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2} \right]}.$$

Подставив в выражения (11) углы, соответствующие визированию вдоль координатных осей, можно убедиться, что данная модель также позволяет независимо управлять одноименными параметрами распределения ШК вдоль ортогональных координатных осей.

При визировании вдоль одной из осей координат пятиточечная модель сводится к трехточечной, а следовательно, допускает независимое друг от друга управление параметрами m_γ и μ_γ в отличие от модели (рис. 2).

В частном случае равных мощностей излучателей, когда $\sigma_i^2 = \sigma^2$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4$, $\psi = \pi/4$, выражения (11) приобретают вид

$$m_\gamma = 0, \quad \mu_\gamma^2 = \frac{20}{L^2}. \quad (12)$$

Построение такой модели сводится к расположению излучателей, мощность сигналов которых одинакова, в соответствии с рис. 3 (крайние точки расположены в вершинах квадрата). Размер стороны квадрата определяется соотношением

$$L' = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\mu_\gamma}.$$

В случае, если имеется ограничение на L , требуемых параметров ПРВ ШК можно добиться, устанавливая соотношение между мощностями центральной точки и остальных излучателей. Для пояснения рассмотрим следующий случай. Пусть мощность центрального излучателя отличается от мощностей всех остальных излучателей, которые полагаем равными $\sigma_i^2 = \sigma^2$ для $i = 1, 2, 3, 4$. В этом случае выражения для параметров ПРВ ШК (11) принимают вид (при расположении излучающих точек в вершинах квадрата):

$$m_\gamma = 0, \quad \mu_\gamma^2 = \frac{4}{L^2} \left(4 + \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^2 \right). \quad (13)$$

Полученные выражения (12–13) свидетельствуют о том, что параметры ПРВ ШК не зависят от угла визирования. При этом для того чтобы управлять эффек-

тивной «шириной» распределения, можно изменять только мощность центрального излучателя σ_0^2 . Соотношение между мощностями центрального и остальных излучателей, требуемое для задания эффективной «ширины» ПРВ ШК, можно определить по соотношению

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} = \frac{\mu_\gamma^2 L^2}{4} - 4.$$

4. Пример практического применения

Допустим, что однородный поверхностно распределенный объект в результате декомпозиции разбит на N^2 ($N \times N$) взаимно неперекрывающихся фрагментов. Для каждого фрагмента поверхности построена пятиточечная геометрическая модель (рис. 3). Вследствие однородности объекта модели всех фрагментов имеют одинаковые параметры (мощности излучателей и расстояния между ними). Зная параметры распределения ШК отдельных фрагментов, определим соответствующие параметры для всего объекта в целом.

Пусть $m_{\gamma i}$, $\mu_{\gamma i}$ – параметры ПРВ ШК i -го фрагмента поверхности.

Тогда выражения (2) и (3) можно переписать в следующем виде:

$$m_\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{N^2} \iint_{S_i} y F_r(y, x, z) dx dy}{\sum_{i=1}^{N^2} \iint_{S_i} F_r(y, x, z) dx dy}, \quad \mu_\gamma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N^2} \iint_{S_i} F_r(y, x, z) dx dy}{\sum_{i=1}^{N^2} \iint_{S_i} y^2 F_r(y, x, z) dx dy}. \quad (14)$$

Для каждого фрагмента поверхности мощности излучателей и их взаимное расположение одинаковы, поэтому

$$\sum_{i=1}^{N^2} \iint_{S_i} F_r(y, x, z) dx dy = N^2 \iint_S F_r(y, x, z) dx dy. \quad (15)$$

С учетом (15) выражения (14) можно представить в виде

$$m_\gamma = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} m_{\gamma i}, \quad \mu_\gamma^2 = \frac{1}{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} \frac{1}{\mu_{\gamma i}^2}}.$$

Таким образом, полученные выражения позволяют по параметрам ПРВ ШК фрагментов, на которые разбита поверхность объекта, определить параметры распределения ШК для всей поверхности.

Заключение

В работе доказана возможность задания отражающих свойств поверхностно распределенного объекта через параметры распределения ШК (1) путем замещения этого объекта совокупностью простейших геометрических моделей.

Это хорошо согласуется с широко применяемыми при моделировании сложных радиолокационных сцен полигональными моделями. При этом каждый

элементарный фрагмент полигональной модели сложного объекта замещается простейшей геометрической моделью.

Полученные результаты могут быть применены при синтезе моделей поверхностно распределенных отражающих объектов, используемых для имитации отраженных от них электромагнитных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тверской Г.Н., Терентьев Г.К., Харченко И.П.** Имитаторы эхо-сигналов судовых радиолокационных станций. – Л.: Судостроение, 1973. – 223 с.
2. Вопросы реализации имитатора входных сигналов систем ближней радиолокации для полунатурного моделирования помех от подстилающей поверхности / К.А. Антонов, В.О. Григорьев, В.Б. Сучков, М.Г. Фабричный // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Приборостроение. – 2006. – № 4. – С. 45–59.
3. **Skolnik M.I.** Radar handbook. – 3rd ed. – New York: McGraw Hill, 2008. – 1352 p.
4. **Островитянов Р.В., Басалов Ф.А.** Статистическая теория радиолокации протяженных целей. – М.: Радио и связь, 1982. – 232 с.
5. **Островитянов Р.В., Басалов Ф.А.** Статистические характеристики больших выбросов углового шума // Радиотехника и электроника. – 1974. – Т. 19, № 2. – С. 431–432.
6. **Делано Р.** Теория «мерцания» цели и угловые ошибки при радиолокационном сопровождении // Вопросы радиолокационной техники. – 1954. – № 1 (19). – С. 108–119.
7. **Губонин Н.С.** Флюктуации фазового фронта волны, отраженной от сложной цели // Радиотехника и электроника. – 1965. – Т. 11, № 5. – С. 844–852.
8. **Варшавчик М.Л.** О статистических характеристиках сигнала, рассеянного протяженным колеблющимся телом // Радиотехника и электроника. – 1968. – Т. 13, № 10. – С. 1749–1752.
9. Математическое моделирование характеристик рассеяния объектов локации с импедансной поверхностью [Электронный ресурс] / А.Б. Борзов, В.Б. Сучков, В.В. Ахияров, Ю.В. Каракулин // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – № 2. – С. 1–13. – URL: <http://jre.cplire.ru/alt/feb14/12/text.html> (дата обращения: 28.08.2015).
10. **Борзов А.Б., Соколов А.В., Сучков В.Б.** Цифровое моделирование входных сигналов систем ближней радиолокации от сложных радиолокационных сцен [Электронный ресурс] // Журнал радиоэлектроники. – 2004. – № 4. – С. 1–27. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/apr04/3/text.html> (дата обращения: 28.08.2015).
11. **Борзов А.Б., Сучков В.Б.** Анализ полей рассеяния сложных радиолокационных сцен на основе полигональных моделей // Научно-технические технологии. – 2001. – Т. 2, № 3. – С. 13–28.
12. **Киселев А.В., Никулин А.В., Тыркин С.В.** Малоточечная модель протяженного отражающего объекта // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2014. – № 4. – С. 78–88.
13. **Никулин А.В., Степанов М.А.** Замещение распределенного объекта трехточечной геометрической моделью // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Радиолокационная техника (РЛТ). – 2014. – № 2. – С. 77–85.
14. **Артюшенко В.В., Киселев А.В.** Геометрическая модель двумерных отражающих объектов // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Общетехническая (ОТ). – 2015. – № 3. – С. 44–51.
15. **Artyushenko V.V., Kiselev A.V.** The geometric model of two-dimensional reflective objects // Proceedings of 16th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM–2015), Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015. – Novosibirsk: NSTU Publ.: IEEE, 2015. – P. 107–109. – doi: 10.1109/EDM.2015.7184500.

DEFINITION OF REFLECTIVE PROPERTIES OF DISTRIBUTED OBJECTS IN TERMS OF ANGLE NOISES

Artyushenko V.V., Kiselev A.V., Stepanov M.A.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

The definition of reflective properties of distributed objects through angle noise distribution parameters is considered. A surface of a reflective object is represented as a set of mutually non-overlapping fragments, each of which is substituted by the simplest model. Geometric models that can be used to substitute surface fragments are proposed. Analytical expressions for determining distribution parameters of angle noise for a given power of emitters and distances between them are obtained for each model. Expressions that allow synthesizing models with required angle noise distribution parameters are obtained. It is shown that angle noise distribution parameters for an object as a whole can be determined using angle noise distribution parameters for separate fragments of the surface. These results can be used for the synthesis of mathematical models used for simulating reflections from distributed objects and for developing a hardware-software complex for the simulation of electromagnetic fields reflected from the ground surface, atmospheric inhomogeneities, the sea surface, etc.

Keywords: surface-distributed object, simulation of reflections, angle noise, geometric model, apparent center of radiation

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-17-28

REFERENCES

1. Tverskoi G.N., Terent'ev G.K., Kharchenko I.P. *Imitatory ekho-signalov sudovykh radiolokatsionnykh stantsii* [Echo shipboard radar simulators]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1973. 223 p.
2. Antonov K.A., Grigor'ev V.O., Suchkov V.B., Fabrichnyi M.G. Voprosy realizatsii imitatora vkhodnykh signalov sistem blizhnei radiolokatsii dlya polunaturnogo modelirovaniya pomekh ot podstilayushchei poverkhnosti [Problems of implementation of input signal imitator of short-range radar systems for quasi full-scale modeling of underlying surface interference]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Priborostroenie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Engineering*, 2006, no. 4, pp. 45–59.
3. Skolnik M.I. Radar handbook. 3rd ed. New York, McGraw Hill, 2008. 1352 p.
4. Ostrovityanov R.V., Basalov F.A. *Statisticheskaya teoriya radiolokatsii protyazhennykh tseli* [Statistical theory of extended objectives radar]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982. 232 p.
5. Ostrovityanov R.V., Basalov F.A. Statisticheskie kharakteristiki bol'shikh vybrosov uglovogo shuma [Statistical characteristics of large overshoot of angle noise]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*, 1974, vol. 19, no. 2, pp. 431–432. (In Russian)
6. Delano R. Teoriya "mertsaniya" tseli i uglovye oshibki pri radiolokatsionnom soprovozhdenii [Theory of glitter and angular errors during the radar tracking]. *Voprosy radiolokatsionnoi tekhniki – Problems of radar engineering*, 1954, no. 1 (19), pp. 108–119. (In Russian)
7. Gubonin N.S. Flyuktuatsii fazovogo fronta volny, otrazhennoi ot slozhnoi tseli [Fluctuations of the phase front of a wave reflected from a complex target]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*, 1965, vol. 11, no. 5, pp. 844–852. (In Russian)
8. Varshavchik M.L. O statisticheskikh kharakteristikakh signala, rasseyannogo protya-zhennym koleblyushchimsya telom [On the statistical characteristics of signal scattered by an extended oscillating object]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*, 1968, vol. 13, no. 10, pp. 1749–1752.
9. Borzov A.B., Suchkov V.B., Akhiyarov V.V., Karakulin Yu.V. Matematicheskoe modelirovanie kharakteristik rasseyaniya ob"ektov lokatsii s impe-dansnoi poverkhnost'yu [Mathematical simulation of location objects scattering characteristics with impedance surface]. *Zhurnal radioelektroniki – Journal of radio electronics*, 2014, no. 2, pp. 1–13. Available at: <http://jre.cplire.ru/alt/feb14/12/text.html> (accessed 31.08.2015)

10. Borzov A.B., Sokolov A.V., Suchkov V.B. Tsifrovoye modelirovaniye vkhodnykh signalov sistem blizhnei radiolokatsii ot slozhnykh radiolokatsionnykh stsen [Digital simulation of input signals of systems of a near radar-location from complex radar-tracking scenes]. *Zhurnal radioelektroniki – Journal of radio electronics*, 2004, no. 4, pp. 1–27. Available at: <http://jre.cplire.ru/jre/apr04/3/text.html> (accessed 31.08.2015)
11. Borzov A.B., Suchkov V.B. Analiz polei rasseyaniya slozhnykh radiolokatsionnykh stsen na osnove poligonal'nykh modelei [Analysis of the stray fields of complex radar scenes based on polygonal models]. *Naukoemkie tekhnologii – Science Intensive Technologies*, 2001, no. 3, vol. 2, pp. 13–28.
12. Nikulin A.V., Kiselev A.V., Tyrykin S.V. Malotochechnaya model' protiazhennogo otrazhaiushchego ob'ekta [Model of an extended reflecting object consisting of a small number of points]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 4 (25), pp. 78–88.
13. Nikulin A.V., Stepanov M.A. Zameshcheniye raspredelennogo ob'ekta trekhtocheynoi geometricheskoi model'yu [The substitution of a distributed radar object for a three-point model]. *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Radiolokatsionnaya tekhnika (RLT) – Problems of electronics. A radar technology series (RLT)*, 2014, no. 2, pp. 77–85.
14. Artyushenko V.V., Kiselev A.V. Geometricheskaya model' dvumernykh otrazhayushchikh ob'ektov [The geometric model of two-dimensional reflective objects]. *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Obshchetekhnicheskaya (OT) – Problems of Radioelectronics. General Engineering Series*, 2015, no. 3, pp. 44–51.
15. Artyushenko V.V., Kiselev A.V. The geometric model of two-dimensional reflective objects. *Proceedings of 16th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM–2015)*, Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015. Novosibirsk, NSTU Publ., IEEE, 2015, pp. 107–109. doi: 10.1109/EDM.2015.7184500

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Артюшенко Вадим Валерьевич – родился в 1992 году, аспирант кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: имитация радиотехнических сигналов. Опубликовано 4 научные работы. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Email: artushenkomail@mail.ru).

Artyushenko Vadim Valeryevich (b. 1992) – a postgraduate student at the Department of Radio receiving and Radio transmitting Devices, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on radio signal simulation. He is author of 4 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: artushenkomail@mail.ru).



Киселев Алексей Васильевич – родился в 1958 году, д-р техн. наук, профессор кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: имитационное моделирование сложной радиоэлектронной обстановки, радиолокация, радиосвязь. Имеет более 150 публикаций. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, E-mail: nil_rtu@ngs.ru).

Kiselev Alexey Vasilevich (b. 1958) – Doctor of Sciences (Eng.), a professor at the Department of Radio receiving and Radio transmitting Devices, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on simulation of complex electronic environment, radar detecting and ranging, and radio communication. He is author more than 150 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: nil_rtu@ngs.ru).



Степанов Максим Андреевич – родился в 1982 году, канд. техн. наук, доцент кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств. Область научных интересов: имитационное моделирование сложной радиоэлектронной обстановки, радиолокация, радиосвязь. Опубликовано более 30 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Email: m.stepanov@corp.nstu.ru).

Stepanov Maksim Andreevich (b. 1982) – Candidate of Sciences (Eng.), an associate professor at the Department of Radio receiving and Radio transmitting Devices, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on simulation of complex electronic environment, radar detecting and ranging, and radio communication. He is author more 30 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: m.stepanov@corp.nstu.ru).

*Статья поступила 28 августа 2015 г.
Received August 28, 2015*

To Reference:

Artyushenko V.V., Kiselev A.V., Stepanov M.A. Zadanie otrazhayushchikh svoistv raspredelennykh ob'ektov v terminakh shumov koordinat [Definition of reflective properties of distributed objects in terms of angle noises]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 17–28. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-17-28

УДК 622.831

**РЕГИСТРАЦИОННО-ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС РДК РЭМИ-3
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ
ПОРОД В УСЛОВИЯХ ПОДЗЕМНЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК
ТАШТАГОЛЬСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ****А.А. Бизяев¹, А.Г. Вострецов¹, Г.Е. Яковицкая²**¹*Новосибирский государственный технический университет*²*Институт горного дела имени Н.А. Чинакала СО РАН*

В статье приводятся результаты разработки регистрационно-диагностического комплекса РДК РЭМИ-3, основанного на регистрации сигналов электромагнитного излучения (ЭМИ) в реальном масштабе времени. Комплекс включает автономный портативный прибор регистрации ЭМИ РЭМИ-3, позволяющий регистрировать и записывать во внутреннюю память сопутствующее трещинообразованию ЭМИ горных пород в реальном масштабе времени и программное обеспечение для персонального компьютера, позволяющее на основе обработки записей сигналов ЭМИ осуществлять диагностику и прогноз состояния массива горных пород. Прибор РЭМИ-3 позволяет также в реальном времени обнаруживать резкие изменения характеристик сопутствующего трещинообразованию ЭМИ и прогнозировать на этой основе опасные динамические проявления горного давления. Разработанный комплекс прошел предварительные, а затем и производственные испытания в условиях подземных горных выработок Таштагольского месторождения и показал хорошие результаты по возможности его использования для диагностики динамических проявлений горного давления. В статье приведены также результаты экспериментальных исследований, проведенных с помощью РДК РЭМИ-3.

Ключевые слова: разрушение горных пород, диагностика, прогноз разрушения, электромагнитное излучение.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-29-38

Введение

Известно, что метод, основанный на регистрации ЭМИ, в последние десятилетия интенсивно используется для диагностики и контроля как землетрясений [1], так и различного рода динамических проявлений горного давления [2].

Так, например, при прогнозе динамических проявлений в природных условиях на карналлитовых пластах использовалась методика, разработанная в [3]. Здесь же с помощью прибора ЕГ-6 разработки ВНИМИ [4], работающего на фиксированной частоте 40 кГц, получено, что при регистрации сигнала с амплитудой, не превышающей в три раза ее величину, измеренную вне зоны опорного давления, ситуацию считают невыбросоопасной, а при больших величинах амплитуд – выбросоопасной. В разработанный ВНИМИ измерительный комплекс «Ангел» [5] заложен методический подход, позволяющий производить оценку параметров нестационарных геофизических полей, связанных с разрушением горных пород, а также экспресс-прогноз удароопасности участков массива на основании сигналов ЭМИ. Прибор регистрирует сигналы на частоте до 31кГц, оценивая амплитуду и форму сигнала.

Однако существующие приборы не в полной мере удовлетворяют как исследователей, так и производственные службы, так как не позволяют производить запись сигнала в течение нескольких часов с последующим сравнением изменяющихся электромагнитных характеристик.

Основной задачей настоящей работы являлись разработка и создание такого комплекса, который позволял бы проводить ежедневную регистрацию сигналов ЭМИ в одних и тех же условиях подземных горных выработок с последующим сравнением параметров, структуры и спектральных характеристик сигналов ЭМИ и по их изменению проводить диагностику и контроль приближения динамических проявлений горного давления.

1. Разработка регистрационно-диагностического комплекса РДК РЭМИ-3

Регистрационно-диагностический комплекс РДК РЭМИ-3 состоит из портативного автономного прибора «РЭМИ-3», предназначенного для регистрации сигналов ЭМИ в условиях рудников и шахт и имеющего интерфейс для связи с персональным компьютером, и программного обеспечения «ПО РЭМИ-3» для хранения, обработки и анализа экспериментальных данных, полученных с помощью «РЭМИ-3», на персональном компьютере (рис. 1).

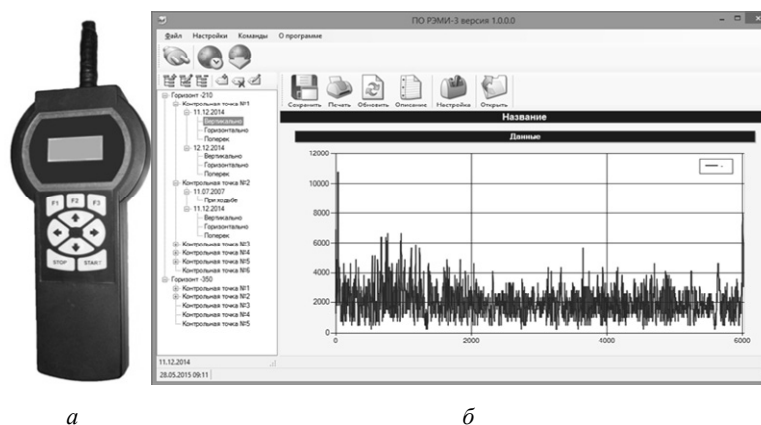


Рис. 1 – Внешний вид прибора «РЭМИ-3» (а) и интерфейса программного обеспечения (б)

Fig. 1 – Appearance the device "REMI-3" view (a) the software interface view (b)

Прибор «РЭМИ-3» регистрирует ЭМИ, которые оцифровываются 10-разрядным АЦП, усредняются на интервале 5 мс и записываются в энергонезависимую память. Усредненные значения на интервале 1 с отображаются на цифровом индикаторе. Регистрация сигналов ЭМИ осуществляется непрерывно в течение 8 часов, что позволяет получить объем информации для анализа напряженно-деформированного состояния на различных горизонтах по изменениям интенсивности и уровня сигналов электромагнитного излучения в различных точках рудника, а также выявить тенденции в структуре и параметрах сигнала перед геодинамическим проявлением. Также прибор оснащен часами для синхронизации с неземными сейсмическими станциями, индикатором для наблюдения в реальном времени текущего состояния электромагнитной обстановки и интерфейсом USB для сопряжения с компьютером пользователя и сохранения результатов измерения в базу данных.

Технические характеристики прибора «РЭМИ-3»

- чувствительность..... 6 мВ/м
- рабочий диапазон частот 10 Гц... 70 кГц
- нелинейность частотной характеристики в полосе пропускания ≤ 1 дБ

- разрядность АЦП.....10
- интервал усреднения показаний на индикаторе1 с
- объем энергонезависимой памяти8 МБ
- тип компьютерного интерфейса.....USB
- время непрерывной регистрации8 часов
- рабочий температурный диапазон–5...+30 °С
- масса с аккумулятором300 г

Структурная схема прибора РДК РЭМИ-3 приведена на рис. 2.

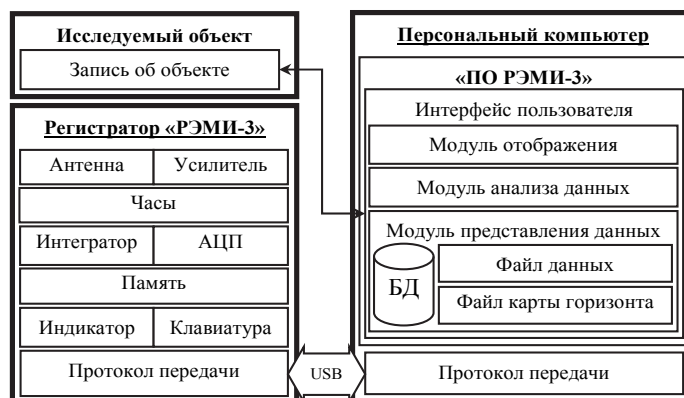


Рис. 2 – Структурная схема РДК РЭМИ-3

Fig. 2 – Block diagram of the RDK REMI-3

Программное обеспечение «ПО РЭМИ-3» позволяет с помощью персонального компьютера производить считывание и визуализацию накопленных результатов регистрации. На рис. 3 представлен интерфейс пользователя программного обеспечения, с помощью которого пользователь производит копирование данных с устройства в базу данных и их визуализацию на экране монитора. При визуализации на выводимых на экран компьютера осциллограмм по оси абсцисс отложено время регистрации электромагнитного сигнала в мс, по оси ординат – значение регистрируемого напряжения в мВ.

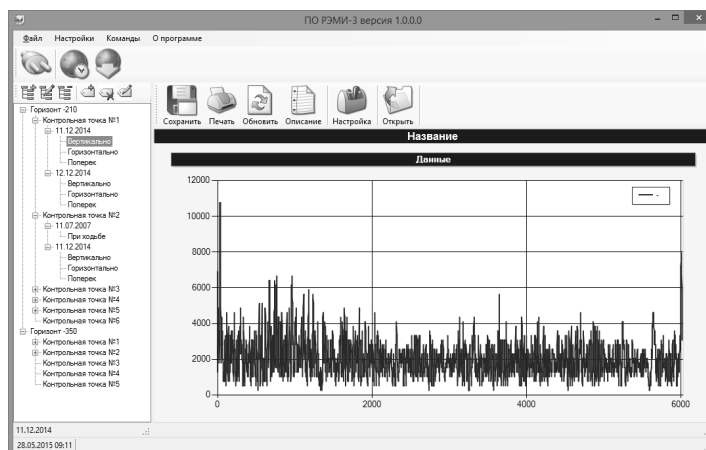


Рис. 3 – Интерфейс пользователя программного обеспечения

Fig. 3 – Interface Software

Структурная схема «ПО РДК РЭМИ-3» представлена на рис. 4.

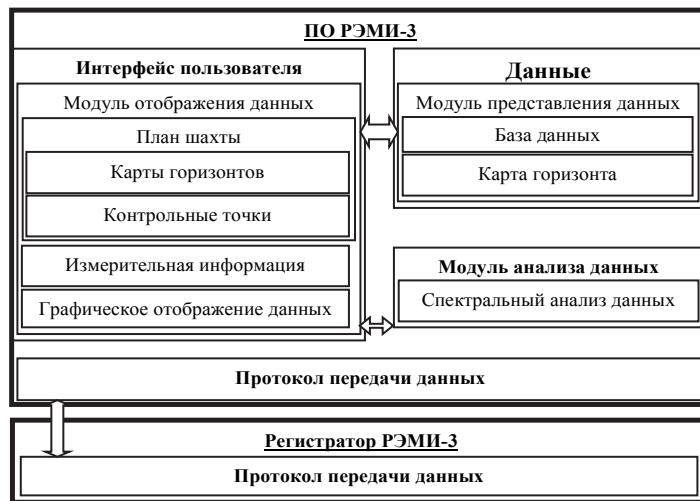


Рис. 4 – Структурная схема программ для системы сбора данных

Fig. 4 – Block diagram of software for data acquisition systems

Программное обеспечение «ПО РЭМИ-3» имеет модульную систему, каждый модуль которой взаимодействует по внутренней логике программы в зависимости от настроек программы. Программа сопрягается с прибором «РЭМИ-3» через интерфейс USB. Программа адаптирована под пользователя таким образом, чтобы он мог наблюдать тенденцию изменения структуры и параметров сигнала в контрольных точках на разных горизонтах.

2. Экспериментальные исследования по диагностике процесса разрушения участка массивов горных пород с помощью регистрационно-диагностического комплекса РДК РЭМИ-3 на Таштагольском руднике

Регистрация фоновой составляющей сигналов ЭМИ. Исследования проводились на горизонтах – 210 м, орт 4, – 280 м, орт 5, и в сборно-вентиляционном штреке, а также на горизонте – 350 м, орты 18, 19, 20, 21.

Методика исследований предусматривала профилирование вдоль выработок с измерением сигнала ЭМИ через каждые 15 м. В каждой точке измерений антенны располагались в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Результат регистрации представлен на рис. 5. На осциллограмме по оси абсцисс отложено время в мс относительно начала наблюдений, а по оси ординат – величина напряжения сигнала ЭМИ на выходе усилителя прибора в мВ. Уровень фонового сигнала составлял примерно 150–200 мВ по всей длине штрека.

Регистрация сигналов ЭМИ при заколообразовании. Характерными признаками этого вида динамических проявлений является продолжительный по времени повышенный фон сигналов ЭМИ при таком положении магнитной антенны, когда ее ось совпадает с осью, направленной перпендикулярно плоскости заколов. Регистрация электромагнитного излучения в местах образования заколов и после их оборки проводилась на руднике «Таштагольский» на горизонтах – 210 м, орты 19, 20, в 27, 28, 29 блоках и при профилировании орта 5 на горизонте – 280 м. В ходе эксперимента была зарегистрирована серия сигналов ЭМИ существенно повы-

шенной амплитуды (рис. 6). Наличие заколов наблюдалось визуально на протяжении 20 м в кровле выработки. Результаты экспериментов по регистрации сигналов ЭМИ при заколообразовании представлены на рис. 6. Установлено, что в местах интенсивного заколообразования область влияния очаговой зоны от заколов (уровень сигналов ЭМИ) возрастала в 5 раз по сравнению с электромагнитным фоном и резко уменьшалась до естественного фона при удалении от нее на расстояние более 10 м. После оборки заколов уровень сигналов ЭМИ также снижался и регистрировался на уровне естественного фона.

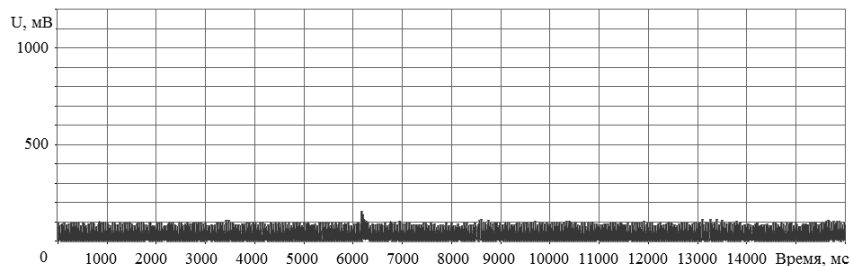


Рис. 5 – Результаты регистрации фоновой составляющей ЭМИ

Fig. 5 – The results of the registration of the background component of the EMR

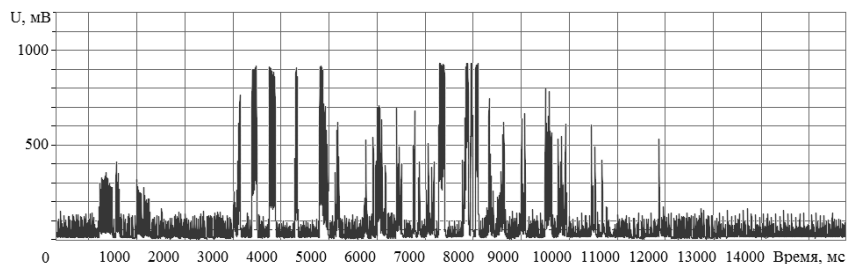


Рис. 6 – Результаты регистрации сигналов ЭМИ при заколообразовании, рудник Таштагольский, гор.– 280 м, орт 5

Fig. 6 – Results recording signals at EMP, mine Tashtagol, gor. – 280 m, 5 ort

Регистрация сигналов ЭМИ при динамических проявлениях горного давления типа «стреляний». При проведении экспериментов на Таштагольском руднике в ноябре 2011 г. нами было зарегистрировано динамическое проявление горного давления в виде стреляния. Измерения сигналов ЭМИ прибором РЭМИ-3 проводились на гор. – 210 м, орт 4, по пикетам. В каждой из 5 точек регистрировался уровень сигнала, принимаемый магнитными антеннами, расположенными в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Время измерений в одной точке достигало 5–10 минут. После этого измерения проводились в следующей точке. На протяжении всего времени измерений (около одного часа) уровни сигналов ЭМИ во всех точках были примерно одинаковы, но более высокие, чем во время измерений накануне. В последней, пятой, точке при положении антенны вертикально был зарегистрирован существенно повышенный уровень сигнала. Через несколько минут после измерений в точке 5 произошло динамическое проявление горного давления в виде стреляния, очаг которого находился на гор. – 280 м, орт 12 и был зарегистрирован Таштагольской сейсмостанцией. На рис. 7 представлены результаты регистрации сигналов ЭМИ при динамическом проявлении в виде стреляния, рудник Таштагольский, гор. – 210 м, орт 4.

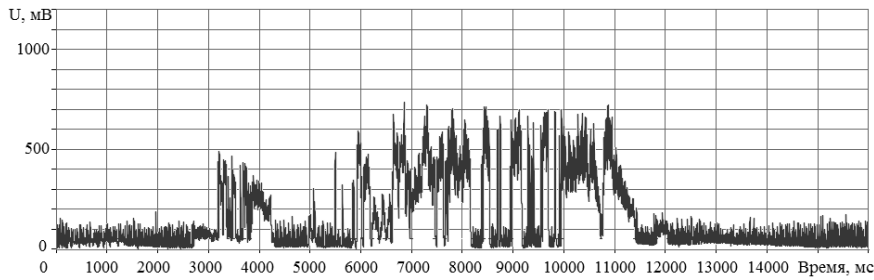


Рис. 7 – Результаты регистрации сигналов ЭМИ при динамическом проявлении в виде стреляния, рудник Таштагольский, гор. – 210 м, орт 4

Fig. 7 – The results signal recording EMR for registration as a dynamic manifestation of spent, the mine Tashtagol, mountains – 210 m, 4 ort

На рис. 8 приведена схема участка проведения экспериментальных исследований по измерению уровня сигналов ЭМИ, гор. – 350 м, орты 18, 19 до динамического проявления горного давления в форме микроудара и после него.

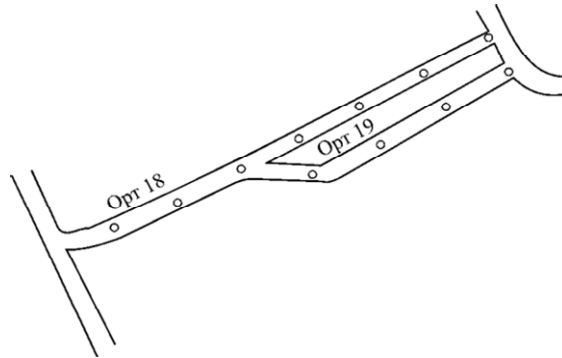


Рис. 8 – Участок проведения экспериментов на Таштагольском руднике с регистрацией сигналов электромагнитного излучения до и после микроудара 16.08.2011 г.

Fig. 8 – Plot experiments on Tashtagol mine with registration electromagnetic signals before and after 16.08.2011, the geodynamic exhibition

Регистрация сигналов ЭМИ при приближении микроударов. Микроудары проявляются в виде разрушений на контуре выработки и высыпание породной массы объемом до $0,5 \text{ м}^3$. Отличительными признаками приближения микроударов в сигналах ЭМИ является повышенная интенсивность последних – в десять и более раз по сравнению с фоновым уровнем. В 2011 году на Таштагольском руднике нами был экспериментально зарегистрирован многократно повышенный электромагнитный фон. Измерения проводились методом профилирования вдоль выработок. Регистрация показаний прибора «РЭМИ-3» осуществлялась по пикетам, отстоящим друг от друга на расстоянии 15 м в каждой точке в течение 1–2 мин при расположении приемной антенны последовательно в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

На рис. 9 приведена запись сигнала ЭМИ, сделанная на горизонте – 350 м, орт 18, до и после микроудара. Начало и окончание микроудара показаны жирными вертикальными линиями.

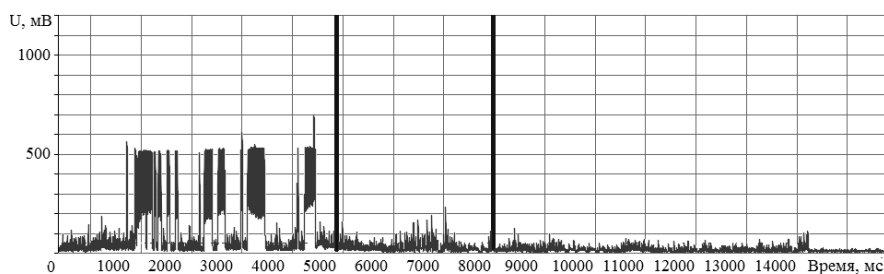


Рис. 9 – Запись сигнала ЭМИ, сделанная на горизонте – 350 м, орт 18, до и после микроудара.

Fig. 9 – Recording signal EMI made on the horizon - 350 m, the unit vector 18, before and after gornny blow.

Анализ данной записи показывает, что при приближении динамического проявления горного давления в виде микроудара вначале существенно увеличивается фоновая составляющая сигнала ЭМИ, затем резко возрастает уровень сигнала и меняется его структура. Данный признак был использован в [14] в качестве прогностического признака приближающегося динамического проявления горного давления.

Заключение

Разработан, изготовлен и испытан в натуральных условиях регистрационно-диагностический программно-аппаратный комплекс РДК РЭМИ-3, позволяющий в реальном времени производить накопление данных и их запись в память прибора «РЭМИ-3» с последующим переносом на внешний носитель и анализом зарегистрированной информации на персональном компьютере, при этом имеется возможность проводить анализ как во временной, так и в частотно-временной области.

Комплекс РДК РЭМИ-3 был неоднократно испытан в условиях подземных горных выработок Таштагольского месторождения, показал удовлетворительную сходимость с результатами, полученными другими, разработанными в ИГД СО РАН и эксплуатируемыми на руднике в течение более 8 лет приборами РЭМИ-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев Г.А.** Основы прогноза землетрясений. – М.: Наука, 1993. – 314 с.
2. **Вознесенский А.С., Набатов В.В.** Оценка трещинообразования в массиве с гипсосодержащими породами методом регистрации электромагнитного излучения // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2003. – № 3. – С. 3–12.
3. Методические указания по сейсмоакустическим и электромагнитным методам получения критериев степени удароопасности / сост. В.А. Смирнов и др. – Л.: ВНИМИ, 1986. – 31 с.
4. Указания по бесконтактным геофизическим методам прогноза степени удароопасности участков угольных пластов и рудных залежей. – Л.: ВНИМИ, 1981. – 36 с.
5. Новая шахтная геофизическая аппаратура для оценки и контроля строения, свойств и состояния массива горных пород / Ю.С. Исаев, А.П. Скакун, В.А. Яковлев, Г.Л. Мильман // Горная геофизика: международная конференция, 22–25 июня 1998 г. – СПб., 1998. – С. 505–510.
6. Результаты наблюдений за изменением естественного электромагнитного излучения по мере отработки очистного блока / Н.Г. Гредина, В.К. Климко, В.А. Кручинин, Е.А. Машковцев // Разработка удароопасных месторождений: межвузовский сборник научных трудов. – Кемерово: Кузбас. политехн. ин-т, 1986. – С. 84–86.
7. **Скитович В.П., Лазаревич Л.М.** Оценка НДС массива методом регистрации естественного электромагнитного излучения // Геофизические способы контроля напряже-

- ний и деформаций: сборник научных трудов. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1985. – С. 65–67.
8. Фоновое электромагнитное излучение горных пород, регистрируемое в подземных выработках / М.В. Курленя, Г.И. Кулаков, А.Г. Вострецов, В.А. Ваганова, С.В. Моисеев, Г.Е. Яковицкая // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2002. – № 2. – С. 10–17.
 9. Кузнецов С.В. Совместная регистрация электромагнитных и сейсмоакустических сигналов // Геофизические способы контроля напряжений и деформаций: сборник научных трудов. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1985. – С. 31–34.
 10. Кролевец А.Н., Павлюков В.К. Приливной отклик импульсного электромагнитного излучения и краткосрочный прогноз сильных землетрясений // Проблемы сейсмичности Дальнего Востока: материалы докладов научно-практической конференции «Проблемы сейсмичности Дальнего Востока. Новая карта сейсмического районирования ОСР-97, ее роль и значение для Петропавловска-Камчатского и области», состоявшейся 6–9 апреля 1999 г. в Петропавловске-Камчатском. – Петропавловск-Камчатский: Камчатская опытно-методическая сейсмологическая партия геофизической службы РАН, 2000. – С. 175–185.
 11. Аппаратура регистрации сигналов ЭМИ в условиях подземных горных выработок / А.Г. Вострецов, А.В. Кривецкий, А.А. Бизяев, Г.Е. Яковицкая // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2008. – № 2. – С. 115–122.
 12. Курленя М.В., Еременко А.А., Шрепп Б.В. Геомеханические проблемы разработки железорудных месторождений Сибири. – Новосибирск: Наука, 2001. – 182 с.
 13. Яковицкая Г.Е. Методы и технические средства диагностики критических состояний горных пород на основе электромагнитной эмиссии. – Новосибирск: Параллель, 2008. – 314 с.
 14. Способ прогноза нарушения сплошности участка массива горных пород: патент 2426880 Российская Федерация, МПК Е 21 С 39/00 / А.Г. Вострецов, А.А. Бизяев, А.В. Кривецкий, Г.Е. Яковицкая; патентообладатели: Учреждение Российской академии наук «Институт горного дела Сибирского отделения РАН», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет». – № 2010108020/03; заявл. 04.03.2010; опубл. 20.08.2011, Бюл. № 23. – 7 с.

**THE RECORDING-DIAGNOSTIC EQUIPMENT RDK REMI-3
AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF ROCK FRACTURING
UNDER CONDITIONS OF UNDERGROUND WORKING
IN THE TASHTAGOLSKY FIELD**

Bizyaev A.A.¹, Vostretsov A.G.¹, Yakovitskaya G.E.²

¹*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation*

²*Chinakal Institute of Mining SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation*

The article presents the recording diagnostic complex RDK-3 based on the detection of electromagnetic radiation (EMR) signals in real time. The complex includes a stand-alone portable EMR recording device REMI-3 which records EMR of cracking rocks in the internal memory in real time, and software for a personal computer which processes the recorded EMR signals and forecasts the state of the rock mass. The REMI-3 device also enables real-time detection of abrupt changes in the EMR characteristics of the concomitant crack formation and can predict dangerous dynamic manifestations of rock pressure. The proposed complex was tested in the Tashtagolsky underground mining field and demonstrated its usability for the diagnosis of dynamic rock pressure manifestations. The article presents the results of experimental studies conducted with the RDK-3.

Keywords: destruction of rocks, diagnostics, destruction prediction, electromagnetic radiation.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-29-38

REFERENCES

1. Sobolev G.A. *Osnovy prognoza zemletryaseni* [Basics of earthquake prediction]. Moscow, Nauka Publ., 1993. 314 p.
2. Voznesenskii A.S., Nabatov V.V. Estimate of crack formation in gypsiferous rock mass by the method of electromagnetic radiation recording. *Journal of Mining Science*, 2003, vol. 39, iss. 3, pp. 207–215. doi: 10.1023/B:JOMI.0000013779.49922.fb. Translated from *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2003, vol. 39, iss. 3, pp. 3–12.
3. Smirnov V.A., comp., et al. *Metodicheskie ukazaniya po seismoakusticheskim i elektromagnitnym metodam polucheniya kriteriev stepeni udaroopasnosti* [Guidelines for seismoacoustic and electromagnetic methods of obtaining criteria for the degree of bump hazard]. Leningrad, VNIMI Publ, 1986. 31 p.
4. *Ukazaniya po beskontaktnym geofizicheskim metodam prognoza stepeni udaroopasnosti uchastkov ugol'nykh plastov i rudnykh zalezhei* [Instructions for contactless geophysical methods of forecasting the degree of bump hazard areas of coal seams and ore deposits]. Leningrad, VNIMI Publ, 1981. 36 p.
5. Isaev Yu.S., Skakun A.P., Yakovlev V.A., Mil'man G.L. [New mine geophysical equipment for the evaluation and control of the structure, properties and rock massif]. *Materialy mezhdunarodnoi konferentsii «Gornaya geofizika»* [Proceedings of International Conference "Mountain Geophysics"], St. Petersburg, Russia, 22–25 June, 1998, pp. 505–510.
6. Gredin N.G., Klimko V.K., Kruchinin V.A., Mashkovtsev E.A. Rezul'taty nablyudeniya za izmeneniyem estestvennogo elektromagnitnogo izlucheniya po mere otrabotki ochestnogo bloka [The results of observations of changes in the natural electromagnetic radiation as mining purification unit]. *Razrabotka udaroopasnykh mestorozhdenii: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* [Development impact-hazardous deposits: interuniversity collection of scientific papers], 1986, pp. 84–86.
7. Skitovich V.P., Lazarevic L.M. [Evaluation of VAT by registering the array of natural electromagnetic radiation]. *Geofizicheskie sposoby kontrolya napryazhenii i deformatsii: sbornik nauchnykh trudov* [Geophysical ways to control stress and strain: collection of scientific papers], 1985, pp. 65–67.
8. Kurlenya M.V., Kulakov G.I., Vostretsov A.G., Vaganova V.A., Moiseev S.V., Yakovitskaya G.E. Background electromagnetic rock radiation recorded in underground workings of the Tashtagol mine. *Journal of Mining Science*, 2002, vol. 38, iss. 2, pp. 111–115. doi: 10.1023/A:1021199018553. Translated from *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2002, vol. 39, iss. 2, pp. 10–17.
9. Kuznetsov S.V. [Joint registration of electromagnetic and seismic acoustic signals]. *Geofizicheskie sposoby kontrolya napryazhenii i deformatsii: sbornik nauchnykh trudov* [Geophysical ways to control stress and strain: collection of scientific papers], 1985, pp. 31–34.
10. Krolevets A.N., Pavlyukov V.K. [Tidal response pulsed electromagnetic radiation and short-term prediction of strong earthquakes]. *Problemy seismichnosti Dal'nego Vostoka: materialy dokladov nauchno-prakticheskoi konferentsii "Problemy seismichnosti Dal'nego Vostoka. Novaya karta seismicheskogo raionirovaniya OSR-97, ee rol' i znachenie dlya Petropavlovsk-Kamchatskogo i oblasti"* [Problems of seismicity of the Far East: Proceedings of the scientific-practical conference "Problems of seismicity of the Far East. The new seismic zoning map of the SRF-97, its role and significance for Petropavlovsk-Kamchatsky and the region", held April 6–9, 1999 in Petropavlovsk-Kamchatsky]. Petropavlovsk-Kamchatsky, 2000, pp. 175–185.
11. Vostretsov A.G., Krivetskii A.V., Bizyaev A.A., Yakovitskaya G.E. EMR recording equipment for underground mines. *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh – Journal of Mining Science*, 2008, vol. 44, iss. 2, pp. 218–224. doi: 10.1007/s10913-008-0035-9. Translated from *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2008, vol. 44, iss. 2, pp. 102–110.
12. Kurlenya M.V., Eremenko A.A., Shrepp B.V. *Geomekhanicheskie problemy razrabotki zhelezorudnykh mestorozhdenii Sibiri* [Geomechanical problems of development of iron ore deposits Siberia]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2001. 182 p.
13. Yakovitskaya G.E. *Metody i tekhnicheskie sredstva diagnostiki kriticheskikh sostoyanii gornykh porod na osnove elektromagnitnoi emissii* [Methods and means of diagnostics of

critical states of rocks on the basis of electromagnetic emissions]. Novosibirsk, Parallel' Publ., 2008. 314 p.

14. Vostretsov A.G., Bizyaev A.A., Krivetskii A.V., Yakovitskaya G.E. *Sposob prognoza narusheniya sploshnosti uchastka massiva gornyx porod* [Prediction method of discontinuity of rock mass section]. Patent RF, no. 2426880, 2011.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Бизяев Алексей Анатольевич – родился в 1979 году, старший преподаватель кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: программирование, алгоритмы, прогнозирование горных ударов. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, НГТУ, РЭФ, КТРС, E-mail: bizyaev@corp.nstu.ru).

Bizyaev Aleksey (b. 1979) – assistant professor at the Department of design and technology of radio electronic devices in Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on programing, algorithms, forecasting of rock bursts. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: bizyaev@corp.nstu.ru).



Вострецов Алексей Геннадьевич – родился в 1955 году, доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: методы статистической обработки сигналов. Опубликовано свыше 150 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: vostretsov@adm.nstu.ru).

Vostretsov Aleksey G. (b. 1955) – Doctor of Sciences (Eng.), full professor, Vice-rector for research at Novosibirsk State Technical University. His main field of research is the statistical theory of signal processing in conditions of a priori uncertainty. He has been working in this field since 1980. He has over 150 publications, including 3 monographs (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: vostretsov@adm.nstu.ru).



Яковицкая Галина Евгеньевна – д-р техн. наук, старший научный сотрудник Института горного дела имени Н.А. Чинакала СО РАН. Область научных интересов: бесконтактные методы диагностики НДС в массивах горных пород. (Адрес: 630091, Россия, Новосибирск, Красный проспект, 54. E-mail: yge@ngs.ru).

Yakovitskaya Galina E. – Doctor of Sciences (Eng.), Principal Researcher at the Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (Address: 54, Krasnyi Av., Novosibirsk, 630091, Russian Federation. E-mail: yge@ngs.ru)

Статья поступила 02 сентября 2015 г.

Received February 02, 2015

To Reference:

Bizyaev A.A., Vostretsov A.G., Yakovitskaya G.E. Registratsionno-diagnosticheskiy kompleks RDK REMI-3 i eksperimental'nye issledovaniya razrusheniya gornyx porod v usloviyakh podzemnykh gornyx vyrabotok Tashtagol'skogo mestorozhdeniya [The recording-diagnostic equipment RDK REMI-3 and experimental investigation of rock fracturing under conditions of underground working in the Tashtagolsky field]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 29–38. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-29-38

УДК 519.254

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОГО БИТА
НА ОСНОВЕ ПЕРЕХОДОВ ДЖОЗЕФСОНА
ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ**

А.Г. Вострецов, А.В. Кривецкий, С.Е. Радченко, Д.К. Пицун
Новосибирский государственный технический университет

Предложен алгоритм оценки резонансной частоты системы, состоящей из резонатора и индуктивно связанного с ним квантового бита. Алгоритм предназначен для выяснения состояния кубита при определенном значении пронизывающего его внешнего магнитного потока. В качестве измерительного сигнала используется реализация гауссовского шума с известным статистическим описанием. Синтез оценки резонансной частоты проведен методом максимального правдоподобия, что обеспечивает ее асимптотическую эффективность. Получено аналитическое выражение для относительной среднеквадратической погрешности оценки, анализ которого позволил сделать предположение о независимости погрешности от параметров измерительного сигнала. Проведено статистическое моделирование, результаты которого подтвердили предположения об эффективности оценки и независимости ее погрешности от уровня измерительного сигнала. Для проведения натурных испытаний разработано программное обеспечение, позволяющее осуществлять настройку оборудования, в автоматическом режиме генерировать измерительные сигналы, а также регистрировать и обрабатывать выходные сигналы исследуемой системы. Установлено, что из-за ограничений, связанных с максимальным уровнем сигнала, передаваемого в резонатор, уровень собственных шумов входных каскадов применяемого анализатора спектра сопоставим с уровнем измерительного сигнала. При этом порядок относительной среднеквадратической погрешности полученной оценки частоты остается прежним. Применение предложенной оценки в совокупности с соответствующим измерительным оборудованием позволит существенно повысить скорость и точность измерения резонансной частоты рассматриваемой системы.

Ключевые слова: квантовые биты, переход Джозефсона, резонансная частота, плотность распределения вероятности, функция правдоподобия.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-39-49

Введение

В межфакультетской лаборатории квантовой криогенной электроники НГТУ проводятся эксперименты по исследованию свойств сверхпроводящих квантовых систем. Одним из объектов исследования является квантовый бит (кубит), представленный сверхпроводящим кольцом, разделенным тремя переходами Джозефсона [1, 2]. Квантовое состояние такого кубита ($|0\rangle$ или $|1\rangle$) зависит, среди прочего, от величины внешнего магнитного потока, пронизывающего кубит. Для проведения экспериментов по определению квантовых состояний применяется система, состоящая из высокочастотного резонатора, индуктивно связанного с исследуемым кубитом. Изменение состояния кубита приводит к изменению эквивалентной индуктивности резонатора и, соответственно, изменению эквивалентной индуктивности всей системы [3]. Следовательно, резонансная частота системы также определяется состоянием кубита. Таким образом,

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания, проект № 8.337.2014/К.

задача определения состояния квантового бита состоит в определении резонансной частоты связанного с ним высокочастотного резонатора.

Традиционный метод измерения резонансной частоты, применяемый в настоящее время в лаборатории, заключается в следующем. Векторный анализатор цепей R&S ZVL13 в автоматическом режиме сканирует заданный частотный диапазон с требуемым шагом, выполняя для каждого значения порядка 100 измерений с последующим усреднением. Результатом эксперимента является усредненная амплитудно-частотная характеристика системы, максимум которой соответствует резонансной частоте.

Несмотря на простоту реализации и применения данного метода, несколько обстоятельств снижают перспективы его применения при дальнейшем развитии исследований.

1. Сканирование частотного диапазона заключается в последовательном возбуждении резонатора моночастотным сигналом и измерении параметров отклика. В совокупности с необходимостью усреднения результатов это приводит к чрезвычайно большой длительности эксперимента (несколько часов работы оборудования).

2. Определение резонансной частоты путем отыскания максимума экспериментальной частотной характеристики подвержено воздействию случайных мешающих воздействий (собственные шумы измерительного тракта). Операция усреднения позволяет лишь снизить дисперсию ошибки измерения, а не добиться устойчивости к мешающим факторам.

3. Невозможно обеспечить полную автоматизацию измерения, исключаящую влияние человеческого фактора.

Таким образом, актуальна задача разработки процедуры, обеспечивающей оперативное определение резонансной частоты описываемой системы с минимальным уровнем погрешности и возможностью автоматизации работы.

1. Оценка резонансной частоты

В соответствии с вышеперечисленными обстоятельствами могут быть сформулированы основные требования к алгоритму оценки резонансной частоты.

1. Возможность получения оценки на основе результатов однократного измерения.

2. Использование измерительных сигналов малой мощности с целью исключения влияния резонатора на состояние связанного с ним кубита.

3. Работа в автоматическом режиме, исключаящем влияние человеческого фактора.

Резонатор, индуктивно связанный с кубитом, может быть представлен эквивалентной схемой параллельного колебательного контура (рис. 1) [4], комплексное сопротивление которого описывается выражением

$$K(j\omega) = \frac{R}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)},$$

где ω – круговая частота; C – эквивалентная емкость; L – эквивалентная индуктивность; R – эквивалентное сопротивление резонатора.

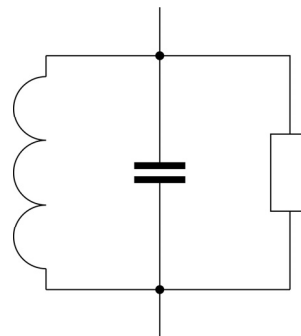


Рис. 1 – Эквивалентная схема резонатора

Fig. 1 – Resonator substitution scheme

В качестве измерительного сигнала будем использовать ток в виде реализации белого (в полосе пропускания резонатора) гауссовского шума с нулевым средним и известной дисперсией σ_x^2 . Выходным сигналом будем считать напряжение на рассматриваемом колебательном контуре. Отсчеты тока обозначим:

$$\mathbf{x} = \{x_i\}, \quad i = 0 \dots (N-1).$$

Оценка спектральной плотности мощности (СПМ) выходного сигнала может быть представлена выражением [5]:

$$Y(\omega) = X(\omega)Z(\omega)^2, \quad (1)$$

где $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ – оценки СПМ входного и выходного сигналов соответственно;

$$Z(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}} - \text{модуль комплексного сопротивления рассматрива-$$

емого резонатора.

Из теории спектрального анализа известно, что если $x(t)$ – случайный гауссовский процесс с нулевым средним и дисперсией σ_x^2 , то отсчеты случайного

$$\text{процесса } X'(\omega) = \frac{2X(\omega)}{F_d \sigma_x^2} \quad (F_d - \text{частота дискретизации измерительного сигнала})$$

имеют χ^2 -распределение с двумя степенями свободы [6]. Следовательно, с учетом (1) плотность распределения вероятности отсчетов спектра мощности входного сигнала имеет вид

$$\omega(X'_i) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{X'_i}{2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{Y_i}{F_d \sigma_x^2 Z(\omega_i)^2}\right), \quad i = 0 \dots (N-1),$$

где ω_i – моменты взятия отсчетов на оси частот; N – объем выборки.

Отсчеты X'_i взаимно независимы [6], поэтому совместная плотность распределения вектора, сформированного отсчетами спектра мощности выходного сигнала, равна произведению плотностей распределения вероятностей отсчетов:

$$\omega(\mathbf{X}') = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{Y_i}{F_d \sigma_x^2 \left(\frac{1 + R^2 \left(\omega_i C - \frac{1}{\omega_i L} \right)^2}{R^2} \right)}\right). \quad (2)$$

Данное распределение содержит параметры параллельного колебательного контура, представляющего резонатор, и, следовательно, может быть применено для их оценки. В контексте поставленной задачи определения резонансной частоты контура представляется целесообразным получить оценку параметра L , поскольку изменение характеристик кубита влечет изменение эквивалентной индуктивности резонатора. Предлагается применить метод максимального правдоподобия, поскольку данный метод позволит получить эффективную оценку пара-

метра L [7]. Для этого следует прологарифмировать функцию правдоподобия [7, 8], представленную совместным распределением (2):

$$\begin{aligned} \ln(\omega(\mathbf{X}')) &= \sum_{i=0}^{N-1} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{R^2 F_d \sigma_x^2} \sum_{i=0}^{N-1} Y_i - \frac{C^2}{F_d \sigma_x^2} \sum_{i=0}^{N-1} (Y_i \omega_i^2) + \\ &+ \frac{2C}{L F_d \sigma_x^2} \sum_{i=0}^{N-1} Y_i - \frac{1}{L^2 F_d \sigma_x^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Y_i}{\omega_i^2}. \end{aligned}$$

Оценку максимального правдоподобия параметра L найдем из уравнения правдоподобия:

$$\frac{d \ln(\omega(\mathbf{X}'))}{dL} = -\frac{2C}{L^2 F_d \sigma_x^2} \sum_{i=0}^{N-1} Y_i + \frac{2}{L^3 F_d \sigma_x^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Y_i}{\omega_i^2} = 0,$$

$$\hat{L} = \frac{1}{C} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Y_i}{\omega_i^2}}{\sum_{i=0}^{N-1} Y_i}. \quad (3)$$

Полученная оценка индуктивности (3) является асимптотически эффективной и обладает минимальной дисперсией среди несмещенных оценок. Оценка резонансной частоты может быть получена из оценки (3):

$$\hat{\omega}_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N-1} Y_i}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Y_i}{\omega_i^2}}}. \quad (4)$$

Данная оценка также является оценкой максимального правдоподобия, так как является монотонной функцией от оценки индуктивности [9].

2. Анализ погрешности оценки

Выражение оценки резонансной частоты (4) может быть представлено в виде

$$\hat{\omega}_p = \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad (5)$$

где $A = \sum_{i=0}^{N-1} Y_i$; $B = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Y_i}{\omega_i^2}$, $i = 0 \dots (N-1)$.

Статистика A в выражении (5) представляет собой сумму независимых случайных величин, поэтому абсолютная погрешность ее определения имеет вид [11]

$$\sigma_A = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \sigma_{Y_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (F_d \sigma_x^2 Z(\omega_i))^2} = \sigma_x^2 F_d \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} Z(\omega_i)^4}.$$

Абсолютная погрешность статистики B может быть определена аналогичным образом:

$$\sigma_B = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \sigma_{Y_i/\omega_i^2}^2} = \sigma_x^2 F_d \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Z(\omega_i)^4}{\omega_i^4}}.$$

Статистики A и B являются случайными величинами, которые нельзя считать независимыми, поскольку они получены в результате суммирования элементов одной и той же выборки, но с различными весовыми коэффициентами. В данном случае максимальное значение относительной погрешности выражения (5) составит [11]

$$\delta_{\hat{\omega}_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_A}{A} + \frac{\sigma_B}{B} \right).$$

Математические ожидания статистик A и B могут быть определены как суммы математических ожиданий соответствующих случайных величин:

$$\begin{aligned} \mu_A &= \sum_{i=0}^{N-1} \mu_{Y_i} = \sum_{i=0}^{N-1} F_d \sigma_x^2 Z(\omega_i)^2 = \sigma_x^2 F_d \sum_{i=0}^{N-1} Z(\omega_i)^2, \\ \mu_B &= \sum_{i=0}^{N-1} \mu_{Y_i/\omega_i^2} = \sigma_x^2 F_d \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Z(\omega_i)^2}{\omega_i^2}. \end{aligned}$$

В результате выражение для относительной погрешности оценивания резонансной частоты принимает вид

$$\delta_{\hat{\omega}_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} Z(\omega_i)^4}}{\sum_{i=0}^{N-1} Z(\omega_i)^2} + \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Z(\omega_i)^4}{\omega_i^4}}}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Z(\omega_i)^2}{\omega_i^2}} \right). \quad (6)$$

Таким образом, полученная оценка устойчива относительно изменения параметров измерительного сигнала. Это является важным практическим качеством оценки, которое освобождает от необходимости контроля параметров измерительного сигнала и позволяет применять сигналы малых уровней, что обусловлено спецификой слабых квантовых измерений.

3. Моделирование оценки резонансной частоты

Относительная среднеквадратическая погрешность оценки (4) вычислялась для различных значений среднеквадратического отклонения шума, представляющего измерительный сигнал, в диапазоне от $\sigma = 10^{-10}$ до $\sigma = 1$ по 50 000 реализациям сигнала для каждого значения σ , каждая реализация состояла из 10 000 отсчетов при истинном значении резонансной частоты, равном 25 МГц (рис. 2).

Из рисунка видно, что погрешность оценки практически не зависит от энергетического параметра измерительного сигнала, что согласуется с теоретически полученной зависимостью (6).

Для выяснения состоятельности полученной оценки среднеквадратическая погрешность определялась по 10 000 реализаций для различных значений объема

экспериментальной выборки в диапазоне от 50 до 50 000 при уровне измерительного сигнала -170 дБм ($\sigma = 10^{-10}$) и истинном значении резонансной частоты, равном 25 МГц. Шаг дискретизации по частоте составил 400 Гц (рис. 3).

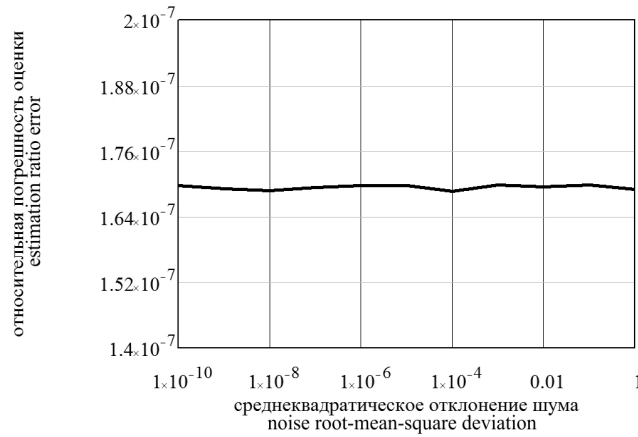


Рис. 2 – Зависимость относительной среднеквадратической погрешности оценки от среднеквадратического отклонения измерительного сигнала

Fig. 2 – Root-mean-square estimation error dependence of the root-mean-square of the measurement signal

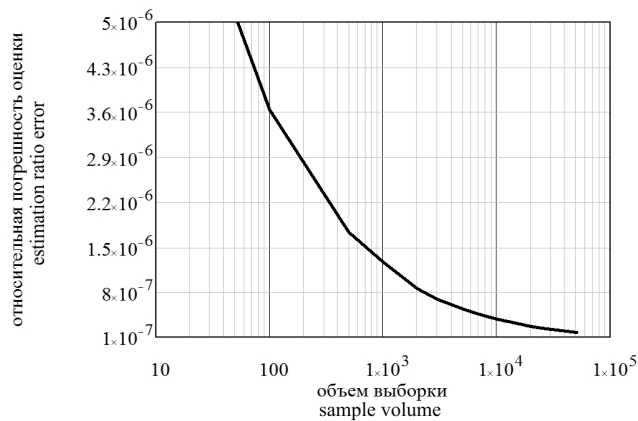


Рис. 3 – Зависимость относительной среднеквадратической погрешности оценки от объема выборочных данных

Fig. 3 – Root-mean-square estimation error dependence of the sample size

Характер зависимости на рис. 3 не противоречит утверждениям о состоятельности и эффективности оценки (6). Увеличение объема выборочных данных более 10 000 позволяет получить относительную среднеквадратическую погрешность оценивания на уровне не более $5 \cdot 10^{-7}$, что положительным образом характеризует предложенный алгоритм оценивания.

4. Результаты экспериментов

Экспериментальная проверка оценки проводилась в межфакультетской лаборатории квантовой криогенной электроники Новосибирского государственного технического университета. С этой целью разработано программное обеспечение в среде LabVIEW, позволяющее осуществлять настройку оборудования, в автоматическом режиме генерировать измерительные сигналы, а также регистрировать и обрабатывать выходные сигналы исследуемой системы. Измерительный сигнал, представляющий собой реализацию гауссовского шума в полосе частот $2,607 \text{ ГГц} \pm 2 \text{ МГц}$, генерировался аппаратными модулями фирмы National Instruments, входящими в состав PXI-шасси. Сигнал, прошедший через комбинацию аттенуаторов и исследуемый алюминиевый резонатор, находящийся в сверхпроводящем состоянии при температуре около $0,01 \text{ К}$, поступал на вход векторного анализатора цепей R&S ZVL13, работающего в режиме анализатора спектра в полосе частот $2,60805 \text{ ГГц} \pm 1,5 \text{ МГц}$ с шириной полосы разрешения (RBW), равной 300 Гц .

При запуске и настройке системы в регистрируемом сигнале было выявлено наличие собственных шумов входного тракта анализатора цепей, сопоставимых по уровню с измерительным сигналом (рис. 4).

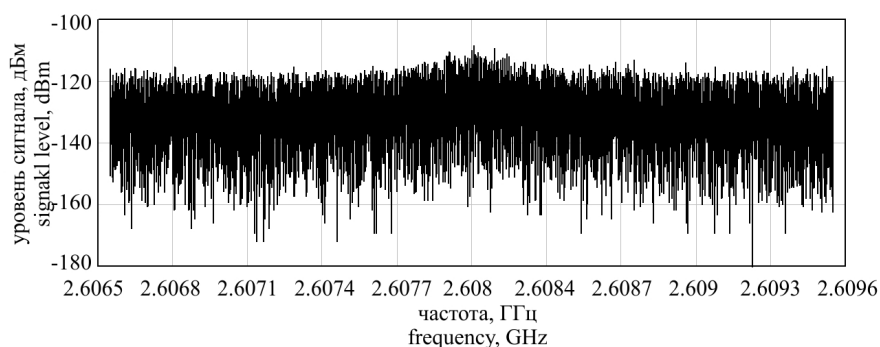


Рис. 4 – Спектр сигнала, регистрируемого на выходе исследуемой системы

Fig. 4 – Output signal spectrum

Несмотря на данное обстоятельство, по результатам 50 измерений, сохраненных в виде отдельных файлов, была получена оценка резонансной частоты и рассчитана относительная среднеквадратическая погрешность, которая составила $1,534 \cdot 10^{-7}$, что при истинном значении резонансной частоты, равном $2,60805 \text{ ГГц}$, составляет величину 400 Гц . Для достижения такой же величины погрешности измерений традиционным методом (по положению максимума частотной характеристики при возбуждении контура сигналом с линейно изменяющейся частотой) требуется усреднение спектра на выходе анализатора цепей в течение нескольких часов, в то время как с помощью предложенного алгоритма результат получается практически мгновенно.

Заключение

На основе метода максимального правдоподобия разработан алгоритм оценки резонансной частоты системы, состоящей из резонатора и индуктивно связанного с ним квантового бита, выполненного на основе сверхпроводящего кольца с тремя

переходами Джозефсона. Алгоритм предназначен для выяснения состояния кубита при определенном значении пронизывающего его внешнего магнитного потока. В качестве измерительного сигнала предложено использовать реализацию гауссовского шума с известным статистическим описанием. Аналитическое исследование погрешности оценки проведено в соответствии с правилами определения погрешностей косвенных измерений. Полученная структура погрешности не зависит от параметров измерительного сигнала и определяется объемом выборочных данных, что практически важно при проведении экспериментов по определению состояния кубита в соответствии с идеологией слабых квантовых измерений.

Проведено статистическое моделирование, результаты которого подтвердили предположения об эффективности оценки и характере ее погрешности. Разработано программное обеспечение для автоматизированной работы с оборудованием, передаваемыми и принимаемыми сигналами. Установлено, что несмотря на ограничения, связанные с допустимым уровнем измерительного сигнала, передаваемого в резонатор, и, как следствие, высокий уровень собственных шумов измерительной системы, погрешность оценки частоты, получаемая при применении предложенного алгоритма, остается достаточно низкой.

Применение предложенной оценки в совокупности с соответствующим измерительным оборудованием позволяет существенно повысить скорость и точность измерения резонансной частоты рассматриваемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Josephson persistent-current qubit / J.E. Mooij, T.P. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C.H. van der Wal, S. Lloyd // *Science*. – 1999. – Vol. 285, N 5430. – P. 1036–1039. – doi: 10.1126/science.285.5430.1036.
2. **Clarke J., Wilhelm F.K.** Superconducting quantum bits // *Nature*. – 2008. – Vol. 453, N 7198. – P. 1031–1042. – doi: 10.1038/nature07128.
3. Low-frequency characterization of quantum tunneling in flux qubits / Ya.S. Greenberg, A. Izmailkov, M. Grajcar, E. Il'ichev, W. Krech, H.-G. Meyer, M.H.S. Amin, Alec Maassen van den Brink // *Physical Review B*. – 2002. – Vol. 66, iss. 21. – P. 214525-1–214525-6. – doi: 10.1103/PhysRevB.66.214525.
4. **Федоров Н.Н.** Основы электродинамики: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1980. – 399 с.
5. **Баскаков С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы: учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
6. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения. Т. 1 / пер. с англ. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1971. – 317 с.
7. **Боровков А.А.** Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез: учебное пособие. – М.: Наука, 1984. – 472 с.
8. **Богданович В.А., Вострецов А.Г.** Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2004. – 320 с.
9. **Закс Ш.** Теория статистических выводов / пер. с англ. Е.В. Чепурина. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
10. **Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В.** Случайные процессы. Примеры и задачи. Т. 1. Случайные величины и процессы. – М.: Радио и связь, 2003. – 400 с.
11. **Тейлор Дж.** Введение в теорию ошибок / пер. с англ. Л.Г. Деденко. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

3JJ Q-BIT STATE IDENTIFICATION USING MAXIMUM-LIKELIHOOD METHOD

Vostretsov A.G., Krivetskiy A.V., Radchenko S.E., Pitsun D.K.
Novosibirsk state technical university, Novosibirsk, Russian Federation

An algorithm was supposed to estimate a resonance frequency of a system composed of quantum bit coupled to a resonator. This algorithm is intended for q-bit state identification depending on the magnitude of external magnetic flux passing through the q-bit. Measuring signal is supposed to be a Gaussian noise sample with known statistical parameters. An estimation algorithm was developed in accordance with the maximum likelihood method so that the result obtained is proved to be an asymptotically efficient estimator. An analytical form of the relative root-mean-square estimation error was obtained. This expression shows the error level independence of the measuring signal variance parameter. A numerical modeling was carried out to show the efficiency of the algorithm and its estimation error independence on the measuring signal level. An experimental software was developed for full-scale estimation algorithm testing. This software is able to configure measurement instrumentation, generate, receive signals and process the data obtained according to the algorithm requirements. It was found out that measurement signal level limitations lead to registration of the informative signal mixed with measurement equipment self-noise of the same level. In spite of this the estimation error stays on the same level. Application of the algorithm supposed allows to essentially improve measurement rate and estimation accuracy of the resonance frequency for the system observed.

Keywords: q-bit, Josephson junction, resonant frequency, probability density distribution, likelihood function.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-39-49

REFERENCES

1. Mooij J.E., Orlando T.P., Levitov L., Tian L., Wal C.H. van der, Lloyd S. Josephson persistent-current qubit. *Science*, 1999, vol. 285, no. 5430, pp. 1036–1039. doi: 10.1126/science.285.5430.1036
2. Clarke J., Wilhelm F.K. Superconducting quantum bits. *Nature*, 2008, vol. 453, no. 7198, pp. 1031–1042. doi: 10.1038/nature07128
3. Greenberg Ya.S., Izmalkov A., Grajcar M., Il'ichev E., Krech W., Meyer H.-G., Amin M.H.S., Brink A.M. van den. Low-frequency characterization of quantum tunneling in flux qubits. *Physical Review B*, 2002, vol. 66, iss. 21, pp. 214525-1–214525-6. doi: 10.1103/PhysRevB.66.214525
4. Fedorov N.N. *Osnovy elektrodinamiki* [The foundations of electrodynamics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1980. 399 p.
5. Baskakov S.I. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio circuits and signals]. 3rd ed., rev. and enl. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2000. 462 p.
6. Jenkins G.M., Watts D.G. *Spectral analysis and its applications*. San Francisco, Holden Day, 1969 (Russ. ed.: Dzhenkins G., Vatts D. *Spektral'nyj analiz i ego prilozheniya*. T. 1. Translated from English V.F. Pisarenko. Moscow, Mir Publ., 1971. 317 p.).
7. Borovkov A.A. *Matematicheskaya statistika. Otsenka parametrov. Proverka gipotez* [Mathematical statistics. Parameter estimation. Hypothesis testing]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 472 p.
8. Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G. *Teoriya ustoichivogo obnaruzheniya, razlicheniya i otsenivaniya signalov* [The theory of sustainable detection, distinction and evaluation of signals]. 2nd ed., rev. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 320 p.
9. Zacks Sh. *The theory of statistical inference*. 1st ed. New York, John Wiley & Sons, 1971. 626 p. (Russ. ed.: Zaks Sh. *Teoriya statisticheskikh vyvodov*. Translated from English E.V. Chepurin. Moscow, Mir Publ., 1975. 776 p.).

10. Tikhonov V.I., Shakhtarin B.I., Sizykh V.V. *Sluchainye protsessy. Primery i zadachi*. Т. 1. *Sluchainye velichiny i protsessy* [Stochastic processes. Examples and problems. Vol. 1. Stochastic variables and processes]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 2003. 400 p.
11. Taylor J. *An introduction to error analysis: the study of uncertainties in physical measurements*. California, USA, University science books Mill Valley, 1982. 270 p. (Russ. ed.: Teilor Dzh. *Vvedenie v teoriyu oshibok*. Translated from English L.G. Dedenko. Moscow, Mir Publ., 1985. 272 p.).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Вострецов Алексей Геннадьевич – родился в 1955 году, д-р техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: методы статистической обработки сигналов. Опубликовано свыше 150 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: vostretsov@adm.nstu.ru).

Vostretsov Aleksey G. (b. 1955) – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, the vice-rector for research at Novosibirsk State Technical University. His main field of research is the statistical theory of signal processing in conditions of a priori uncertainty. He has been working in this field since 1980. He has over 150 publications, including 3 monographs (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: vostretsov@adm.nstu.ru).



Кривецкий Андрей Васильевич – канд. техн. наук, доцент кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств, научный сотрудник межфакультетской лаборатории криогенной квантовой электроники НГТУ. Область научных интересов: измерения, обработка сигналов, схемотехника измерительных устройств, автоматизация измерений. Опубликовано более 20 научных работ. (Адрес: 630511, Россия, Новосибирская область, с. Криводановка. Email: jcu@ngs.ru).

Krivetsky Andrey V. (b. 1974) – candidate of technical science, associate professor of Department of Development and Technology Radioelectronic Devices, senior scientist of cryogenic quantum electronics laboratory in Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on measurements, signal processing, measurement electronics, measurement automatization. He is author more than 20 scientific papers. (Address: Novosibirsk district, Krivodanovka, 630511, Russia. Email: jcu@ngsl.ru).



Радченко Сергей Евгеньевич – канд. техн. наук, научный сотрудник кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – применение теории устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов в условиях априорной неопределенности в задачах спектрального анализа и автоматизации физического эксперимента. Работает в этой области с 2008 г., имеет 16 публикаций. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: R1505@mail.ru).

Radchenko Sergey E. (b. 1986), candidate of technical science, research fellow of Electronic Equipment Engineering Department in Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on stochastic signal detection and estimation theory in case of a priori uncertainty applied to spectral analysis and experiment automation. He has published 16 scientific papers since 2008. (Address: 20, Karl Marks Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: R1505@mail.ru).



Пицун Дмитрий Константинович – студент кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных интересов – методы и средства численного моделирования и натурного эксперимента в системах обнаружения и оценивания параметров сигналов. Опубликовано 5 печатных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: dmitrijpicun@rambler.ru).

Pitsun Dmitriy K. (b. 1993), student of Electronic Equipment Engineering Department in Novosibirsk State Technical University. His interests are currently focused on facilities and methods of numerical modeling and full-scale experiments for signal detection and estimation systems. He has published 5 scientific papers. (Address: 20, Karl Marks Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: dmitrijpicun@rambler.ru).

*Статья поступила 17 февраля 2014 г.
Received February 17, 2014*

To Reference:

Vostretsov A.G., Krivetsky A.V., Radchenko S.E., Pitsun D.K. Opredelenie sostoyaniya kvantovogo bita na osnove perekhodov Dzhozefsona pri pomoshchi metoda maksimal'nogo pravdopodobiya [3JJ Q-bit state identification using the maximum-likelihood method]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 39–49. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-39-49

УДК 519.63: 621.37:621.3.049.76

**ВЛИЯНИЕ МАССЫ ПОДВИЖНОГО ЭЛЕКТРОДА
НА ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ МЭМ СИСТЕМ****В.П. Драгунов¹, Л.С. Драгунова²**¹Новосибирский государственный технический университет²Сибирский университет потребительской кооперации

В статье представлены результаты исследований особенностей функционирования двухэлектродных МЭМС с изменяющимся межэлектродным зазором с учетом веса подвижного электрода и электромеханических взаимодействий. Анализ проводился в нелинейном приближении для возвращающей и электростатической сил. Установлено, что сила веса и нелинейность возвращающей силы в совокупности могут приводить к появлению дополнительного экстремума на зависимости смещения подвижного электрода от величины приложенного напряжения. Показано, что дополнительный экстремум появляется, только если $\beta > 5$ и $F^* < -4$. Установлено, что сила веса и нелинейность системы приводят к появлению максимумов на зависимостях глубины модуляции емкости и относительного диапазона контролируемого изменения емкости от силы веса. Получены аналитические выражения, позволяющие оценить оптимальные значения коэффициента нелинейности, при которых глубина модуляции емкости и относительный диапазон контролируемого изменения емкости принимают максимальные значения. Показано, что за счет оптимального использования силы веса подвижного электрода в МЭМС с нелинейной зависимостью возвращающей силы от величины смещения подвижного электрода глубина модуляции емкости и относительный диапазон контролируемого изменения емкости могут быть увеличены в несколько раз по сравнению с МЭМС с линейной зависимостью возвращающей силы.

Ключевые слова: электростатическая сила, вес электрода, глубина модуляции емкости, статическое равновесие, диапазон контролируемого изменения емкости.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-50-60

Введение

При разработке и создании ряда микроэлектромеханических систем (МЭМС) таких как геофоны, микроэлектромеханические преобразователи энергии механических колебаний в электрическую энергию, различные инерциальные системы, работающих при ускорениях α_0 , часто не превышающих нескольких g (g – ускорение свободного падения), возникает необходимость учета собственно го веса F_0 движущихся частей системы. В зависимости от ориентации МЭМС в пространстве значение проекции силы веса F на направление нормали к поверхности подвижного элемента изменяется от $-F_0$ до F_0 и во многих случаях может даже превышать основное воздействие, вызванное ускорением α_0 .

В работе [1] в линейном приближении для возвращающей силы упругих элементов показано, что у двухэлектродной электромеханической системы с изменяющимся межэлектродным зазором учет силы веса сводится заменой переменной x на $x^* = (x - F/k)$ (где k – коэффициент квазиупругой силы) к анализу аналогичной системы с невесомым подвижным электродом, т. е. в линейном приближении учет силы веса в этом случае сводится лишь к смещению начала отсчета в точку $x_0^* = -F/k$.

В то же время в работах [2–5] показано, что в нелинейном приближении для возвращающей силы упругих элементов в поведении МЭМС могут появляться особенности, которых нет у линейной системы.

В [1] анализ особенностей функционирования двухэлектродных МЭМС с изменяющимся межэлектродным зазором был также проведен и в нелинейном приближении для возвращающей и электростатической сил, но без учета веса подвижного электрода.

В данной работе проводится анализ особенностей функционирования двухэлектродных МЭМС с изменяющимся межэлектродным зазором с учетом веса подвижного электрода и электромеханических взаимодействий в нелинейном приближении для возвращающей и электростатической сил.

1. Модель

Рассмотрим основные особенности поведения МЭМС на примере простейшей двухэлектродной электромеханической системы (рис. 1), здесь 1, 2 – соответственно неподвижный и подвижный электроды; 3 – упругие подвесы, V_0 – напряжение между подвижным и неподвижным электродами, d_0 – начальное расстояние между электродами, x – величина смещения подвижного электрода от положения равновесия. Будем полагать, что на подвижный элемент МЭМС (в данном случае это подвижный электрод) действуют сила упругости пружины (возвращающая сила), электростатическая сила и постоянная сила F_0 (например, сила тяжести), не зависящая от смещения подвижного электрода.

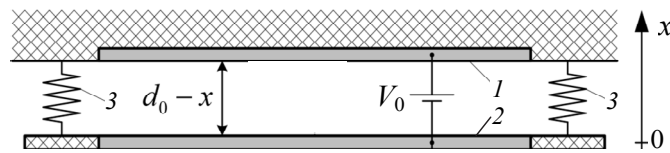


Рис. 1 – Схема простейшей электромеханической системы

Fig. 1 – The simple electromechanical system circuit

Для такой системы уравнение равновесия (баланс сил) во многих случаях может быть записано в виде [2, 3, 6]

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - k_3 x^3 + \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{2} \left(\frac{V_0}{d_0 - x} \right)^2 + F, \quad (1)$$

где m – масса подвижного электрода; k – коэффициент квазиупругой силы; k_3 – коэффициент, характеризующий нелинейность возвращающей силы, ϵ_0 – электрическая постоянная; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость газа в межэлектродном зазоре; S – площадь электрода.

В безразмерных переменных (1) принимает вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -z - \beta z^3 + \frac{\lambda}{(1-z)^2} + F^*, \quad (2)$$

где $\lambda = C_0 V_0^2 / 2kd_0^2$ – безразмерное напряжение; $z = x / d_0$ – относительное смещение подвижного электрода; $\beta = k_3 d_0^2 / k$, $\tau = \omega_0 t$; $C_0 = \epsilon_0 \epsilon S / d_0$; $\omega_0 = \sqrt{k / m}$ и $F^* = F / kd_0$.

Таким образом, с учетом веса подвижного электрода поведение двухэлектродной системы определяется тремя параметрами λ , β и F^* .

2. Анализ работы МЭМС

Анализ поведения МЭМС проведем при неизменных или очень медленно меняющихся воздействиях – статическое приближение.

В этом приближении уравнение, связывающее параметр λ с координатой положения статического равновесия \bar{z} , принимает вид

$$\Phi(\bar{z}, \lambda, \beta) = (\bar{z} + \beta\bar{z}^3 - F^*)(1 - \bar{z}^2) - \lambda = 0. \quad (3)$$

На рис. 2 приведены зависимости положения статического равновесия \bar{z} подвижного электрода от величины безразмерного напряжения λ , рассчитанные с использованием (3), при нескольких значениях β и F^* . Видно, что в случае, когда сила F_0 стремится увеличить межэлектродный зазор ($F^* < 0$), на данных зависимостях появляется дополнительный экстремум. То есть при отрицательных F^* могут существовать две критические точки, характеризующиеся значениями относительного смещения $z_{кр,1}$ и $z_{кр,2}$ и безразмерного напряжения $\lambda_{кр,1}$ и $\lambda_{кр,2}$.

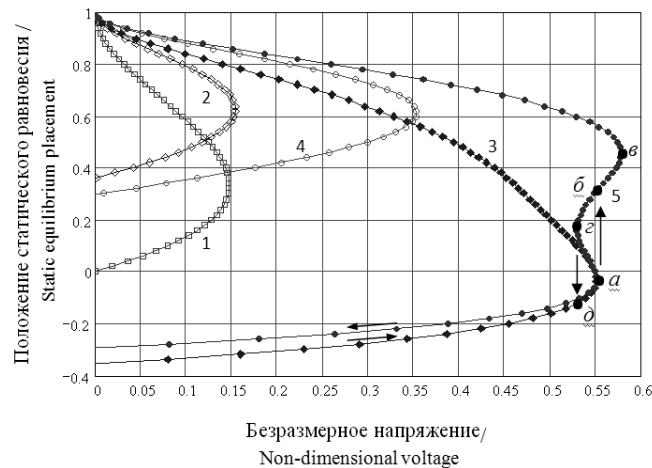


Рис. 2 – Зависимость положения статического равновесия от величины безразмерного напряжения λ :

1 – $\beta = 0$, $F^* = 0$; 2 – $\beta = 4,2$, $F^* = 0,55$; 3 – $\beta = 4,2$, $F^* = -0,55$;
4 – $\beta = 10$, $F^* = 0,55$; 5 – $\beta = 10$, $F^* = -0,55$

Fig. 2 – The dependence of static equilibrium placement vs non-dimensional voltage λ :

1 – $\beta = 0$, $F^* = 0$; 2 – $\beta = 4,2$, $F^* = 0,55$; 3 – $\beta = 4,2$, $F^* = -0,55$;
4 – $\beta = 10$, $F^* = 0,55$; 5 – $\beta = 10$, $F^* = -0,55$

Такое поведение системы объясняется тем, что при отрицательных \bar{z} возвращающая и электростатическая силы направлены в одну сторону (к неподвижному электроду) и обе стремятся вернуть систему в нейтральное положение, из которого

она была выведена силой F_0 ($F^* < 0$). При переходе из точки a (дополнительная критическая точка) в точку b электростатическая сила монотонно возрастает (не меняя направления), а возвращающая сила при $\bar{z} > 0$ изменяет направление и быстро (нелинейно) возрастает, но теперь уже действуя против электростатической силы, как и F_0 . При этом в точке b тоже достигается равновесие.

В результате при медленном увеличении управляющего напряжения λ величина смещения подвижного электрода \bar{z} будет сначала монотонно уменьшаться (кривая 5, рис. 2), пока не достигнет дополнительной критической точки (точка a), потом смещение \bar{z} скачком изменится до значения, соответствующего точке b , а затем продолжит монотонно изменяться до второй критической точки (точка v – основная критическая точка). При этом дальнейшее увеличение λ приведет к неконтролируемому перемещению подвижного электрода к неподвижному вплоть до соприкосновения электродов (эффект схлопывания).

Если же, не достигнув основной критической точки, начать уменьшать λ , то обратный скачок произойдет при значениях \bar{z} и λ , соответствующих точке z . В результате зависимости положения подвижного электрода от приложенного напряжения при смене направления изменения напряжения не совпадут, и будет наблюдаться своеобразный гистерезис.

На рис. 3 приведены зависимости смещения подвижного электрода \bar{z} и приведенного напряжения λ от времени, рассчитанные с использованием (2) при очень медленном изменении приложенного напряжения. Видно, что при $\beta = 10$ и $F^* = -0,55$ (эти параметры соответствуют кривой 5 на рис. 2) положения подвижного электрода при увеличении и уменьшении приложенного напряжения не совпадают.

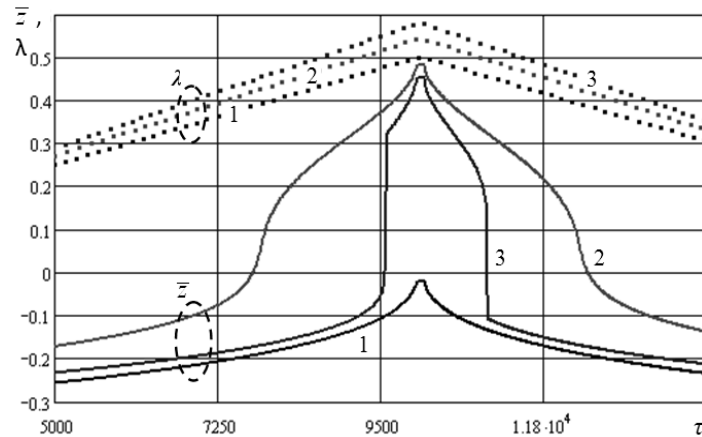


Рис. 3 – Зависимости положения статического равновесия \bar{z} и величины безразмерного напряжения λ (точки) от безразмерного времени τ :

$$1 - \beta = 5, F^* = -0,5; 2 - \beta = 10, F^* = -0,42; 3 - \beta = 10, F^* = -0,55$$

Fig. 3 – Static equilibrium placement \bar{z} and non-dimensional voltage λ vs non-dimensional time τ dependences:

$$1 - \beta = 5, F^* = -0,5; 2 - \beta = 10, F^* = -0,42; 3 - \beta = 10, F^* = -0,55$$

В то же время зависимости 1 и 2 (рис. 3) положения подвижного электрода при увеличении и уменьшении приложенного напряжения, рассчитанные с использованием значений параметров β и F^* , при которых дополнительный экстремум еще не возникает, совпадают. Значения параметров β и F^* в этом случае сказываются лишь на форме кривых.

На рис. 4 приведены зависимости смещения подвижного электрода от величины приведенного напряжения при его очень медленном увеличении и уменьшении.

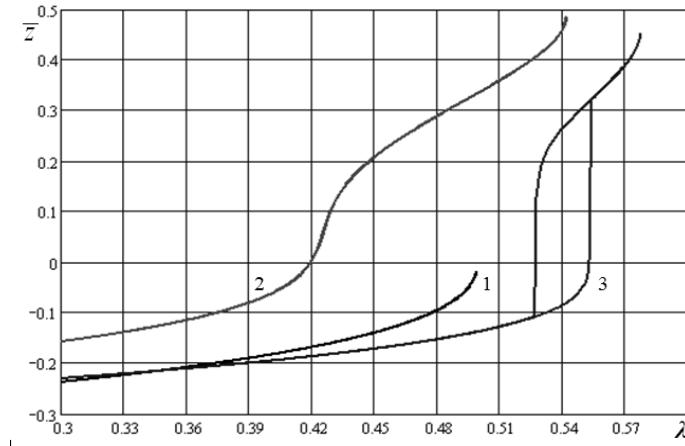


Рис. 4 – Зависимости положения статического равновесия \bar{z} от величины безразмерного напряжения λ :

1 – $\beta = 5$, $F^* = -0,5$; 2 – $\beta = 10$, $F^* = -0,42$; 3 – $\beta = 10$, $F^* = -0,55$

Fig. 4 – Static equilibrium placement \bar{z} vs non-dimensional voltage λ dependences:

1 – $\beta = 5$, $F^* = -0,5$; 2 – $\beta = 10$, $F^* = -0,42$; 3 – $\beta = 10$, $F^* = -0,55$

Видно, что на зависимости, соответствующей $\beta = 10$ и $F^* = -0,55$, появляется гистерезис, а на других зависимостях гистерезиса нет.

Наличие линейной компоненты у возвращающей силы уменьшает данный эффект. Поэтому особенности, присущие конкретной системе, могут быть связаны также с формой упругих подвесов и электродов, с жесткостью системы и другими ее конструктивными особенностями.

Согласно (3) при учете нелинейности упругих подвесов зависимость критического смещения от величины β определяется уравнениями

$$\bar{z}_{кр,1}(\beta, F^*) = \frac{1}{5\beta} An(\beta, F^*) + \frac{1}{5} \frac{\beta - 5}{An(\beta, F^*)} + \frac{1}{5}, \quad (4)$$

$$\bar{z}_{кр,i}(\beta, F^*) = -\mu_1 - \mu_2 + 0,2 \pm j\sqrt{3}(\mu_1 - \mu_2), \quad i = 2, 3, \quad (5)$$

где

$$An(\beta, F^*) = \sqrt[3]{\left(5 + 25F^* + \beta + 5\sqrt{\frac{5 - 2\beta + \beta^2 + (10 + 25F^* + 2\beta)\beta F^*}{\beta}}\right)\beta^2},$$

$$\mu_1 = \frac{An(\beta, F^*)}{10\beta}, \quad \mu_2 = \frac{\beta - 5}{10An(\beta, F^*)}.$$

Анализ выражений (4) и (5) показывает: 1) что $\bar{z}_{кр,1}$ и $\bar{z}_{кр,2}$ определяют соответственно координаты основной и дополнительной критических точек (точки a и b на рис. 2), а $\bar{z}_{кр,3}$ – координату точки минимума между ними (точка c на рис. 2); 2) при значениях безразмерной силы $F^* = -0,55$ и $0,4$ координаты критических точек $\bar{z}_{кр,1}$ и $\bar{z}_{кр,2}$ не зависят от β (т. е. от степени нелинейности системы) и равны соответственно 0 и 0,6.

На рис. 5 приведены зависимости положения критических точек от безразмерной силы F^* , рассчитанные с использованием (4) и (5). Сплошными линиями показаны зависимости $\bar{z}_{кр,1}|_{\beta}$, пунктиром – $\bar{z}_{кр,2}|_{\beta}$, точками – $\bar{z}_{кр,3}|_{\beta}$.

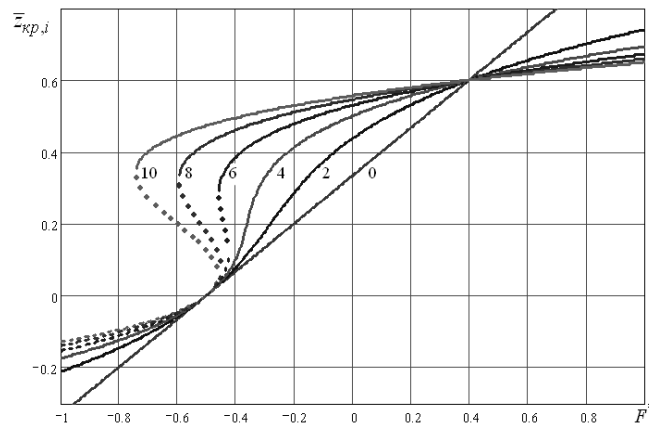


Рис. 5 – Зависимость положения критических точек от величины безразмерной силы F^* . Цифры у кривых показывают значения параметра β , при которых построена соответствующая кривая

Fig. 5 – Dependence of critical points placement vs non-dimensional force F^* . The curve number indicates the value of parameter β

Из анализа этих зависимостей и уравнений (4) и (5) следует, что дополнительный максимум появляется, только если $\beta > 5$ и $F^* < -4$.

Уравнения (4) и (5) позволяют также рассчитать зависимости достижимых глубины модуляции емкости $\eta = C_{\max} / C_{\min}$ и относительного диапазона контролируемого изменения емкости $\eta d = 2(C_{\max} - C_{\min}) / (C_{\max} + C_{\min})$ при изменении приложенного напряжения от величины безразмерной силы F^* .

На рис. 6 и 7 приведены зависимости достижимых глубины модуляции емкости η и относительного диапазона контролируемого изменения емкости ηd от величины безразмерной силы F^* .

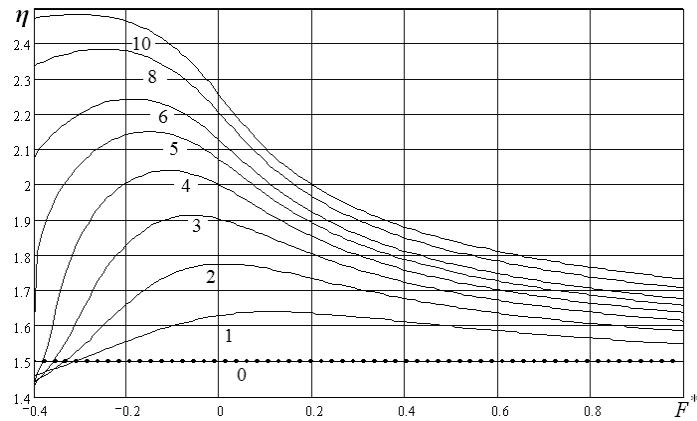


Рис. 6. – Зависимость достижимой глубины модуляции емкости η от величины безразмерной силы F^* . Цифры у кривых показывают значения параметра β , при которых построена соответствующая кривая

Fig. 6 – Dependence of achievable capacitance variation depth η vs non-dimensional force F^* value. The curve number indicates the value of parameter β

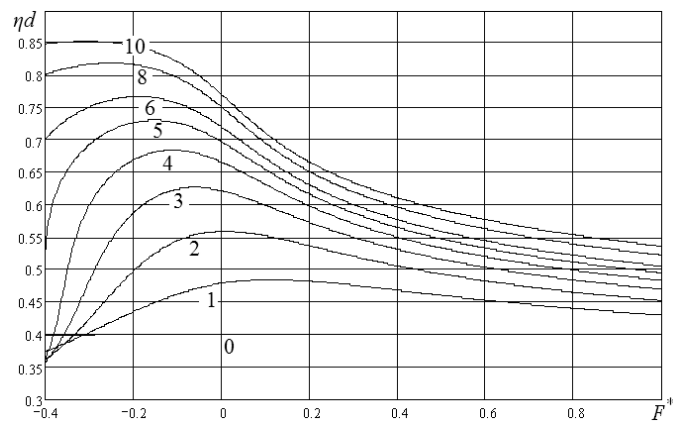


Рис. 7 – Зависимость достижимого относительного диапазона контролируемого изменения емкости ηd от величины безразмерной силы F^* . Цифры у кривых показывают значения параметра β , при которых построена соответствующая кривая

Fig. 7 – Dependence of achievable relative range of controlled capacitance variation ηd vs non-dimensional force F^* value. The curve number indicates the value of parameter β

Особенностью данных зависимостей является наличие максимумов. С увеличением β положение максимумов смещается в область отрицательных F^* , а значения η и ηd в максимумах возрастают. Отметим также, что если в линейном

для возвращающей силы приближении η и ηd не зависят от веса подвижного электрода и равны соответственно 1,5 и 0,4, то с увеличением нелинейности механической системы значения этих параметров при изменении веса подвижного электрода меняются.

На рис. 8 приведены зависимости максимально достижимых глубины модуляции емкости η_{\max} и относительного диапазона контролируемого изменения емкости ηd_{\max} от величины параметра β . Для $\beta \leq 10$ эти зависимости с погрешностью менее 2 % можно аппроксимировать выражениями:

$$\eta_{\max} = 1,5 + 0,156\beta - 0,0057\beta^2 \quad \text{и} \quad \eta d_{\max} = 0,4 + 0,086\beta - 0,004\beta^2.$$

Видно, что за счет оптимального использования силы веса подвижного электрода в МЭМС с нелинейной зависимостью возвращающей силы от величины смещения подвижного электрода глубина модуляции емкости и относительный диапазон контролируемого изменения емкости могут быть увеличены в несколько раз по сравнению с МЭМС с линейной зависимостью возвращающей силы от величины смещения подвижного электрода.

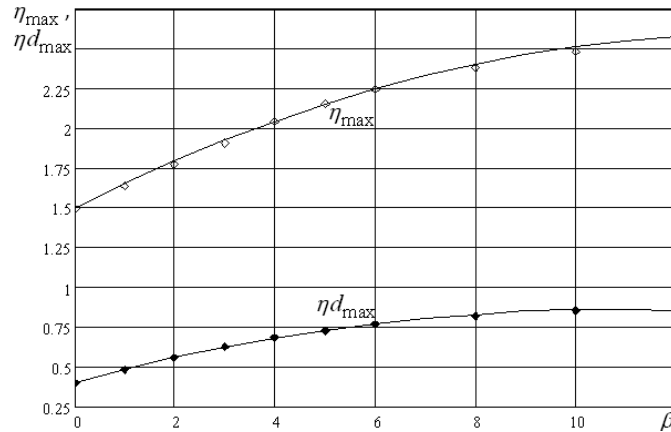


Рис. 8 – Зависимости максимально достижимых глубины модуляции емкости η_{\max} и относительного диапазона контролируемого изменения емкости ηd_{\max} от величины параметра β

Fig. 8 – The maximal achieved capacitance variation depth η_{\max} and relative controlled capacitance variation range ηd_{\max} vs value of parameter β dependencies

Из условия статического равновесия (3) также следует, что система останется управляемой, если при заданных β и F^* величина λ будет меньше

$$\lambda_{\text{кр}} = (\bar{z}_{\text{кр}} + \beta \bar{z}_{\text{кр}}^3 - F^*) (1 - \bar{z}_{\text{кр}})^2,$$

а приложенное напряжение V_0 не превысит

$$V_{0,\text{кр}} = \sqrt{\frac{2kd_0^2}{C_0} (\bar{z}_{\text{кр}} + \beta \bar{z}_{\text{кр}}^3 - F^*) (1 - \bar{z}_{\text{кр}})^2}. \quad (6)$$

Заключение

Проведен анализ влияния силы веса подвижного электрода на поведение двух-электродных МЭМС с плоскопараллельной конструкцией электродов с учетом электромеханических взаимодействий в нелинейном приближении для возвращающей и электростатической сил. Установлено, что сила веса и нелинейность возвращающей силы в совокупности могут приводить к появлению дополнительного экстремума на зависимости смещения подвижного электрода от величины приложенного напряжения.

Показано, что дополнительный экстремум появляется, только если $\beta > 5$ и $F^* < -4$.

Установлено, что сила веса и нелинейность системы приводят к появлению максимумов на зависимостях глубины модуляции емкости и относительного диапазона контролируемого изменения емкости от силы веса.

Получены аналитические выражения, позволяющие оценить оптимальные значения коэффициента нелинейности, при которых глубина модуляции емкости и относительный диапазон контролируемого изменения емкости принимают максимальные значения.

Показано, что за счет оптимального использования силы веса подвижного электрода в МЭМС с нелинейной зависимостью возвращающей силы от величины смещения подвижного электрода глубина модуляции емкости и относительный диапазон контролируемого изменения емкости могут быть увеличены в несколько раз по сравнению с МЭМС с линейной зависимостью возвращающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драгунов В.П., Драгунова Е.В. Особенности функционирования МЭМ систем // Нано- и микросистемная техника. – 2015. – № 6. – С. 43–52.
2. Драгунов В.П. Нелинейная модель упругого элемента микроэлектромеханических систем // Нано- и микросистемная техника. – 2004. – № 6. – С. 19–24.
3. Драгунов В.П. Нелинейная динамическая модель упругого элемента микроэлектромеханических систем // Нано- и микросистемная техника. – 2004. – № 10. – С. 23–29.
4. MEMS electrostatic vibration energy harvester without switches and inductive elements / V. Dorzhiev, A. Karami, P. Basset, V. Dragunov, D. Galayko // Journal of Physics: Conference Series. – 2014. – Vol. 557, N 1. – P. 012126-1–012126-5. – doi: 10.1088/1742-6596/557/1/012126.
5. Electret-free micromachined silicon electrostatic vibration energy harvester with the Bennet's doubler as conditioning circuit / V. Dorzhiev, A. Karami, P. Basset, F. Marty, V. Dragunov, D. Galayko // IEEE Electron Device Letters. – 2015. – Vol. 36, iss. 2. – P. 183–185. – doi: 10.1109/LED.2014.2387213.
6. Fargas-Marques A., Casals-Terre J., Shkel A.M. Resonant pull-in condition in parallel-plate electrostatic actuators // Journal of Microelectromechanical Systems. – 2007. – Vol. 16, iss. 5. – P. 1044–1050. – doi: 10.1109/JMEMS.2007.900893.

AN INFLUENCE OF THE MOBILE ELECTRODE WEIGHT ON FUNCTIONING MEMS

Dragunov V.P.¹, Dragunova L.S.²

¹Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

²Siberian University of Consumer Cooperation, Novosibirsk, Russian Federation

The results of investigations of operational characteristics of parallel plate MEMS with a variable electrode gap are presented in this paper. The effects of the mobile electrode weight and electromechanical interaction were also taken into account. The analysis was carried out in a non-

linear case for restoring and electrostatic forces. It was found that the weight and the nonlinearity of the restoring force in the aggregate could produce an additional extremum on the dependence of the mobile electrode displacement vs an applied voltage. An additional extremum appears only in the case when $\beta > 5$ and $F^* < -4$. It was ascertained that the weight and system nonlinearity produce maximums on the dependences of the capacitance modulation depth vs weight and a relative range of controlled capacitance variation vs weight. The found analytic forms give a possibility to evaluate an optimal value of a nonlinear coefficient when the capacitance modulation depth and a relative range of the controlled capacitance variation have maximum values. It was found that in the case of an optimal mobile electrode weight in MEMS with a nonlinear dependence of the restoring force vs the mobile electrode displacement the capacitance variation depth and the relative range of the controlled capacitance variation could be increased as compared to MEMS with the restoring force linear dependence.

Keywords: electrostatic force, electrode weight, capacitance variation depth, static equilibrium, relative range of the controlled capacitance variation.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-50-60

REFERENCES

1. Dragunov V.P., Dragunova E.V. Osobennosti funktsionirovaniya MEM sistem [Specific features of MEM systems functioning]. *Nano- i mikrosistemnaya tekhnika – Nano and Microsystem Technique*, 2015, no. 6, pp. 43–52.
2. Dragunov V.P. Nelineynaya model uprugogo elementa mikroelektromekhanicheskikh sistem [Nonlinear model of elastic element for MEMS]. *Nano- i mikrosistemnaya tekhnika – Nano and Microsystem Technique*, 2004, no. 6, pp. 19–24.
3. Dragunov V.P. Nelineinaya dinamicheskaya model' uprugogo elementa mikromekhanicheskikh sistem [Nonlinear dynamic model of elastic element for MMS]. *Nano i mikrosistemnaya tekhnika – Nano and Microsystem Technique*, 2004, no. 10, pp. 23–29.
4. Dorzhiev V., Karami A., Basset P., Dragunov V., Galayko D. MEMS electrostatic vibration energy harvester without switches and inductive elements. *Journal of Physics: Conference Series*, 2014, vol. 557, no. 1, pp. 012126-1–012126-5. doi: 10.1088/1742-6596/557/1/012126
5. Dorzhiev V., Karami A., Basset P., Marty F., Dragunov V., Galayko D. Electret-free micro-machined silicon electrostatic vibration energy harvester with the Bennet's doubler as conditioning circuit. *IEEE Electron Device Letters*, 2015, vol. 36, iss. 2, pp. 183–185. doi: 10.1109/LED.2014.2387213
6. Fargas-Marques A., Casals-Terre J., Shkel A.M. Resonant pull-in condition in parallel-plate electrostatic actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2007, vol. 16, iss. 5, pp. 1044–1050. doi: 10.1109/JMEMS.2007.900893

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Драгунов Валерий Павлович – родился в 1947 году, д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры ППиМЭ Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: наноэлектроника, физика низкоразмерных структур, нано- и микросистемная техника. Опубликовано более 130 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: drag@adm.nstu.ru).

Dragunov Valery Pavlovich (b. 1947) – Doctor of Sciences (Eng.), Professor at the Department of semiconductor devices and microelectronics in Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on nanoelectronics, physics of low-dimensional structures, nano- and microsystem technology. He is author of more than 130 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: drag@adm.nstu.ru).



Драгунова Людмила Соломоновна – родилась в 1951 году, доцент кафедры информатики Сибирского университета потребительской кооперации. Область научных интересов: информатика, информационные технологии. Опубликовано более 60 научных работ. (Адрес: 630087, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 26. Email: secmet@sibupk.nsk.su).

Dragunova Lyudmila Solomonovna (b. 1951) – Associate professor at the Department of computer science in Siberian University of Consumer Cooperation. The area of her scientific interests is computer science and information technology. She has published more than 60 scientific papers. (Address: 26, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630087, Russian Federation. Email: secmet@sibupk.nsk.su).

*Статья поступила 28 августа 2015 г.
Received August 28, 2015*

To Reference:

Dragunov V.P., Dragunova L.S. Vliyanie massy podvizhnogo elektroda na funktsionirovanie MEM sistem [An influence of the mobile electrode weight on functioning MEMS]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 50–60. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-50-60

УДК 004.925.83

СОЕДИНЕНИЕ ДЕТАЛЕЙ ПРИ КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СБОРКИ ИЗДЕЛИЙ ИЗ ТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ИХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ

И.Е. Ландовская, В.Д. Фроловский, В.В. Ландовский
Новосибирский государственный технический университет

В статье рассматривается метод соединения деталей при компьютерной сборке изделий из ткани на поверхности твердотельного многогранного объекта. Для представления поверхности тканого материала в пространстве используются физические методы, а именно метод частиц: ткань представляет собой систему взаимосвязанных частиц, движение которых описывается законами механики. Процесс моделирования представляет собой решение системы дифференциальных уравнений с начальными условиями и нахождение траекторий движения частиц с использованием схемы с перешагиванием. Предлагаемый подход включает основные этапы компьютерного моделирования (дискретизация деталей произвольной формы, выявление основных внутренних взаимодействий между частицами модели, нахождение месторасположения частиц связей у соединяемых деталей, определение зон напряженности материала после сборки). Описаны методы экспериментального исследования деформационных свойств тканых материалов. Приведены выражения для расчета сил деформации, возникающих между частицами дискретной модели ткани, учитывающие экспериментально полученные данные. В доказательство соответствия поведения представленной компьютерной модели ткани и реальных образцов материалов приводятся данные экспериментов. В подтверждение результативности метода соединения деталей изделия при сборке на поверхности твердотельного объекта приведены результаты примерки базовой конструкции на виртуальный и реальный объекты, показано выделение цветом зон напряженности материала.

Ключевые слова: метод соединения деталей, компьютерное моделирование ткани, метод частиц, дискретизация деталей произвольной формы, деформационные коэффициенты материала, схема с перешагиванием.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-61-74

Введение

Всегда было ясно, что тканые материалы имеют уникальные свойства, которые позволяют им деформироваться в значительной степени по-другому, чем листам других материалов, например, бумаги или металлической фольги. Особые возможности деформации ткани были отмечены и известны всегда, но не были никогда полностью поняты с научной или инженерной точки зрения. Поэтому моделирование ткани считается одним из сложнейших аспектов компьютерной графики, так как сама ткань является обманчиво простым объектом реального мира. В действительности же процесс взаимодействия материала с окружающей средой достаточно сложно описать с помощью математических формул.

Современные средства компьютерной графики позволяют решать множество задач моделирования сложных поверхностей. Однако в задачах моделирования естественного поведения поверхностей тканей по-прежнему остается много открытых вопросов. Как будет выглядеть ткань с определенными свойствами на определенном объекте? Как с изменением свойств ткани изменяется ее драпировка? Важным в этой задаче является не только достижение наибольшей визуальной

реалистичности, но, возможно в большей степени, обеспечение соответствия модели физическим характеристикам ткани, соответствия моделируемых деформаций реальным.

Уже не одно столетие ученые разных континентов пытаются создать модель тканого материала, которая будет отражать все свойства реального полотна. Одна из первых попыток создания модели ткани была предпринята еще в конце XIX века русским математиком и механиком П. Чебышёвым. С того времени было предложено множество методов деформационного моделирования поверхностей тканей в пространстве, которые в основном можно разделить на три группы: физические, геометрические и гибридные. Каждая группа методов имеет свои плюсы и минусы, но наиболее эффективными в плане повторения поведения реальных материалов оказались физические методы.

В физических методах ткань, как правило, представляет собой систему взаимосвязанных частиц, движение которых описывается законами механики. А процесс моделирования сводится к решению системы дифференциальных уравнений с начальными условиями и нахождению траекторий движения частиц. Одним из первых использование такого подхода предложил D. Terzopoulos [1]. Хорошо известны работы в области физического моделирования ткани, таких авторов как D. Baraff и A. Witkin [2], P. Volino [3], U. Ascher [4], D. Breen и D. House [5], X. Provot [6].

К сожалению, в работах по моделированию ткани авторы не уделяется достаточного внимания соединению деталей, хотя этот этап неотъемлемо является частью процесса сборки изделий из тканых материалов и неоспоримо влияет на итоговый вид получаемого изделия. Кроме того, многие исследователи, особенно зарубежные, используют метод получения деформационных коэффициентов ткани, основанный на системе Kawabata [7], но для большинства российских ученых эта система является недоступной, и, как следствие, разработки в области моделирования ткани в нашей стране ведутся недостаточно интенсивно.

Таким образом, основной задачей данной работы является разработка метода соединения деталей при компьютерной сборке изделий. В то же время, так как модель ткани должна учитывать деформационные свойства реального материала, необходимо:

- 1) выбрать форму ячейки сети для построения сеточной модели тканого материала;
- 2) предложить метод получения коэффициентов дифференциальных уравнений для моделирования тканых материалов на отечественном оборудовании;
- 3) определить, какие выражения следует использовать для расчета сил деформации, возникающих между частицами дискретной модели ткани, чтобы учесть экспериментально полученные данные.

1. Моделирование тканых материалов

В ткани тонкие волокна скручены в нити, и эти нити более или менее жестко сплетены во взаимосвязанную сеть. Компоненты сети удерживаются вместе трением, а поведение ткани зависит от типа волокна (хлопчатобумажное, шелк, шерсть и т.д.), веса волокна, плотности сплетения, типа сплетения и т. д. Очевидным фактом является и то, что порядок расположения нитей относительно друг друга остается неизменным даже при существенных деформациях, а сама деформация ткани представляет собой только изменение формы и размеров ячеек [5]. Отсюда следует предположение рассматривать ткань как систему частиц, которые размещены в точках пересечения продольных и поперечных нитей (рис. 1).

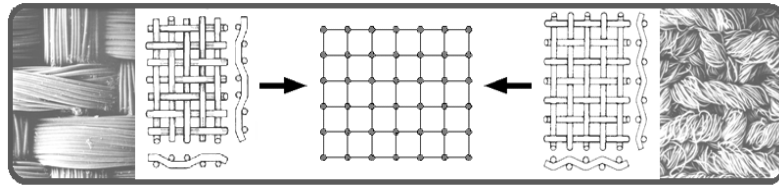


Рис. 1 – Представление различных структур тканых материалов в виде дискретной модели

Fig. 1 – Fabric materials various structures discrete model representation

Пределом детализации модели ткани является сетка с шагом, сравнимым с толщиной нити, но следует учитывать и тот факт, что время моделирования возрастает пропорционально увеличению количества частиц, которыми представлена сетка тканого материала. Поэтому при проведении экспериментов следует подобрать параметры дискретизации, при которых модель будет достаточно детализована, чтобы точно воспроизвести важные физические эффекты, и все же не настолько подробно, чтобы сделать расчеты неосуществимыми.

Одним из важнейших этапов построения модели является определение законов взаимодействия частиц, для этого необходимо рассмотреть деформационные свойства ткани и определить наиболее важные взаимодействия.

2. Деформационные свойства материалов

Основные взаимодействия, которые происходят на уровне нити, это растяжение-сжатие; изгиб и сдвиг [7]. Учитывая, что ткань достаточно легкая и масса ткани в удаленных узлах оказывает пренебрежимо малое влияние на каждую рассматриваемую частицу, предположим, что на каждую внутреннюю частицу влияют 12 соседних частиц. На рис. 2 взаимодействия растяжения-сжатия, сдвига и изгиба обозначены связями 1, 2 и 3 соответственно.

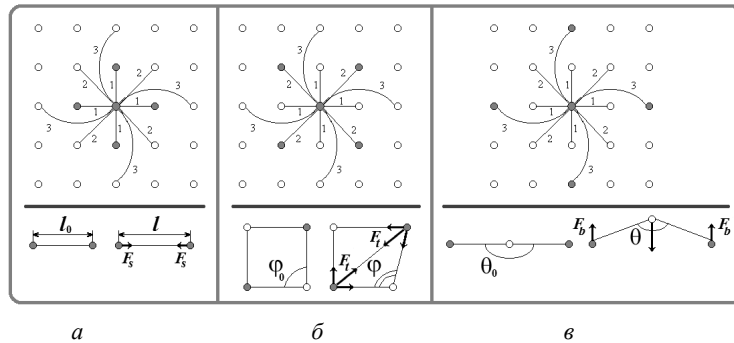


Рис. 2 – Типы взаимодействий:

a – растяжение-сжатие; *б* – сдвиг; *в* – изгиб

Fig. 2 – Interaction types:

a – compression-stretching; *b* – trellising; *c* – bending

Введем обозначения: $F_{s,ijkl}$ – сила взаимодействия растяжения-сжатия, с которой частица P_{kl} воздействует на частицу P_{ij} ; $F_{t,ijkl}$, $F_{b,ijkl}$ – силы взаимодействий сдвига и изгиба соответственно.

Взаимодействие растяжения-сжатия имеет место, когда расстояние между двумя соседними частицами (см. рис. 2, а, связи 1) отличается от расстояния между ними в состоянии покоя. В случае растяжения-сжатия направление сил очевидно, так как во взаимодействии учитываются положения только двух частиц. Силу, возникающую при взаимодействиях растяжения-сжатия на n -м шаге интегрирования между соседними частицами P_{ij} и P_{kl} , $k = i \pm d$, $l = j \pm p$, $d, p \in \{0;1\}$, $d \neq p$, можно получить, используя выражение

$$F_{s,ijkl} = \frac{F_{spr}(L)}{S_{pr}} S_{yas},$$

где $F_{spr}(L)$ – сила, возникающая в пробе материала, при растяжении его вдоль нити основы или утка на L процентов (величина силы определяется исходя из диаграммы «нагрузка-удлинение» материала (рис. 3) в соответствии с ГОСТ 3813–72 отдельно для нитей основы и нитей утка); S_{pr} – площадь пробы (размеры проб для шерстяных и полушерстяных тканей – 50×100 мм, для всех остальных – 50×200 мм); S_{yas} – площадь ячейки сети модели, которой представлен тканый материал.

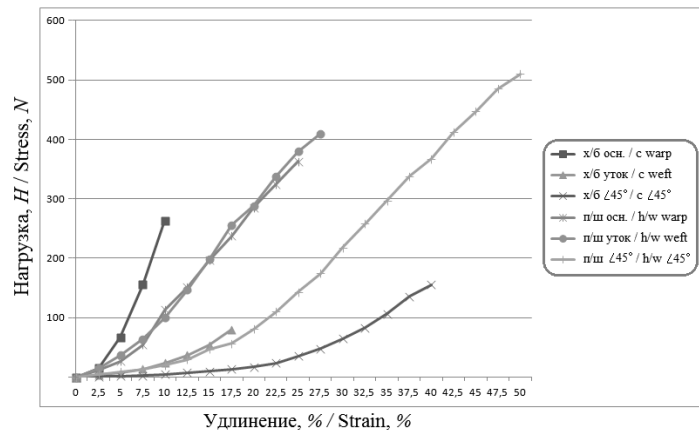


Рис. 3 – Диаграмма «нагрузка-удлинение» хлопчатобумажной и полушерстяной тканей

Fig. 3 – «Stress-strain» diagram of the cotton and half-woolen fabric

Результирующая сила взаимодействия растяжения-сжатия для частицы P_{ij} определяется как сумма:

$$F_{s,ij} = \sum_{kl \in R_{s,ijkl}} F_{s,ijkl},$$

где $R_{s,ijkl}$ – множество индексов частиц, связанных с частицей P_{ij} взаимодействием растяжения-сжатия.

Взаимодействие сдвига (см. рис. 2, б, связи 2) можно выразить через взаимодействие растяжения-сжатия частиц, образующих диагональ ячейки. Силу, возникающую при взаимодействии сдвига на n -м шаге интегрирования между соседни-

ми частицами P_{ij} и P_{kl} , $k = i + d$, $l = j + p$, $d, p \in \{-1, 1\}$, можно получить, используя выражение

$$F_{t,ijkl} = \frac{F_{t,pr}(L)}{S_{pr}} S_{yas},$$

где $F_{t,pr}(L)$ – сила, возникающая в пробе материала, при растяжении его под углом 45° к нити основы на L процентов (величина силы определяется исходя из диаграммы «нагрузка-удлинение» материала (см. рис. 3) в соответствии с ГОСТ 3813–72).

Результирующая сила взаимодействия сдвига для частицы P_{ij} определяется как сумма:

$$F_{t,ij} = \sum_{kl \in R_{t,ijkl}} F_{t,ijkl},$$

где $R_{t,ijkl}$ – множество индексов частиц, связанных с частицей P_{ij} взаимодействием сдвига.

Последний вид взаимодействия – взаимодействие изгиба (см. рис. 2, в, связи 3) можно выразить как функцию угла, образованного тремя последовательными частицами, лежащими на одной прямой (нити). Сила, возникающая при взаимодействии изгиба на n -м шаге интегрирования между частицами P_{ij} и P_{kl} , $k = i \pm d$, $l = j \pm p$, $d, p \in \{0, 2\}$, $d \neq p$, определяется исходя из выражения

$$F_{b,ijkl} = \frac{EI_{pr}}{b^2(1-\nu^2)N} \Delta\theta,$$

где EI_{pr} – жесткость пробы материала при изгибе (EI , Н·м²); b – длина ребра ячейки сети, $\Delta\theta$ – угол между двумя ребрами (угол изгиба нити); ν – значение коэффициента Пуассона для данного материала; N – количество ячеек сети модели ткани, которые поместятся по ширине пробы (размеры пробы составляют 160×30 мм).

Результирующую силу взаимодействия изгиба для частицы P_{ij} определим как сумму:

$$F_{b,ij} = \sum_{kl \in R_{b,ijkl}} F_{b,ijkl} + \sum_{sr \in R_{b,ijsr}} (-F_{b,ijsr}),$$

где $R_{b,ijkl}$ – множество индексов частиц, связанных с частицей P_{ij} взаимодействием изгиба, а $R_{b,ijsr}$ – множество индексов частиц, для которых частица P_{ij} является узлом, через который происходит изгиб.

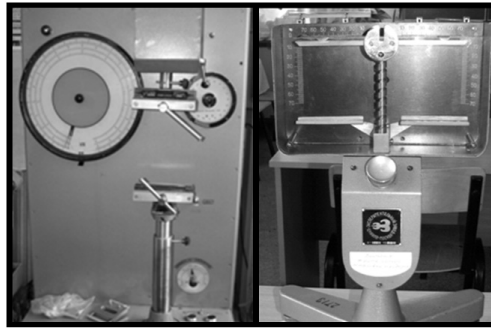
В итоге получаем $F_{int,ij}$ – внутреннюю силу – суммарный результат всех внутренних сил, действующих на частицу:

$$F_{int,ij} = \sum_{kl \in R_{s,ijkl}} F_{s,ijkl} + \sum_{kl \in R_{t,ijkl}} F_{t,ijkl} + \sum_{kl \in R_{b,ijkl}} F_{b,ijkl} + \sum_{sr \in R_{b,ijsr}} (-F_{b,ijsr}),$$

где $R_{s,ijkl}$, $R_{t,ijkl}$, $R_{b,ijkl}$ – множество индексов частиц, связанных с частицей P_{ij} взаимодействиями растяжения-сжатия, сдвига и изгиба соответственно,

а $R_{b,ij sr}$ – множество индексов частиц, для которых частица P_{ij} является узлом, через который происходит изгиб.

Испытания материалов для получения характеристик деформации растяжения-сжатия и сдвига проводят на разрывной машине РТ-250 (рис. 4, а), а для получения характеристик изгиба – на приборе ПТ-2 (рис. 4, б) согласно ГОСТ 3813–72 и ГОСТ 10550–93 соответственно.



а

б

Рис. 4 – Измерительные приборы:

а – разрывная машина РТ-250; б – прибор ПТ-2

Fig. 4 – Measuring instruments:

a - strength testing machine RT-250; b – PT-2

3. Математическая модель ткани

Движение всей системы можно описать обобщенными перемещениями в трехмерном пространстве:

$$r_{ij}(t) = \{x_{ij}(t), y_{ij}(t), z_{ij}(t)\},$$

где $x_{ij}(t)$, $y_{ij}(t)$, $z_{ij}(t)$ – координаты частицы в трехмерном пространстве; t – время.

На каждом временном слое ищут положения узлов в пространстве. При этом каждая из частиц обладает некоторой массой, находится в гравитационном поле, взаимодействует с окружающей средой и соседними частицами [8]. Тогда уравнение движения частицы P_{ij} имеет следующий вид:

$$m_{ij}r_{ij}'' = m_{ij}g - m_{ij}c_{ij}r_{ij}' + \sum_{kl \in R_{ijkl}} F_{int}(r_{ij}, r_{kl}),$$

где m_{ij} – масса частицы; c_{ij} – константа демпфирования; составляющая $-c_{ij}r_{ij}'$ – представляет собой потери энергии, связанные с взаимодействием частицы с окружающей средой; g – ускорение свободного падения. Последняя составляющая уравнения движения, представляет собой результирующую силу взаимодействий между частицами; R_{ijkl} – множество индексов узлов, связанных с узлом P_{ij} .

Для решения системы следует воспользоваться схемой с перешагиванием (leapfrog scheme) [9]. Это обусловлено тем, что для воспроизведения на компьютере реального поведения материала число частиц в моделируемом полотне должно быть велико, и к тому же каждое дополнительное вычисление силы

требует больших временных затрат. Схема с перешагиванием является методом второго порядка точности, и, в сравнении с классическим явным методом Эйлера, обладает большей устойчивостью, что позволяет на порядок увеличить шаг интегрирования:

$$V_{n+1} = V_n + hM^{-1}F(r_n, V_n),$$

$$r_{n+1} = r_n + hV_{n+1},$$

где r_n и V_n – векторы положений и скоростей частиц на n -м шаге интегрирования; h – шаг интегрирования; $F(r, V)$ – вектор-функция, описывающая действие внутренних и внешних сил на ткань; M – матрица инерции – диагональная матрица, описывающая распределение масс частиц ткани.

Начальные условия: $r|_{t_0} = r_0, V|_{t_0} = 0, F_{int}|_{t_0} = 0$.

4. Дискретизация деталей произвольной формы

Существует множество разновидностей форм сеток, которыми может быть представлена модель ткани: равномерная сетка, частично равномерная сетка, неравномерная сетка и др. Так как диаграмма «нагрузка-удлинение» содержит данные растяжения проб вдоль основы, утка и под углом в 45° к основе, то логично предположить, что и в компьютерной модели представления ткани между частицами должны возникать силы, аналогичные по направлению их действия. Из всех возможных вариантов дискретизации ткани наиболее подходящим в этом случае является представление ткани сеткой с равномерной квадратной формой ячеек. Правильность выбранной модели дискретизации ткани и расчета коэффициентов деформации, а также отсутствие зависимости модели от размеров ячейки сетки подтверждают результаты экспериментов, представленные на рис. 5.

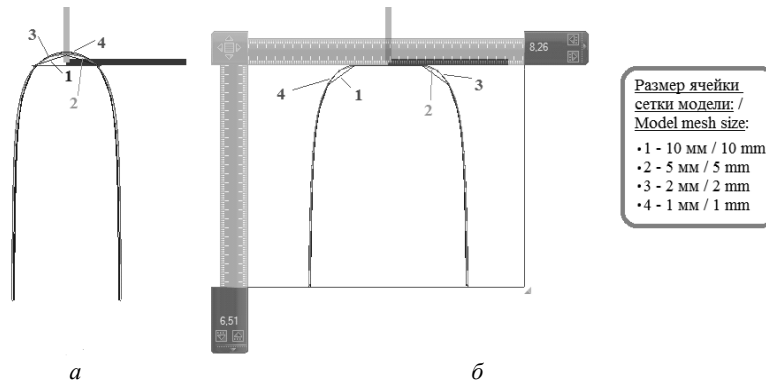


Рис. 5 – Провисание проб с разным размером ячеек сетки:

a – без внешних воздействий; *b* – закрепленных грузом на опорной площадке

Fig. 5 – Dangling of the samples with different mesh sizes:

a – without external loads; *b* – fixed load on the base platform

На рис. 5, *b* показаны результаты эксперимента, который воспроизводит изгиб хлопчатобумажной ткани для лоскутного шитья ($EI_{pr} = 1370$ мкН·см², $l_{pr} = 65$ мм – длина свешивающихся концов проб) при измерении коэффициента

изгиба ткани по основе на приборе ПТ-2 согласно ГОСТ 10550–93 для проб с различным размером ячеек сетки.

Исходными данными для построения сеточной модели является контур детали (выкройки), который в общем случае представляет собой произвольный многоугольник. На рис. 6 показан результат наложения на произвольную деталь равномерной прямоугольной сетки, в узлах которой будут расположены частицы моделируемой ткани.

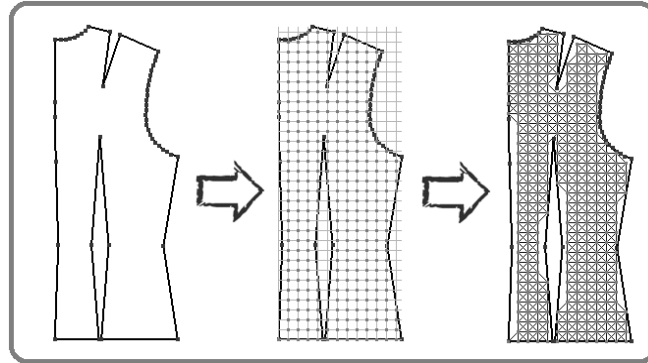


Рис. 6 – Пример представления контура детали сеткой частиц
Fig. 6 – Example of the item profile representation by the particles' mesh

На рис. 6 также хорошо видна основная проблема представления ткани равномерной квадратной сеткой – сильное искажение исходного контура детали. Можно измельчить сетку в несколько раз, но это приведет к неоправданному возрастанию вычислительных затрат и полностью все равно не сможет решить проблему искажения контура, только немного уменьшит ее визуально. Следовательно, необходимо проводить соединение деталей так, чтобы в процессе моделирования не искажать пределы изначально заданных контуров деталей.

5. Математическое представление метода соединения деталей

Так как равномерная сетка никогда не сможет в точности повторить контуры моделируемой детали, то в местах соединений следует представить деталь как совокупность контура и сетки ткани. При этом на контуре каждой детали должны быть размещены частицы связи с другой деталью, отвечающие за соединение этих деталей в процессе сборки.

Пусть $a_{ns}^I(x_{ns}^I, y_{ns}^I, z_{ns}^I)$ и $a_{ks}^I(x_{ks}^I, y_{ks}^I, z_{ks}^I)$ – точки контура первой соединяемой детали, которые являются началом и концом соединения соответственно, а $a_{ns}^{II}(x_{ns}^{II}, y_{ns}^{II}, z_{ns}^{II})$ и $a_{ks}^{II}(x_{ks}^{II}, y_{ks}^{II}, z_{ks}^{II})$ – точки контура второй соединяемой детали, которые также являются началом и концом соединения. Тогда длина соединения p -й детали определяется как длина контура этой детали, по которому должно проходить соединение:

$$l_s^p = \sum_{i=ns+1}^{ks} \sqrt{(x_i^p - x_{i-1}^p)^2 + (y_i^p - y_{i-1}^p)^2 + (z_i^p - z_{i-1}^p)^2}, \quad p = I, II.$$

Точки соединения размещаются на контуре детали от начала соединения на равном расстоянии друг от друга, которое определяется из выражения (1). Сами координаты расположения точек связей на контуре детали можно определить, решив систему уравнений (2). При этом получается, что и у одной, и у второй детали в местах соединения контуров всегда располагается одинаковое количество частиц связей.

$$R_s^p = l_s^p \frac{\min(b^I, b^{II})}{\max(l_s^I, l_s^{II})}, p = I, II, \quad (1)$$

где R_s^p – расстояние между частицами связей на контуре p -й детали, b^I, b^{II} – длина ребра ячейки сети у первой и второй соединяемых деталей соответственно.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_{sv_n}^p - x_i^p}{x_{i+1}^p - x_i^p} = \frac{y_{sv_n}^p - y_i^p}{y_{i+1}^p - y_i^p} = \frac{z_{sv_n}^p - z_i^p}{z_{i+1}^p - z_i^p}, \\ R_{ii+1}^p = \sqrt{(x_{i+1}^p - x_i^p)^2 + (y_{i+1}^p - y_i^p)^2 + (z_{i+1}^p - z_i^p)^2}, \\ R_{nsi}^p = \sqrt{(x_i^p - x_{ns}^p)^2 + (y_i^p - y_{ns}^p)^2 + (z_i^p - z_{ns}^p)^2}, \\ \sqrt{(x_i^p - x_{sv_n}^p)^2 + (y_i^p - y_{sv_n}^p)^2 + (z_i^p - z_{sv_n}^p)^2} = \\ = R_s^p (n-1) - R_{nsi}^p, \\ \sqrt{(x_{i+1}^p - x_{sv_n}^p)^2 + (y_{i+1}^p - y_{sv_n}^p)^2 + (z_{i+1}^p - z_{sv_n}^p)^2} = \\ = R_{ii+1}^p - (R_s^p \cdot (n-1) - R_{nsi}^p), \\ R_{nsi}^p \leq R_s^p \cdot (n-1) < \sqrt{(x_{i+1}^p - x_{ns}^p)^2 + (y_{i+1}^p - y_{ns}^p)^2 + (z_{i+1}^p - z_{ns}^p)^2}, \\ p = I, II, \end{array} \right. \quad (2)$$

где $a_i^p(x_i^p, y_i^p, z_i^p)$ и $a_{i+1}^p(x_{i+1}^p, y_{i+1}^p, z_{i+1}^p)$ – точки начала и конца отрезка контура p -й детали, на котором должна находиться n -я частица связи; $x_{sv_n}^p, y_{sv_n}^p, z_{sv_n}^p$ – координаты n -й частицы связи, расположенной на контуре p -й детали; $n = \overline{1, N_s}$, N_s – количество частиц связей в соединении.

Частицы, через которые происходит соединение деталей, должны иметь жесткие связи с крайними частицами сетки ткани, чтобы в процессе сборки не изменялись размеры деталей. Точки ткани, которые будут иметь связи с частицами на контуре, должны удовлетворять условию:

$$\sqrt{(x_{sv_n}^p - x_i^p)^2 + (y_{sv_n}^p - y_i^p)^2 + (z_{sv_n}^p - z_i^p)^2} \leq 1,5b^p, p = I, II,$$

где x_t^p, y_t^p, z_t^p – координаты крайней частицы сетки ткани p -й детали, $t \in T$; T – множество индексов крайних частиц ткани у p -й детали; b^p – длина ребра ячейки сети p -й детали.

В процессе сборки итоговая длина соединения вычисляется, исходя из длин соединяемых деталей:

$$l_s = \min(l_s^I, l_s^{II}),$$

где l_s^I – длина соединения первой детали, l_s^{II} – длина соединения второй детали. А расстояние между частицами связей p -й соединяемой детали в состоянии равновесия должно составлять

$$R_s = \min(R_s^I, R_s^{II}),$$

где R_s^I – расстояние между частицами связей на контуре первой детали; R_s^{II} – расстояние между частицами связей на контуре второй детали.

Направление стягивающей силы $F_{st}^p(x_{st}^p, y_{st}^p, z_{st}^p)$, приложенной к n -й частице связи p -й детали при сборке можно определить как

$$x_{st}^p = \frac{x_{sv_n}^I + x_{sv_n}^{II}}{2}; \quad y_{st}^p = \frac{y_{sv_n}^I + y_{sv_n}^{II}}{2}; \quad z_{st}^p = \frac{z_{sv_n}^I + z_{sv_n}^{II}}{2}.$$

При моделировании на частицы связей, кроме стягивающих сил, действуют те же силы, что и на частицы ткани, а между частицами связей детали возникают взаимодействия растяжения-сжатия и изгиба, описанные в разделе «Деформационные свойства материалов» данной статьи. Коэффициенты деформации для частиц связей определяются теми же методами, что и коэффициенты деформации самого материала.

Значительным плюсом данного метода является то, что размеры ячеек сеток соединяемых деталей могут в значительной степени различаться между собой, как показано на рис. 7, а.

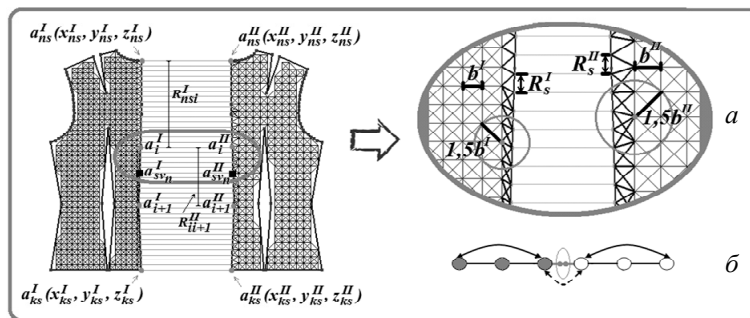


Рис. 7 – Соединение двух деталей изделия:

а – вид спереди; б – вид сверху

Fig. 7 – Connection of the product's two items:

а – face view; б – top view

Связи, характеризующие изгиб ткани, действуют через узел, поэтому после сборки изделия влияние одной детали на другую отсутствует (см. рис. 7, б). Эти взаимодействия учитываются отдельно, исходя из известного набора связей частиц соединения с крайними точками ткани детали.

В процессе моделирования учитываются коэффициенты среды, такие как сила тяжести, сопротивление воздуха, сила трения об объект и прочие, что придает процессу большую реалистичность. Итоговый результат сборки базовой конструкции представлен на рис. 8.

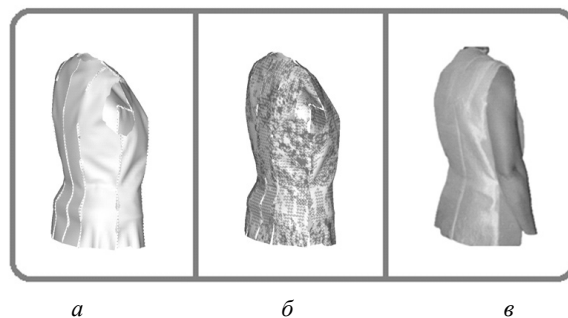


Рис. 8 – Результаты сборки базовой конструкции:

a – виртуальное изделие; *б* – выделение цветом зон напряженности материала; *в* – примерка на реальную модель

Fig. 8 – Results of the base design assembling:

a – virtual product; *b* – highlighting of the tension areas; *c* – fitting on the real model

Заключение

Изложенные в работе методы и алгоритмы не раз доказывали свою эффективность на практике при сборке различных моделей одежды. Для проверки описанных методов и моделей был разработан комплекс программных средств, позволяющий производить все этапы компьютерного моделирования сборки изделий из ткани, а также проводить численную и визуальную оценку эффективности сборки через итоговый расчет растяжений и выделение цветом зон напряженности материала.

Уникальность работы заключается в предложенном методе соединения деталей изделия. Он является тем необходимым звеном в цепочке моделирования, которое позволяет приблизить виртуальные деформации материала к реальным, позволяя соединять детали, представленные равномерной прямоугольной сеткой, что при обычном соединении деталей «частица ткани – частица ткани» вызывало деформацию контура деталей, а следовательно, растяжение и складки ткани в тех областях, где нарушались границы контура. Также уникальностью работы можно считать объединение методов экспериментального исследования деформационных свойств тканых материалов на конкретной измерительной аппаратуре и математического моделирования на компьютере с использованием полученных данных без каких-либо сложных преобразований.

Описанные методы и модели могут с успехом быть применены в легкой промышленности, дизайне, компьютерных играх и анимации, а также во многих других смежных отраслях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Terzopoulos D., Fleischer K.** Deformable models // *The Visual Computer*. – 1988. – Vol. 4, iss. 6. – P. 306–331. – doi: 10.1007/BF01908877.
2. **Baraff D., Witkin A.** Large steps in cloth simulation // *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH'98*, Orlando, Florida, 19–24 July, 1998. – New York, USA, 1998. – P. 43–54. – doi: 10.1145/280814.280821.
3. **Volino P., Magnenat-Thalmann N.** Comparing efficiency of integration methods for cloth simulation // *Proceedings of Computer Graphics International Conference (CGI'01)*, Hong Kong, 3–6 July 2001. – Los Alamitos, California, 2001. – P. 265–272. – doi: 10.1109/CGI.2001.934683.
4. **Ascher U.M., Boxerman E.** On the modified conjugate gradient method in cloth simulation // *The Visual Computer*. – 2003. – Vol. 19, iss. 7. – P. 526–531. – doi: 10.1007/s00371-003-0220-4.
5. **Breen D.E., House D.H., Getto P.H.** A physically based particle model of woven cloth // *The Visual Computer*. – 1992. – Vol. 8, iss. 5. – P. 264–277. – doi: 10.1007/BF01897114.
6. **Provot X.** Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior // *Proceedings of Graphics Interface Conference, Qu'ebec, Canada, May 1995*. – New York, USA, 1995. – P. 147–154.
7. **Kawabata S.** The standardisation and analysis of hand evaluation: technical report. – Osaka, Japan: The Textile Machinery Society of Japan, 1980. – 97 p.
8. **Ландовский В.В., Фроловский В.Д.** Исследование методов интегрирования дифференциальных уравнений в задаче моделирования поведения ткани на основе метода частиц // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 287–298.
9. **Hockney W., Eastwood J.** *Computer simulation using particles*. – New York: CRC Press, 1988. – 540 p.

**PART CONNECTION IN COMPUTER SIMULATION OF THE
FABRIC PRODUCT FITTING TAKING INTO ACCOUNT THEIR
DEFORMATION PROPERTIES**

Landovskaya I.E., Frolovsky V.D., Landovsky V.V.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

A part arrangement method in computer-aided fitting of fabric items on the surface of a polyhedral object is considered in the paper. To represent the surface of a fabric in space physical methods such as the particle method are to be used. A fabric is a system of interconnected particles and the movement of these particles can be described by the laws of motion. The simulation process consists of solving a differential equation system with boundary (initial) conditions and finding the particle paths by using the leapfrog scheme. The proposed approach includes the main steps of computer simulation (sampling of the free-shape items, identification of the main internal interactions of the model particles, finding the connected particle location for the items, revealing the fabric tension areas after fitting). Experimental methods for studying fabric deformation properties are described. Expressions for calculating deformation forces that occur between the particles of the fabric discrete model taking into account experimental data are presented. Experimental data are given to demonstrate the correspondence of the proposed fabric computer model behavior and real material samples. To show the items connection method efficiency during assembling on the solid object surface the results of fitting on virtual and real objects are presented. The tension areas of the fabric are given in color.

Keywords: part connection method, fabric computer simulation, particle method, sampling of the free-shape items, fabric deformation rates, leapfrog scheme.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-61-74

REFERENCES

1. Terzopoulos D., Fleischer K. Deformable models. *The Visual Computer*, 1988, vol. 4, iss. 6, pp. 306–331. doi: 10.1007/BF01908877

2. Baraff D., Witkin A. Large steps in cloth simulation. *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH'98*, Orlando, Florida, 19–24 July, 1998, pp. 43–54. doi: 10.1145/280814.280821
3. Volino P., Magnenat-Thalmann N. Comparing efficiency of integration methods for cloth simulation. *Proceeding of Computer Graphics International Conference (CGI'01)*, Hong Kong, 3–6 July 2001, pp. 265–272. doi: 10.1109/CGI.2001.934683
4. Ascher U.M., Boxerman E. On the modified conjugate gradient method in cloth simulation. *The Visual Computer*, 2003, vol. 19, iss. 7, pp. 526–531. doi: 10.1007/s00371-003-0220-4
5. Breen D.E., House D.H., Getto P.H. A physically based particle model of woven cloth. *The Visual Computer*, 1992, vol. 8, iss. 5, pp. 264–277. doi: 10.1007/BF01897114
6. Provot X. Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. *Proceedings of Graphics Interface Conference*, Qu'ebec, Canada, May 1995, pp. 147–154.
7. Kawabata S. *The standardisation and analysis of hand evaluation*. Technical report. Osaka, Japan, The Textile Machinery Society, 1980. 97 p.
8. Landovskii V.V., Frolovskii V.D. Issledovanie metodov integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii v zadache modelirovaniya povedeniya tkani na osnove metoda chastits [Integration methods in the problem of modelling a fabric based on the particles method]. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki – Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2006, vol. 9, iss. 3, pp. 287–298. (In Russian)
9. Hockney W., Eastwood J. *Computer simulation using particles*. New York, CRC Press, 1981. 540 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Ландовская Ирина Евгеньевна – родилась в 1987 году, окончила Новосибирский государственный технический университет (НГТУ), с 2011 года аспирант кафедры автоматизированных систем управления НГТУ. Область научных интересов: компьютерное моделирование поведения тканых материалов. Опубликовано 15 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: nairy@rambler.ru).

Landovskaya Irina Evgenievna (b. 1987) – graduated from the Novosibirsk State Technical University (NSTU), Postgraduate Student of Automated Control System Department of the NSTU. Area of research: computer-aided simulation of the fabric materials behavior. She is author of 15 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: nairy@rambler.ru).



Фроловский Владимир Дмитриевич – родился в 1952 году, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: моделирование и автоматизация процессов геометрического проектирования. Опубликовано 120 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: frolovskij@corp.nstu.ru).

Frolovsky Vladimir Dmitrievich (b. 1952) – Doctor of Science (Eng.), Professor, Professor at the Automated Control System Department in Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the simulation and geometric design process automation. He is author of 120 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: frolovskij@corp.nstu.ru).



Ландовский Владимир Владимирович – родился в 1980 году, канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизированных систем управления Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: моделирование процессов сборки трехмерных изделий из плоских заготовок. Опубликовано 20 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: landovskij@corp.nstu.ru).

Landovsky Vladimir Vladimirovich (b. 1980) – Candidate of Science (Eng.), associate professor at the Automated Control System Department in Novosibirsk State Technical University. Research interests: process simulation of the assembling the three-dimensional products from the flat parts. He is author of 20 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: landovskij@corp.nstu.ru).

*Статья поступила 29 июля 2015 г.
Received July 29, 2015*

To Reference:

Landovskaya I.E., Frolovsky V.D., Landovskii V.V. Soedinenie detalei pri komp'yuternom modelirovanii sborki izdelii iz tkanykh materialov s uchetom ikh deformatsionnykh svoistv [Part connection in computer simulation of the fabric product fitting taking into account their deformation properties]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 61–74. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-61-74

УДК 621.313.282.2

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПРИВОДА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ГЕНЕРИРОВАНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЙ

Л.А. Нейман, В.Ю. Нейман

Новосибирский государственный технический университет

Актуальность исследований обусловлена необходимостью повышения точности при проведении динамических расчетов линейных электромагнитных приводов колебательного движения, применяемых в технических системах генерирования вибраций с частотой до 100 Гц. В проводимых исследованиях рассматривается решение задачи по созданию динамической модели одномассовой колебательной системы с электромагнитным приводом, характеризующей различные режимы ее работы и позволяющей производить всесторонний анализ электромеханических процессов методами структурного моделирования. Для решения полевой части задачи применялась стандартная программа конечно-элементного моделирования FEMM, для расчета динамической части задачи разрабатывался алгоритм расчета, реализованный с помощью аппарата структурного моделирования в среде Matlab Simulink. В работе рассматривается комплексный подход по созданию динамической модели электромагнитного привода колебательного движения. Основу динамической модели составляют дифференциальные уравнения, записанные для электрического равновесия нелинейной цепи и по принципу Даламбера для механической системы. Предложены алгоритм расчета и пример схемной реализации модели с использованием аппарата структурного моделирования, позволяющий учесть влияние насыщения и поток рассеяния в стальном магнитопроводе. Показано, что точность при динамических расчетах в значительной степени зависит от точности воспроизведения математических аналогов механических характеристик. Особое внимание в работе уделяется вопросу определения и учета параметров упругих связей и сил сухого трения. На примере расчета периодических электромеханических процессов одномассовой колебательной системы с электромагнитным приводом рассмотрены возможности для проведения всестороннего анализа рабочих режимов. По результатам исследований получены рекомендации для повышения точности расчетов электромеханических процессов.

Ключевые слова: вибрационные технологии, электромагнитный привод, динамическая модель, конечно-элементное моделирование, одномассовая колебательная система, методы структурного моделирования.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-75-87

Введение

Виброимпульсные технологии широко применяются в промышленности для обеспечения многих современных технологических процессов и производств. Перспективным направлением исследований в данной области является совершенствование машин и механизмов, созданных на базе электромагнитного привода возвратно-поступательного движения, обеспечивающего возможность в создании низкочастотных колебаний и вибраций с частотой до 100 Гц [1, 2].

Основными преимуществами в использовании электромагнитного привода являются относительно высокая надежность, повышенный ресурс, некоторые экономические выгоды при его производстве, возможность значительного снижения энергопотребления в резонансных и околорезонансных режимах, а также наиболее простой способ управления амплитудой вибраций независимо от частоты

[3–5]. Существующие методики точного учета конструктивных параметров электромагнитного привода и реализация новых рабочих циклов позволяют в разной степени улучшить их силовые и энергетические показатели [6–12].

Для повышения эффективности в использовании такого привода в технологических процессах еще на стадии проектирования возникает необходимость решения задачи по расчету динамических характеристик с последующей корректировкой тесно связанных параметров электрической, магнитной и механической подсистем, характеризующих работу электропривода [13].

Также хорошо известно, что упрощение параметров этих связей, даже в рамках одной подсистемы, может существенно повлиять на ход решения задачи, а полученные результаты – отличаться от процессов, происходящих в реальной технической системе.

Поэтому создание динамической модели, наиболее объективно отражающей взаимосвязи параметров всех подсистем электромагнитного привода колебательного движения, является актуальной задачей.

Целью настоящей работы является создание точной динамической модели одномассовой колебательной системы с электромагнитным приводом, характеризующей различные режимы ее работы и позволяющей производить всесторонний анализ электромеханических процессов методами структурного моделирования.

1. Постановка задачи

Основная сложность при реализации динамических характеристик модели электромагнитного вибратора – точность в определении электромагнитной силы и потокосцепления, которые изменяются во времени и зависят от тока и величины воздушного рабочего зазора.

Использование в качестве исходных данных в виде набора статических параметров потокосцепления и электромагнитного усилия, определяемых аналитическими методами теории магнитных цепей либо по приближенной картине магнитного поля, в полной мере не учитывает локального насыщения участков магнитопровода и потоки рассеяния. Это является главным источником погрешностей расчета динамических характеристик [14].

Для повышения точности воспроизведения динамических характеристик электромагнитного вибратора использовались исходные данные в виде набора статических параметров, полученных с помощью расчета магнитного поля.

Суть данного подхода состоит в том, что на первом этапе с помощью численного метода определяются зависимости электромагнитного усилия и потокосцепления от тока и перемещения подвижной системы, которые затем представляются в виде некоторого массива значений опорных точек статических параметров. На втором этапе полученные массивы значений статических параметров используются при расчете динамических характеристик, а в случае удаления значений от опорных точек интерполируются. Таким образом, задача расчета динамических характеристик сводится к двум этапам решения, что широко используется в практике моделирования электромеханических устройств [14, 15].

2. Динамическая модель и результаты анализа модели

Эскиз однокатушечного электромагнитного привода колебательного движения приведен на рис. 1. Электропривод содержит магнитопровод 1, набранный из листов электротехнической стали, закрепленную на магнитопроводе катушку 2 и установленный в воздушном промежутке, образованном полюсными наконечниками, якорь 3, связанный с системой его возврата в исходное положение. Механи-

ческая система возврата содержит упругий элемент 4 и жестко связанную с якорем присоединенную массу 5.

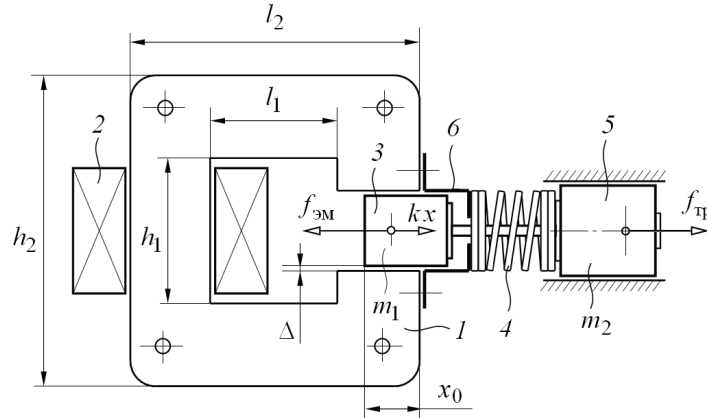


Рис. 1 – Конструкция электромагнитного привода колебательного движения

Fig. 1 – The design of the electromagnetic actuator oscillatory motion

Фиксация начального положения якоря относительно полюсных наконечников обеспечивается фиксирующим устройством 6. Характеристика намагничивания стальных элементов конструкции магнитопровода соответствует свойствам стали марки 1212. На рис. 1 также обозначено направление действия электромагнитной силы $f_{ЭМ}$ при протекании тока по обмотке катушки, противодействующей механической силы упругих связей $f_{п}(x) = kx$ и силы сухого трения $f_{ТР}$.

При обесточенной катушке в состоянии покоя механической системы величина x_0 определяет начальную глубину внедрения сердечника якоря относительно полюсных наконечников.

Для упрощения существующего анализа магнитное поле при расчете принимается плоскопараллельным. Также считаем, что в шихтованном магнитопроводе отсутствуют вихревые токи, а потери от гистерезиса, вызванные динамической кривой перемагничивания, минимальны.

В общем случае динамические процессы, протекающие при включении электромагнитного привода, колебательного движения характеризуются системой дифференциальных уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа для электрической цепи и по принципу Даламбера для одномассовой механической системы,

$$u(t) = i r + \frac{d\psi(i, x)}{dt}, \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_{ЭМ}(i, x) - kx - b_0 \frac{dx}{dt} - f_{ТР} \operatorname{sgn} \frac{dx}{dt}, \quad (2)$$

где $u(t)$ – напряжение на обмотке катушки; i – ток катушки; $\psi = \psi(i, x)$ – потокосцепление, зависящее от положения якоря и протекающего тока; r – активное сопротивление катушки; $m = m_1 + m_2$ – масса движущихся частей; m_1 – масса

якоря; m_2 – присоединенная масса; $f_{\text{эм}} = f(i, x)$ – электромагнитная сила, зависящая от положения якоря и протекающего тока; k – коэффициент жесткости упругого элемента (пружины); b_0 – коэффициент вязкого трения упругих связей; $f_{\text{тр}}$ – сила сухого трения.

Для определения статических параметров $\psi(i, x)$ и $f_{\text{эм}}(i, x)$, входящих в уравнение (1), (2), выполнялось решение полевой задачи по расчету магнитного поля в активной зоне электропривода. Численный расчет магнитного поля выполнялся с помощью конечно-элементного моделирования в программе FEMM [16–18]. При двумерной постановке решения задачи по расчету магнитного поля программу отличают простотой в использовании графический интерфейс и доступность [19].

Для визуализации процесса расчета статических параметров в программе на рис. 2 в качестве примера представлены зависимости $\psi = f(i, x)$ (рис. 2, а) и $f_{\text{эм}} = f(i, x)$ (рис. 2, б).

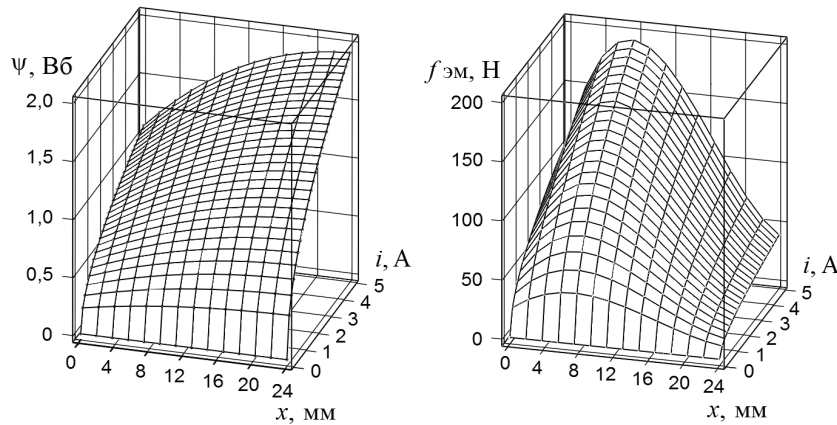


Рис. 2 – Пример расчета статических параметров:

а – потокосцепление $\psi = f(i, x)$; б – электромагнитное усилие $f_{\text{эм}} = f(i, x)$

Fig. 2 – Example of calculation of statistical parameters:

а – linkage $\psi = f(i, x)$; б – electromagnetic force $f_{\text{эм}} = f(i, x)$

На основании уравнений (1) и (2) была разработана динамическая модель одномассовой колебательной системы с электромагнитным приводом. Реализация алгоритма расчета электромеханических процессов выполнена в программе Matlab Simulink. Структурная схема динамической модели в программе Simulink представлена на рис. 3.

Задание функции двух аргументов и интерполяция статических параметров модели $\psi(i, x)$ и $f_{\text{эм}}(i, x)$ в процессе счета осуществляются с помощью блока двумерной таблицы. Детализированная структурная схема механической подсистемы в соответствии с уравнением (2) представлена на рис. 4.

Существенное влияние на динамику электропривода оказывают параметры, учитывающие механические свойства модели. В первую очередь это относится к усилиям, противодействующим движению и зависящим соответственно от перемещения и скорости движения подвижной системы электромагнитного привода.

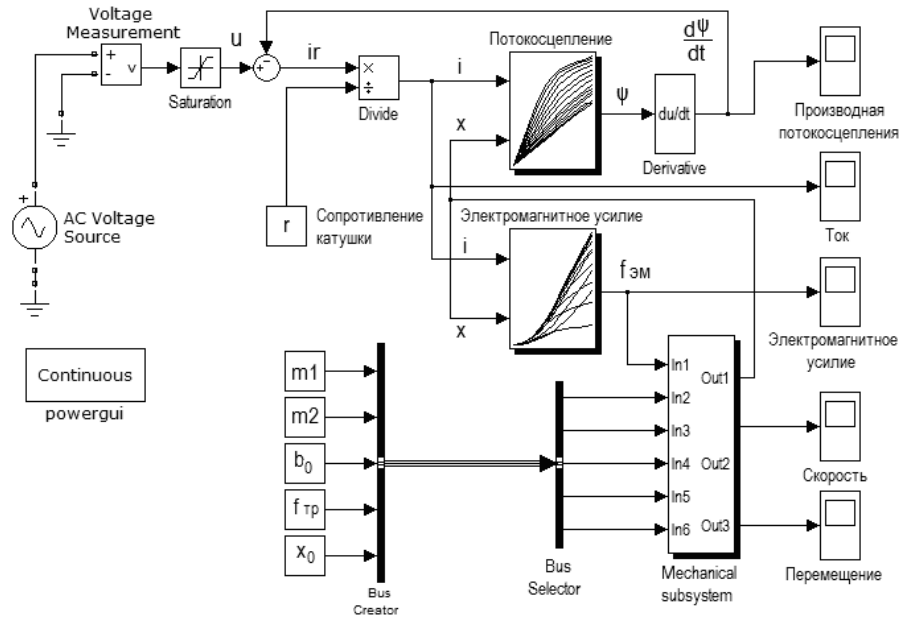


Рис. 3 – Структурная схема динамической модели
 Fig. 3 – The block diagram of the dynamic model

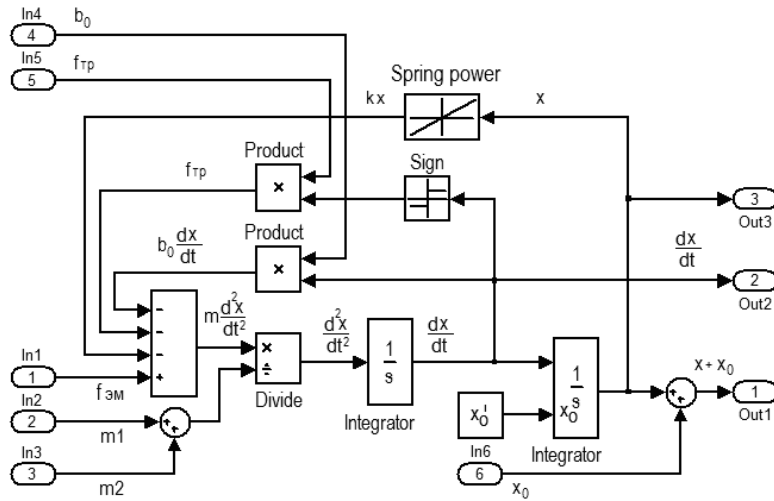


Рис. 4 – Детализированная структурная схема учета механических свойств модели «Mechanical subsystem»

Fig. 4 – Detailed block diagram of a mechanical accounting properties of the model «Mechanical subsystem»

В этой связи для повышения точности расчетов соответствующим образом должны быть отражены математические аналоги механических характеристик модели, согласующие в процессе движения пространственные координаты положения якоря.

3. Учет аналогов механических характеристик модели

В качестве одного из возможных подходов точного учета аналогов механических характеристик следует предварительная оценка некоторых интегральных характеристик сил сопротивления движению в целом при помощи физического эксперимента, которые по мере необходимости используются в виртуальном эксперименте.

В первую очередь этой оценке подвергаются силы трения скольжения (сухого трения) и вязкого трения.

В режиме свободных затухающих колебаний уравнение (2) приводится к виду

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b_0 \frac{dx}{dt} + kx + f_{\text{тр}} \operatorname{sgn} \frac{dx}{dt} = 0, \quad (3)$$

Уравнению (3) будет соответствовать структурная схема динамической модели рис. 3, имеющая аналогичную подсистему «Mechanical subsystem» учета механических свойств модели при $f_{\text{эм}} = 0$. В соответствии с уравнением (3) идеализированный характер процесса затухания колебаний от действия только сил трения скольжения при $b_0 = 0$ показан на рис. 5, а. Затухающий процесс от действия только сил вязкого трения при $f_{\text{тр}} = 0$ – на рис. 5, б.

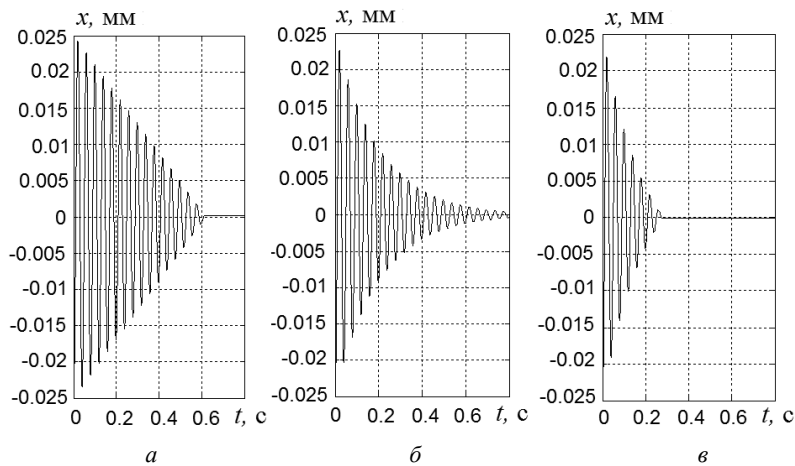


Рис. 5 – Осциллограммы затухающих колебаний механической системы при:
 $k = 12\,500 \text{ Н/м}$; $m = 0,5 \text{ кг}$; $x_0 = 0,025 \text{ м}$:

а – $b = 0$; $f_{\text{тр}} = 10 \text{ Н}$; б – $b = 5 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$; $f_{\text{тр}} = 0$; в – $b = 5 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$; $f_{\text{тр}} = 10 \text{ Н}$

Fig. 5 – Oscillograms damped oscillations of a mechanical system with the:
 $k = 12\,500 \text{ N/m}$; $m = 0,5 \text{ kg}$; $x_0 = 0,025 \text{ m}$:

а – $b = 0$; $f_{fr} = 10 \text{ N}$; б – $b = 5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$; $f_{fr} = 0$; в – $b = 5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$; $f_{fr} = 10 \text{ N}$

Экспоненциальный характер затухающих колебаний (рис. 5, б) обусловлен тем, что сила вязкого трения пропорциональна скорости. При затухании под действием силы сухого трения максимальные отклонения колебаний убывают по линейному закону, а направление силы противоположно скорости (рис. 5, а).

В рамках идеализированной модели колебательной системы и при учете только одного из преобладающих видов трения расчет процесса затухания может

существенно отличаться от процесса затухания в реальных физических системах, где сухое трение скольжения всегда в большей или меньшей степени сопровождается вязким трением. График затухающих колебаний под действием сил вязкого трения и сил трения скольжения показан на рис. 5, в.

Точное определение параметров связей от действия сил вязкого трения может быть установлено экспериментально на основе исследования затухающего колебательного процесса. При $f_{тр} = 0$ в такой системе процесс рассеяния (поглощения) энергии происходит только за счет диссипативных сил упругих связей.

При внешнем гармоническом воздействии дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания системы с диссипативными силами, пропорциональными скорости движения, может быть представлено в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b_0 \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t ,$$

где F_0 – амплитуда внешней гармонической силы; ω – частота вынужденных колебаний системы.

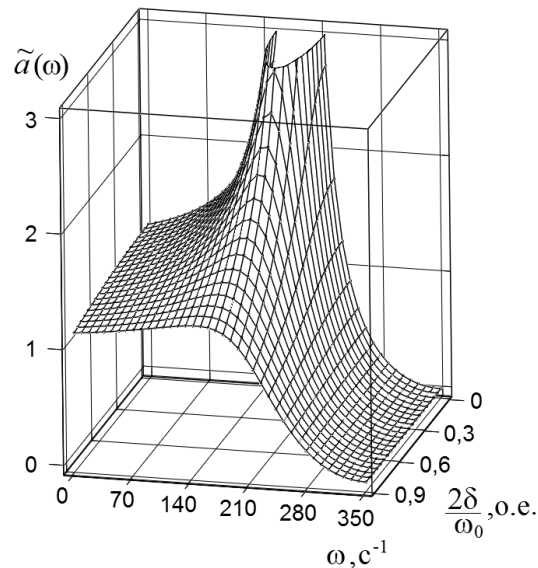


Рис. 6 – Амплитудно-частотная характеристика механической системы $\tilde{a}_0 = f(\omega)$

Fig. 6 – The frequency response of the mechanical system $\tilde{a}_0 = f(\omega)$

Частным решением этого уравнения являются вынужденные колебания $x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$, зависимость амплитуды которых от частоты (амплитудно-частотная характеристика системы) может быть представлена в известном виде [20]:

$$A_0(\omega) = \frac{F_0}{k \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\right) \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

где $\delta = \frac{b_0}{2m}$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота собственных колебаний системы без учета потерь энергии.

В относительных единицах

$$\tilde{a}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\right) \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Зависимость $\tilde{a}_0 = f(\omega)$ для частоты собственных колебаний механической системы $\omega_0 = 157 \text{ с}^{-1}$ при различных значениях $2\delta/\omega_0$ приведена на рис. 6. Из графика рис. 6 видно заметное влияние силы вязкого трения в околорезонансной области при $\omega = \omega_0$.

Для верификации модели на рис. 7 и рис. 8 в качестве примера приведены временные диаграммы, полученные с помощью разработанной динамической модели (см. рис. 3).

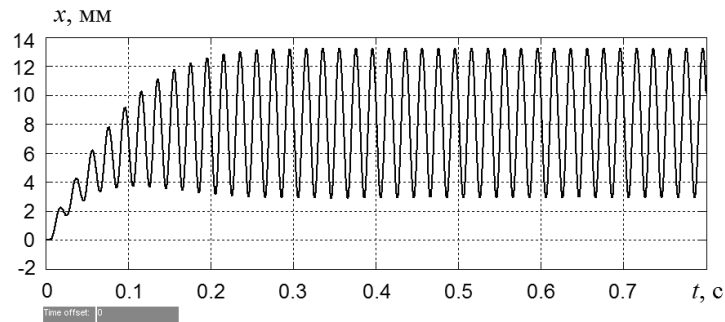


Рис. 7 – Временная диаграмма перемещения якоря $x(t)$

Fig. 7 – Timing diagram move the armature $x(t)$

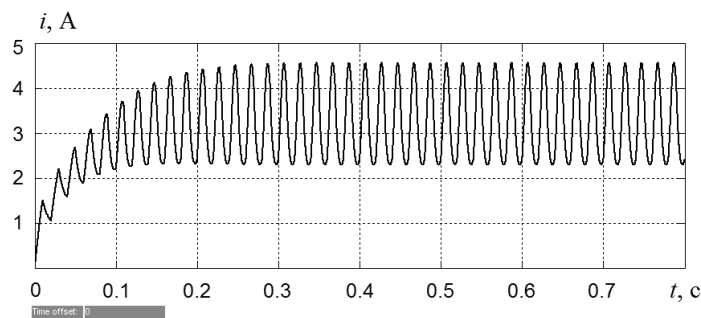


Рис. 8 – Временная диаграмма тока $i(t)$

Fig. 8 – Timing diagram current $i(t)$

Расчеты выполнены для следующих параметров модели: $U_m = 55 \text{ В}$; $m = 0,25 \text{ кг}$; $r = 8,2 \text{ Ом}$; $b_0 = 5 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}$; $f_{\text{Тр}} = 4 \text{ Н}$; $k = 12500 \text{ Н} / \text{м}$. Линейные

размеры магнитопровода: $l_1 = 45$ мм; $l_2 = 95$ мм; $h_1 = 46$ мм; $h_2 = 96$ мм; толщина стального пакета пластин $L = 30$ мм. Статические параметры системы соответствуют графикам на рис. 2. Начальная глубина внедрения якоря $x_0 = 0$ (см. рис. 1).

При сравнении полученных зависимостей с экспериментальными было выявлено хорошее соответствие качественных и количественных показателей только в случае точного учета аналогов механических характеристик модели. Расхождению расчетных характеристик по перемещению и току с экспериментальными данными соответствуют погрешности 5–8 %, что является общепринятыми значениями.

Следует отметить, что, как правило, силами сопротивления, зависящими от скорости движения, часто пренебрегают. Всесторонний анализ модели (рис. 3) показывает, что имеющиеся место допущения позволяют получать скорее качественные, чем количественные результаты.

Выводы

1. Разработанную динамическую модель можно эффективно использовать для исследования электромеханических процессов, а также при анализе и синтезе управления электромагнитными вибрационными приводами вибротехнологических установок методами структурного моделирования.

2. Представленный алгоритм электромагнитного расчета и вариант схемной реализации структурной динамической модели позволяют учесть насыщение и потоки рассеяния, возникающие в массивном магнитопроводе. Установленная совокупность взаимосвязанных электромагнитных и механических величин позволяет достаточно просто варьировать значительным набором входных параметров и производить исследования рабочих режимов как в установившихся, так и в переходных нестационарных режимах с большим без ограничений набором выходных переменных, а также их интегральных параметров.

3. Точность при динамических расчетах в существенной степени зависит от точности воспроизведения математических аналогов механических характеристик. В особенности это касается учета процессов, связанных с рассеянием энергии, как за счет собственных демпфирующих свойств отдельных звеньев и упругих связей, зависящих от скорости движения, так и за счет сил сухого трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pevchev V.P.** Principal dimensions of the short-stroke electromagnetic motor for a seismic wave generator // *Journal of Mining Science*. – 2009. – Vol. 45, no. 4. – P. 372–381.
2. **Ивашин В.В., Кудинов А.К., Певчев В.П.** Электромагнитные приводы для импульсных и виброимпульсных технологий // *Известия вузов. Электромеханика*. – 2012. – № 1. – С. 72–75.
3. **Угаров Г.Г., Мошкин В.И.** Перспективы развития силовых электромагнитных импульсных систем // *Вестник Курганского государственного университета. Серия: Технические науки*. – 2013. – № 29. – С. 88–90.
4. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Линейные синхронные электромагнитные машины для низкочастотных ударных технологий // *Электротехника*. – 2014. – № 12. – С. 45–49.
5. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Низкочастотные ударные электромагнитные машины и технологии // *Актуальные проблемы в машиностроении*. – 2014. – № 1. – С. 256–259.
6. **Певчев В.П., Ивашин В.В.** Проектирование мощных короткоходовых импульсных электромагнитных двигателей. – Тольятти: Изд-во Тольятт. гос. ун-та, 2012. – 142 с.
7. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю., Шабанов А.С.** Упрощенный расчет электромагнитного ударного привода в повторно-кратковременном режиме работы // *Электротехника*. – 2014. – № 12. – С. 50–53.

8. **Нейман В.Ю., Нейман Л.А., Петрова А.А.** Сравнение геометрически подобных систем электромагнитов по условию постоянства теплового критерия // *Электротехника*. – 2011. – № 12. – С. 14а–16.
9. К вопросу учета главных размеров при выборе типа электромагнита по значению конструктивного фактора / В.Ю. Нейман, Л.А. Нейман, А.А. Петрова, А.А. Скотников, О.В. Рогова // *Электротехника*. – 2011. – № 6. – С. 50а–53.
10. **Нейман Л.А., Скотников А.А., Нейман В.Ю.** Исследование нагрева электромагнитного двигателя в переходных режимах // *Известия вузов. Электромеханика*. – 2012. – № 6. – С. 50–54.
11. **Нейман Л.А., Петрова А.А., Нейман В.Ю.** К оценке выбора типа электромагнита по значению конструктивного фактора // *Известия вузов. Электромеханика*. – 2012. – № 6. – С. 62–64.
12. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Рабочий цикл двухкатушечной синхронной электромагнитной машины со свободным выбегом бойка // *Известия вузов. Электромеханика*. – 2013. – № 6. – С. 48–52.
13. **Ивашин В.В., Певчев В.П.** Особенности динамики работы и энергетических диаграмм импульсного электромагнитного привода при параллельном и последовательном соединении обмоток возбуждения // *Электротехника*. – 2013. – № 6. – С. 42–46.
14. Расчет динамики включения электромагнита постоянного тока / Ю.А. Бахвалов, Б.Н. Лобов, Г.В. Могилевский, А.Г. Никитенко // *Электротехника*. – 1982. – № 1. – С. 48–51.
15. **Пеккер И.И., Никитенко А.Г.** Расчет электромагнитных механизмов на вычислительных машинах. – М.: Энергия, 1967. – 168 с.
16. **Нейман В.Ю., Петрова А.А.** Моделирование в FEMM магнитного поля для расчета тяговых характеристик электромагнитных двигателей постоянного тока // *Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета*. – 2008. – № 2 (52). – С. 101–108.
17. **Нейман В.Ю., Нейман Л.А., Петрова А.А.** Расчет показателя экономичности силового электромагнита постоянного тока с помощью моделирования магнитного поля // *Транспорт: наука, техника, управление*. – 2008. – № 6. – С. 21–24.
18. **Нейман Л.А., Нейман В.Ю.** Применение метода проводимостей для учета силы одностороннего магнитного притяжения асимметричного электромагнита // *Вестник Иркутского государственного технического университета*. – 2015. – № 2 (97). – С. 214–218.
19. **Буль О.Б.** Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов: магнитные цепи, поля и программа FEMM: учебное пособие. – М.: Академия, 2005. – 336 с.
20. **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

OSCILLATORY MOTION ELECTROMAGNETIC DRIVE DYNAMIC MODEL FOR LOW-FREQUENCY VIBRATION GENERATION SYSTEMS

Neyman L.A., Neyman V.Yu.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

Oscillatory motion linear electromagnetic drives investigation is necessary to improve their dynamic design accuracy. Such drives are applied in engineering systems to generate vibrations at frequency 100 Hz. The dynamical model of a single-mass oscillatory system with an electromagnetic drive has been created. Such system model describes different operating modes of the drives and permits to analyze fundamentally electromechanical processes by means of structured modeling methods. Field effects in the considered problem have been simulated by the standard finite-element FEMM software. Dynamical behavior of the drive have been calculated by the algorithm implemented with structured modeling in Matlab Simulink. The paper states the complex approach to oscillatory motion electromagnetic drive dynamical model creation. The dynamical model is based on differential equations for non-linear circuit electrical balance and for mechanical system with respect to D'Alembert principle. The calculation algorithm and model scheme

implementation with help of structured modeling has been proposed. This algorithm allows to take into account saturation and leakage fluxes in the steel magnetic core. It has been shown that dynamic design accuracy significantly depends on mechanical characteristics mathematical representation. The great attention is focused on determination and taking into account elastic links and dry friction forces. Operating models fundamental analysis is made as an example of electromagnetic drive single-mass oscillatory system periodic electromechanical processes calculation. The investigations made has provided recommendations for electromechanical processes calculation accuracy improvement.

Keywords: vibration technologies, electromagnetic drive, dynamical model, finite-element simulation, single-mass oscillatory system, structured modeling methods.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-75-87

REFERENCES

1. Pevchev V.P. Principal dimensions of the short-stroke electromagnetic motor for a seismic wave generator. *Journal of Mining Science*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 372–381.
2. Ivashin V.V., Kudinov A.K., Pevchev V.P. Elektromagnitnye privody dlya impul'snykh i vibroimpul'snykh tekhnologii [Electromagnetic drives for impulse and vibroimpulse technologies]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika – Russian Electromechanics*, 2012, no. 1, pp. 72–75.
3. Ugarov G.G., Moshkin V.I. Perspektivy razvitiya silovykh elektromagnitnykh impul'snykh sistem [Prospects of electromagnetic pulse of power systems]. *Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskie nauki – Bulletin of the Kurgan State University. Series: Technical Sciences*, 2013, no. 29, pp. 88–90.
4. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Lineinye sinkhronnye elektromagnitnye mashiny dlya nizkочастотnykh udarnykh tekhnologii [Linear synchronous electromagnetic machines for low-frequency impact technologies]. *Elektrotekhnika – Russian Electrical Engineering*, 2014, no. 12, pp. 45–49. (In Russian)
5. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Nizkочастотnye udarnye elektromagnitnye mashiny i tekhnologii [Low-frequency impact electromagnetic machines and technologies]. *Aktual'nye problemy v mashinostroenii – Actual problems in machine building*, 2014, no.1, pp. 256–259.
6. Pevchev V.P., Ivashin V.V. Proektirovanie moshchnykh korotkokhodovykh impul'snykh elektromagnitnykh dvigatelei [Designing powerful pulsed electromagnetic short-stroke engine]. *Tol'yatti, Tol'yattinskii gosudarstvennyi universitet Publ.*, 2012. 142 p.
7. Neyman L.A., Neyman V.Yu., Shabanov A.S. Uproshchennyi raschet elektromagnitnogo udarnogo privoda v povtorno-kratkovremennom rezhime raboty [A simplified calculation of the intermittent periodic operating regime of an electromagnetic impact drive]. *Elektrotekhnika – Russian Electrical Engineering*, 2014, no. 12, pp. 50–53. (In Russian)
8. Neyman V.Yu., Neyman L.A., Petrova A.A. Sravnenie geometricheski podobnykh sistem elektromagnitov po usloviyu postoyanstva teplovogo kriteriya [Comparison of geometrically similar electromagnet systems by means of the constancy condition of heat criterion]. *Elektrotekhnika – Russian Electrical Engineering*, 2011, no. 12, pp. 14a–16.
9. Neyman V.Yu., Neyman L.A., Petrova A.A., Skotnikov A.A., Rogova O.V. K voprosu ucheta glavnykh razmerov pri vybore tipa elektromagnita po znacheniyu konstruktivnogo faktora [On the question of taking into account the main dimensions when selecting type of electromagnet according to value of constructive factor]. *Elektrotekhnika – Russian Electrical Engineering*, 2011, no. 6, pp. 50a–53. (In Russian)
10. Neyman L.A., Skotnikov A.A., Neyman V.Yu. Issledovaniye nagreva elektromagnitnogo dvigatelya v perekhodnykh rezhimakh [Electromagnetic motor heating transient analysis]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika – Russian Electromechanics*, 2012, no. 6, pp. 50–54.
11. Neyman L.A., Petrova A.A., Neyman V.Yu. K otsenke vybora tipa elektromagnita po znacheniyu konstruktivnogo faktora [On the electromagnet type selection by a design factor]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika – Russian Electromechanics*, 2012, no. 6, pp. 62–64.

12. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Rabochii tsikl dvukhkatushechnoi sinkhronnoi elektromagnitnoi mashiny so svobodnym vybegom boika [Operation cycle of double winding synchronous electromagnetic machine with head free running out]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika – Russian Electromechanics*, 2013, no. 6, pp. 48–52.
13. Ivashin V.V., Pevchev V.P. Osobennosti dinamiki raboty i energeticheskikh diagramm impul'snogo elektromagnitnogo privoda pri parallel'nom i posledovatel'nom soedinenii obmotok vzbuzhdeniya [Specifics of running dynamics and energy diagrams of a pulse electromagnetic drive with shunt- and cascade-connected excitation windings]. *Elektrotekhnika – Russian Electrical Engineering*, 2013, no. 6, pp. 42–46. (In Russian)
14. Bakhvalov Yu.A., Lobov B.N., Mogilevskii G.V., Nikitenko A.G. Raschet dinamiki vkluycheniya elektromagnita postoyannogo toka [Calculation of the dynamics of the inclusion of the electromagnet DC]. *Elektrotekhnika – Soviet Electrical Engineering*, 1982, no. 1, pp. 48–51. (In Russian)
15. Pekker I.I., Nikitenko A.G. *Raschet elektromagnitnykh mekhanizmov na vychislitel'nykh mashinakh* [Calculation of electromagnetic mechanisms on computers]. Moscow, Energiya Publ., 1967. 168 p.
16. Neyman V.Yu., Petrova A.A. Modelirovanie v FEMM magnitnogo polya dlya rascheta tyagovykh kharakteristik elektromagnitnykh dvigatelei postoyannogo toka [Magnetic field simulation in FEMM for calculating the traction characteristics of electromagnetic DC motors]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2008, no. 2 (52), pp. 101–108.
17. Neyman V.Yu., Neyman L.A., Petrova A.A. Raschet pokazatelya ekonomichnosti silovogo elektromagnita postoyannogo toka s pomoshch'yu modelirovaniya magnitnogo polya [Calculation of economy index of D. C. power electromagnet using electromagnetic field simulation]. *Transport: nauka, tekhnika, upravlenie – Transportation: science, technology, management*, 2008, no. 6, pp. 21–24.
18. Neyman L.A., Neyman V.Yu. Primenenie metoda provodimosti dlya ucheta sily odnostoronnego magnitnogo prityazheniya asimmetrichnogo elektromagnita [Conductivities method application for accounting asymmetrical electromagnet single-side magnetic attraction force]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Irkutsk State Technical University*, 2015, no. 2 (97), pp. 214–218.
19. Bul' O.B. *Metody rascheta magnitnykh sistem elektricheskikh apparatov: magnitnye tsepi, polya i programma FEMM* [Methods for calculating the magnetic systems of electrical devices: magnetic circuit, the field and the program FEMM]. Moscow, Akademiya Publ., 2005. 336 p.
20. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoi teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and shock]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1976. 320 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Нейман Людмила Андреевна – родилась в 1966 году, канд. техн. наук, доцент кафедры электротехнических комплексов Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: линейные синхронные электромагнитные машины и технологии. Опубликовано более 70 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: neyman31@gmail.com).

Neyman Lyudmila Andreevna (b. 1966) – PhD (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of Electrotechnological Units Department of the Novosibirsk State Technical University. Research interests: linear synchronous electromagnetic machine and technology. She is author of 70 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: neyman31@gmail.com).



Нейман Владимир Юрьевич – родился в 1960 году, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретических основ электротехники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов – силовые электромагнитные импульсные системы. Автор и соавтор более 200 научных и учебно-методических работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: nv.nstu@ngs.ru).

Neyman Vladimir Yurievich – was (b. 1960), Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Theory of Electrical Engineering, Novosibirsk State Technical University. Research interests – power electromagnetic pulse systems. Author and co-author of over 200 scientific and educational works. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: nv.nstu@ngs.ru).

*Статья поступила 25 июня 2015 г.
Received June 25, 2015*

To Reference:

Neyman L.A., Neyman V.Yu. Dinamicheskaya model' elektromagnitnogo privoda kolebatel'nogo dvizheniya dlya sistem generirovaniya nizkochastotnykh vibratsii [Oscillatory motion electromagnetic drive dynamic model for low-frequency vibration generation systems], *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 75-87. DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-75-87

УДК 550.837:517.958

О ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВЫЗВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ГРАНИЦ АНОМАЛЬНЫХ ПО ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ОБЪЕКТОВ

М.Г. Персова, О.С. Трубачева

Новосибирский государственный технический университет

Представлены метод и вычислительная схема для решения задачи восстановления границ аномальных по поляризуемости трехмерных структур и параметров поляризации в них по измеренному на дневной поверхности полю вызванной поляризации. Значения параметров среды определяются путем минимизации суммы квадратов отклонений измеренных значений поля вызванной поляризации от теоретических. Параметры среды восстанавливаются в трехмерной области под профилем съемки. На начальном этапе аномально поляризуемая часть данной области разбивается на несколько крупных подобластей одинакового размера, каждой дается некоторое значение начальной поляризуемости. В процессе решения задачи ищутся положения границ подобластей, а также значения поляризуемости в них, в соответствии с требованием минимальности отклонения практического значения поля вызванной поляризации от рассчитанного теоретически. В данной работе рассмотрен поиск геометрического положения границ подобластей по одному из пространственных измерений. Приведены результаты работы на примере синтетических данных, полученных с помощью конечноэлементного моделирования трехмерного поля вызванной поляризации, которые подтверждают работоспособность предлагаемого подхода и вычислительной схемы и возможность их использования в программных системах обработки данных электроразведки методом вызванной поляризации.

Ключевые слова: обратная задача, вызванная поляризация, поляризуемость, границы аномальных структур.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-88-98

Введение

Одной из основных задач электроразведки является исследование структуры земной коры для обнаружения залежей полезных ископаемых. Задача поиска полезных ископаемых с помощью методов электроразведки сводится к решению двух основных задач: разработке способа моделирования реальных физических процессов, протекающих в Земле (прямая задача), и разработке способа интерпретации данных, полученных в результате полевых измерений (обратная задача) [1].

Одним из перспективных методов электроразведки является метод вызванной поляризации (ВП), основанный на изучении вторичных электрических полей, возникающих в Земле при пропускании электрического тока [2]. Для метода ВП разработано несколько вычислительных схем решения прямых задач, которые проверены на практических данных и дают хорошие результаты [3, 4].

Решение обратной задачи ВП подразумевает восстановление параметров среды по измеренным на поверхности Земли сигналам. Эффективное решение обратной задачи является серьезной проблемой из-за сложности структуры строения Земли. Существующие на сегодняшний день методы решения обратных задач ВП,

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (№ гранта МД-7244.2015.5).

основанные на одномерной и двумерной инверсии, применимы на практике только для сред простой структуры (например, для горизонтально-слоистых сред, содержащих протяженные по одной из координат объекты) [5, 6]. Если исследуемая область является трехмерной геологической структурой (сложный трехмерный рельеф, трехмерное изменение проводимости и поляризуемости), то требуется использование трехмерной инверсии, однако огромная вычислительная сложность соответствующих алгоритмов препятствует использованию трехмерной инверсии на практике.

Метод моделирования поля ВП, предложенный в работе [7] и используемый в дальнейшем в работах [3, 8], открывает перспективы для разработки эффективных подходов к решению трехмерных задач ВП. Здесь мы рассмотрим вычислительную схему для решения трехмерной обратной задачи ВП, основанную на методе [7]. Будем восстанавливать границы аномальных по поляризуемости трехмерных структур и параметры поляризации в них по измеренному на дневной поверхности полю ВП.

1. Математическая модель

Пусть электромагнитное поле в трехмерной горизонтально-слоистой среде с объектами возбуждается токовой линией AB с заземленными электродами A и B . Считаем, что трехмерное распределение проводимости и параметры спада ВП известны. При решении обратной задачи аномально поляризующуюся область разобьем на начальном этапе на относительно небольшое число подобластей (крупных ячеек) одинакового размера (M – общее количество ячеек). Вне этой области считаем значения параметров поляризации известными. Каждая из рассматриваемых ячеек будет характеризоваться начальной поляризуемостью $\alpha_m = \text{const}$, параметром спада $\beta_m = \beta_m(t)$ и своими геометрическими размерами.

Попробуем восстановить значения α в каждой ячейке и найти геометрические размеры этих ячеек (в данной работе рассматривается поиск размера ячейки по одному из пространственных измерений – по оси X).

Пусть $b = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{M-1}\}$ – вектор искомых параметров, где $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ – значения начальной поляризуемости в каждой ячейке начального разбиения; $\Delta x_1, \dots, \Delta x_{M-1}$ – смещение границ ячеек начального разбиения по оси X ; $V_i^{\text{нп}}$ – измеренные «практические» значения поля ВП на поверхности; \tilde{V}_i – теоретические значения поля ВП при определенном наборе b_m ($m = 1 \dots 2M - 1$); γ_m – коэффициенты регуляризации; N – количество точек измерения ($i = 1 \dots N$). Будем искать нужный нам набор параметров b_m путем минимизации суммы квадратов отклонений $V_i^{\text{нп}}$ от \tilde{V}_i с регуляризацией:

$$\sum_{i=1}^N (V_i^{\text{нп}} - \tilde{V}_i)^2 + \sum_{m=1}^{2M-1} \gamma_m (b_m - b_m^0)^2 \rightarrow \min_{b_m}. \quad (1)$$

Преобразуем выражение (1). Обозначим $\delta(V_i) = V_i^{\text{нп}} - \tilde{V}_i$, тогда, если линеаризовать $\delta(V_i)$ по b в окрестности b^0 , подставить в (1), затем взять производную от (1) и приравнять к нулю, то получим, что минимизация (1) сводится к решению СЛАУ вида $Ab = F$, где элементы матрицы A и вектора F выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} a_{rj} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_r} \frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_j}, & r \neq j \\ a_{rr} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_r} \right)^2 + \gamma_r, \\ f_r = -\sum_{i=1}^N \delta(V_i(b^0)) \frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_r} + \gamma_r b_r^0, \end{cases}$$

где $r = 1 \dots 2M - 1$, $j = 1 \dots 2M - 1$, а производную $\frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_m}$ можно определить как

$$\frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_m} = \frac{\delta(V_i(b^0 + db_m)) - \delta(V_i(b^0))}{db_m}.$$

Согласно [7] поле, описывающее процесс ВП, может быть представлено в виде

$$V^{\text{ВП}} = \sum_{k=1}^M \alpha_k \beta_k(t) W_k,$$

где функции W_k удовлетворяют краевой задаче для уравнения

$$-\text{div}(\sigma \cdot \text{grad} W_k) = -\text{div}(\delta_k \sigma \cdot \text{grad} V_0). \quad (2)$$

V_0 – потенциал поляризуемого поля; σ – удельная проводимость; δ_k – индикатор ячейки, $k = 1 \dots M$.

Тогда для $b_m \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ производная $\frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_m}$ принимает вид

$$\frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_m} = -W_k \beta_k(t).$$

Для $b_m \in \{\Delta x_1, \dots, \Delta x_{M-1}\}$ производная $\frac{\partial \delta(V_i)}{\partial b_m} = -\frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{d \Delta x_k} \tilde{W}_k \beta_k(t)$. \tilde{W}_k – это решение задачи (2) для смещения k -й границы (между k -й и $k+1$ -й ячейками).

Матрица A и вектор F имеют блочную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix},$$

где элементы a_{ps}^1 , a_{pc}^2 , a_{ls}^3 , a_{lc}^4 , f_p^1 , f_l^2 блоков A^1 , A^2 , A^3 , A^4 , F^1 , F^2 соответственно можно найти по следующим формулам:

$$\begin{cases} a_{ps}^1 = \sum_{i=1}^N W_p W_s \beta^2(t), & p \neq s, \\ a_{pp}^1 = \sum_{i=1}^N (W_p)^2 \beta^2(t) + \gamma_p, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
a_{pc}^2 &= \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_c - \alpha_{c+1})}{d\Delta x_c} W_p \tilde{W}_c \beta^2(t), \\
a_{ls}^3 &= \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_l - \alpha_{l+1})}{d\Delta x_l} W_s \tilde{W}_l \beta^2(t), \\
\begin{cases} a_{lc}^4 = \sum_{i=1}^N \frac{(\alpha_l - \alpha_{l+1}) (\alpha_c - \alpha_{c+1})}{d\Delta x_l d\Delta x_c} \tilde{W}_l \tilde{W}_c \beta^2(t), l \neq c, \\ a_{ll}^4 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{(\alpha_l - \alpha_{l+1}) \tilde{W}_l}{d\Delta x_l} \right)^2 \beta^2(t) + \gamma_l, \end{cases} \\
f_p^1 &= \sum_{i=1}^N (V_i^{\text{np}} - V_i(b^0)) W_p \beta(t) + \gamma_p b_p^0, \\
f_l^2 &= \sum_{i=1}^N (V_i^{\text{np}} - V_i(b^0)) \frac{(\alpha_l - \alpha_{l+1}) \tilde{W}_l}{d\Delta x_l} \beta(t) + \gamma_l b_l^0,
\end{aligned}$$

$$p = 1 \dots M, \quad s = 1 \dots M, \quad c = 1 \dots M - 1, \quad l = 1 \dots M - 1.$$

2. Результаты численного моделирования

Рассмотрим работу представленной выше вычислительной схемы на двух сериях тестов. В качестве вмещающей среды будем рассматривать однородное полупространство с параметрами $\sigma_{\text{ср}} = 0,01$ См/м, $\alpha_{\text{ср}} = 0,001$, в которое на глубине 100 м помещен слой со следующими параметрами: $\sigma_{\text{сл}} = 0,05$ См/м, $\alpha_{\text{сл}} = 0,05$, $h_{\text{сл}} = 100$ м (σ – удельная проводимость; α – поляризуемость; h – толщина). Поместим в этот слой объект с отличной от слоя проводимостью и поляризуемостью. Далее выберем произвольную область, которая полностью или частично перекрывает объект. Попробуем в данной области восстановить значения параметра поляризуемости и границы подобластей, отличных по значению параметра поляризуемости. Затем изменим размеры объекта и вновь попытаемся восстановить параметры среды в выбранной ранее области. В первой серии тестов выберем в качестве области восстановления параметров среды «узкую» по оси Y область с размерами $600 \times 100 \times 100$ м³ (рис. 1, а). Разобьем эту область на три ячейки, как показано на рис. 1, б (границы между ячейками обозначены штрихпунктирной линией). Для каждой ячейки будем находить значение параметра поляризуемости и определять положения границ между ячейками, которые можно будет считать границами объекта.

Проведем вычисления для четырех вариантов размера поискового (аномального по поляризуемости) объекта с характеристиками $\sigma_{\text{об}} = 1$ См/м, $\alpha_{\text{об}} = 0,15$. Размеры объекта для каждого варианта приведены в табл. 1. Положение поискового объекта относительно области восстановления параметров приведено на рис. 2. В качестве практических данных будем использовать данные, полученные в результате моделирования трехмерного поля ВП методом, описанным в [7]. Параметр спада вычисляется по формуле $\beta(t) = 1 - \exp(-\sqrt{t/T_0} \ln 2)$, вычисления проводятся при $n = 3$, $T_0 = 0,02$. Практические данные моделируются вдоль од-

ного профиля, его положение показано пунктирной линией на рис. 1, б. Длина приемных линий $M_i N_i$ 50 м.

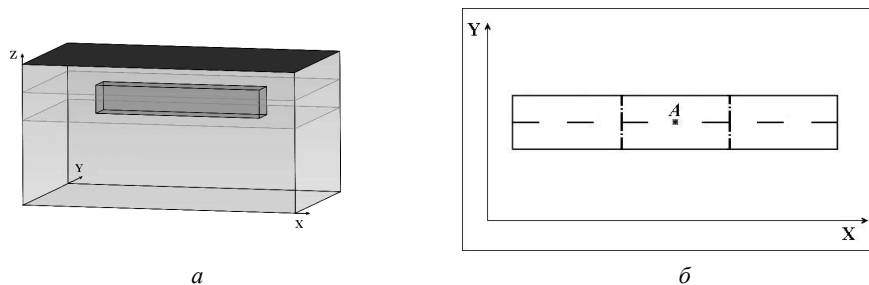


Рис. 1 – «Узкая» область восстановления параметров (а), разбиение области на ячейки (б)

Fig. 1 – The «narrow» area of the parameters recovery (a), the division of the area into cells (b)

Таблица 1 / Table 1

Размеры объекта
The size of the object

Номер варианта	Размер по оси X , м	Размер по оси Y , м	Размер по оси Z , м
1	200	100	100
2	200	200	100
3	200	300	100
4	200	400	100

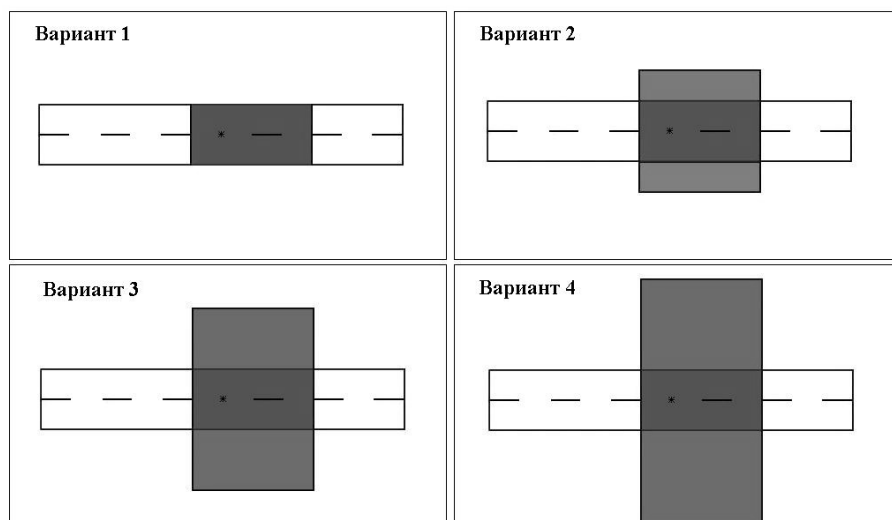


Рис. 2 – Положение поискового объекта относительно области восстановления параметров

Fig. 2 – The position of the search object relative to the parameters recovery area

В табл. 2 приведены восстановленные параметры среды для ячеек «узкой» области, начальные и конечные значения функционала невязки

$$\Phi(b) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (V_i^{\text{пр}} - \tilde{V}_i)^2}$$

. В табл. 3 приведено сравнение истинных ($x_{\text{ист}}$, $\alpha_{\text{ист}}$) и восстановленных ($x_{\text{восст}}$, $\alpha_{\text{восст}}$) значений координаты X границ поискового объекта и его поляризуемости.

Таблица 2 / Table 2

Восстановленные параметры среды для ячеек «узкой» области
Recovered environment parameters for the cells of the «narrow» area

Номер варианта	Номер ячейки	Левая граница по оси X , м	Правая граница по оси X , м	Поляризуемость	Начальный функционал невязки	Конечный функционал невязки
1	1	4700	4950	0,05	1,70E-004	1,46E-014
	2	4950	5150	0,15		
	3	5150	5300	0,05		
2	1	4700	4950	0,05	1,60E-004	6,26E-006
	2	4950	5150	0,23		
	3	5150	5300	0,05		
3	1	4700	4950	0,05	1,68E-004	9,33E-006
	2	4950	5150	0,26		
	3	5150	5300	0,07		
4	1	4700	4960	0,06	1,91E-004	2,87E-005
	2	4960	5140	0,29		
	3	5140	5300	0,09		

Таблица 3 / Table 3

Сравнение истинных и восстановленных границ объекта и его поляризуемости
Comparison of proper and recovered objects boundaries and its polarizability

Номер варианта	Левая граница по оси X , м		Правая граница по оси X , м		Поляризуемость	
	$x_{\text{восст}}$	$x_{\text{ист}}$	$x_{\text{восст}}$	$x_{\text{ист}}$	$\alpha_{\text{восст}}$	$\alpha_{\text{ист}}$
1	4950	4950	5150	5150	0,15	0,15
2	4950	4950	5150	5150	0,23	0,15
3	4950	4950	5150	5150	0,26	0,15
4	4960	4950	5140	5150	0,29	0,15

По данным табл. 3 видно, что в том случае, когда границы объекта по оси Y совпадают с границами области восстановления параметров, удается найти и правильное положение границ объекта по оси X , и значения поляризуемости во всей области восстановления параметров (вариант 1). При увеличении размера поискового объекта по оси Y положение границ объекта по оси X восстанавливается практически правильно, но значение поляризуемости во всей области восстановления параметров завышается, хотя в целом восстанавливается вполне корректно.

На рис. 3, 4 показано отклонение значений потенциала поля ВП, деленного на потенциал поляризирующего поля (в приемных линиях $M_i N_i$) от истинного значения поля ВП, деленного на потенциал поляризирующего поля. На рис. 3 показаны значения поля ВП среды без поискового объекта (итерация 1) и значения полей

ВП сред, получаемых в ходе итерационного процесса. Данные на рис. 3 приведены для варианта 1. На рис. 4 показаны значения поля ВП среды без поискового объекта и значения поля ВП восстановленной среды. На рис. 4, *a* данные приведены для варианта 2, на рис. 4, *б* – для варианта 3, на рис. 4, *в* – для варианта 4.

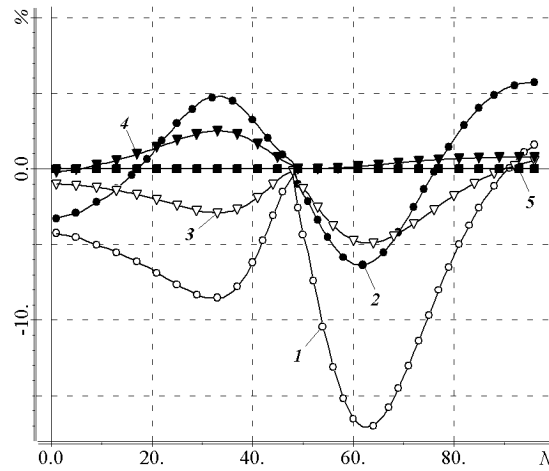


Рис. 3 – Поле ВП для варианта 1 (индекс кривой – номер итерации)

Fig. 3 – IP field for variant 1 (the curve index is number of iteration)

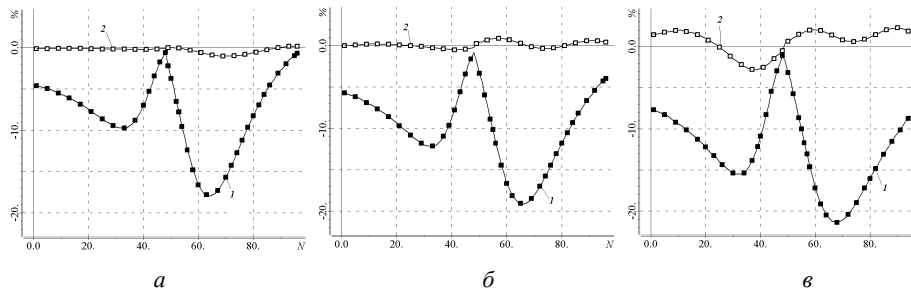


Рис. 4 – Поле ВП для варианта 2 (*a*); для варианта 3 (*б*); для варианта 4 (*в*):

1 – кривая поля ВП среды без поискового объекта; 2 – кривая поля ВП восстановленной среды

Fig. 4 – IP field for variant 2 (*a*); for variant 3 (*б*); for variant 4 (*в*):

1 – no-object environment IP field curve; 2 – recovery environment IP field curve

Теперь рассмотрим обратную ситуацию. В качестве области восстановления параметров среды выберем «широкую» область с размерами $600 \times 400 \times 100 \text{ м}^3$ (рис. 5, *a*). Разобьем эту область на три подобласти, как показано на рис. 5, *б* (границы между ячейками обозначены штрихпунктирной линией). Как и в первом случае, для каждой подобласти найдем значение поляризуемости и определим положение границ между ячейками по оси X .

Вычисления будем проводить для вариантов поискового объекта с теми же параметрами, что и в первой серии тестов. Положение объекта относительно «широкой» области восстановления параметров приведено на рис. 6.

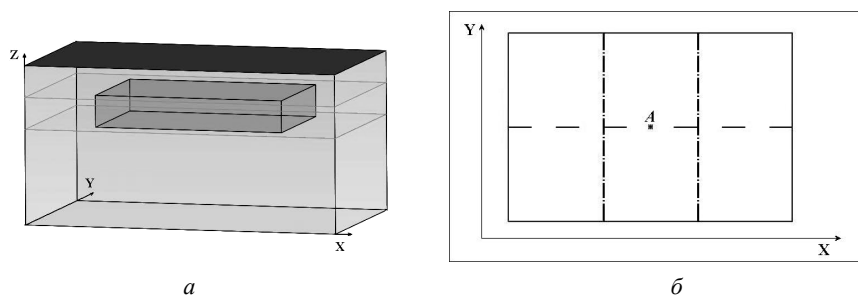


Рис. 5 – «Широкая» область восстановления параметров среды (а), разбиение области на ячейки (б)

Fig. 5 – The «wide» area of the parameters recovery (а), the division of the area into cells (б)

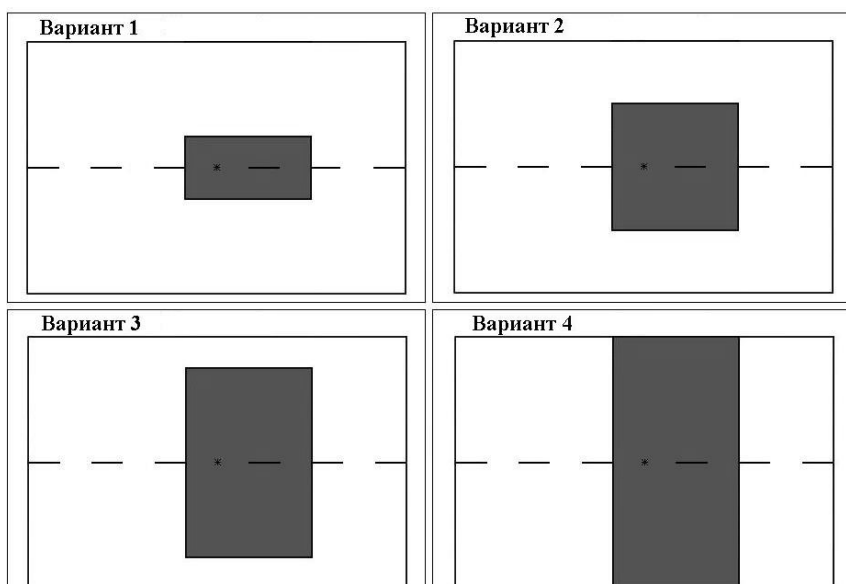


Рис. 6 – Положение поискового объекта относительно области восстановления параметров

Fig. 6 – The position of the search object relative to the parameters recovery area

Восстановленные параметры среды для ячеек «широкой» области приведены в табл. 4. В табл. 5 приведено сравнение истинных ($x_{\text{ист}}$, $\alpha_{\text{ист}}$) и восстановленных ($x_{\text{восст}}$, $\alpha_{\text{восст}}$) значений координаты X границ поискового объекта по оси X и его поляризуемости.

По данным табл. 5 видно, что во второй серии тестов также удается абсолютно точно определить границы объекта по оси X и значения поляризуемости во всей области восстановления параметров для той ситуации, когда границы объекта по оси Y совпадают с границами области восстановления параметров (вариант 4), в остальных случаях границы и поляризуемость восстанавливаются хотя и не точно, но корректно. При уменьшении объекта по оси Y восстанавливается более «узкий» по оси X объект.

Таблица 4 / Table 4

Восстановленные параметры среды для ячеек «широкой» области
Recovered environment parameters for the cells of the «wide» area

Номер варианта	Номер ячейки	Левая граница по оси X, м	Правая граница по оси X, м	Поляризуемость	Начальный функционал невязки	Конечный функционал невязки
1	1	4700	5040	0,05	1,70E-004	4,26E-005
	2	5040	5070	0,30		
	3	5070	5300	0,04		
2	1	4700	5040	0,05	1,60E-004	4,2E-005
	2	5040	5130	0,15		
	3	5130	5300	0,04		
3	1	4700	5020	0,05	1,68E-004	1,81E-005
	2	5020	5070	0,34		
	3	5070	5300	0,05		
4	1	4700	4950	0,05	1,91E-004	5,04E-014
	2	4950	5150	0,15		
	3	5150	5300	0,05		

Таблица 5 / Table 5

Сравнение истинных и восстановленных границ объекта и его поляризуемости
Comparison of proper and recovered objects boundaries and its polarizability

Номер объекта	Левая граница по оси X, м		Правая граница по оси X, м		Поляризуемость	
	$x_{восст}$	$x_{ист}$	$x_{восст}$	$x_{ист}$	$\alpha_{восст}$	$\alpha_{ист}$
1	5040	4950	5070	5150	0,30	0,15
2	5040	4950	5130	5150	0,15	0,15
3	5020	4950	5070	5150	0,34	0,15
4	4950	4950	5150	5150	0,15	0,15

Заключение

Разработаны метод и вычислительная схема для решения задачи определения границ аномальных по поляризуемости трехмерных структур и значений поляризуемости в них по измеренному на поверхности Земли полю вызванной поляризации. На примере синтетических данных, полученных с использованием 3D-моделирования, подтверждена работоспособность разработанной вычислительной схемы и возможность ее использования в программных системах обработки данных электроразведки методом вызванной поляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жданов М.С.** Теория обратных задач и регуляризации в геофизике / пер. с англ. С.А. Варенцовой и Е.Ю. Соколовой. – М.: Научный мир, 2007. – 712 с.
2. **Комаров В.А.** Электроразведка методом вызванной поляризации. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Недра, Ленинградское отделение, 1980. – 390 с.
3. Конечноеэлементное моделирование электрического и магнитного поля вызванной поляризации в трехмерной среде / Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Персова, М.В. Абрамов, М.Г. Токарева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. 14, № 3. – С. 112–124.

4. **Zhdanov M.** Generalized effective-medium theory of induced polarization // *Geophysics*. – 2008. – Vol. 73, N 5. – P. F197–F211. – doi: 10.1190/1.2973462.
5. **Loke M.H., Chambers J.E., Ogilvy R.D.** Inversion of 2D spectral induced polarization imaging data // *Geophysical Prospecting*. – 2006. – Vol. 54, iss. 3. – P. 287–301. – doi: 10.1111/j.1365-2478.2006.00537.x.
6. **Li Ya., Oldenburg D.W.** 3-D inversion of induced polarization data // *Geophysics*. – 2000. – Vol. 65, N 6. – P. 1931–1945. – doi: 10.1190/1.1444877.
7. **Моисеев В.С., Рояк М.Э., Соловейчик Ю.Г.** Математическое моделирование процессов вызванной поляризации в сложных средах для токовой линии с заземленными электродами // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 79–93.
8. **Methods and algorithms for reconstructing three-dimensional distributions of electric conductivity and polarization in the medium by finite-element 3D modeling using the data of electromagnetic sounding / M.G. Persova, Y.G. Soloveichik, G.M. Trigubovich, M.G. Tokareva // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. – 2013. – Vol. 49, iss. 3. – P. 329–343. – doi: 10.1134/S1069351313030117.**

**ON AN APPROACH TO SOLVING INDUCED POLARIZATION
INVERSE PROBLEMS UNDER RECOVERY OF BOUNDARIES
OF AN OBJECT WITH ANOMALOUS POLARIZABILITY**

Persova M.G., Trubacheva O.S.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

This paper presents the method and the computational scheme to determine for the boundaries of three-dimensional structures with anomalous polarizabilities and the polarization parameter values in them. The boundaries of structures and the polarization parameter values are recovered from the measured induced polarization field values on the surface. These environment parameters are recovered in the three-dimensional area. First, this area is divided into several large sub-areas. Each of the sub-areas is characterized by its own arbitrary initial polarizability. In the process of solving the problem, we determine a new geometric position of the cell boundaries and the polarizability value in them. The environment parameters are found by minimizing the sum of squared differences between the measured and theoretical induced polarization field values. This paper considers the search for geometrical positions of cell boundaries by one of the spatial dimensions. The efficiency of the proposed computational scheme is validated for synthetic data obtained by three-dimensional finite element modeling of the induced polarization field.

Keywords: inverse problem, induced polarization, polarizability, boundaries of anomalous structures.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-88-98

REFERENCES

1. Zhdanov M.S. *Teoriya obratnykh zadach i regularizatsii v geofizike*. Amsterdam [et al.], Elsevier, 2002. 628 p. (Russ. ed.: Zhdanov M.S. *Teoriya obratnykh zadach i regularizatsii v geofizike*. Translated from English S.A. Varentsova, E.Yu. Sokolova. Moscow, Nauchnyi mir Publ., 2007. 712 p.).
2. Komarov V.A. *Elektrozvedka metodom vyzvannoi polarizatsii* [Geophysical prospecting by method of induced polarization]. 2nd ed., rev. and enl. Leningrad, Nedra Publ., Leningrad branch, 1980. 390 p.
3. Soloveichik Iu.G., Persova M.G., Abramov M.V., Tokareva M.G. Konechnoelementnoe modelirovanie elektricheskogo i magnitnogo polia vyzvannoi polarizatsii v trekhmernoi srede [Finite-element modeling of electric and magnetic fields of induced polarization in a three-dimensional medium]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2011, vol. 14, iss. 3, pp. 112–124. (In Russian)
4. Zhdanov M. Generalized effective-medium theory of induced polarization. *Geophysics*, 2008, vol. 73, no. 5, pp. F197–F211. doi: 10.1190/1.2973462

5. Loke M.H., Chambers J.E., Ogilvy R.D. Inversion of 2D spectral induced polarization imaging data. *Geophysical Prospecting*, 2006, vol. 54, iss. 3, pp. 287–301. doi: 10.1111/j.1365-2478.2006.00537.x
6. Li Ya., Oldenburg D.W. 3-D inversion of induced polarization data. *Geophysics*, 2000, vol. 65, no. 6, pp. 1931–1945. doi: 10.1190/1.1444877
7. Moiseev V.S., Royak M.E., Soloveichik Y.G. Matematicheskoe modelirovanie protsessov vyzvannoi poliarizatsii v slozhnykh sredakh dlia tokovoi linii s zazemlennymi elektrodami [Mathematical simulation of summoned polarization processes in complex media for current line with earthed electrodes]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 1999, vol. 2, iss. 1, pp. 79–93. (In Russian)
8. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Trigubovich G.M., Tokareva M.G. Methods and algorithms for reconstructing three-dimensional distributions of electric conductivity and polarization in the medium by finite-element 3D modeling using the data of electromagnetic sounding. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2013, vol. 49, iss. 3, pp. 329–343. doi: 10.1134/S1069351313030117

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Персова Марина Геннадьевна – родилась в 1978 году, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование электромагнитных полей в задачах геоэлектрики и электромеханики. Опубликовано 100 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: persova@fpm.ami.nstu.ru).

Persova Marina Gennad'evna (b. 1978) – Doctor of Science (Eng.), Professor, Professor at the Applied Mathematics Department in Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on the finite element simulation of electromagnetic fields in problems geoelectric and electromechanics. She is author of 100 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. Email: persova@fpm.ami.nstu.ru).



Трубачева Ольга Сергеевна – родилась в 1986 году, окончила Новосибирский государственный технический университет, с 2013 года аспирант кафедры прикладной математики НГТУ. Область научных интересов: решение обратных задач вызванной поляризации. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20).

Trubacheva Olga Sergeevna (b. 1986) – graduated from the Novosibirsk State Technical University, Post-graduate Student at the Applied Mathematics Department in NSTU. Area of research: inverse problems of induced polarization. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation).

Статья поступила 10 июля 2015 г.
Received July 10, 2015

To Reference:

Persova M.G., Trubacheva O.S. O podkhode k resheniyu obratnoi zadachi vyzvannoi poliarizatsii pri vosstanovlenii granits anomal'nykh po poliarizuemosti ob"ektov [On an approach to solving induced polarization inverse problems under recovery of boundaries of an object with anomalous polarizability]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 88–98. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-88-98

УДК 531.15;533.15;538.93

**СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОСТИ
РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ****В.Я. Рудяк¹, Е.В. Лежнев^{1,2}**¹*Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)*²*Новосибирский государственный технический университет*

Молекулярное моделирование процессов переноса во многих случаях является единственно возможным. Наиболее последовательным методом такого моделирования является метод молекулярной динамики. Он является, однако, весьма затратным с точки зрения необходимых вычислительных ресурсов. Несмотря на то что метод молекулярной динамики имеет предсказательную силу эксперимента, он не дает точных фазовых траекторий исследуемой системы вследствие того, что движение молекулярных систем неустойчиво по Ляпунову относительно вносимых возмущений (а при численном моделировании они всегда существуют) и имеет место перемешивание фазовых траекторий. В данной статье предлагается алгоритм, в основе которого лежит стохастическое моделирование фазовых траекторий рассматриваемой молекулярной системы. При этом, естественно, должны выполняться законы сохранения. Алгоритм реализован для описания процессов переноса в разреженных газах. Рассматриваются системы молекул, взаимодействующие между собой посредством потенциала твердых сфер. В начальный момент времени все молекулы в некотором произвольном порядке вносятся в список. Затем последовательно для каждой молекулы реализуется процесс ее свободного сдвига и соударения со случайно выбранной молекулой. Вероятность столкновения определяется из сравнения разыгранного числа со средней вероятностью за выбранный интервал времени. В результате моделирования получают данные о координатах и импульсах всех рассматриваемых молекул в последовательные моменты времени. Затем методами неравновесной статистической механики по этим данным вычисляются коэффициенты переноса. Работоспособность алгоритма продемонстрирована на примере моделирования коэффициента вязкости нескольких газов. Показано, что точность порядка 1–2 % удается получить при использовании сравнительно небольшого числа молекул. Эта точность растет с увеличением числа используемых в моделировании молекул и числа членов ансамбля (числа независимых фазовых траекторий), по которому производится усреднение результата

Ключевые слова: процессы переноса, разреженный газ, стохастическое моделирование, молекулярное моделирование, вязкость, статистическое моделирование

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-99-108

Введение

Идея использовать молекулярную систему непосредственно для моделирования свойств вещества родилась в начале второй половины прошлого века [1]. Столь сравнительно позднее рождение метода молекулярной динамики (МД) объясняется несколькими причинами. Во-первых, реальные физические системы, свойства которых можно было бы исследовать, состояли из огромного числа молекул. Необходим был специальный инструмент, который позволил бы решать большое число уравнений движения. Такой инструмент (ЭВМ) и появился в конце 50-х годов двадцатого столетия.

Работа выполнена при частичном финансировании РФФ (соглашение № 14-19-00312).

Вторая причина была методологической. Несмотря на победное шествие кинетической теории газов и статистической физики, все еще не было достаточной ясности относительно того, как данные о координатах и импульсах молекул превратить в давление, напряжение, коэффициенты переноса и т.п. С развитием статистической механики необратимых процессов эта методологическая проблема была решена. Сначала в теории линейной реакции [2, 3] была сформулирована идея, восходящая к эйнштейновской теории броуновского движения, о связи неравновесного процесса с временной эволюцией равновесных флуктуаций. Позднее удалось сформулировать полный спектр флуктуационно-диссипационных теорем, связывающих все коэффициенты переноса с соответствующими данному процессу корреляционными функциями [4–8].

Систематическое исследование идеологии и результатов метода МД, однако, показало, что он не позволяет получить истинные фазовые траектории молекулярной системы (см., например, [8, 9–12]). Нередко высказывается мнение, что связано это лишь с неточностью решения системы уравнений Ньютона [13]. И если разработать некоторый метод коррекции решения этих уравнений на каждом шаге, то получаемые фазовые траектории окажутся истинными. Это, конечно, заблуждение. Истинных траекторий нельзя получить даже для системы твердых сфер, где уравнений Ньютона вообще не приходится решать [8, 14, 15].

Конечно, вывод о том, что метод МД принципиально не позволяет получать информацию о точных фазовых траекториях многочастичной системы, для многих представляется почти безысходным. К счастью, это не так. Удачей является то, что эволюция фазовой траектории, как правило, нас и не интересует. Мы же не задумываемся о характере фазовых траекторий системы, когда выполняем тот или иной физический эксперимент. Связано это с тем, что на практике нам необходимы лишь данные о некоторых интегральных характеристиках системы, ее энергии, температуре, давлении, коэффициентах переноса и т.п. Метод МД и дает такие интегральные характеристики системы, при этом они получаются усреднением по времени и по ансамблю большого числа фазовых траекторий.

Но если метод не дает точных фазовых траекторий, стоит ли стараться их получать? Косвенный ответ на этот вопрос дает успешное применение для описания течений разреженного газа метода прямого статистического моделирования Берда или его аналогов [16–19] и псевдостochasticкого метода, развитого для описания диффузии жидкостей [20]. Цель данной работы состоит в разработке стохастического алгоритма для моделирования процессов переноса в разреженных газах. В данной статье алгоритм реализован для молекул в виде твердых сфер. В основе алгоритма, как и метода Берда, лежит идея расщепления процесса движения молекул на их свободный пролет и столкновения.

1. Алгоритм имитации динамики разреженного газа в объеме

В дальнейшем в этой статье предполагается, что молекулы рассматриваемого газа взаимодействуют друг с другом посредством потенциала твердых сфер:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty & \text{при } r \leq d, \\ 0 & \text{при } r > d. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь d – эффективный диаметр сферы, которой моделируется молекула. Так как время взаимодействия твердых сфер равно нулю, то здесь возможны лишь парные соударения. Потенциал (1) широко используется для моделирования процессов переноса, и при надлежащем выборе эффективного диаметра молекул с его помощью получаются и качественно, и количественно вполне хорошие результаты.

Область моделирования заданного объема V , представляющая собой куб (прямоугольный параллелепипед), разбивается на ячейки кубической формы со стороной, равной диаметру молекулы. В начальный момент времени молекулы распределяются равномерно по объему моделирования в соответствии с заданной числовой плотностью n . При этом в каждой ячейке может быть только одна молекула. Чтобы это реализовать, используется специальная процедура, исключающая пересекающиеся конфигурации частиц. В случае если рассматривается система, ограниченная твердыми стенками, взаимодействие молекул с ними моделируется зеркальным законом (угол падения равен углу отражения) или зеркально-диффузным [7, 16, 17]. При диффузном отражении скорость частицы меняется в соответствии с распределением Максвелла, в качестве параметра которого берется температура на стенках. Для моделирования процессов переноса в объеме, а именно такая ситуация рассматривается в данной статье, используются периодические граничные условия [8]. В этом случае, если какая-либо молекула выходит через грань моделируемого объема с импульсом \mathbf{p}_i , то через его противоположную грань входит молекула с таким же импульсом. В результате наряду с основным объемом рассматривается и эволюция всех окружающих его копий.

В начальный момент времени молекулы распределяются равномерно по объему моделирования в соответствии с заданной числовой плотностью n . Скорости молекул \mathbf{v}_i в объеме моделирования разыгрываются согласно распределению Максвелла при заданной температуре T :

$$f_M(\mathbf{v}_i) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m\mathbf{v}_i^2}{2kT} \right), \quad (2)$$

где m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана. При этом, поскольку моделируется равновесное состояние, то суммарный импульс молекул системы должен быть равным нулю, а энергия соответствовать температуре. Равенство суммарного импульса нулю достигается следующим образом: генерируются скорости $N - \sqrt{N}$ молекул и подсчитывается их суммарный импульс. Затем полученный импульс с противоположным знаком распределяется между $(\sqrt{N} - 1)$ оставшимися молекулами, после этого подсчитывается суммарный импульс этих молекул, и он с обратным знаком присваивается оставшейся молекуле. Таким образом, удастся достичь состояния, при котором суммарный импульс системы молекул равен нулю и нет молекулы с очень большой скоростью. Следует, однако, иметь в виду, что приготовленная таким образом система в общем случае равновесной не является. Чтобы достичь равновесия, производится предварительный расчет, в результате которого распределение частиц по пространству станет случайным и равномерным, а по скоростям – максвелловским (2). Последнее проверяется. Расчет начинается после достижения максвелловского распределения.

Входными параметрами моделируемой системы являются объем моделирования $V = L^3$, где L – длина грани кубического объема (или его длина X , ширина Y и высота Z для параллелепипеда), диаметр молекулы d , ее масса m , массовая плотность газа $\rho = mn$ и его температура T .

Имитация динамики рассматриваемой молекулярной системы начинается с составления списка всех молекул. В начальный момент времени t все молекулы в некотором произвольном порядке вносятся в список, в список заносятся все их координаты и скорости: $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N$. Это соответствует списку в фазовом пространстве системы. Порядок частиц в списке определяет различные

микросостояния рассматриваемой молекулярной системы. И, следовательно, определяет разные фазовые траектории. Затем выбирается интервал времени $\tau_1 = d / v_{\max}(t)$, где v_{\max} – максимальная по модулю скорость молекул в рассматриваемой системе в данный момент времени. Таким образом, частица за это время не может пройти расстояние, большее ее диаметра. Формирование списка для момента $(t + \tau_1)$ начинается с рассмотрения молекулы 1. Сначала она сдвигается в конфигурационном пространстве на расстояние $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 \tau_1$. При этом пересекающиеся конфигурации молекул исключаются. Затем анализируется возможность ее соударения с окружающими молекулами. Для этого генерируется случайное число из интервала $[0, 1]$ и если оно окажется меньше средней вероятности соударения $P_{\tau_1} = 4\tau_1 n d^2 \sqrt{\pi k T / m}$, тогда считается, что соударение произошло. Молекула j , с которой молекула 1 столкнулась, выбирается случайно из оставшихся $(N - 1)$ молекул.

После того как обработаны все смещения молекул, последовательно обрабатываются все соударения молекул i и j . Скорости молекул изменяются в соответствии с законами упругого соударения:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}, \quad \mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j + (\mathbf{v}_{ji} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}, \quad (3)$$

где $\mathbf{v}_{ji} = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$ – вектор относительной скорости, а \mathbf{e} – единичный вектор направления от центра молекулы j к центру молекулы i . В результате формируется список для момента $(t + \tau_1)$: $\mathbf{r}'_1, \mathbf{v}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{r}'_N, \mathbf{v}'_N$.

На следующем шаге $(t + \tau_1)$ снова выбирается время $\tau_2 = d / v_{\max}(t + \tau_1)$ и процедура повторяется. Описанная процедура выполняется до тех пор, пока не закончится заданное время расчета t_s : $t_s = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_k$. В результате в процессе расчета получают наборы динамических переменных рассматриваемой системы в последовательные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, используя которые, можно затем вычислить все необходимые макроскопические величины.

2. Алгоритм имитации динамики разреженного газа в объеме

Описанный алгоритм предназначен для моделирования процессов переноса в разреженных газах. В частности, таким образом можно рассчитать коэффициенты самодиффузии, диффузии, вязкости и т.д. В настоящей работе для иллюстрации возможностей представленного алгоритма рассчитан коэффициент вязкости разреженного газа. Для вычисления коэффициента вязкости используется соотношение Гельфанда–Эйнштейна [21]:

$$\eta = \frac{m^2}{2VkTs} \left\langle \left[\sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t+s)y_i(t+s) - \dot{x}_i(t)y_i(t) \right]^2 \right\rangle, \quad (4)$$

где s – смещение по времени; \dot{x}_i – x -компонента скорости частицы; y_i – y -компонента координаты частицы. Угловые скобки означают усреднение по ансамблю фазовых траекторий. В примере, приведенном ниже, усреднение проводилось по 1000 фазовым траекториям. Траектории получены следующим образом. Время расчета t_s равнялось ста временам свободного пробега. Спустя это время образуется некоторая конфигурация молекул, которая используется для расчета следующей фазовой траектории. Таким образом, каждая траектория рассчитыва-

ется по независимым временным интервалам. Полное время расчета равнялось 10^5 времен свободного пробега. В расчетах использовалось 3200 молекул.

В табл. 1 представлены данные моделирования коэффициента вязкости благородных газов Ar, Kr, Xe при температуре 273 К и атмосферном давлении. Диаметры молекул газов взяты из монографии [16] и равнялись: 0,366 нм для Ar, 0,42 нм для Kr и 0,494 нм для Xe. Здесь η_e – экспериментальное значение, η – полученное разработанным в данной работе алгоритмом. Экспериментальные данные взяты из справочника [22]. В последней строке приводится относительная погрешность моделирования Δ .

Таблица 1 / Table 1

Сопоставление данных моделирования коэффициента вязкости газов с экспериментальными
A comparison of the simulation data of the viscosity of gases with the experimental

	<i>Ar</i>	<i>Kr</i>	<i>Xe</i>
$\eta, 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$	22,97	25,87	23,7
$\eta_e, 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$	22,7	25,7	23,3
$\Delta, \%$	1,18	1,43	1,72

Приведенные данные свидетельствуют о том, что коэффициенты вязкости моделируются с точностью не ниже 2 %.

Заключение

В заключение стоит отметить, что представленный алгоритм чрезвычайно прост в реализации и, как показывает проведенное тестирование, вполне жизнеспособен. Его эффективность определяется несколькими обстоятельствами. Прежде всего, числом используемых молекул. При применении метода МД достаточно высокая точность моделирования коэффициентов переноса достигается лишь при использовании десятков тысяч молекул [23]. Стоит отметить, что метод МД фактически вообще не удается применить для моделирования умеренно разреженного газа, рассматриваемого в настоящей статье. Точность предлагаемого алгоритма растет с увеличением числа используемых для моделирования молекул. Это иллюстрируют данные табл. 2, где приведены значения коэффициента вязкости для аргона, полученные при использовании 3200, 1600 и 400 молекул.

Таблица 2 / Table 2

Зависимость моделируемого значения коэффициента вязкости Ar от числа используемых молекул
The dependence of the simulated values of the coefficient of viscosity Ar to the number of molecules

	3200	1600	400
$\eta, 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$	22,97	23,31	23,4
$\eta_e, 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$	22,7	22,7	22,7
$\Delta, \%$	1,2	2,7	3,1

Вторым важным обстоятельством, определяющим время расчета, является число членов ансамбля, по которому производится усреднение полученных данных. Точность моделирования с ростом числа членов ансамбля растет. Так, например, при расчете коэффициента вязкости аргона с использованием 3200 молекул и 1000 траекторий относительная погрешность составляла 1,2 %, при использовании 500 – 2,4 %, а 125 – 5,9 %.

Наконец, для разреженного газа интервал τ_i вполне можно увеличить, важно только, чтобы он был существенно меньше среднего времени свободного пробега молекул. Еще одним способом упрощения алгоритма является отказ от рассмотрения переноса молекул в конфигурационном пространстве. Для моделирования коэффициентов переноса в общем случае достаточно рассмотреть пространственно-однородную систему.

В данной статье алгоритм реализован для молекул с потенциалом взаимодействия (1). Однако его вполне можно обобщить и для практически любого реального потенциала межмолекулярного взаимодействия.

Конечно, кинетическая теория позволяет вычислить коэффициенты переноса, если известны межчастичные потенциалы взаимодействия. На практике осуществить это не так просто. Во-первых, для произвольного потенциала взаимодействия не известны значения так называемых Ω -интегралов, а их расчет является совсем не тривиальной задачей. Во-вторых, для вычисления ряда коэффициентов переноса необходимо использовать достаточно много полиномов Сонина или использовать достаточно сложные вариационные процедуры, что делает вычисление коэффициентов переноса нетривиальной задачей. Таким образом, иметь для расчета коэффициентов переноса альтернативный метод моделирования весьма полезно. Помимо этого данный алгоритм вполне можно обобщить и для описания неравновесных состояний газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alder B.J., Wainwright T.E. Phase transition for a hard sphere system // The Journal of Chemical Physics. – 1957. – Vol. 27, iss. 5. – P. 1208–1209. – doi: 10.1063/1.1743957.
2. Kubo R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems // Journal of the Physical Society of Japan. – 1957. – Vol. 12, iss. 6. – P. 570–584. – doi: 10.1143/JPSJ.12.570.
3. Kubo R., Yokota M., Nakajima S. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. 2. Reaction on thermal disturbances // Journal of the Physical Society of Japan. – 1957. – Vol. 12, iss. 11. – P. 1203–1226. – doi: 10.1143/JPSJ.12.1203.
4. Green H.S. Theories of transport in fluids // Journal of Mathematical Physics. – 1961. – Vol. 2, iss. 3. – P. 344–348. – doi: 10.1063/1.1703720.
5. McLennan J.A. The formal statistical theory of transport processes // Advances in Chemical Physics. – 1963. – Vol. 5. – P. 261–317. – doi: 10.1002/9780470143513.ch6.
6. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1971. – 415 с.
7. Рудяк В.Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1987. – 272 с.
8. Рудяк В.Я. Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Т. 2. Гидромеханика. – Новосибирск: НГАСУ, 2005. – 468 с.
9. Валугев А.А., Норман Г.Э., Подлипчук В.Ю. Энтропия Крылова–Колмогорова неупорядоченных Леннард-Джонсоновских систем // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2, № 5. – С. 3–7.
10. Норман Г.Э., Стегайлов В.В. Стохастические свойства молекулярно-динамической Леннард-Джонсовской системы в равновесном и неравновесном состояниях // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2001. – Т. 119, № 5. – С. 1011–1020.

11. **Norman G.E., Stegailov V.V.** Stochastic and dynamic properties of molecular dynamics systems: simple liquids, plasma and electrolytes, polymers // *Computer Physics Communications*. – 2002. – Vol. 147, iss. 1–2. – P. 678–683. – doi: 10.1016/S0010-4655(02)00376-4.
12. **Норман Г.Э., Стегайлов В.В.** Стохастическая теория метода классической молекулярной динамики // *Математическое моделирование*. – 2012. – Т 24, № 6. – С. 3–44.
13. **Komatsu N., Abe T.** Numerical irreversibility in time reversible molecular dynamics simulation // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2004. – Vol. 195, iss. 3–4. – P. 391–397. – doi: 10.1016/j.physd.2004.05.004.
14. **Рудяк В.Я., Иванов Д.А.** Компьютерное моделирование динамики конечного числа взаимодействующих частиц // *Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации*. – 2003. – № 1. – С. 30–38.
15. **Рудяк В.Я., Иванов Д.А.** Динамические и стохастические свойства открытой системы конечного числа упруго взаимодействующих частиц // *Труды НГАСУ*. – 2004. – Т. 7, № 3. – С. 47–58.
16. **Берд Г.** Молекулярная газовая динамика / пер. с англ. А.И. Ерофеева, О.Г. Фриденлера, В.Е. Яницкого. – М.: Мир, 1981. – 320 с.
17. **Рудяк В.Я.** Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Т. 1. Кинетическая теория. – Новосибирск: НГАСУ, 2004. – 320 с.
18. **Гимельшейн С.Ф., Рудяк В.Я.** Моделирование разреженного газа системой малого числа частиц // *Письма в ЖТФ*. – 1991. – Т. 17, № 19. – С. 74–77.
19. **Гимельшейн С.Ф., Рудяк В.Я.** Новая схема метода прямого статистического моделирования // *Сибирский физико-технический журнал*. – 1992. – № 3. – С. 3–6.
20. **Рудяк В.Я., Лежнев Е.В.** Имитационный алгоритм моделирования диффузии в жидкостях // *Научный вестник НГТУ*. – 2014. – № 4 (57). – С. 167–174. – doi: 10.17212/1814-1196-2014-4-167-174.
21. **Helfand E.** Transport coefficients from dissipation in canonical ensemble. Theory of molecular friction constant // *Physical Review*. – 1960. – Vol. 119, iss. 1. – P. 1–9. – doi: 10.1103/PhysRev.119.1.
22. *Физические величины: справочник* / под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1234 с.
23. Моделирование процессов переноса на основе метода молекулярной динамики. Коэффициент самодиффузии / В.Я. Рудяк, А.А. Белкин, Д.А. Иванов, В.В. Егоров // *Теплофизика высоких температур*. – 2008. – Т. 46, № 1. – С. 35–44.
24. **Чепмен С., Каулинг Т.Д.** Математическая теория неоднородных газов. – М.: Госиноиздат, 1960. – 510 с.

STATISTICAL SIMULATION OF RAREFIED GAS VISCOSITY

Rudyak V.Ya.¹, Lezhnev E.V.^{1,2}

¹*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering,
Novosibirsk, Russian Federation*

²*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation*

Molecular modeling of the transport processes is unique in many cases. The most adequate method of such modeling is the molecular dynamics method. However it is hang-the-expense approach from the point of view of necessary computing resources. In spite of the fact that the method of molecular dynamics has predictive force of experiment, it does not give exact phase trajectories of investigated because movement of molecular systems unstably on Lyapunov concerning brought disturbances (at numerical modeling they always exist) and takes place mixing of phase trajectories. In present paper the algorithm was constricted in which the phase trajectories of the considered molecular systems are simulated stochastically. Naturally, the conservative laws should be carried out at such simulation. The algorithm is realized for the description of the transport processes in the rarefied gases. The molecules interact each other is described by the hard spheres potential. At the initial moment of time all molecules in some any order are entered in the list. Then in consecutive order for each molecule the process of its free shift and impact with randomly chosen molecule from the list is realized. The probability of collision is defined

from comparison of the random number with average probability for the chosen interval of time. As a result of modeling data about co-ordinates and impulses of all considered molecules during the consecutive moments of time are obtained. Using these data the transport coefficients are calculated by means of nonequilibrium statistical mechanics method. As a test the viscosity coefficients of several rarefied gases are simulated. It is shown, that accuracy of an order of 1-2 % can be received using rather a small number of molecules. This accuracy grows with increase of the molecules number in the system and number of independent phase trajectories on which result averaging is made.

Keywords: transport processes, rarefied gas, stochastic modeling, molecular simulation, viscosity, statistical modeling.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-99-108

REFERENCES

1. Alder B.J., Wainwright T.E. Phase transition for a hard sphere system. *The Journal of Chemical Physics*, 1957, vol. 27, iss. 5, pp. 1208–1209. doi: 10.1063/1.1743957
2. Kubo R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1957, vol. 12, iss. 6, pp. 570–584. doi: 10.1143/JPSJ.12.570
3. Kubo R., Yokota M., Nakajima S. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. 2. Reaction on thermal disturbances. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1957, vol. 12, iss. 11, pp. 1203–1226. doi: 10.1143/JPSJ.12.1203
4. Green H.S. Theories of transport in fluids. *Journal of Mathematical Physics*, 1961, vol. 2, iss. 3, pp. 344–348. doi: 10.1063/1.1703720
5. McLennan J.A. The formal statistical theory of transport processes. *Advances in Chemical Physics*, 1963, vol. 5, pp. 261–317. doi: 10.1002/9780470143513.ch6
6. Zubarev D.N. *Neravnovesnaya statisticheskaya termodinamika* [Nonequilibrium statistical thermodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 415 p.
7. Rudyak V.Ya. *Statisticheskaya teoriya dissipativnykh protsessov v gazakh i zhidkostyakh* [Statistical theory of dissipative processes in gases and liquids]. Novosibirsk, Nauka Publ., Siberian Branch, 1987. 272 p.
8. Rudyak V.Ya. *Statisticheskaya aerogidromekhanika gomogennykh i geterogennykh sred. T. 2. Gidromekhanika* [Statistical aerohydrodynamics homogeneous and heterogeneous environments. Vol. 2. Hydromechanics]. Novosibirsk, NGASU Publ., 2005. 468 p.
9. Valuev A.A., Norman G.E., Podlipchuk V.Yu. Entropiya Krylova–Kolmogorova neuporyadochennykh Lennard–Dzhonsonovskikh sistem [The Krylov–Kolmogorov entropy of a disordered Lennard–Jones systems]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*, 1990, vol. 2, iss. 5, pp. 3–7. (In Russian)
10. Norman G.E., Stegailov V.V. Stochastic properties of molecular dynamics Lennard-Jones system in equilibrium and nonequilibrium conditions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2001, vol. 92, iss. 5, pp. 879–886. doi: 10.1134/1.1378182. Translated from *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, 2001, vol. 119, iss. 5, pp. 1011–1020.
11. Norman G.E., Stegailov V.V. Stochastic and dynamic properties of molecular dynamics systems: simple liquids, plasma and electrolytes, polymers. *Computer Physics Communications*, 2002, vol. 147, iss. 1–2, pp. 678–683. doi: 10.1016/S0010-4655(02)00376-4
12. Norman G.E., Stegailov V.V. Stochastic theory of the classical molecular dynamics method. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, vol. 5, iss. 4, pp. 305–333. doi: 10.1134/S2070048213040108. Translated from *Matematicheskoe modelirovanie*, 2012, vol. 24, iss. 6, pp. 3–44.
13. Komatsu N., Abe T. Numerical irreversibility in time reversible molecular dynamics simulation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, vol. 195, iss. 3–4, pp. 391–397. doi: 10.1016/j.physd.2004.05.004
14. Rudyak V.Ya., Ivanov D.A. Komp'yuternoe modelirovanie dinamiki konechnogo chisla vzaimodeistvuyushchikh chastits [Computer simulation of the dynamics of a finite number of interacting particles]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2003, no. 1, pp. 30–38.

15. Rudyak V.Ya., Ivanov D.A. Dinamicheskie i stokhasticheskie svoystva otkrytoi sistemy konechnogo chisla uprugo vzaimodeistvuyushchikh chastits [Dynamic and stochastic properties of an open system of a finite number of elastically interacting particles]. *Trudy NGASU – Proceedings NSUACE*, 2004, vol. 7, no. 3, pp. 47–58.
16. Bird G.A. *Molecular gas dynamics*. Oxford, Clarendon Press, 1976. 415 p. (Russ. ed.: Berd G. *Molekulyarnaya gazovaya dinamika*. Translated from English A.I. Erofeev, O.G. Fridlender, V.E. Yanitskii. Moscow, Mir Publ., 1981. 319 p.).
17. Rudyak V.Ya. *Statisticheskaya aerogidromekhanika gomogennykh i geterogennykh sred*. T. 1. *Kineticheskaya teoriya* [Statistical aerohydrodynamics homogeneous and heterogeneous environments. Vol. 1. Kinetic theory]. Novosibirsk, NGASU Publ., 2004. 320 p.
18. Gimel'shein S.F., Rudyak V.Ya. Modelirovanie razrezhennogo gaza sistemoi malogo chisla chastits [Simulation of rarefied gas system a small number of particles]. *Pis'ma v ZhTF – Soviet Technical Physics Letters*, 1991, vol. 17, no. 19, pp. 74–77.
19. Gimel'shein S.F., Rudyak V.Ya. Novaya skhema metoda pryamogo statisticheskogo modelirovaniya [The new scheme of direct statistical modeling]. *Sibirskii fiziko-tehnicheskii zhurnal – Siberian Physics-Techniques Journal*, 1992, no. 3, pp. 3–6.
20. Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Imitatsionnyi algoritm modelirovaniya diffuzii v zhidkostyakh [An imitation algorithm of diffusion simulation in liquids]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (57), pp. 167–174. doi: 10.17212/1814-1196-2014-4-167-174
21. Helfand E. Transport coefficients from dissipation in canonical ensemble. Theory of molecular friction constant. *Physical Review*, 1960, vol. 119, iss. 1, pp. 1–9. doi: 10.1103/PhysRev.119.1
22. Grigor'ev I.S., Meilikhov E.Z., eds. *Fizicheskie velichiny: spravochnik* [Physical quantities: reference book]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 1234 p.
23. Rudyak V.Ya., Belkin A.A., Ivanov D.A., Egorov V.V. The simulation of transport processes using the method of molecular dynamics. Self-diffusion coefficient. *High Temperature*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 30–39. doi: 10.1134/s10740-008-1006-1. Translated from *Teplotfizika vysokikh temperatur*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 35–44.
24. Chapman S., Cowling T.G. *The mathematical theory of non-uniform gases. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction, and diffusion in gases*. Cambridge, Cambridge University Press, 1952 (Russ. ed.: Chepman S., Kauling T.D. *Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov*. Translated from English E.V. Malinovskaya. Moscow, Gosinoizdat Publ., 1960. 510 p.).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Рудяк Валерий Яковлевич – родился в 1945 году, д-р физ.-мат., профессор, заслуженный работник высшей школы РФ, действительный член МАН ВШ, действительный член Американского нанообщества (American Nano Society), заведующий кафедрой теоретической механики НГАСУ (Сибстрин). Основные научные направления исследований: неравновесная статистическая механика, кинетическая теория газов, теплофизика процессов переноса, физика наножидкостей, гидромеханика, ламинарно-турбулентный переход, математическое моделирование. Имеет более 500 публикаций, в том числе 5 монографий. (Адрес: 630008, Россия, Новосибирск, Ленинградская, 113. E-mail: valery.rudyak@mail.ru).

Rudiak Valerii Iakovlevich (b. 1945) – Doctor of Science (Phys.&Math.), Professor, Honored Worker of Higher School of Russia, member of the MAS HS, member of the American Nano Society, Head of the Department of Theoretical Mechanics NGASU (Sibstrin). His research interests are currently focused on: non-equilibrium statistical mechanics, kinetic theory of gases, thermal transfer processes, nanofluids physics, fluid mechanics, laminar-turbulent transition, mathematical modeling. He is author of more than 500 publications, including 5 monographs. (Address: 113, Leningradskaya st., Novosibirsk, 630008, Russian Federation. E-mail: valery.rudyak@mail.ru).



Лежнев Евгений Васильевич – родился в 1976 году, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики НГТУ. Основное научное направление исследований: моделирование процессов переноса. Имеет 9 публикаций. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: lionlev@yandex.ru).

Lezhnev Evgenii Vasil'evich (b. 1976) – Candidate of Science (Eng.), assistant professor of higher mathematics NSTU. His research interests are currently focused on: modeling of transport processes. He is author of 9 scientific publications. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. E-mail: lionlev@yandex.ru).

*Статья поступила 29 мая 2015 г.
Received May 29, 2015*

To Reference:

Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Stokhasticheskoe modelirovanie vyazkosti razrezhennykh gazov [Statistical simulation of rarefied gas viscosity]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 99–108. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-99-108

УДК 519.242.5

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ МАТРИЦЫ ТРАНСПОРТНЫХ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ

В.И. Хабаров¹, А.А. Теселкин², К.П. Косолапов¹

¹Сибирский государственный университет путей сообщения

²Новосибирский государственный технический университет

Задача планирования наблюдений для оценки транспортных корреспонденций рассматривается как задача распределения ресурса на узлах транспортной сети. Транспортная сеть представляется как граф, вершины которого ассоциированы с узлами транспортной сети, а дуги – с возможными путями сообщений. Задача распределения ресурса для наблюдения решается с применением методов оптимального планирования эксперимента. Используются минимаксные D-оптимальные планы. Модель наблюдения предполагает фиксацию количества переходов транспортных средств из одной вершины транспортного графа в другую. Данная модель описывается цепью Маркова с дискретным временем. Матрица переходных вероятностей цепи оценивается на основе наблюдений за цепью в дискретные моменты времени. Для оценки переходных вероятностей используется метод максимального правдоподобия в предположении, что марковская цепь стационарна. Строится информационная матрица Фишера для предлагаемой модели наблюдений. Решение задачи планирования приводится в общем аналитическом виде. Предлагается интерпретация для задачи подсчета интенсивности транспорта и некоторые рекомендации для использования результатов в практических целях.

Ключевые слова: транспортная сеть, матрица корреспонденции, марковские цепи, задача планирования эксперимента, оценка матриц переходных вероятностей по агрегированным данным.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-109-116

Введение

Матрица корреспонденции является фундаментальной характеристикой транспортной сети, поскольку она определяет общий объем транспортного потока. Поэтому задача оценки матрицы корреспонденции является важнейшей задачей для исследования транспортной сети и транспортных потоков [1]. Один из методов оценки матрицы корреспонденций заключается в восстановлении матрицы корреспонденции на основе наблюдений за транспортным потоком [2]. В качестве наблюдений можно рассматривать интенсивности транспортных потоков на участках сети. Для качественной реализации методов оценки необходимо, чтобы наблюдения были максимально информативны. Возникает задача оптимального планирования наблюдений.

Таким образом, в работе рассматривается задача планирования наблюдений за транспортными потоками для оценки транспортных корреспонденций.

1. Марковская модель транспортных корреспонденций

Имеется граф транспортной сети, или транспортный граф $G(V, E)$, состоящий из m узлов. Данный граф описывается стационарной неприводимой апериодической марковской цепью с дискретным временем и с матрицей переходных вероятностей $P = \{p_{ij}\}$, $(i, j = 1, \dots, m)$, причем каждое состояние цепи ассоциировано

с некоторой вершиной графа G . Рассматривается задача подсчета трафика для автотранспорта на транспортной сети G .

С точки зрения теории марковских цепей рассматривается задача оценивания переходных вероятностей на основе наблюдений за цепью в моменты времени $t = \{0, 1, \dots, T\}$ на основе статистики

$$n_{ij} = \sum_{t=0}^T n_{ij}(t),$$

где $n_{ij}(t)$ – количество переходов цепи из состояния i в состояние j в момент времени t . Пусть

$$n_i = \sum_{j=1}^m n_{ij}$$

– общее число переходов цепи за время T в состоянии i ,

$$N = \sum_{i=1}^m n_i$$

– общее число переходов за время T .

Далее будет полезна следующая интерпретация для данной модели наблюдения. Рассматриваются некоторые микрообъекты, переходящие из одного состояния в другое в моменты времени $t = \{0, 1, \dots, T\}$. Имеются наблюдатели, которые ассоциированы с состояниями цепи. Каждый наблюдатель в состоянии с номером i в некоторый момент времени t фиксирует $n_{ij}(t)$ – количество переходов из состояния с номером i в момент t в состояние с номером j в момент $t + 1$. Для задачи подсчета трафика наблюдатель, находящийся в узле i , в некоторые дискретные моменты времени $t = \{0, 1, \dots, T\}$ фиксирует перераспределение автотранспорта.

Здесь уместно отметить специфику транспортных сетей и задач, связанных с оценкой матриц переходных вероятностей для этих сетей. Транспортный граф с известной структурой дает априорную информацию о том, какие переходы в каком состоянии разрешены. Для учета этой информации далее будет использоваться понятие «емкость состояния». Под емкостью состояния $s_i, i = 1, \dots, m$, будем понимать количество выходящих дуг m_i из вершины графа сети с номером i . Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} = 1, p_{ij} > 0, i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Это избавит в дальнейшем от необходимости оговаривать условия использования выражений типа p_{ij}^{-1} или $\log p_{ij}$.

В качестве метода оценивания матрицы $P = \{p_{ij}\}$, ($i, j = 1, \dots, m$) рассмотрим метод максимального правдоподобия. Функция правдоподобия в этом случае есть [3–6]

$$L(n, P) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}^{n_{ij}} = \prod_{i=1}^m p_{i1}^{n_{i1}} p_{i2}^{n_{i2}} \dots p_{im_i-1}^{n_{im_i-1}} \left(1 - \sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij} \right)^{n_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{ij}}. \quad (2)$$

Логарифмическая функция правдоподобия, соответственно, будет иметь вид

$$\log L(n, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{ij} \log p_{ij} + \left(n_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{ij} \right) \log \left(1 - \sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij} \right). \quad (3)$$

Оценка максимального правдоподобия (ОМП) является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial p_{ij}} \log L(n, P) = \frac{n_{ij}}{p_{ij}} - \frac{n_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{ij}}{1 - \sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij}} = 0, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m_i - 1, \quad (4)$$

при условии (1). Решением (4) относительно p_{ij} являются оценки вида

$$p_{ij}^* = \frac{n_{ij}}{n_i}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m_i. \quad (5)$$

Такая оценка состоятельна и асимптотически нормальна [3–6].

2. Планирование наблюдений

Задачу планирования экспериментов для модели наблюдений, рассмотренной выше, можно интерпретировать следующим образом. Наблюдатели фиксируют переходы микрообъектов, находясь в состояниях $\{s_1, \dots, s_m\}$ в моменты времени $t = \{0, 1, \dots, T\}$. На весь эксперимент отведен ресурс в N наблюдений. Каждый наблюдатель получает часть этого ресурса $\{n_i, i = 1, \dots, m\}$ таким образом, что $\sum_{i=1}^m n_i = N$. Требуется найти распределение $n = \{n_i, i = 1, \dots, m\}$, максимизирующее некоторый функционал от информационной матрицы Фишера

$$I(P, n) = -E \left(\frac{\partial^2 \log L(n, P)}{\partial P^2} \right). \quad (6)$$

Известно [7], что D-оптимальный план минимизирует обобщенную дисперсию оценок параметров, полученных на основе уравнения (4). Следует, однако, ожидать (смотри далее), что информационная матрица Фишера будет зависеть от истинных значений параметров P . Для исключения этой зависимости далее будем рассматривать минимаксные D-оптимальные планы, для которых

$$n^* = \underset{n}{\text{Arg max}} \min_P \log \det I(P, n). \quad (7)$$

Рассмотрим структуру информационной матрицы Фишера более детально [9]. Для этого сначала необходимо найти элементы матрицы вторых производных:

$$\frac{\partial^2 \log L(n, P)}{\partial p_{ik} \partial p_{il}} = \begin{cases} -\frac{n_{ik}}{p_{ik}^2} - \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2}, & k = l, \\ -\frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2}, & k \neq l, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m; k, l = 1, \dots, m_i. \quad (8)$$

Далее согласно (6)

$$I(P, n) = E \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где с учетом (8)

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{n_{i1}}{p_{i1}^2} + \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} & \cdots & \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} & \cdots & \frac{n_{im_i-1}}{p_{im_i-1}^2} + \frac{n_{im_i}}{p_{im_i}^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

для всех $i = 1, \dots, m$. Выше предполагалось, что

$$p_{im_i} = 1 - \sum_{j=1}^{m_i-1} p_{ij},$$

$$n_{im_i} = n_i - \sum_{j=1}^{m_i-1} n_{ij}.$$

Для мультиномиального распределения известно (см. [8]), что $E[n_{ij}] = n_i p_{ij}$ $\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m_i$, отсюда следует, что

$$E[A_i] = n_i \begin{bmatrix} \frac{1}{p_{i1}} + \frac{1}{p_{im_i}} & \cdots & \frac{1}{p_{im_i}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_{im_i}} & \cdots & \frac{1}{p_{im_i-1}} + \frac{1}{p_{im_i}} \end{bmatrix} =$$

$$= n_i \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{p_{i1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{p_{im_i-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{p_{im_i}} & \cdots & \frac{1}{p_{im_i}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_{im_i}} & \cdots & \frac{1}{p_{im_i}} \end{bmatrix} \right) \forall i = 1, \dots, m. \quad (11)$$

Далее необходимо найти выражение для $\log \det I(P, n)$. Учитывая блочно-диагональную структуру матрицы (9), имеем:

$$\log \det I(P, n) = \log \prod_{i=1}^m \det E[A_i] = \sum_{i=1}^m \log \det E[A_i]. \quad (12)$$

Воспользуемся результатом [10] для вычисления определителя матрицы, которая представима в форме (11), известной как диагональное разложение. Тогда

$$\det E[A_i] = n_i^{m_i-1} \left(\prod_{j=1}^{m_i-1} \frac{1}{p_{ij}} + \sum_{k=1}^{m-1} \prod_{j \neq k} \frac{1}{p_{im}} \frac{1}{p_{ij}} \right) = n_i^{m_i-1} B_i, \quad (13)$$

где

$$B_i = \prod_{j=1}^{m_i-1} \frac{1}{p_{ij}} + \sum_{k=1}^{m-1} \prod_{j \neq k} \frac{1}{p_{im}} \frac{1}{p_{ij}}.$$

Последнее выражение дает основание утверждать, что

$$\log \det I(P, n) = (m_i - 1) \sum_{i=1}^m \log n_i + \sum_{i=1}^m \log B_i. \quad (14)$$

Возвращаясь к экстремальной задаче (7), найдем

$$\min_P \log \det I(P, n) = \min_P \left((m_i - 1) \sum_{i=1}^m \log n_i + \sum_{i=1}^m \log B_i \right). \quad (15)$$

Учитывая выпуклость логарифмической функции, а также независимость первого слагаемого в (14) от матрицы P , можно утверждать, что решением экстремальной задачи (15) будут стохастические матрицы P размерности m , с равными элементами в строках.

Таким образом, экстремальную задачу (7) можно свести к более простой экстремальной задаче вида

$$n^* = \text{Arg} \max_{\sum_{i=1}^m n_i = N, n_i > 0} (m_i - 1) \sum_{i=1}^m \log n_i. \quad (16)$$

Используя функцию Лагранжа

$$L(n, \lambda) = (m_i - 1) \sum_{i=1}^m \log n_i + \lambda \left(N - \sum_{i=1}^m n_i \right),$$

найдем решение (16), решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial n_i} = \frac{(m_i - 1)}{n_i} - \lambda = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^m n_i - N = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Решением (17) является

$$n_i^* = \frac{N(m_i - 1)}{\sum_{i=1}^m (m_i - 1)} \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (18)$$

Таким образом, план эксперимента (распределение ресурса) можно интерпретировать следующим образом: общий объем наблюдений N перераспределяется между наблюдателями марковской цепи пропорционально $m_i - 1$ ($i = 1, \dots, m$), где m_i – количество возможных переходов в состоянии s_i .

Интерпретация для транспортной задачи может быть следующей: если дана транспортная сеть с некоторым количеством узлов не меньше, чем m , то следует ограничиться m узлами и N возможных наблюдений за микрообъектами перераспределить согласно (18).

Заключение

В данной работе рассмотрена проблема организации мониторинга транспортных потоков с целью оценки транспортных корреспонденций, которая сводится к задаче распределения ресурса по узлам марковской цепи с дискретным временем. Такая задача была интерпретирована как задача оптимального планирования наблюдений за марковской цепью. В работе поставлена задача планирования экспериментов с использованием минимаксных D-оптимальных планов (7). Получена информационная матрица Фишера (9). Решение задачи планирования получено в аналитическом виде.

Результаты, полученные в данной статье, могут быть использованы в практических целях для оценки матриц корреспонденции, для калибровки транспортных моделей и для проведения системного мониторинга интенсивностей транспорта, что увеличит информативность собираемой информации о транспортных потоках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие / А.В. Гасников, С.Л. Кленов, Е.А. Нурминский, Я.А. Холодов, Н.Б. Шамрай, М.Л. Бланк, Е.В. Гасникова, А.А. Замятин, В.А. Малышев, А.В. Колесников, А.М. Райгородский; под ред. А.В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 360 с.
2. Хабаров В.И., Молодцов Д.О., Хомяков С.В. Марковская модель транспортных корреспонденций // Доклады ТУСУР. – 2012. – № 1, ч. 1. – С. 113–117.
3. Ли Ц.-Ч., Джадж Д.Г., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам. – М.: Статистика, 1977. – 221 с.
4. Kendall M.G., Stuart A. The advance theory of statistics. Vol. 2. Inference and Relationship. – London: Carles Griffin and Company Limited, 1961. – 758 p.
5. Hoel P.G. A test for Markoff chains // Biometrika. – 1954. – Vol. 41, iss. 3–4. – P. 430–433. – doi: 10.1093/biomet/41.3-4.430.
6. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. – М.: МЦНМО, 2010. – 560 с.
7. Федоров В.В. Теория оптимального планирования эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
8. Хабаров В.И. Марковская модель процесса последовательного планирования экспериментов // Машинные методы планирования эксперимента и оптимизации многофакторных систем: межвузовский сборник научных трудов. – Новосибирск: Изд-во НЭТИ, 1987. – С. 62–65.
9. Справочник по прикладной статистике. В 2 т. Т. 1: пер. с англ. / под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана; пер. с англ. под ред. Ю.Н. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 510 с.
10. Сирл С., Госман У. Матричная алгебра в экономике / пер. с англ. и науч. ред. Е.М. Четыркина и Р.М. Энтова. – М.: Статистика, 1974. – 368 с.

DESIGN OF EXPERIMENTS FOR TRANSPORT CORRESPONDENCE MATRIX ESTIMATION

Khabarov V.I.¹, Tesselkin A.A.², Kosolapov K.P.¹

¹*Siberian Transport University, Novosibirsk, Russian Federation*

²*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation*

The problem of study planning for transport correspondence estimation is considered as a problem of resource distribution at the nodes of the transport network. The transport network is considered as a graph whose vertices are associated with the nodes of the transport network, and edges are associated with possible routes. The resource distribution problem is solved using optimal experimental design methods. Minimax D-optimal designs are used. Recording the number of vehicle transitions from one vertex of the transport graph to another is taken as an observation model. This model is described by the Markov discrete time chain. The transition matrix is estimated using observations of the chain at discrete time points. The maximum likelihood method is used for the estimation of transition probabilities assuming that the Markov chain is steady. The Fisher information matrix for the proposed model is constructed. The solution of the experimental design problem is given in general analytical form. The interpretation for calculating the traffic intensity is proposed and some recommendations for practical applications of the results are given.

Keywords: transport network, correspondence matrix, Markov chains, design of experiments, estimation of correspondence under aggregated data.

DOI: 10.17212/1727-2769-2015-3-109-116

REFERENCES

1. Gasnikov A.V., Klenov S.L., Nurminskii E.A., Kholodov Ya.A., Shamrai N.B., Blank M.L., Gasnikova E.V., Zamyatin A.A., Malyshev V.A., Kolesnikov A.V., Raigorodskii A.M. *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov* [Introduction to the mathematical modelling of traffic flows]. Moscow, MFTI Publ., 2010. 360 p.
2. Khabarov V.I., Molodtsov D.O., Khomyakov S.V. Markovskaya model' transportnykh korrespondentsii [Model Markov chains for transport correspondence]. *Doklady TUSUR – Proceedings of TUSUR*, 2012, no. 1, pp. 113–117.
3. Lee T.C., Judge G.G., Zellner A. *Estimating the parameters of the Markov probability model from aggregate time series data*. Amsterdam, London, Publishing Company, 1970. 254 p. (Russ. ed.: Li Ts.-Ch., Dzhadzh D.G., Zel'ner A. *Otsenivanie parametrov markovskikh modelei po agregirovannym vremennym ryadam*. Translated from English A.D. Kasavin, V.A. Lototskii, A.S. Mandel'. Moscow, Statistika Publ., 1977. 221 p.).
4. Kendall M.G., Stuart A. *The advance theory of statistics*. Vol. 2. *Inference and Relationship*. London, Charles Griffin and Company Limited, 1961. 758 p.
5. Hoel P.G. A test for Markoff chains. *Biometrika*, 1954, Vol. 41, iss. 3–4, pp. 430–433. doi: 10.1093/biomet/41.3-4.430
6. Kel'bert M.Ya., Sukhov Yu.M. *Veroyatnost' i statistika v primerakh i zadachakh*. T. 2. *Markovskie tsepi kak otpravnyaya tochka teorii sluchainykh protsessov i ikh prilozheniya* [Probability and Statistics in the examples and problems. Vol. 2. Markov chain as the starting point of the theory of stochastic processes and their applications]. Moscow, MTsNMO Publ., 2010. 560 p.
7. Fedorov V.V. *Teoriya optimal'nogo planirovaniya eksperimenta* [The theory of optimal design of experiments]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 312 p.
8. Khabarov V.I. Markovskaya model' protsessa posledovatel'nogo planirovaniya eksperimentov [Markov model of sequential design of experiments]. *Mashinnye metody planirovaniya eksperimenta i optimizatsii mnogofaktornykh system: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* [Machine methods of the experimental design and the multifactor system optimization: interuniversity collection of scientific papers], 1987, pp. 62–65.
9. Ledermann W., Ghief ed. *Handbook of applicable mathematics*. Vol. 6, pt. A. *Statistics*. Ed. by E. Lloyd. Chichester, John Wiley & Sons, 1984. 580 p. (Russ. ed.: Lloid E., Lederman U., eds. *Spravochnik po prikladnoi statistike*. V 2 t. T. 1. Translated from English, ed. by Yu.N. Tyurin. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1989. 510 p.).

10. Searle S.R., Hausman W.H. *Matrix algebra for business and economics*. New York, Wiley, 1970. 362 p. (Russ. ed.: Sirl S., Gosman U. *Matrichnaya algebra v ekonomike*. Translated from English and sci. eds. E.M. Chetyrkin, R.M. Entov. Moscow, Statistika Publ., 1974. 368 p.).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Хабаров Валерий Иванович – родился в 1951 году, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент Академии Высшей школы, заведующий кафедрой «Информационные технологии транспорта» Сибирского государственного университета путей сообщения. Область научных интересов: искусственный интеллект, математическое моделирование транспортных потоков, планирование эксперимента. Опубликовано около 120 научных работ. (Адрес: 630049, Россия, Новосибирск, ул. Дуси Ковальчук, 191. Email: khabarov51@mail.ru).

Khabarov Valeriy Ivanovich (b. 1951) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, corresponding member of the Russian Higher School Academy of Sciences, Head of IT in Transport Department of Siberian Transport University. His research interests are currently focused on artificial intelligence, mathematical modelling of traffic flows, design of experiments. He is author of about 120 scientific papers. (Address: 191 D. Kovalchuk St., Novosibirsk, 630049, Russian Federation. Email: khabarov51@mail.ru).



Теселкин Александр Александрович – родился в 1992 году, аспирант Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: математическое моделирование транспортных потоков. Опубликовано 8 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. Email: a.tesselkin@gmail.com).

Tesselkin Alexandr Alexandrovich (b. 1992) – postgraduate of Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on mathematical modelling of traffic flows. He is author of 8 scientific papers. (Address: 20, Karl Marks Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: a.tesselkin@gmail.com).



Косолапов Кирилл Павлович – родился в 1991 году, аспирант Сибирского государственного университета путей сообщения. Область научных интересов: математическое моделирование транспортных потоков. Опубликовано 4 научные работы. (Адрес: 630049, Россия, Новосибирск, ул. Дуси Ковальчук, 191. Email: kosolapovkp1@gmail.com).

Kosolapov Kirill Pavlovich (b. 1991) – postgraduate of Siberian Transport University. His research interests are currently focused on mathematical modelling of traffic flows. He is author of 4 scientific papers. (Address: 191 D. Kovalchuk, Novosibirsk, 630049, Russia. Email: kosolapovkp1@gmail.com).

Статья поступила 05 августа 2015 г.

Received August 05, 2015

To Reference:

Khabarov V.I., Tesselkin A.A., Kosolapov K.P. Planirovanie eksperimentov dlya otsenki matritsy transportnykh korrespondentsii [Design of experiments for transport correspondence matrix estimation]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 109-116. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-109-116

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Выпуск 3(28) июль–сентябрь 2015

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 2000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 21.09.2015. Бумага офсетная. Формат 70×108 1/16
Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 10,15. Печ. л. 7,25. Изд. № 183. Заказ № 1387

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20