

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ  
ДОКЛАДЫ  
АКАДЕМИИ НАУК  
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

2018

октябрь–декабрь

№ 4 (41)



*Выходит четыре раза в год*

ISSN 1727-2769

**Учредители**

*Академия наук высшей школы России  
Новосибирское отделение Академии наук высшей школы*

**Главный редактор**

А.Г. Вострецов, д-р техн. наук, проф., засл. деятель науки РФ

**Заместитель главного редактора**

В.Н. Васюков, д-р техн. наук, проф.

**Редакционный совет**

М. Грайцар, PhD, проф. (Словакия)  
Д.В. Винников, д-р техн. наук, проф. (Эстония)  
А. Загоскин, PhD (Великобритания)  
Е.В. Ильичев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Германия)  
М.Н. Клыماش, д-р техн. наук, проф. (Украина)  
К.Ю. Арутюнов, д-р физ.-мат. наук, проф.  
А.В. Бурдаков, д-р физ.-мат. наук, проф.  
И.С. Грузман, д-р техн. наук, проф.  
А.О. Давидов, д-р техн. наук  
В.П. Драгунов, д-р техн. наук, доц.  
С.Л. Елистратов, д-р техн. наук  
А.И. Легалов, д-р техн. наук, проф.  
Г.В. Майер, д-р физ.-мат. наук, проф., засл. деятель науки РФ  
В.К. Макуха, д-р техн. наук, проф.  
В.Ю. Нейман, д-р техн. наук, проф.  
В.Я. Рудяк, д-р физ.-мат. наук, проф.  
А.А. Спектор, д-р техн. наук, проф.  
С.П. Халютин, д-р техн. наук, проф.  
С.А. Харитонов, д-р техн. наук, проф.  
В.Д. Юркевич, д-р техн. наук, проф.

**Ответственный секретарь**

Д.О. Соколова, канд. техн. наук

*Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций в 2002 г. (свидетельство ПИ № 77-11517 от 04.01.2002 г.)*

Адрес редакции: 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, НГТУ, корп. 4, ком. 415,  
телефон: (383) 346-15-37, факс: (383) 346-02-09. Email: danvshrf@corp.nstu.ru

© Новосибирское отделение АН ВШ, 2018 г.

SCIENTIFIC JOURNAL

**PROCEEDINGS  
OF THE RUSSIAN HIGHER SCHOOL  
ACADEMY OF SCIENCES**

2018

October – December

№ 4 (41)



*Journal is published quarterly*

ISSN 1727-2769

*Journal was established by*

*Russian Higher Education Academy of Science  
Novosibirsk Branch of Higher Education Academy of Science*

**Chief Editor**

A.G. Vostretsov, D.Sc. (Eng.), Prof., Honoured Science Worker of Russian Federation

**Deputy Chief Editor**

V.N. Vasyukov, D.Sc. (Eng.), Prof.

**Editorial Council**

M. Grajcar, PhD, Prof. (Slovakia)

D.V. Vinnikov, D.Sc. (Eng.), Prof. (Estonia)

A.M. Zagoskin, PhD (United Kingdom)

E.V. Ilyichev, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof. (Germany)

M.M. Klymash, D.Sc. (Eng.), Prof. (Ukraine)

K.Yu. Arutyunov, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.

A.V. Burdakov, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.

I.S. Gruzman, D.Sc. (Eng.), Prof.

A.O. Davidov, D.Sc. (Eng.)

V.P. Dragunov, D.Sc. (Eng.), Assoc. Prof.

S.L. Elistratov, D.Sc. (Eng.)

A.I. Legalov, D.Sc. (Eng.), Prof.

G.V. Mayer, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof., Honoured Science Worker of Russian Federation

V.K. Makukha, D.Sc. (Eng.), Prof.

V.Yu. Neyman, D.Sc. (Eng.), Prof.

V.Ya. Rudyak, D.Sc. (Phys.&Math.), Prof.

A.A. Spector, D.Sc. (Eng.), Prof.

S.P. Khaljutin, D.Sc. (Eng.), Prof.

S.A. Haritonov, D.Sc. (Eng.), Prof.

V.D. Yurkevich, D.Sc. (Eng.), Prof.

**Executive Secretary**

D.O. Sokolova, C.Sc.(Eng.)

Editor Address: Office 415, 20 bld. 4, K. Marx Prospect, Novosibirsk, 630073, Russian Federation.  
Tel: +7 (383) 346-15-37. Fax: +7 (383) 346-02-09. Email: danvshrf@corp.nstu.ru

© Novosibirsk Branch of Higher Education Academy of Science, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

- Дубровский В.Г., Топовский А.В., Остреинов Г.М.*  
Построение точных решений уравнения Кадомцева–  
Петвиашвили (КП-2) с интегрируемыми граничными  
условиями методом дибар-одевания .....7

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

- Алиферов А.И., Жуловян В.В., Морев А.Э., Промзев В.А.*  
Нагрев немагнитных изделий цилиндрического  
и прямоугольного поперечного сечения в магнитном поле  
вращающихся постоянных магнитов .....30
- Аносов В.Н., Кавешников В.М., Орел Е.О.*  
Математическое описание источника питания для  
бесконтактного подвода энергии как элемента системы  
управления .....44
- Артюшенко В.В., Никулин А.В., Степанов М.А.*  
Синтез инвариантной четырехточечной модели  
поверхностно-распределенного объекта.....52
- Жарков М.А., Сапселев А.В., Харитонов С.А.,  
Зиновьев Г.С., Жуловян В.В.*  
Анализ использования демпферной обмотки для создания  
пускового момента трехкаскадного синхронного генератора .....64

**Киселев Д.С., Кондратьев Н.В., Кошкина Ю.И.,  
Вагин Д.В., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г.**

О параметризации геоэлектрической модели в задачах  
аэроэлектроразведки в средах с рельефом и слоями перемен-  
ной толщины.....77

**Синицкий Р.Е., Драгунов В.П., Руденко И.Е.,  
Колосков Д.Б., Драгунова Е.В.**

Особенности электромеханических взаимодействий в МЭМС  
с латеральным смещением непараллельных электродов  
в режиме с контролируемым напряжением.....93

**Хабаров В.И., Спешников К.В.**

Модель интеллектуального обучающего агента  
с использованием рассуждений на основе здравого смысла.  
Применение в тренажерных технологиях.....110

---

---

CONTENTS

---

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

- Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Ostreinov G.M.***  
The construction of exact solutions of Kadomtsev-Petviashvili  
(KP-2) equation with integrable boundary conditions  
via dibar-dressing method ..... 7

---

TECHNICAL SCIENCES

- Aliferov A.I., Zhulovyan V.V., Morev A.E., Promzelev V.A.***  
Heating of nonmagnetic workpieces of cylindrical and rectangular  
cross section in the magnetic field of rotating permanent magnets ..... 30
- Anosov V.N., Kaveshnikov V.M., Orel E.O.***  
Mathematical description of a power supply source  
for contactless energy supply as a control system element ..... 44
- Artyushenko V.V., Nikulin A.V., Stepanov M.A.***  
Synthesis of an invariant four-point model  
of a surface-distributed object ..... 52
- Zharkov M.A., Sapsalev A.V., Kharitonov S.A.,  
Zinoviev G.S., Zhulovyan V.V.***  
Analysis of the use of damper windings to create  
a starting torque of the three-stage synchronous generator ..... 64

***Kiselev D.S., Kondratyev N.V., Koshkina Yu.I.,  
Vagin D.V., Persova M.G., Soloveichik Yu.G.***

Parameterization of a geoelectrical model in airborne  
electromagnetic problems with applications to complex media  
including topography and varied thickness layers .....77

***Sinitskiy R.E., Dragunov V.P., Rudenko I.E., Koloskov D.B.,  
Dragunova E.V.***

Features of electromechanical interactions in mems with a lateral  
displacement of non-parallel electrodes in the voltage controlled  
mode .....93

***Khabarov V.I., Speshilov K.V.***

A model of an intellectual tutoring agent based on commonsense  
reasoning. Its application in simulator complexes .....110

---

УДК 530.182; 517.957

**ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ  
КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ (КП-2) С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ МЕТОДОМ ДИБАР-ОДЕВАНИЯ****В.Г. Дубровский, А.В. Топовский, Г.М. Остреннов***Новосибирский государственный технический университет*

В данной работе в рамках метода  $\bar{d}$ -одевания Захарова–Манакова развита новая схема точного интегрирования нелинейных двумерных дифференциальных уравнений с интегрируемыми граничными условиями. Получены новые точные солитонные и периодические решения уравнения КП-2 на полуплоскости.

Продемонстрирована принципиальная возможность применения метода  $\bar{d}$ -одевания для построения классов точных солитонных и периодических решений двумерных интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями.

*Ключевые слова:* интегрируемые нелинейные уравнения, метод дибар-одевания, двумерное интегрируемое нелинейное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, интегрируемые граничные условия, солитонные и периодические решения.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-7-29

**Введение**

Пятьдесят лет назад был открыт метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений: метод обратной задачи рассеяния. Интегрируемое нелинейное уравнение при этом представляется как условие совместности соответствующих линейных вспомогательных задач. Ключевая идея, лежащая в основе этого метода – сведение задачи точного интегрирования нелинейных уравнений к решению ряда вспомогательных линейных задач, оказалась необычайно плодотворной. Как оказалось, метод обратной задачи рассеяния применим к широким классам обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, нелинейных уравнений в частных производных, разностных, интегро-дифференциальных и других уравнений.

Многие из нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, такие как уравнение Кортевега–де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение синус-Гордон, уравнение одномерного ферромагнетика Гейзенберга, уравнение резонансного волнового взаимодействия, уравнение Кадомцева–Петвиашвили и другие имеют большую степень универсальности и встречаются в самых разнообразных областях физики. В целом нелинейные интегрируемые уравнения и их локализованные солитонные решения имеют широкую область применения: от теории гравитации и квантовой теории поля, физики плазмы и нелинейной оптики до гидродинамики и физики твердого тела.

Первоначально метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) был применен к интегрированию одномерных нелинейных эволюционных уравнений с временной и одной пространственной переменной. Сфера применимости МОЗР стремительно расширялась. За последние тридцать пять лет метод обратной задачи рассеяния был обобщен и успешно применен к различным  $2+1$ -мерным нелинейным эволюционным уравнениям с временной и двумя пространственными переменными, таким как

уравнения Кадомцева–Петвиашвили [1, 2], Дэви–Стюардсона [4], уравнение Ишимори [5], уравнения Нижника–Веселова–Новикова [6], система Захарова–Манакова, двумерное обобщение уравнения синус-Гордон и т. д. [7–10].

В настоящее время нелокальная проблема Римана–Гильберта [9],  $\bar{\partial}$ -проблема [10] и более общий метод  $\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова [11–17] являются основными инструментами для построения различных классов точных локализованных решений  $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений:

В данной статье метод  $\bar{\partial}$ -одевания применяется к построению новых точных решений двумерного интегрируемого нелинейного уравнения Кадомцева–Петвиашвили

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x + 3\sigma^2 \partial_x^{-1} u_{yy} = 0 \quad (1)$$

с интегрируемым граничным условием вида

$$(u_{xx} + \sigma u_y) \Big|_{y=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь значение параметра  $\sigma=1$  соответствует уравнению КП-2, случай  $\sigma=i$  соответствует уравнению КП-1; приняты также обозначения:  $\partial_x \equiv \partial/\partial_x$ ,

$\partial_y \equiv \partial/\partial_y \dots$  и  $\partial_x^{-1}$  – оператор, обратный к  $\partial_x$ . Впервые уравнение КП (1) было получено в работе Кадомцева–Петвиашвили [1] из простых физических соображений некоторой двумеризацией уравнения Кортевега де Фриза (КдФ) – добавлением в одномерное уравнение малого поперечного возмущения. Хорошо известно, что уравнение КП-1 может быть представлено как условие совместности линейных вспомогательных задач  $L_1\psi = 0$ ,  $L_2\psi = 0$ , в форме Лакса это условие имеет вид [2, 3]

$$[L_1, L_2] = 0, \quad (3)$$

линейные вспомогательные задачи для уравнения КП имеют вид

$$\begin{aligned} L_1\psi &= \sigma\psi_y - \psi_{xx} + u\psi = 0, \\ L_2\psi &= \psi_t + 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - (3u_x + \sigma\partial_x^{-1}u_y)\psi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В настоящей работе строятся новые точные решения уравнения (1) КП-2 ( $\sigma=1$ ) с интегрируемым граничным условием (2). Данное интегрируемое граничное условие для уравнения КП было установлено в работе Хабибуллина [18]. Интегрируемый характер граничного условия (2) означает совместность этого условия с линейными вспомогательными задачами (4) и, следовательно, возможность применения того или иного варианта метода обратной задачи к построению точных решений с указанным граничным условием. В работах Хабибуллина с сотр. [19, 20] точные решения ряда интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями строились с использованием метода одевания Захарова–Шабата [3], основанного на применении уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко. В настоящей работе, на примере уравнения КП-2, продемонстрирована принципиальная возможность эффективного построения точных решений двумерных интегрируемых нелинейных

уравнений с интегрируемыми граничными условиями в рамках современного варианта метода обратной задачи, метода  $\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова.

Статья организована следующим образом. В первом разделе приводятся основные формулы метода  $\bar{\partial}$ -одевания в применении к построению точных решений с интегрируемым граничным условием (2) уравнения КП (1). Во втором разделе построен класс солитонных решений уравнения КП-2 с интегрируемым граничным условием (2), приведены примеры новых решений из этого класса, отсутствующие среди построенных ранее методом одевания Захарова–Шабата решений в работах Хабибуллина [18]. В третьем разделе построен новый класс периодических решений уравнения КП-2 (1) с интегрируемым граничным условием (2), приведены явные простые примеры точных решений из этого класса. В заключении кратко обсуждаются полученные результаты и перспективы применения метода  $\bar{\partial}$ -одевания к построению точных решений двумерных интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями.

### 1. Основные формулы метода $\bar{\partial}$ -одевания для уравнений КП

Приведем некоторые важные для построения точных решений уравнений КП (1) формулы метода  $\bar{\partial}$ -одевания для уравнений КП (1) (см. детали в [10, 11]).

Сначала для вспомогательной, зависящей от комплексных «спектральных» переменных  $\lambda, \bar{\lambda}$ , волновой функции  $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$  постулируется нелокальная  $\bar{\partial}$ -проблема:

$$\frac{\partial \chi(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = (\chi * R)(\lambda, \bar{\lambda}) = \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad (5)$$

$$d\mu \wedge d\bar{\mu} = -2i d\mu_R d\mu_I,$$

где  $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$  и ядро  $R(\lambda, \bar{\lambda}; \mu, \bar{\mu})$   $\bar{\partial}$ -проблемы являются комплексными скалярными функциями. Фактически, правая часть (5) задает меру отклонения  $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\lambda}} \neq 0$  волновой функции  $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$  от аналитичности в точке  $\lambda$ , причем это отклонение, посредством ядра  $R(\lambda, \bar{\lambda}; \mu, \bar{\mu})$ , определяется всей комплексной плоскостью, отсюда и происходит нелокальный характер  $\bar{\partial}$ -проблемы (5).

Решение  $\bar{\partial}$ -проблемы, т. е. определение  $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$  при заданном ядре  $R(\lambda, \bar{\lambda}; \mu, \bar{\mu})$ , в случае часто используемой канонической нормировки волновой функции

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}) \Big|_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \quad (6)$$

эквивалентно решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}) = 1 + \iint_C \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{2\pi i(\lambda' - \lambda)} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda', \bar{\lambda}') d\mu \wedge d\bar{\mu}. \quad (7)$$

Зависимость ядра  $R$   $\bar{\partial}$ -проблемы от пространственных переменных  $x, y$  и временной переменной  $t$  для уравнения КП-2 (1) имеет вид [10]

$$R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})e^{F(\mu)-F(\lambda)}, \quad (8)$$

где

$$F(\mu) = i\mu x - \mu^2 y + 4i\mu^3 t. \quad (9)$$

Задание зависимости (8) для ядра от пространственно-временных переменных непосредственно связано с построением в рамках метода  $\bar{\partial}$ -одевания линейных вспомогательных задач (4) для уравнений КП, причем волновая функция  $\psi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)$  задач (4) связана с волновой функцией  $\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)$   $\bar{\partial}$ -проблемы (5) следующим образом:

$$\psi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = \chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)e^{F(\lambda)}. \quad (10)$$

Решение нелинейных уравнений КП-2 (1), т.е. определение потенциала  $u(x, y, t)$ , входящего в вспомогательные линейные задачи (3), осуществляется с помощью формулы реконструкции потенциала:

$$u(x, y, t) = 2i\partial_x \chi_{-1}, \quad (11)$$

определяющей  $u(x, y, t)$  через соответствующий коэффициент  $\chi_{-1}$  разложения волновой функции  $\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t)$  в ряд по обратным степеням спектрального параметра  $\lambda$  в окрестности бесконечно удаленной точки  $\lambda = \infty$ :

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = 1 + \frac{\chi_{-1}(x, y, t)}{\lambda} + \frac{\chi_{-2}(x, y, t)}{\lambda^2} + \dots \quad (12)$$

Вычисление точных решений  $u(x, y, t)$  уравнений КП производится посредством определения волновой функции, как решения интегрального уравнения (7) при заданном ядре  $R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})e^{F(\mu)-F(\lambda)}$ .

Необходимый для вычисления  $u$  коэффициент  $\chi_{-1}$  определяется из интегрального уравнения (7):

$$\chi_{-1} = -\iint_C \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}. \quad (13)$$

Широкие классы точных решений КП: солитонных, ламповых и периодических получаются при использовании следующих факторизованных дельта-образных ядер  $R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})$   $\bar{\partial}$ -проблемы (5)–(9):

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{k=1}^N A_k \delta(\mu - \mu_k) \delta(\lambda - \lambda_k), \quad (14)$$

здесь  $(A_k, \mu_k, \lambda_k)$ ,  $(k = 1, \dots, N)$  – некоторые фиксированные, вообще говоря, комплексные константы-параметры.

Подстановка (14) в уравнение (7) дает волновую функцию

$$\chi(\lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = 1 + \frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\lambda_k - \lambda} \chi(\mu_k) e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)} \quad (15)$$

и соответствующий коэффициент разложения  $\chi_{-1}$ :

$$\chi_{-1}(x, y, t) = -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \chi(\mu_k) e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)}. \quad (16)$$

Выбор ядра  $R_0$  в форме (14) приводит к простой полюсной зависимости (15) волновой функции по спектральной переменной  $\lambda$ , полюсы волновой функции задаются набором  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ . Таким образом, строящиеся по формуле реконструкции  $u(x, y, t) = 2i\partial_x \chi_{-1}$  решения, соответствующие выбору ядра  $R_0$  в виде (14), характеризуются полюсами волновой функции, а также соответствующими вычетами функции в указанных полюсах. Набор  $(A_k, \mu_k, \lambda_k)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) задает, как говорят, спектральную характеристику строящихся решений.

Из (11), (15) и (16) получаем известную детерминантную формулу для точных решений уравнений КП:

$$u = 2i \frac{\partial}{\partial x} \chi_{-1} = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln \det B). \quad (17)$$

Вывод формулы (17) приведен в приложении.

При вычислении точных решений уравнения КП необходимо удовлетворить следующим условиям.

1. Условию вещественности

$$\overline{u(x, y, t)} = u(x, y, t). \quad (18)$$

2. Граничному условию

$$(u_{xx} + \sigma u_y) \Big|_{y=0} = 2i(\chi_{-1xxx} + \sigma \chi_{-1xy}) \Big|_{y=0} = 0. \quad (19)$$

3. При вычислении периодических решений необходимо удовлетворить и условию мнимости фазы  $F(\mu) - F(\lambda)$  входящей в определение ядра  $\bar{\partial}$ -проблемы, т. е. условию

$$\overline{F(\mu) - F(\lambda)} = -(F(\mu) - F(\lambda)). \quad (20)$$

Последнее условие означает использование осциллирующих экспонент  $e^{F(\mu) - F(\lambda)}$  в ядре  $\bar{\partial}$ -проблемы, что, следовательно, приводит к возможности построения периодических решений в рамках метода  $\bar{\partial}$ -одевания.

Условие вещественности для решений уравнений КП приводит к следующим ограничениям на ядро  $R_0$  [10]:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(\bar{\lambda}, \lambda; \bar{\mu}, \mu)} \quad \text{КП-1}, \quad (21)$$

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)}. \quad (22)$$

Условие мнимости фазы  $F(\mu) - F(\lambda)$  в случае КП-2 имеет вид

$$\begin{aligned} & -i(\bar{\mu} - \bar{\lambda})x - y(\bar{\mu}^2 - \bar{\lambda}^2) - 4i(\bar{\mu}^3 - \bar{\lambda}^3)t = \\ & = -i(\mu - \lambda)x + y(\mu^2 - \lambda^2) - 4i(\mu^3 - \lambda^3)t, \end{aligned}$$

последнее равенство удовлетворяется, например, при выборе

$$\mu = -\bar{\lambda}. \quad (23)$$

В последующих разделах будет показано, как перечисленным выше условиям можно удовлетворить при соответствующем выборе ядра  $R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})$  при построении различных классов точных решений (солитонных и периодических) уравнения КП-2 с интегрируемыми граничными условиями (24).

Граничное условие (19) с учетом (13) в пределе слабых полей ( $\chi \approx 1$ ) приводит к соотношению

$$(u_{xx} + \sigma u_y) \Big|_{y=0} = \frac{8i}{\pi} \partial_x^2 \left( \iint_C d\lambda_R d\lambda_I \iint_C R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \mu e^{F(\mu) - F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad (24)$$

которое следует удовлетворить подходящим выбором ядра  $R_0$ . Условие вещественности дает дополнительное ограничение на ядро  $\bar{\partial}$ -проблемы, в случае КП-2 оно имеет вид

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)}. \quad (25)$$

Ниже будет показано, что оба условия (11) и (12) или (14) и (13) для уравнения КП-2 с  $F(\mu) = i\mu x + y\mu^2 + 4i\mu^3 t$  можно удовлетворить для ядер  $R_0$  вида:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \lambda) = \sum_i (\pi a_{1i} \delta(\mu - \mu_{1i}) \delta(\lambda - \lambda_{1i}) + \pi a_{2i} \delta(\mu - \mu_{2i}) \delta(\lambda - \lambda_{2i})), \quad (26)$$

содержащих пары согласованных друг с другом слагаемых с соответствующим образом подобранными параметрами  $(a_{1i}, \mu_{1i}, \lambda_{1i})$  и  $(a_{2i}, \mu_{2i}, \lambda_{2i})$ . Таким образом, условие вещественности и интегрируемое граничное условие удовлетворяются подходящим выбором констант.

Сформулированная процедура может быть с успехом применена в рамках метода  $\bar{\partial}$ -одевания и для других двумерных интегрируемых нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями (совместимыми со вспомогательными линейными задачами), что является предметом дальнейших исследований.

## 2. Солитонные решения уравнения КП-2 с интегрируемыми граничным условием

### 2.1. Первый пример точного решения с интегрируемыми границами

При построении точных решений уравнения КП-2 необходимо удовлетворить условию вещественности  $\overline{u(x, y, t)} = u(x, y, t)$  или в терминах ядра  $R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \lambda)$  условию

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)} \quad (27)$$

и интегрируемому граничному условию  $(u_{xx} + \sigma u_y)|_{y=0} = 0$ , или в терминах ядра  $R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda})$   $\bar{\partial}$ -проблемы, условию:

$$\left( \iint_C d\lambda_R d\lambda_I \iint_C R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \mu e^{F(\mu) - F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I \right) \Big|_{y=0} = 0. \quad (28)$$

Покажем, как этого можно достичь, используя факторизованные, дельта-функциональные ядра  $R_0$ :

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{k=1}^N a_k \delta(\mu - \mu_k) \delta(\lambda - \lambda_k). \quad (29)$$

Начнем с простейшего ядра с одним слагаемым

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = a_k \delta(\mu - \mu_k) \delta(\lambda - \lambda_k). \quad (30)$$

Очевидно, для такого слагаемого

$$\begin{aligned} \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)} &= \bar{a}_k \delta(-\bar{\mu} - \mu_k) \delta(-\bar{\lambda} - \lambda_k) = \\ &= \bar{a}_k \delta(\mu + \bar{\mu}_k) \delta(\lambda + \bar{\lambda}_k). \end{aligned} \quad (31)$$

Условию вещественности (27) можно для ядра (30) удовлетворить, потребовав, чтобы

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= a_k, \\ \mu_k &= -\bar{\mu}_k = i\mu_{k0}, \quad \bar{\mu}_{k0} = \mu_{k0}, \\ \lambda_k &= -\bar{\lambda}_k = i\lambda_{k0}, \quad \bar{\lambda}_{k0} = \lambda_{k0}. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, ядра вида (29) с вещественными  $\bar{a}_k = a_k$  и чисто мнимыми  $\mu_k = i\mu_{k0}$ ,  $\lambda_k = i\lambda_{k0}$ , т. е. ядра

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{k=1}^N a_k \delta(\mu - i\mu_{k0}) \delta(\lambda - i\lambda_{k0}) \quad (33)$$

удовлетворяют условию (27), при выполнении которого решение  $u$  вещественно. Для удовлетворения второго условия (28) воспользуемся следующим наблюдением. Фаза  $F(\mu) - F(\lambda)$  в экспоненте условия (28) имеет вид

$$(F(\mu) - F(\lambda)) \Big|_{y=0} = i(\mu - \lambda)x + 4i(\mu^3 - \lambda^3)t \quad (34)$$

и не изменяется при замене переменных в интегралах (28) типа инволюции

$$\mu \rightarrow -\bar{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow -\bar{\mu}. \quad (35)$$

При такой замене подынтегральное выражение (28) переводит в следующее:

$$\begin{aligned} &\left( R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \mu e^{F(\mu) - F(\lambda)} \right) \Big|_{y=0} \xrightarrow[\mu \rightarrow -\bar{\lambda}]{\lambda \rightarrow -\bar{\mu}} \\ &\rightarrow \left( R_0(-\bar{\lambda}, -\bar{\bar{\lambda}}; -\bar{\mu}, -\bar{\bar{\mu}}) (-\bar{\lambda}) e^{F(\mu) - F(\lambda)} \right) \Big|_{y=0}, \end{aligned} \quad (36)$$

поэтому каждому слагаемому ядра (33)

$$a_k \delta(\mu - i\mu_{k0}) \delta(\lambda - i\lambda_{k0}) \rightarrow b_k \delta(-\lambda - i\lambda_{k0}) \delta(-\mu - i\lambda_{k0})$$

можно сопоставить еще дополнительное слагаемое типа

$$b_k \delta(\mu + i\lambda_{k0}) \delta(\lambda + i\mu_{k0}), \quad \bar{b}_k = b_k \quad (37)$$

и удвоить число слагаемых в ядре (33), рассматривая более общее ядро вида

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \lambda) = \sum_{k=1}^N \left( (a_k \delta(\mu - i\mu_{k0}) \delta(\lambda - i\lambda_{k0}) + b_k \delta(\mu + i\lambda_{k0}) \delta(\lambda + i\mu_{k0})) \right). \quad (38)$$

В силу указанного наблюдения (36) каждой паре слагаемых с амплитудами  $a_k$  и  $b_k$  при подстановке (38) в (28) будет соответствовать одна и та же экспонента в обоих слагаемых пары

$$e^{F(i\mu_{k0}) - F(i\lambda_{k0})} \Big|_{y=0} = e^{F(-i\lambda_{k0}) - F(-i\mu_{k0})} \Big|_{y=0} \quad (39)$$

с показателем

$$\begin{aligned} F(i\mu_{k0}) - F(i\lambda_{k0}) &= F(-i\lambda_{k0}) - F(-i\mu_{k0}) = \\ &= (\lambda_{k0} - \mu_{k0})x - 4(\lambda_{k0}^3 - \mu_{k0}^3)t = \Phi_k(x, t), \end{aligned} \quad (40)$$

тогда условие (28) можно удовлетворить при следующем выборе амплитуд  $a_k$  и  $b_k$ :

$$b_k = \frac{\mu_{k0}}{\lambda_{k0}} a_k. \quad (41)$$

Итак, в силу (32) и (41) условие вещественности и интегрируемое граничное условие удовлетворяются для ядер вида

$$\begin{aligned} R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \lambda) &= \sum_{k=1}^N \left( a_k \delta(\mu - i\mu_{k0}) \delta(\lambda - i\lambda_{k0}) + a_k \frac{\mu_{k0}}{\lambda_{k0}} \delta(\mu + i\lambda_{k0}) \delta(\lambda + i\mu_{k0}) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{2N} A_k \delta(\mu - iM_{k0}) \delta(\lambda - i\Lambda_{k0}). \end{aligned} \quad (42)$$

В последнем выражении введены наборы амплитуд

$$(A_1, \dots, A_N; A_{N+1}, \dots, A_{2N}) = \left( a_1, \dots, a_N; a_1 \frac{\mu_{k0}}{\lambda_{k0}}, \dots, a_N \frac{\mu_{k0}}{\lambda_{k0}} \right) \quad (43)$$

и соответствующие этим амплитудам наборы точек комплексной плоскости:

$$\begin{aligned} (M) : (M_1, \dots, M_N; M_{N+1}, \dots, M_{2N}) &= (i\mu_{10}, \dots, i\mu_{N0}; -i\lambda_{10}, \dots, -i\lambda_{N0}), \\ (\Lambda) : (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N; \Lambda_{N+1}, \dots, \Lambda_{2N}) &= (i\lambda_{10}, \dots, i\lambda_{N0}; -i\mu_{10}, \dots, -i\mu_{N0}). \end{aligned} \quad (44)$$

Для решения  $u(x, y, t)$  справедлива детерминантная формула, доказанная во втором разделе:

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln(\det B)), \quad (45)$$

с очевидной заменой набора амплитуд  $(A_1, \dots, A_N) \rightarrow (A_1, \dots, A_{2N})$  и точек  $(\mu_1, \dots, \mu_N) \rightarrow (M_1, \dots, M_{2N})$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \rightarrow (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2N})$ . В точках  $M_k$  берутся волновые функции  $\chi(M_k, \bar{M}_k)$ , нужные для вычисления  $\chi_{-1}$ , точки же  $\Lambda_k$  соответствуют полюсам  $\frac{1}{\Lambda_k - \lambda}$  волновой функции  $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$ .

В простейшем случае  $N = 1$  двух слагаемых ядра  $R_0$  (42):

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = a_1 \delta(\mu - i\mu_{10}) \delta(\lambda - i\lambda_{10}) + a_1 \frac{\mu_{10}}{\lambda_{10}} \delta(\mu + i\lambda_{10}) \delta(\lambda + i\mu_{10}) \quad (46)$$

вычисления по формулам раздела 2 дают следующее выражение для  $\det B$ :

$$\begin{aligned} \det B = & 1 - 2e^{\Phi(x, y)} \frac{a_1(\lambda_{10}e^{\Theta(y)} + \mu_{10}e^{-\Theta(y)})}{\pi\lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10})} + \\ & + e^{2\Phi(x, y)} \frac{a_1^2(\lambda_{10} + \mu_{10})^2}{\pi^2\lambda_{10}^2(\lambda_{10} - \mu_{10})^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= (\lambda_{10} - \mu_{10})x - 4(\lambda_{10}^3 - \mu_{10}^3)t, \\ \Theta(y) &= -(\lambda_{10}^2 - \mu_{10}^2)y \end{aligned} \quad (48)$$

Соответствующее решение  $u(x, y, t)$  уравнения КП-2 имеет вид

$$u(x, y, t) = \frac{4(\lambda_{10} - \mu_{10})^2 (d_{\Theta} (1 + d_0^2 e^{2\Phi}) - 2d_0^2 e^{\Phi}) e^{\Phi}}{(1 + d_0^2 e^{2\Phi} - 2e^{\Phi} d_{\Theta})^2}, \quad (49)$$

где введены параметры

$$d_0 = \frac{a_1(\lambda_{10} + \mu_{10})}{\pi\lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10})}, \quad d_{\Theta} = \frac{a_1(\lambda_{10}e^{\Theta} + \mu_{10}e^{-\Theta})}{\pi\lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10})}. \quad (50)$$

Очевидно, что  $d_{\Theta}|_{y=0} = d_0$ , при этом решение уравнения КП-2 в полуплоскости  $y \geq 0$ , на границе  $y = 0$  этой области удовлетворяет интегрируемому граничному условию

$$(u_{xx} + \sigma u_y)|_{y=0} = 0, \quad (51)$$

двумерное солитонное решение (50) при этом превращается в одномерный солитон

$$u(x, y, t)|_{y=0} = \frac{4(\lambda_{10} - \mu_{10})^2 e^{\Phi} d_0}{(1 - d_0 e^{\Phi})^2} = -\frac{(\lambda_{10} - \mu_{10})^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\Phi + \Phi_0}{2}}, \quad (52)$$

$$d_0 = \frac{a_1(\lambda_{10} + \mu_{10})}{\pi\lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10})} \doteq -e^{\Phi_0}. \quad (53)$$

Полученное солитонное решение (49), очевидно, несингулярно при следующем выборе параметров  $a_{10}, \mu_{10}, \lambda_{10}$ :

$$\begin{aligned} a_1\lambda_{10} < 0, \quad a_1\mu_{10} < 0, & \quad \text{или} & \quad a_1\lambda_{10} > 0, \quad a_1\mu_{10} > 0, \\ \lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10}) > 0 & & \lambda_{10}(\lambda_{10} - \mu_{10}) < 0. \end{aligned} \quad (54)$$

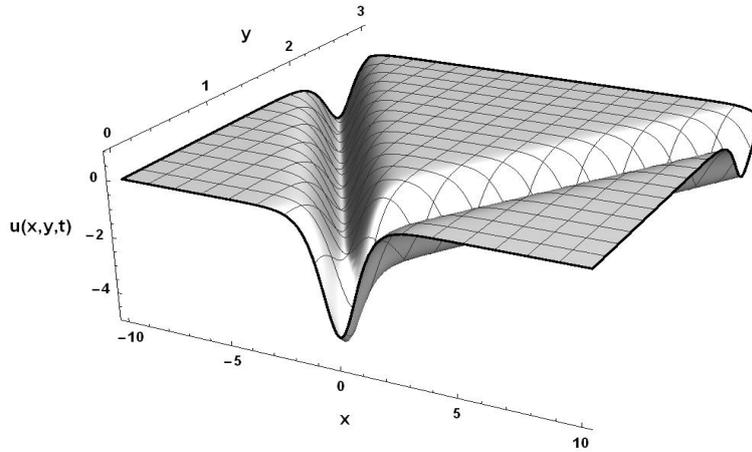


Рис. 1. – Решение (49). Значения параметров:

$$\lambda_{10} = 1, \quad \mu_{10} = 3, \quad a_1 = 1$$

Fig. 1 – Solution (49). Parameter values:

$$\lambda_{10} = 1, \quad \mu_{10} = 3, \quad a_1 = 1$$

Для обоих указанных выборов (54)  $d_0 \doteq -e^{\Phi_0} < 0$  и одномерный солитон (52) также несингулярен.

## 2.2. Второй пример точного решения КП-2 с интегрируемыми границами.

Второй пример точного многосолитонного решения КП-2 с интегрируемым граничным условием (58) построим для ядра вида

$$\begin{aligned} R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) &= \\ &= \sum_k (a_k \delta(\mu - \mu_k) \delta(\lambda - \bar{\mu}_k) + \bar{a}_k \delta(\mu + \bar{\mu}_k) \delta(\lambda + \mu_k)), \end{aligned} \quad (55)$$

состоящего из пар слагаемых типа (29) и (31) с  $\lambda_k = \bar{\mu}_k$ . Такое ядро, очевидно, по построению, проведенному в начале раздела, удовлетворяет условию вещественности

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)}. \quad (56)$$

Интегрируемое граничное условие, как было показано в разделе 1, выполняется при условии

$$(u_{xx} + \sigma u_y) \Big|_{y=0} = \frac{8i}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \iint_C d\lambda_R d\lambda_I \iint_C R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \mu e^{F(\mu) - F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I \right) \Big|_{y=0} = 0 \quad (57)$$

и может быть удовлетворено при следующем требовании:

$$\iint_C d\mu_R d\mu_I \iint_C d\lambda_R d\lambda_I R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \mu e^{F(\mu) - F(\lambda)} \Big|_{y=0} = 0. \quad (58)$$

Для любой пары слагаемых ядра  $R_0$  вида

$$a_k \delta(\mu - \mu_k) \delta(\lambda - \bar{\mu}_k) + \bar{a}_k \delta(\mu + \bar{\mu}_k) \delta(\lambda + \mu_k) \quad (59)$$

подстановка (59) в (58) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & a_k \mu_k e^{F(\mu_k) - F(\bar{\mu}_k)} - \bar{a}_k \bar{\mu}_k e^{F(-\bar{\mu}_k) - F(-\mu_k)} \Big|_{y=0} = \\ & = (a_k \mu_k - \bar{a}_k \bar{\mu}_k) e^{\Phi_k(x,t) + i\Theta_k(y)} \Big|_{y=0} = (a_k \mu_k - \bar{a}_k \bar{\mu}_k) e^{\Phi_k(x,t)}, \end{aligned} \quad (60)$$

здесь

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, t) + i\Theta_k(y) &= i(\mu_k - \bar{\mu}_k)x + 4i(\mu_k^3 - \bar{\mu}_k^3)t - (\mu_k^2 - \bar{\mu}_k^2)y = \\ &= -2\mu_{kI}x - 8\mu_{kI} \left( 3\mu_{kR}^2 - \mu_{kI}^2 \right) t - 4i\mu_{kI}\mu_{kR}y, \end{aligned}$$

т. е.

$$\Phi_k(x, t) = -2\mu_{kI}x - 8\mu_{kI} \left( 3\mu_{kR}^2 - \mu_{kI}^2 \right) t, \quad \Theta_k(y) = -4\mu_{kI}\mu_{kR}y. \quad (61)$$

Из (60) заключаем, что интегрируемое граничное условие удовлетворяется при

$$a_k \mu_k - \bar{a}_k \bar{\mu}_k = 0 \Rightarrow \frac{a_k}{\bar{\mu}_k} = \frac{\bar{a}_k}{\mu_k} = b_k = \bar{b}_k, \quad (62)$$

или  $a_k = b_k \bar{\mu}_k$ ,  $\bar{a}_k = b_k \mu_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), т. е. для ядер  $R_0$  вида (55) с вещественными амплитудами  $\bar{b}_k = b_k$

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \sum_k (b_k \bar{\mu}_k \delta(\mu - \mu_k) \delta(\lambda - \bar{\mu}_k) + b_k \mu_k \delta(\mu + \bar{\mu}_k) \delta(\lambda + \mu_k)). \quad (63)$$

Для применения общей детерминантной формулы  $u(x, y, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln(\det B))$  вводим очевидным образом наборы точек комплексной плоскости  $\lambda$ , набор  $(\Lambda)$ , соответствующий полюсам  $\lambda = \Lambda_k$  строящейся волновой функции  $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$ :

$$(\Lambda) : (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2N}) = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_N, -\mu_1, \dots, -\mu_N) \quad (64)$$

и точек

$$(M) : (M_1, \dots, M_{2N}) = (\mu_1, \dots, \mu_N, -\bar{\mu}_1, \dots, -\bar{\mu}_N), \quad (65)$$

в которых в методе  $\bar{\partial}$ -одевания вычисляются волновые функции  $\chi(M_k, \bar{M}_k)$ . Набором точек (64) и (65), в силу (63), соответствует ядро  $R_0$ :

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{k=1}^{2N} A_k \delta(\mu - M_k) \delta(\lambda - \Lambda_k). \quad (66)$$

Многосолитонное решение, соответствующее ядру (72), как было показано в первом разделе, дается простой детерминантной формулой (17) с матрицей  $B$ , задаваемой выражением

$$\begin{aligned} B_{lk} &= e^{F(\mu_k)} \left( \delta_{lk} - \frac{2i}{\pi} \frac{A_k}{\lambda_k - \mu_l} e^{F(\mu_l) - F(\lambda_k)} \right) e^{-F(\mu_l)} = \\ &= e^{F(\mu_k)} C_{lk} e^{-F(\mu_l)}. \end{aligned} \quad (67)$$

Строящееся точное решение, как было показано, удовлетворяет условию вещественности и интегрируемому граничному условию.

В простейшем случае  $N=1$  одной пары слагаемых в ядре (63), т. е. для ядра вида

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = b_1 \bar{\mu}_1 \delta(\mu - \mu_1) \delta(\lambda - \bar{\mu}_1) + b_1 \mu_1 \delta(\mu + \bar{\mu}_1) \delta(\lambda + \mu_1) \quad (\bar{b}_1 = b_1). \quad (68)$$

После простых вычислений получается следующее выражение для  $\det B$ :

$$\begin{aligned} \det B &= 1 + \frac{2b_k e^{\Phi(x,t)}}{\pi \mu_I} (\mu_R \cos \Theta(y) + \mu_I \sin \Theta(y)) + \frac{b_1^2 \mu_R^2 e^{2\Phi(x,t)}}{\pi^2 \mu_I^2} = \\ &= 1 + d_0^2 e^{2\Phi(x,t)} + 2d_\Theta e^{\Phi(x,t)}, \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,t) &= -2\mu_{1I} x - 8\mu_{1I} (3\mu_{1R}^2 - \mu_{1I}^2) t, \quad \Theta_1(y) = -4\mu_{1I} \mu_{1R} y \\ \text{и } d_0 &= \frac{b_1 \mu_{1R}}{\pi \mu_{1I}}, \quad d_\Theta = \frac{b_1}{\pi \mu_{1I}} (\mu_{1R} \cos \Theta_1(y) + \mu_{1I} \sin \Theta_1(y)). \end{aligned} \quad (70)$$

Из (17) и (69) определяем решение уравнения КП-2:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{-16\mu_I^2 e^\Phi}{(\det B)^2} (d_\Theta + 2d_0^2 e^\Phi + d_0^2 d_\Theta e^{2\Phi}) = \\ &= \frac{-16\mu_I^2 e^\Phi (d_\Theta + 2d_0^2 e^\Phi + d_0^2 d_\Theta e^{2\Phi})}{(1 + d_0^2 e^{2\Phi(x,t)} + 2d_\Theta e^{\Phi(x,t)})^2}. \end{aligned} \quad (71)$$

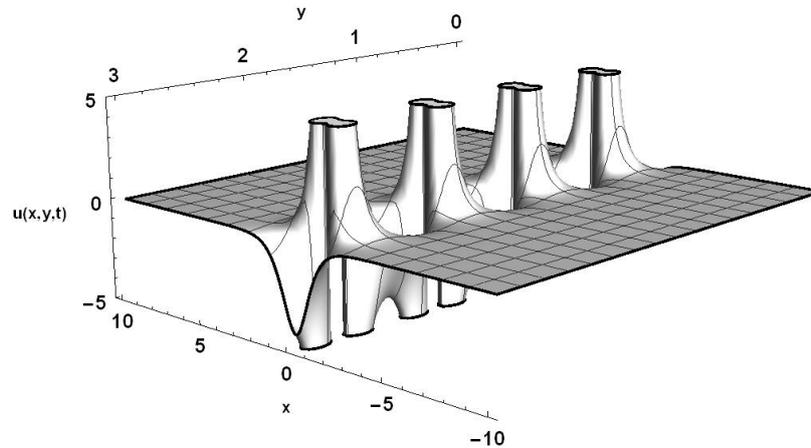


Рис. 2. – Сингулярное решение (71). Параметры:

$$\mu_R = 2, \mu_I = 1, b_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Fig. 2 – Singular solution (71). Parameter values:

$$\mu_R = 2, \mu_I = 1, b_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

При  $y = 0$ , т. е. на границе области  $y \geq 0$ , решение сводится к одномерному несингулярному солитону:

$$u(x, y, t) = \frac{-16\mu_I^2 e^{\Phi} d_0}{(1 + d_0 e^{\Phi})^2} = \frac{-4\mu_I^2}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\Phi + \varphi_0}{2}\right)}, \quad (72)$$

здесь для обеспечения несингулярности солитона (77) положено

$$d_0 = \frac{b_1 \mu_{1R}}{\pi \mu_{1I}} \doteq e^{\varphi_0} > 0. \quad (73)$$

Построенное решение (71), очевидно, является периодическим по  $y$  и распространяется вдоль оси  $x$ , сохраняя свою форму, со скоростью

$$V_x = 4\left(\mu_{1I}^2 - 3\mu_{1R}^2\right), \quad (74)$$

это решение является сингулярным и при выполнении условия (73) на границе  $y = 0$  сводится к одномерному несингулярному солитону (72).

### 3. Периодические решения уравнений КП-2 с интегрируемыми граничными условиями

При построении периодических решений уравнения КП-2 с интегрируемыми граничными условиями удовлетворим сначала условию мнимости фазы  $F(\mu) - F(\lambda)$ , входящей в уравнение  $\bar{\partial}$ -проблемы для волновой функции  $\chi(\lambda, \bar{\lambda})$ .

Учитывая определение  $F(\mu, \lambda) = i\mu x - \mu^2 y + 4i\mu^3 t$ , имеем:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta F(\mu, \lambda)} &= -i(\bar{\mu} - \bar{\lambda})x - (\bar{\mu}^2 - \bar{\lambda}^2)y - 4i(\bar{\mu}^3 - \bar{\lambda}^3)t = \\ &= -\Delta F(\mu, \lambda) = -i(\mu - \lambda)x + (\mu^2 - \lambda^2)y - 4i(\mu^3 - \lambda^3)t,\end{aligned}\quad (75)$$

$$\Rightarrow \bar{\mu}^2 = \lambda^2, \bar{\mu} = -\lambda. \quad (76)$$

При выполнении условия  $\bar{\mu} = -\lambda$  имеем для фазы  $F(\mu) - F(\lambda) = F(-\bar{\lambda}) - F(\lambda)$  следующее выражение:

$$\begin{aligned}F(-\bar{\lambda}) - F(\lambda) &= i(-\bar{\lambda} - \bar{\lambda})x - (\bar{\lambda}^2 - \lambda^2)y + 4i(-\bar{\lambda}^3 - \lambda^3)t = \\ &= -2i\lambda_R x - 2 \cdot 4i\lambda_R \left( \lambda_R^2 - 3\lambda_I^2 \right) t + 4i\lambda_R \lambda_I y = i\Phi(x, t) + i\Theta(y).\end{aligned}\quad (77)$$

Аналогично для фазы  $F(-\lambda) - F(\bar{\lambda})$  получаем

$$\begin{aligned}F(-\lambda) - F(\bar{\lambda}) &= i(-\lambda - \bar{\lambda})x - (\lambda^2 - \bar{\lambda}^2)y + 4i(-\lambda^3 - \bar{\lambda}^3)t = \\ &= i\Phi(x, t) - i\Theta(y).\end{aligned}\quad (78)$$

В (77) и (78) введены обозначения:

$$\Phi(x, t) \doteq -2\lambda_R x - 8\lambda_R \left( \lambda_R^2 - 3\lambda_I^2 \right) t, \quad \Theta(y) = 4\lambda_R \lambda_I y. \quad (79)$$

Подчеркнем, что желая получить периодические решения, мы придерживаемся выполнения условия мнимости фазы  $F(\mu) - F(\lambda)$ , откуда и следует (76) и выражения (77) и (78).

Удовлетворим теперь интегрируемому граничному условию

$$\begin{aligned}(u_{xx} + \sigma u_y) \Big|_{y=0} &= \\ &= \frac{8i}{\pi} \partial_x^2 \left( \iint_C d\lambda_R d\lambda_I \iint_C R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \mu e^{F(\mu) - F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I \right) \Big|_{y=0} = 0.\end{aligned}\quad (80)$$

Интегрируемое граничное условие  $(u_{xx} + \sigma u_y) \Big|_{y=0}$ , в силу (80), может быть удовлетворено при выполнении соотношения

$$\iint_C d\lambda_R d\lambda_I \iint_C R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) \mu e^{F(\mu) - F(\lambda)} d\mu_R d\mu_I \Big|_{y=0} = 0. \quad (81)$$

Как уже отмечалось в разделе 2, фаза  $(F(\mu) - F(\lambda)) \Big|_{y=0}$  не изменяется при инволюции  $\mu \rightarrow -\lambda, \lambda \rightarrow -\mu$ , поэтому требование (81) можно удовлетворить, выбирая ядро  $R_0$  в виде суммы двух слагаемых:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = b_1 \delta(\mu + \bar{\lambda}_1) \delta(\lambda - \lambda_1) + b_2 \delta(\mu + \lambda_1) \delta(\lambda - \bar{\lambda}_1). \quad (82)$$

Каждое из слагаемых, в силу отмеченной инволюции, приводит к одной и той же экспоненте

$$e^{F(-\bar{\lambda}_1)-F(\lambda_1)} \Big|_{y=0} = e^{F(-\lambda_1)-F(\bar{\lambda}_1)} \Big|_{y=0} = e^{i\Phi(x,t)}. \quad (83)$$

Условие (81) при этом дает

$$(-b_1\bar{\lambda}_1 - b_2\lambda_1)e^{i\Phi(x,t)} \Big|_{y=0} = 0, \quad (84)$$

откуда получаем соотношение между константами  $b_1, b_2$

$$b_2 = -b_1 \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1}. \quad (85)$$

Итак, для ядер  $R_0$  вида

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \sum_k \left( b_k \delta(\mu + \bar{\lambda}_k) \delta(\lambda - \lambda_k) - b_k \frac{\bar{\lambda}_k}{\lambda_k} \delta(\mu + \lambda_k) \delta(\lambda - \bar{\lambda}_k) \right) \quad (86)$$

интегрируемое граничное условие  $(u_{xx} + \sigma u_y) \Big|_{y=0}$ , в силу выполнения условий (85), и, следовательно, условия (81) удовлетворяется. Вводя наборы точек комплексной плоскости  $\lambda$

$$\begin{aligned} (M): (M_1, \dots, M_N; M_{N+1}, \dots, M_{2N}) &= (-\bar{\lambda}_1, \dots, -\bar{\lambda}_N; -\lambda_1, \dots, \lambda_N), \\ (\Lambda): (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N; \Lambda_{N+1}, \dots, \Lambda_{2N}) &= (\lambda_1, \dots, \lambda_N; \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_N) \end{aligned} \quad (87)$$

и набор соответствующих амплитуд

$$(A): (A_1, \dots, A_N; A_{N+1}, \dots, A_{2N}) = \left( b_1, \dots, b_N; -b_1 \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1}, \dots, -b_N \frac{\bar{\lambda}_N}{\lambda_N} \right), \quad (88)$$

получаем класс точных периодических решений КП-2 в виде простой детерминантной формулы

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln(\det B)) \quad (89)$$

с матрицей  $B$  вида

$$B_{lk} = e^{F(\mu_k)} \left( \delta_{lk} - \frac{2i}{\pi} \frac{A_k}{\lambda_k - \mu_l} e^{F(\mu_l) - F(\lambda_k)} \right) e^{-F(\mu_l)}, \quad (k, l = 1, \dots, 2N). \quad (90)$$

Этот класс периодических решений уравнения КП, удовлетворяющих интегрируемому граничному условию  $(u_{xx} + \sigma u_y) \Big|_{y=0} = 0$ , соответствует по построению ядру (82) или в терминах (87), (88) ядру

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{k=1}^{2N} A_k \delta(\mu - M_k) \delta(\lambda - \Lambda_k). \quad (91)$$

Строящиеся рассматриваемым способом решения являются пока комплексными, так как условие вещественности еще не удовлетворено.

Условию вещественности периодических решений  $u(x, y, t)$  можно удовлетворить на заключительном этапе построения решений прямым требованием вещественности:

$$\overline{u(x, y, t)} = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\ln(\det B)] = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\ln(\det B)] = u(x, y, t). \quad (92)$$

Продемонстрируем это на простом примере с одной парой слагаемых ( $N = 1$ ) в ядре (86):

$$\begin{aligned} R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \lambda) &= b_1 \delta(\mu + \bar{\lambda}_1) \delta(\lambda - \lambda_1) - b_1 \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1} \delta(\mu + \lambda_1) \delta(\lambda - \bar{\lambda}_1) = \\ &= A_1 \delta(\mu - M_1) \delta(\lambda - \Lambda_1) + A_2 \delta(\mu - M_2) \delta(\lambda - \Lambda_2). \end{aligned} \quad (93)$$

Вычисления по общим формулам раздела 2 дают следующее выражение для  $\det B$ :

$$\det(B) = 1 + \frac{b_1^2 \bar{\lambda}_1 \lambda_{1I}^2 e^{2i\Phi(x, t)}}{\pi^2 \lambda_1 \lambda_{1R}^2 |\lambda_1|^2} - \frac{ib_1 e^{i(\Phi + \Theta(y))}}{\pi \lambda_{1R}} + \frac{ib_1 \bar{\lambda}_1 e^{i(\Phi - \Theta(y))}}{\pi \lambda_{1R} \lambda_1}. \quad (94)$$

Вводя обозначения

$$b_1 = |b_1| e^{i\phi_a} = a e^{i\phi_a}, \quad \lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\phi_\lambda}, \quad \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1| e^{-i\phi_\lambda}, \quad (95)$$

перепишем (95) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \det(B) &= e^{i(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a)} \times \\ &\times \left\{ e^{-i(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a)} + \frac{a^2 \lambda_{1I}^2 e^{i(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a)}}{\pi^2 \lambda_{1R}^2 |\lambda_1|^2} + \frac{2a \sin(\Theta(y) + \phi_\lambda)}{\pi \lambda_{1R}} \right\}. \end{aligned} \quad (96)$$

Потребуем также, чтобы выполнялось соотношение

$$a^2 = \frac{\pi^2 \lambda_{1R}^2 |\lambda_1|^2}{\lambda_{1I}^2} \Rightarrow a = \pi |\lambda_1| \frac{\lambda_{1R}}{\lambda_{1I}}. \quad (97)$$

Кроме того, напомним, что согласно (77), (78) фазы  $\Phi, \Theta$  даются выражениями:

$$\Phi(x, t) = -2\lambda_{1R}x - 8\lambda_{1R} \left( \lambda_{1R}^2 - 3\lambda_{1I}^2 \right) t, \quad \Theta(y) = 4\lambda_{1R} \lambda_{1I} y. \quad (98)$$

В результате проведенных вычислений выражение для  $\det(B)$  приобретает максимально овеществленный вид

$$\det(B) = 2e^{i(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a)} \left\{ \cos(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a) + \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{1I}} \sin(\Theta(y) + \phi_\lambda) \right\}, \quad (99)$$

при этом

$$\begin{aligned} \ln(\det(B)) &= i(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a) + \ln 2 \left( \cos(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a) + \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{1I}} \sin(\Theta(y) + \phi_\lambda) \right) = \\ &= i(\Phi - \phi_\lambda + \phi_a) + \ln(\det(\tilde{B})). \end{aligned} \quad (100)$$

Первое слагаемое в (100) линейно по фазе  $\Phi$  и в (98) не дает вклада в решение, второе же слагаемое после вычислений по формуле (89) приводит к следующему выражению для вещественного периодического решения  $u(x, y, t)$  уравнения КП-2 с интегрируемыми граничными условиями  $(u_{xx} + \sigma u_y)|_{y=0} = 0$ :

$$u(x, y, t) = \frac{8\lambda_{1R}^2 \left( 1 + \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{1I}} \sin(\Theta(y) + \phi_\lambda) \cos(\Phi(x, t) + \phi_a - \phi_\lambda) \right)}{\left( \frac{|\lambda_1|}{\lambda_{1I}} \sin(\Theta(y) + \phi_\lambda) + \cos(\Phi(x, t) + \phi_a - \phi_\lambda) \right)^2}. \quad (101)$$

На границе  $y = 0$  области  $y \geq 0$  построенное решение (102) принимает вид одномерного периодического решения

$$\begin{aligned} u(x, t) \doteq u(x, y, t)|_{y=0} &= \frac{8\lambda_R^2}{1 + \cos(\Phi(x, t) + \phi_a - \phi_\lambda)} = \\ &= \frac{4\lambda_R^2}{\cos^2\left(\frac{\Phi(x, t) - \phi_\lambda + \phi_a}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (102)$$

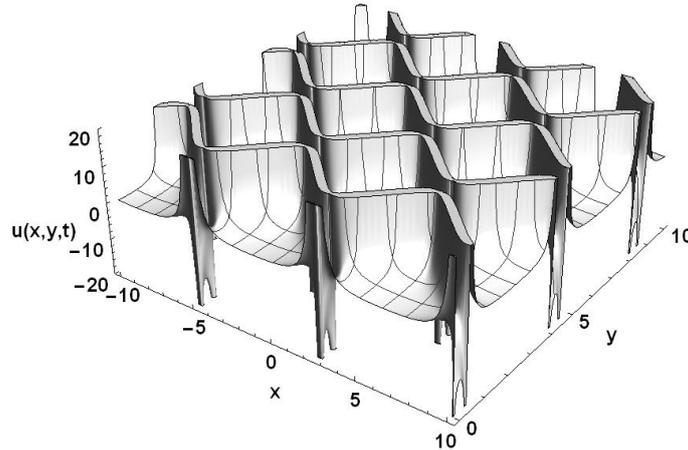


Рис. 3 – Периодическое решение (101). Значения параметров:

$$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\varphi_\lambda} = 1e^{2i}, \quad \varphi_a = 3$$

Fig. 3 – Periodic solution (101). Parameter values:

$$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\varphi_\lambda} = 1e^{2i}, \quad \varphi_a = 3$$

Построенное периодическое решение  $u(x, y, t)$  уравнения КП-2 удовлетворяет граничному условию  $(u_{xx} + \sigma u_y)|_{y=0} = 0$ , является периодическим по  $y$ , а также по  $x$ , это решение сингулярно. В некотором смысле это решение напоминает солитонное периодическое решение, полученное в заключительной части раздела 2.

### Заключение

Важную роль в квантовой теории поля, гидродинамике, теории динамических систем играют точные решения нелинейных уравнений с частными производными, удовлетворяющие определенным краевым условиям.

Метод обратной задачи рассеяния, как метод точного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, названных интегрируемыми, был успешно применен в ряде работ различных авторов [18–22] (Е.К. Склинин, В.Л. Верещагин и др.) к построению точных решений интегрируемых нелинейных уравнений с так называемыми интегрируемыми граничными условиями, совместными с линейными вспомогательными задачами. Построение таких точных решений, после установления интегрируемых граничных условий, может быть осуществлено с использованием того или иного варианта метода обратной задачи, до сих пор для этого в основном использовался метод одевания Захарова–Шабата.

В настоящей работе, на примере уравнения КП-2, в рамках метода  $\bar{\partial}$ - одевания Захарова–Манакова, развита новая схема эффективного построения точных решений нелинейных уравнений с интегрируемыми граничными условиями. Получены новые точные солитонные и периодические решения уравнения КП-2 на полуплоскости с интегрируемым граничным условием. Предложенная схема может быть применена к построению точных решений с интегрируемыми краевыми условиями и других двумерных интегрируемых нелинейных уравнений. Работа авторов по данной теме продолжается, полученные результаты будут опубликованы.

### Приложение. Вывод формулы (17)

Из (15) получается алгебраическая система уравнений

$$\sum_{k=1}^N B_{lk} \chi(\mu_k) = 1, \quad B_{lk} = \delta_{lk} - \frac{2i}{\pi} \frac{A_k}{\lambda_k - \mu_l} e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)} \quad (П1)$$

$$(k, l = 1, \dots, N)$$

для вычисления волновых функций  $\chi(\mu_k, \bar{\mu}_k) \equiv \chi(\mu_k)$  в точках  $(\mu_1, \dots, \mu_N)$ . При этом необходимый для вычисления  $u(x, y, t)$  коэффициент разложения  $\chi_{-1}$  имеет вид

$$\chi_{-1}(x, y, t) = -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \chi(\mu_k) e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)} =$$

$$= -\frac{2i}{\pi} \sum_{k,l} A_k e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)} B_{kl}^{-1}. \quad (П2)$$

Матрицу  $B_{lk}$  удобно выразить, используя преобразование подобия, через матрицу  $C_{lk}$ :

$$\begin{aligned} B_{lk} &= e^{F(\mu_k)} \left( \delta_{lk} - \frac{2i}{\pi} \frac{A_k}{\lambda_k - \mu_l} e^{F(\mu_l) - F(\lambda_k)} \right) e^{-F(\mu_l)} = \\ &= e^{F(\mu_k)} C_{lk} e^{-F(\mu_l)}. \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial C_{lk}}{\partial x} = -\frac{2}{\pi} A_k e^{F(\mu_l) - F(\lambda_k)}, \quad (\text{П4})$$

поэтому имеем, используя (П4), для  $\chi_{-1}$  из (16):

$$\begin{aligned} \chi_{-1} &= -\frac{2i}{\pi} \sum_{k,l}^N A_k e^{F(\mu_k) - F(\lambda_k)} e^{-F(\mu_k)} C_{kl}^{-1} e^{F(\mu_l)} = i \sum_{k,l} \frac{\partial C_{lk}}{\partial x} C_{kl}^{-1} = \\ &= i \frac{\partial}{\partial x} \ln(\det C) = i \frac{\partial}{\partial x} \ln(\det B). \end{aligned} \quad (\text{П5})$$

Из (11) и (П5) получаем известную детерминантную формулу для точных решений уравнений КП:

$$u = 2i \frac{\partial}{\partial x} \chi_{-1} = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln \det B) \quad (\text{П6})$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.** Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Доклады АН СССР. – 1970. – Т. 192, № 4. – С. 753–756.
2. **Дрюма В.С.** Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега–де Вриза (КДВ) // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19, вып. 12. – С. 753–755.
3. **Захаров В.Е., Шабат А.Б.** Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, вып. 3. – С. 45–53.
4. **Davey A., Stewartson K.** On three-dimensional packet of surface waves // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. – 1974. – Vol. 338 (1613). – P. 101–110. – doi: 10.1098/rspa.1974.0076.
5. **Dubrovsky V.G., Konopelchenko V.G.** Coherent structures for the Ishimori equation: 1. Localized solitons with stationary boundaries // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1991. – Vol. 48, iss. 2–3. – P. 367–395.
6. **Веселов А.П., Новиков С.П.** Конечнзонные двумерные потенциальные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 279, № 1. – С. 20–24.
7. Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.В. Питаевский. – Москва: Наука, 1980.
8. **Abblowitz M.J., Clarkson P.A.** Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. – Cambridge: Cambridge university Press, 1991. – (London Mathematical Society lecture note series; 149).

9. **Konopelchenko B.G.** Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions. – New York: Plenum Press, 1992.
10. **Konopelchenko B.G.** Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method. – Singapore: World Scientific, 1993.
11. **Manakov S.V.** The inverse scattering transform for the time-dependent Schrodinger equation and Kadomtsev–Petviashvili equation // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1981. – Vol. 3 (1–2). – P. 420–427. – doi: 10.1016/0167-2789(81)90145-7.
12. **Beals R., Coifman R.R.** The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1986. – Vol. 18 (1–3). – P. 242–249. – doi: 10.1016/0167-2789(86)90184-3.
13. **Захаров В.Е., Манакон С.В.** Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // *Функциональный анализ и его приложения*. – 1985. – Т. 19, вып. 2. – С. 11–25.
14. **Zakharov V.E.** Commutating operators and nonlocal  $\bar{\partial}$ -problem // *Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics* / ed. by N.S. Erokhin, V.E. Zakharov, A.G. Sitenko, V.M. Chernousenko, V.G. Bar'yakhtar. – Kiev: Naukova Dumka, 1988. – Vol. 1. – P. 152.
15. **Bogdanov L.V., Manakov S.V.** The non-local  $\bar{\partial}$ -problem and (2+1)-dimensional soliton equations // *Journal of Physics A*. – 1988. – Vol. 21, N 10. – P. 537–544. – doi: 10.1088/0305-4470/21/10/001.
16. **Fokas A.S., Ablowitz M.J.** The inverse scattering transform for multidimensional (2+1) problems // *Nonlinear Phenomena* / ed. by K.B. Wolf. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1983. – P. 137–183. – doi: 10.1007/3-540-12730-5\_6. – (Lecture Notes in Physics; vol. 189).
17. **Beals R., Coifman R.R.** Linear spectral problems, non-linear equations and the  $\bar{\partial}$ -method // *Inverse Problems*. – 1989. – Vol. 5, N 2. – P. 87–130. – doi: 10.1088/0266-5611/5/2/002.
18. **Гудкова Е.В., Хабибуллин И.Т.** Уравнение Кадомцева–Петвиашвили на полуплоскости // *Теоретическая и математическая физика*. – 2004. – Т. 140, № 2. – С. 230–240.
19. **Хабибуллин И.Т.** Начально-краевая задача на полуоси для уравнения МКдФ // *Функциональный анализ и его приложения*. – 2000. – Т. 34, вып. 1. – С. 65–75.
20. **Хабибуллин И.Т.** Уравнение sin-Гордон на полуоси // *Теоретическая и математическая физика*. – 1998. – Т. 114, № 1. – С. 115–125.
21. **Верещагин В.Л.** Интегрируемые граничные условия для 2+1-мерных моделей математической физики // *Теоретическая и математическая физика*. – 2012. – Т. 171, № 3. – С. 430–437.
22. **Склянин Е.К.** Граничные условия для интегрируемых уравнений // *Функциональный анализ и его приложения*. – 1987. – Т. 21, вып. 2. – С. 86–87.

**THE CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS  
OF KADOMTSEV-PETVIASHVILI (KP-2) EQUATION  
WITH INTEGRABLE BOUNDARY CONDITIONS VIA  
DIBAR-DRESSING METHOD**

**Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Ostreinov G.M.**  
*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

In this paper, in the framework of the Zakharov-Manakov method, a new scheme of exact integration of nonlinear two-dimensional differential equations with integrable boundary conditions is developed. New exact soliton and periodic solutions of the KP-2 equation on the half-plane are obtained.

The principal possibility of using the dressing method for constructing classes of exact soliton and periodic solutions of two-dimensional integrable nonlinear equations with integrable boundary conditions is demonstrated.

*Key words:* integrable nonlinear equations, method of  $\bar{\partial}$ -dressing, two-dimensional integrable Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation, solutions with integrable boundary conditions, solitons, periodic solutions.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-7-29

## REFERENCES

1. Kadomtsev B.B., Petviashvili V.I. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, p. 539–541. Translated from *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1970, vol. 192, no. 4, pp. 753–756.
2. Dryuma V.S. Analytic solution of the two-dimensional Korteweg–de Vries (KdV) equation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 1974, vol. 19, iss. 12, p. 387. Translated from *Pis'ma v Zhurnal teoreticheskoi i eksperimental'noi fiziki*, 1974, vol. 19, iss. 12, pp. 753–755.
3. Zakharov V.E., Shabat A.B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. *Functional Analysis and Its Applications*, 1974, vol. 8, iss. 3, pp. 226–235. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1974, vol. 8, iss. 3, pp. 43–53.
4. Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packet of surface waves. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1974, vol. 338 (1613), pp. 101–110. doi: 10.1098/rspa.1974.0076.
5. Dubrovsky V.G., Konopelchenko B.G. Coherent structures for the Ishimori equation: 1. Localized solitons with stationary boundaries. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1991, vol. 48, iss. 2–3, pp. 367–395.
6. Novikov S.P., Veselov A.P. Finite-zone, two-dimensional, potential Schrödinger operators. Explicit formula and evolutions equations. *Soviet Mathematics Doklady*, 1980, vol. 30, pp. 588–591. Translated from *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1984, vol. 279, no. 1, pp. 20–24.
7. Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskii L.P. *Teoriya solitonov: metod obratnoi zadachi* [Theory of solitons: the Inverse Scattering Method]. Moscow, Nauka Publ., 1980.
8. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. London Mathematical Society lecture note series, vol. 149. Cambridge, Cambridge university Press, 1991.
9. Konopelchenko B.G. Introduction to multidimensional integrable equations: the inverse spectral transform in 2+1 dimensions. New York, Plenum Press, 1992.
10. Konopelchenko B.G. Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method. Singapore, World Scientific, 1993.
11. Manakov S.V. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1981, vol. 3 (1–2), pp. 420–427. doi: 10.1016/0167-2789(81)90145-7.
12. Beals R., Coifman R.R. The D-bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, vol. 18 (1–3), pp. 242–249. doi: 10.1016/0167-2789(86)90184-3.
13. Zakharov V.E., Manakov S.V. Construction of higher-dimensional nonlinear integrable systems and of their solutions. *Functional Analysis and Its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 89–101. doi: 10.1007/BF01078388. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 11–25.
14. Zakharov V.E. Commutating operators and nonlocal problem. *Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics*. Ed. by N.S. Erokhin, V.E. Zakharov, A.G. Sitenko, V.M. Chernousenko, V.G. Bar'yakhtar. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, vol. 1, p. 152.

15. Bogdanov L.V., Manakov S.V. The non-local problem and (2+1)-dimensional soliton equations. *Journal of Physics A*, 1988, vol. 21, no. 10, pp. 537–544. doi: 10.1088/0305-4470/21/10/001.
16. Fokas A.S., Ablowitz M.J. The inverse scattering transform for multidimensional (2+1) problems. *Nonlinear Phenomena*. Ed. by K.B. Wolf. *Lecture Notes in Physics*, vol. 189. Berlin, Heidelberg, Springer, 1983, pp. 137–183. doi: 10.1007/3-540-12730-5\_6.
17. Beals R., Coifman R.R. Linear spectral problems, non-linear equations and the  $\bar{\partial}$ -method. *Inverse Problems*, 1989, vol. 5, no. 2, pp. 87–130. doi: 10.1088/0266-5611/5/2/002.
18. Gudkova E.V., Habibullin I.T. Kadomtsev–Petviashvili equation on the half-plane. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 140, iss. 2, pp. 1086–1094. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2004, vol. 140, no. 2, pp. 230–240.
19. Habibullin I.T. An initial-boundary value problem on the half-line for the MKdV equation. *Functional Analysis and Its Applications*, 2000, vol. 34, iss. 1, pp. 52–59. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 2000, vol. 34, iss. 1, pp. 65–75.
20. Habibullin I.T. Sine-Gordon equation on the semi-axis. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1998, vol. 114, iss. 1, pp. 90–98. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 1998, vol. 114, no. 1, pp. 115–125.
21. Vereshagin V.L. Integrable boundary condition for 2+1 -dimensional models of math physics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 171, iss. 3, pp. 792–799. Translated from *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2012, vol. 171, no. 3, pp. 430–437.
22. Skliyanin E.K. Boundary conditions for integrable equations. *Functional Analysis and Its Applications*, 1987, vol. 21, iss. 2, pp. 164–166. Translated from *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya*, 1987, vol. 21, iss. 2, pp. 86–87.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Дубровский Владислав Георгиевич** – родился в 1948 году, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 49 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: dubrovsky@ngs.ru).

**Dubrovsky Vladislav Georgievich** (b. 1948) – Doctor of Sciences (Phys.&Math.), professor. Head of chair of Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is author of 49 scientific papers. (Address: Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: dubrovsky@ngs.ru).



**Топовский Антон Валерьевич** – родился в 1985 году, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов. Опубликовано 8 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).

**Topovsky Anton Valerevich** (b. 1985) – Candidate of Sciences (Phys.&Math.), associate professor of department of the Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations. He is author of 8 scientific papers. (Address: Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: topovsky@pitf.ftf.nstu.ru).



**Остреинов Георгий Михайлович** – родился в 1992 году, ассистент кафедры прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения, теория солитонов, задача рассеяния. Опубликовано 10 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: wtfsnoo@gmail.com).

**Ostreinov George Mikhailovich** (b. 1992) – assistant of department of the Applied and Theoretical Physics, Novosibirsk State Technical University His research interests are currently focused on nonlinear integrable equations; soliton theory, scattering problem. He is author of 10 scientific papers. (Address: Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: wtfsnoo@gmail.com).

*Статья поступила 23 октября 2018 г.  
Received October 23, 2018*

---

To Reference:

Dubrovsky V.G., Topovsky A.V., Ostreinov G.M. Postroenie tochnykh reshenii uravneniya Kadomtseva–Petviashvili (KP-2) s integriruemymi granichnymi usloviyami metodom dibar-odevaniya [The construction of exact solutions of Kadomtsev–Petviashvili (KP-2) equation with integrable boundary conditions via dibar-dressing method]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp. 7–29. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-7-29.

УДК 621.313.3:621.365.5

## НАГРЕВ НЕМАГНИТНЫХ ИЗДЕЛИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО И ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ

**А.И. Алиферов, В.В. Жуловян, А.Э. Морев, В.А. Промзелев**  
*Новосибирский государственный технический университет*

В различных странах создается оборудование индукционного нагрева немагнитных цилиндрических изделий во вращающемся магнитном поле постоянных магнитов. Практический интерес к таким индукционным системам для сквозного нагрева изделий из немагнитных металлов с малым удельным электросопротивлением (алюминия, меди, бронзы) объясняется его экономичностью и эффективностью по сравнению с индукционными установками, нагревающими такое изделие в продольном переменном магнитном поле. При индукционном нагреве данных металлов в продольном переменном магнитном поле удается обеспечить электрический КПД процесса нагрева не более 0,50...0,55. В то же время электрический КПД нагрева таких заготовок во вращающемся магнитном поле постоянных магнитов может достигать до 0,75...0,85. Для исследования энергетических, электромеханических и температурных режимов установок индукционного нагрева с постоянными магнитами была разработана численная модель, позволяющая решать сопряженную электромагнитную и тепловую задачу нагрева алюминиевых изделий с прямоугольным и цилиндрическим поперечным сечением.

*Ключевые слова:* вращающееся магнитное поле постоянных магнитов, индукционный нагрев, активная мощность в нагреваемом изделии, механический момент сопротивления нагреваемого изделия, температурное поле, скорость вращения магнитного поля, число пар полюсов, концентраторы магнитного поля.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-30-43

### Введение

В настоящее время нагреву изделий из немагнитных металлов в переменном магнитном поле, создаваемом вращающимися системами с постоянными магнитами, уделяется особое внимание [1–5]. Это связано с тем, что в промышленности такие изделия нагреваются в установках индукционного нагрева в продольном переменном магнитном поле, имеющих электрический КПД не более 0,5...0,55. Привлекательностью нагрева таких изделий в поперечном вращающемся магнитном поле постоянных магнитов является его потенциальная возможность в достижении электрического КПД до 0,75...0,85 [6–7]. В ряде публикаций описаны результаты исследования энергетических, электрических, механических параметров и температурных режимов нагрева только цилиндрических немагнитных изделий в установках, реализующих этот вид нагрева [8–10]. В статье приводятся результаты сравнения режимов нагрева алюминиевых изделий прямоугольного и цилиндрического сечения.

### 1. Постановка задачи

На рис. 1 представлена схема установки индукционного нагрева изделий цилиндрического и прямоугольного поперечного сечения во вращающемся поле постоянных магнитов.

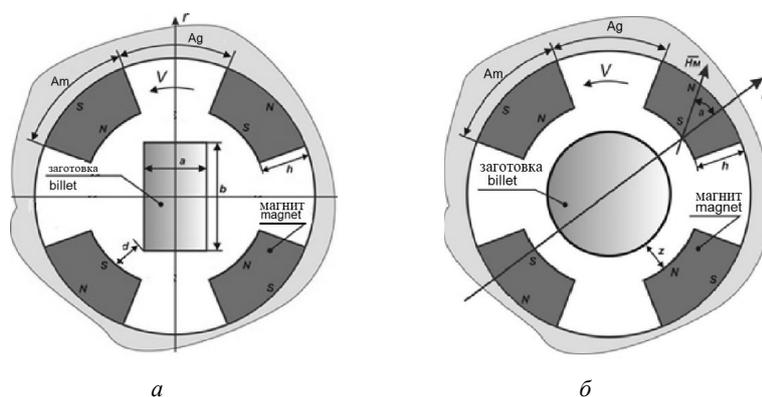


Рис. 1 – Схема установки индукционного нагрева изделия прямоугольного (а) и цилиндрического (б) поперечного сечения во вращающемся поле постоянных магнитов

Fig. 1 – A diagram of induction heating installation of rectangular (a) and cylindrical (b) cross sections in the rotating field of permanent magnets

В работе выполняется нагрев алюминиевых изделий до температуры 550 °С. Технологический зазор между ребром прямоугольного (или поверхностью цилиндрического) изделия и магнитами принимался равным 10 мм. Высота магнитов  $h = 15$  мм, остаточная индукция 1 Тл, коэрцитивная сила 1050 кА/м (направление намагничивания – радиальное). Процесс конвективного теплообмена поверхности вращающегося изделия с окружающей средой выполнялся при граничном условии третьего рода [11]. В силу малого значения степени черноты алюминия теплопередача излучением между изделием и системой постоянных магнитов не учитывалась.

Созданная численная параметрическая модель предназначена для расчета электромагнитных и тепловых процессов в нагреваемом изделии с учетом изменяющихся физических свойств материала нагреваемого изделия и нелинейного теплообмена конвекцией на его поверхности [3]. Посредством разработанной модели возможно исследование электромагнитных и электромеханических параметров, энергетических характеристик и распределения температуры по сечению в функциональной зависимости от скорости вращения системы магнитов относительно нагреваемого изделия, числа пар полюсов магнитной системы, физических свойств нагреваемой заготовки и системы постоянных магнитов.

На рис. 2 представлен алгоритм расчета взаимосвязанной электромагнитной и тепловой задачи.

*Модуль решения электромагнитной задачи* включает в себя построение геометрии системы, наложение свойств материалов и среды на соответствующие поверхности модели, наложение конечно-элементной сетки, наложение граничных условий для решения электромагнитной задачи, таких как значение и направление вектора коэрцитивной силы магнитов и равенство нулю  $z$  компоненты векторного магнитного потенциала на внешней границе воздушного объема.

В данной модели считается, что электромагнитная задача в течение одной секунды достигает установившегося режима, поэтому на каждом временном шаге мы пользуемся установившимися параметрами электромагнитного поля.

*Модуль расчета интегральных параметров* позволяет рассчитать такие интегральные параметры, как активная мощность, выделяющаяся в изделия, а также механический момент сопротивления вращению изделия.

*Модуль решения тепловой задачи* строит геометрию системы, задает теплофизические свойства материала изделия в соответствии с температурным

полем, рассчитанным на предыдущем временном шаге, теплофизические свойства элементов магнитной системы и среды, строит конечно-элементную сетку, задает граничные условия, необходимые для решения тепловой задачи. Теплообмен на поверхностях нагреваемого изделия и магнитной системы учитывался законом Ньютона–Рихмана, а внутренние источники энергии берутся из предыдущего решения электромагнитной задачи.



Рис. 2 – Алгоритм расчета взаимосвязанной электромагнитной и тепловой задачи:

$\tau$  – текущее время;  $\tau_n$  – время нагрева

Fig. 2 – A calculation algorithm of interrelated electromagnetic and thermal problems:

$\tau$  – is current time;  $\tau_n$  – is heating time

Модуль сохранения результатов решения тепловой задачи сохраняет результаты текущего решения, что позволяет получить температурные зависимости во времени.

## 2. Результаты исследования

### 2.1. Нагрев изделий цилиндрического поперечного сечения

При исследовании электромагнитных процессов были проведены численные расчеты при следующих варьируемых параметрах: скорости вращения магнитной системы  $\nu$ ; числе пар полюсов в магнитной системе  $n$ ; отношении углового размера зазора к угловому размеру магнита  $Ag/Am$ .

На рис. 3 представлены зависимости активной мощности, выделяющейся в цилиндрическом изделии, от скорости вращения магнитной системы при технологическом зазоре  $z = 10$  мм и отношении углового размера зазора к угловому размеру магнита  $Ag/Am = 1$  для различного количества пар полюсов. С увеличением скорости вращения магнитной системы вокруг изделия, а также с

увеличением количества пар полюсов магнитов происходит значительное возрастание интегральной активной мощности, выделяющейся в изделии.

На рис. 4 показана зависимость активной мощности, выделяющейся в изделии, от скорости вращения магнитной системы при технологическом зазоре  $z = 10$  мм и трех парах полюсов для различных отношений углового размера зазора к угловому размеру магнита  $Ag/Am$ .

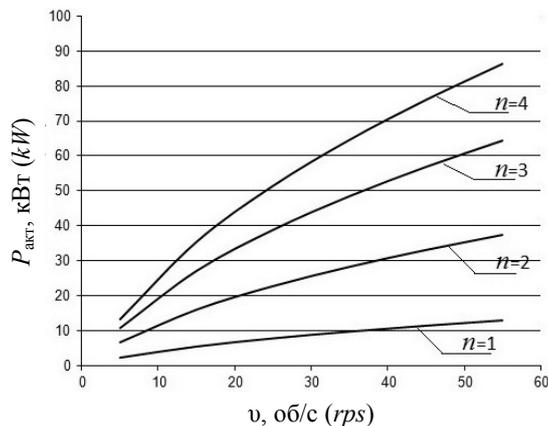


Рис. 3 – Зависимость интегральной активной мощности в нагреваемом цилиндрическом изделии от скорости вращения магнитной системы

Fig. 3. Dependence of an integral active power in the heated cylinder on the rotation speed of a magnet system

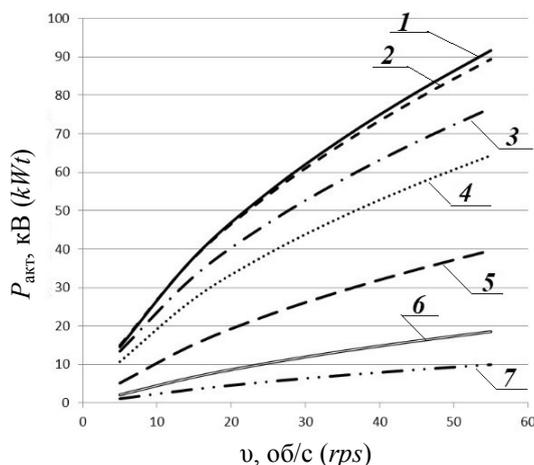


Рис. 4 – Зависимость активной мощности, выделяющейся в изделии, от скорости вращения магнитной системы при различных отношениях  $Ag/Am$ :

1 –  $Ag/Am = 0,1$ ; 2 –  $Ag/Am = 0,25$ ; 3 –  $Ag/Am = 0,5$ ; 4 –  $Ag/Am = 1$ ; 5 –  $Ag/Am = 3$ ; 6 –  $Ag/Am = 6$ ; 7 –  $Ag/Am = 9$

Fig. 4. Dependence of active power released in the billet on the rotation speed of a magnet system at various ratios  $Ag/Am$ :

1 –  $Ag/Am = 0,1$ ; 2 –  $Ag/Am = 0,25$ ; 3 –  $Ag/Am = 0,5$ ; 4 –  $Ag/Am = 1$ ; 5 –  $Ag/Am = 3$ ; 6 –  $Ag/Am = 6$ ; 7 –  $Ag/Am = 9$

Как видно, увеличение соотношения  $A_g/A_m$  приводит к значительному уменьшению интегральной активной мощности, выделяющейся в нагреваемом цилиндрическом изделии. Увеличение скорости вращения магнитной системы приводит к существенному возрастанию активной мощности, выделяемой в нем.

На рис. 5 и 6 представлены зависимости распределения температурного поля в цилиндрическом изделии от числа пар полюсов  $n$  и скорости вращения системы постоянных магнитов. Из рис. 5 и 6 видно, что с повышением скорости вращения и числа пар полюсов магнитной системы происходит увеличение скорости нагрева изделия. Это связано с возрастанием активной мощности, выделяющейся в нем. Но увеличение числа пар полюсов выше трех приводит к уменьшению мощности, выделяемой в нем, и скорости его нагрева. Это связано с тем, что большая часть магнитного потока замыкается между полюсами магнитов, не проникая в нагреваемое изделие.

Следует отметить, что в выбранном диапазоне изменения геометрических и скоростных характеристик системы нагрева в цилиндрическом изделии температурные перепады не превышают  $5...10\text{ }^\circ\text{C}$  в связи с равномерным по угловой координате распределением интегральной мощности внутренних источников теплоты и высокой теплопроводностью нагреваемого изделия.

## 2.2. Нагрев изделий прямоугольного поперечного сечения

На рис. 7 и 8 представлены зависимости распределения температурного поля в изделии прямоугольного поперечного сечения от геометрических и режимных параметров нагрева.

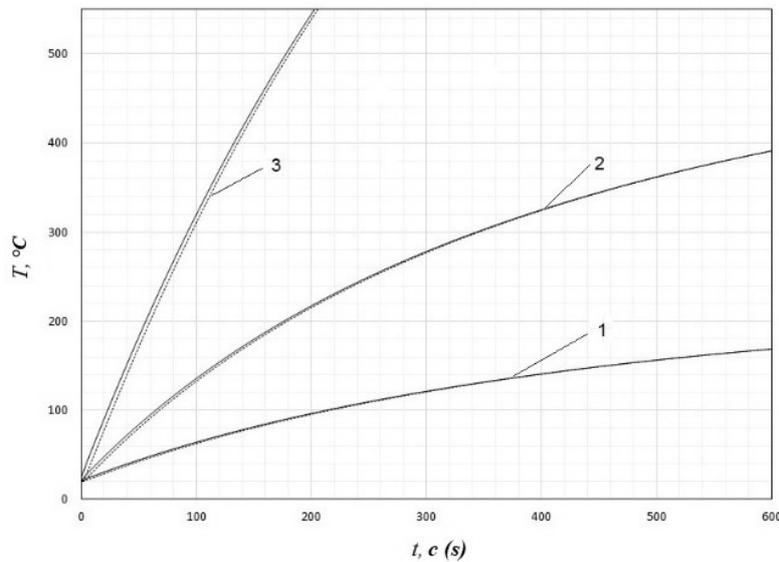


Рис. 5 – Зависимость изменения температуры от времени в цилиндрическом изделии в установке с тремя парами полюсов:

зазор  $z = 10$  мм; 1 – 10 об/с; 2 – 20 об/с; 3 – 50 об/с

Fig. 5 – Temperature-time relationship in a cylindrical billet in the installation with 3 pole pairs:

gap  $z = 10$  mm; 1 – 10 rps; 2 – 20 rps; 3 – 50 rps

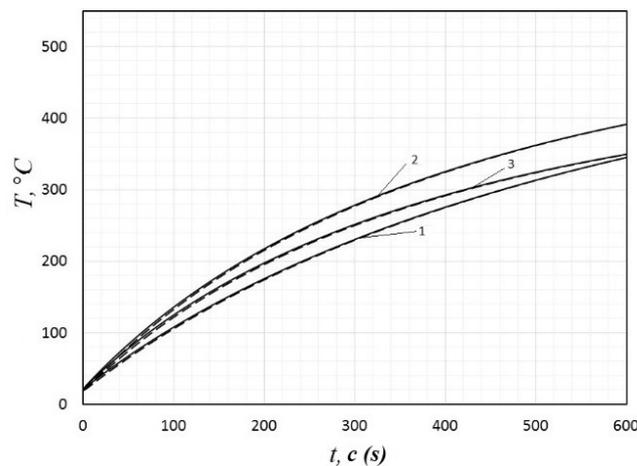


Рис. 6 – Зависимость изменения температуры от времени в цилиндрическом изделии в установке при частоте вращения 20 об/с:

зазора  $z = 10$  мм (1 – две пары полюсов; 2 – три пары полюсов; 3 – четыре пары полюсов)

Fig. 6 – Temperature-time relationship in a cylindrical billet in the installation with a rotation speed of 20 rps:

the  $z$  gap = 10 mm (1 – 2 pole pairs, 2 – 3 pole pairs, 3 – 4 pole pairs)

По рис. 7 и 8 видно, что в прямоугольном изделии, вне зависимости от частоты магнитного поля, более интенсивно разогреваются углы, а затем, за счет теплопроводности от зоны выделения энергии, остальная часть тела. С повышением скорости вращения и числа пар полюсов магнитной системы происходит увеличение скорости нагрева и максимального температурного перепада в изделии, значительно превышающего допустимые по технологии сквозного нагрева температурного перепада. Поэтому требуется разработка устройств, выравнивающих температурный перепад.

### 2.3. Применение концентраторов электромагнитного поля

Выравнивание температурного поля в изделиях прямоугольного сечения можно обеспечить посредством применения концентраторов магнитного поля, которые при вращении системы магнитов вокруг модуля, включающего нагреваемое изделие и концентраторы, создает в изделии пульсирующее магнитное поле. Для исследования влияния концентраторов магнитного поля на распределение параметров магнитного поля (векторного магнитного потенциала и индукции), а также активной мощности, выделяемой в изделии, разработана модель в программном комплексе ANSYS.

При моделировании процесса нагрева цилиндрического и нецилиндрического изделий были применены принципиально разные методы решения.

При моделировании процесса нагрева цилиндрического изделия модель была построена таким образом, что вращение сеточной области, представляющей собой магнитную систему, не производилось. Вращение магнитной системы учитывалось дополнительным слагаемым в законе полного тока для областей, моделирующих магнитную систему:

$$\gamma [\vec{V} \times \vec{B}].$$

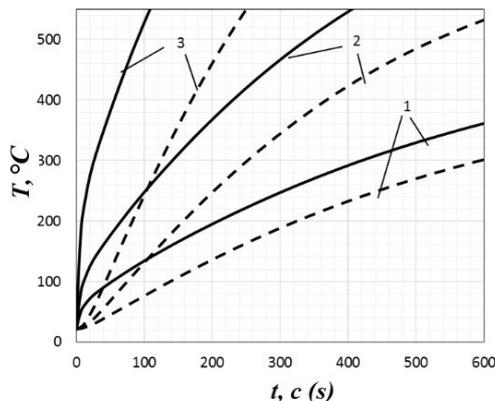


Рис. 7 – Зависимость распределения температуры от времени в прямоугольном изделии сечением  $180 \times 90$  мм (зазора  $d = 10$  мм) в установке с тремя парами полюсов:

1 – 10 об/с; 2 – 20 об/с; 3 – 50 об/с

Fig. 7 – Temperature-time relationship in a rectangular billet with the section of  $180 \times 90$  mm (gap  $d = 10$  mm) in the installation with 3 pole pairs:

1 – 10 rps; 2 – 20 rps; 3 – 50 rps

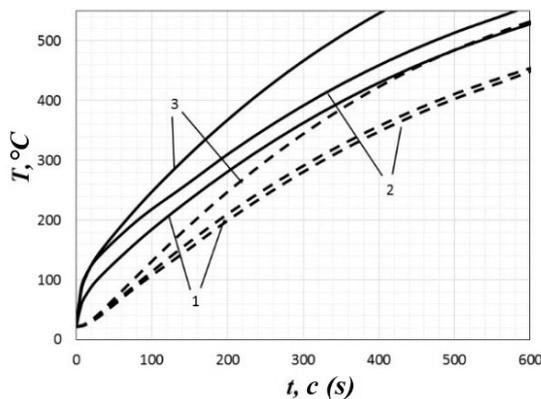


Рис. 8 – Зависимость изменения температуры от времени в прямоугольном изделии сечением  $180 \times 90$  мм в установке при частоте вращения 20 об/с:

1 –  $n = 2$ ; 2 –  $n = 3$ ; 3 –  $n = 4$

Fig. 8 – Temperature-time relationship in a rectangular billet with the section of  $180 \times 90$  mm in the installation with a rotation speed of 20 rps:

1 –  $n = 2$ ; 2 –  $n = 3$ ; 3 –  $n = 4$

Для уменьшения времени расчета были приняты следующие допущения:

- цилиндрическое изделие разбивалось на концентрические цилиндры, внутри которых выделение активной мощности полагалось равномерным;

• так как тепловая задача более инерционна, чем электромагнитная, то электромагнитная задача на каждом временном шаге решается стационарно.

Эти допущения позволили значительно упростить процесс решения и уменьшить время моделирования, при этом сохранить высокое качество решения.

При моделировании процесса нагрева нецилиндрического изделия невозможно применить эти допущения из-за неравномерного по поверхности изделия распределения электромагнитного поля. Моделирование процесса нагрева решается путем вращения сетки. Решение задачи в такой постановке требует больших вычислительных и временных ресурсов.

Расчеты взаимосвязанной электромагнитной и тепловой задачи в нагреваемом изделии выполнялись в программном комплексе *ANSYS* на суперкомпьютере со следующими характеристиками: размер оперативной памяти 96 Гб; два процессора Intel Xeon X5680 3.33 МГц по шесть ядер каждый.

В таблице показаны исходные данные для расчета: геометрические параметры системы нагрева, электромагнитные свойства магнитов и концентраторов магнитного поля.

#### Исходные данные

##### Input data

Наименование	Единица измерения	Величина
Длина прямоугольной загрузки	м	0,140
Ширина прямоугольной загрузки	м	0,100
Ширина магнита	м	0,112
Высота магнита	м	0,1275
Остаточная индукция магнитов	Тл	1,08269
Козрцитивная сила магнитов	А/м	1 050 000
Удельное сопротивление концентраторов	Ом · м	$8 \cdot 10^{-7}$
Магнитная проницаемость концентраторов		130

На рис. 9 представлены схемы установки индукционного нагрева с концентраторами электромагнитного поля. На рис. 10 показаны временные зависимости интегральной мощности, выделяемой в изделии в системе «прямоугольное изделие – вращающиеся магниты» при отсутствии и наличии концентраторов магнитного поля.

Применение концентраторов магнитного поля приводит к уменьшению активной мощности, выделяемой в изделии. Причем такое уменьшение получается более существенным при установке концентраторов вдоль боковых поверхностей изделия, а не на ее углах.

На рис. 11 приведено распределение температуры по периметру прямоугольного изделия *ABCD*, показанному на рис. 9. Зависимости приведены для разного момента времени и активной мощности. Зависимость 1 соответствует системе без концентраторов магнитного поля с выделяемой мощностью – 25 кВт, график приведен на момент времени 132,25 с; зависимость 2 соответствует системе с концентраторами, закрепленными на боковых поверхностях изделия с выделяемой мощностью 18,5 кВт, график приведен на момент времени 228,51 с; зависимость 3 соответствует системе с концентраторами, закрепленными на углах прямоугольного изделия с выделяемой мощностью 6,5 кВт; график приведен на момент времени 723,52 с. Распределение температуры, представленное на рис. 11, иллюстрирует существенное влияние концентраторов магнитного поля на распределение температуры по поверхности прямоугольного изделия.

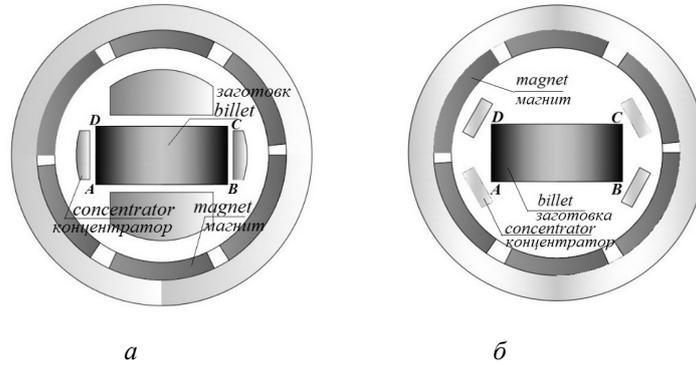


Рис. 9 – Схема установки индукционного нагрева:

*a* – с концентраторами магнитного поля у боковых поверхностей;  
*б* – с концентраторами магнитного поля на углах изделия

Fig. 9 – A diagram of an induction heating installation:

*a* – with concentrators of a magnetic field at lateral sides; *b* – with concentrators of a magnetic field at billet angles

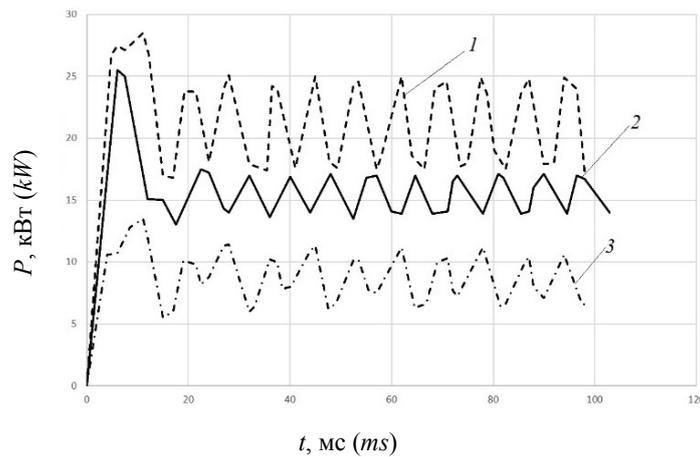


Рис. 10 – Временная зависимость интегральной активной мощности для системы:

*1* – без концентраторов электромагнитного поля; *2* – с концентраторами электромагнитного поля на углах изделия; *3* – с концентраторами у боковых поверхностей

Fig. 10 – Time dependence of an integral active power for the system:

*1* – is without concentrators of an electromagnetic field; *2* – is with concentrators of an electromagnetic field at billet angles; *3* – is with concentrators at lateral sides

На рис. 12 представлена зависимость интегрального механического момента сопротивления прямоугольного изделия при различном исполнении системы индукционного нагрева. Интегральный механический момент, испытываемый прямоугольным изделием, при применении концентраторов уменьшается. Максимальное его уменьшение получается при концентраторах, расположенных вдоль боковых поверхностей изделия.

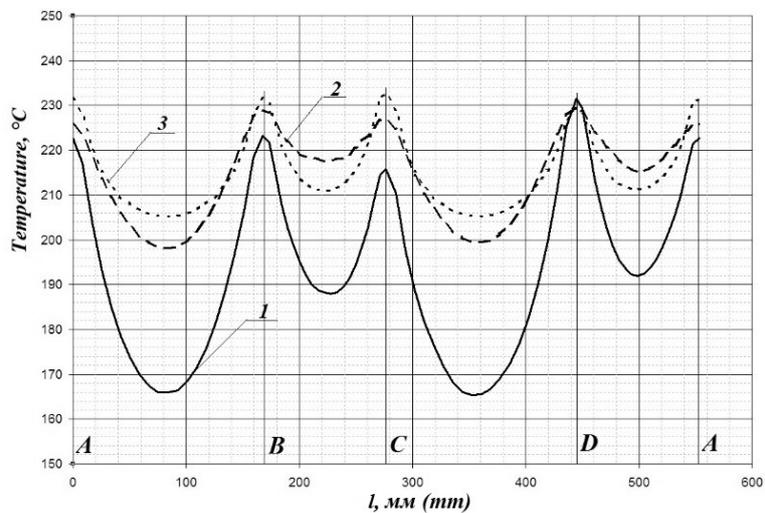


Рис. 11 – Распределение температуры по периметру прямоугольного изделия:

1 – без концентраторов магнитного поля; 2 – с концентраторами магнитного поля на углах изделия; 3 – с концентраторами у боковых поверхностей

Fig. 11 – Time dependence of an integral active power for the system:

1 – is without concentrators of an electromagnetic field; 2 – is with concentrators of an electromagnetic field at billet angles; 3 – is with concentrators at lateral sides

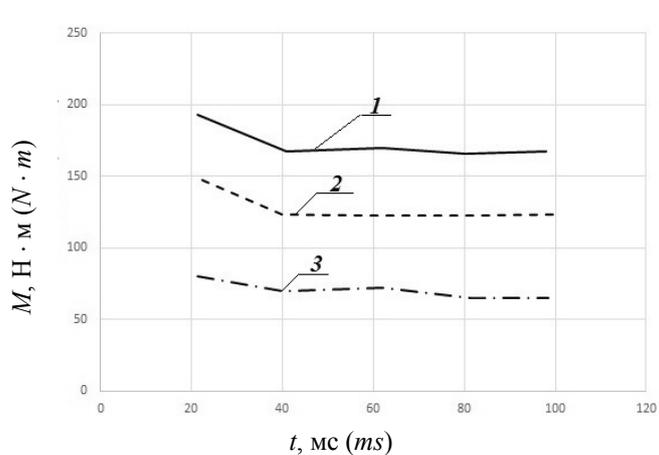


Рис. 12 – Зависимость интегрального момента сопротивления прямоугольного изделия:

1 – без концентраторов; 2 – с концентраторами на углах изделий; 3 – с концентраторами у боковых поверхностей

Fig. 12. Dependence of an integral resisting moment of a rectangular billet:

1 – is without concentrators; 2 – is with concentrators at angles of the billet; 3 – is with concentrators at lateral sides

### Заключение

Модель, разработанная в программном комплексе ANSYS, позволила рассчитать связанную электромагнитную и тепловую задачу нагрева немагнитного изделия прямоугольного и цилиндрического поперечного сечения во вращающемся магнитном поле постоянных магнитов.

Получены зависимости интегральной активной мощности, выделяемой в нагреваемом изделии, механического момента сопротивления изделия вращению магнитного поля, распределения температуры по сечению нагреваемых изделий прямоугольного и цилиндрического сечения от конструктивного исполнения нагревательного узла, скорости вращения магнитного поля, числа пар полюсов.

При нагреве изделия цилиндрического сечения в принятом диапазоне выбранных параметров температурные перепады не превышают 50...60 °С, максимально допустимые по технологии прессования.

Установлено, что в алюминиевых изделиях прямоугольного поперечного сечения возможно обеспечение температурных перепадов между точками ребра, образованного боковыми поверхностями и точками оси прямоугольного сечения, менее 60 °С. Но это можно получить только при малых скоростях нагрева, обеспеченных малыми скоростями вращения поперечного магнитного поля (менее 600 об/мин), при которых получается низкой тепловой КПД процесса нагрева.

Скорость нагрева и максимальный температурный перепад по сечению изделия увеличиваются с ростом числа пар полюсов и скорости вращения магнитной системы.

Применение концентраторов позволяет выровнять мощность внутренних источников тепла и температурное поле в прямоугольном изделии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Mach F., Karban P., Doležel I.** Induction heating of cylindrical non-magnetic ingots by rotation in static magnetic field generated by permanent magnets // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2012. – Vol. 236 (18). – P. 4732–4744.
2. Исследование электромагнитных параметров установок индукционного нагрева с постоянными магнитами / А.И. Инкин, А.В. Бланк, А.И. Алиферов, Е.Г. Порсев, В.А. Промзелев // *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники*. – 2012. – № 1-1. – С. 178–182.
3. Исследование энергетических параметров систем индукционного нагрева с магнитами / А.И. Алиферов, Р.А. Бикеев, А.В. Бланк, А.Э. Морев, В.Н. Тимофеев // *Научный вестник Новосибирского государственного технического университета*. – 2014. – № 1 (54). – С. 122–127.
4. Patent WO2013128241. Device for induction heating of a billet / F. Dughiero, M. Forzan, M. Zerbetto. – Publ. date 06.09.2013.
5. **Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В.** Каскадные E-H-схемы замещения для расчета магнитоэлектрических установок индукционного нагрева // *Электротехника*. – 2011. – № 6. – С. 36–41.
6. **Lupi S., Forzan M., Aliferov A.** Induction and direct resistance heating: theory and numerical modeling: monograph. – Heidelberg: Springer, 2015. – 370 p. – ISBN 978-3-319-03478-2. – doi: 10.1007/978-3-319-03479-9.
7. Multi rotors permanent magnet heater for controlling temperature distribution in aluminum billets / F. Dughiero, M. Forzan, C. Pozza, M. Zerbetto // *International Scientific Colloquium Modelling for Electromagnetic Processing MEP-2014, Hannover, September 16–19, 2014*. – Hannover: Leibniz University of Hannover, 2014. – P. 415–420.
8. Energetic and thermal performance of induction heating system with permanent magnets / A.I. Aliferov, R.A. Bikeev, D.S. Vlasov, V.A. Promzelev, A.E. Morev, S. Lupi // *2016 11th International Forum on Strategic Technology, June 1–3, 2016, Novosibirsk, Russia: proceedings of IFOST-2016*. – Novosibirsk, 2016. – Pt. 2. – P. 127–129. – ISBN 978-5-7782-2918-1.

9. Electromechanical and energetic characteristics of system of induction heating by permanent magnets / A.I. Aliferov, R.A. Bikeev, D.S. Vlasov, V.A. Promzelev, A.E. Morev // 17th International Conference on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices EDM 2016, 30 June – 4 July 2016, Erlagol, Altai, Russia. – Novosibirsk, 2016. – P. 518–521. – doi: 10.1109/EDM.2016.7538790.
10. Особенности нагрева немагнитных изделий прямоугольного сечения во вращающемся поле постоянных магнитов / Р.А. Бикеев, В.А. Промзелев, А.В. Бланк, А.Э. Морев // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 325, № 2. – С. 143–148.
11. **Dughiero F., Forzan M., Lupi S.** Induction heating of aluminum billets rotating in a DC magnetic field // VIII International Conference on Problems of Control and Modelling Complex Systems, Samara, June 24–29, 2006. – Samara, 2006. – P. 171–176.

### HEATING OF NONMAGNETIC WORKPIECES OF CYLINDRICAL AND RECTANGULAR CROSS SECTION IN THE MAGNETIC FIELD OF ROTATING PERMOMENT MAGNETS

**Aliferov A.I., Zhulovyan V.V., Morev A.E., Promzelev V.A.**  
*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

In various countries, induction heating equipment for non-magnetic cylindrical products in the rotating magnetic field of permanent magnets is created. Practical interest in such induction systems for the through heating of workpieces made of non-magnetic metals with a low electrical resistivity (aluminum, copper, bronze) is explained by its cost-effectiveness and efficiency in comparison with induction installations that heat such metals in a longitudinal alternating magnetic field. At induction heating of these metals in a longitudinal alternating magnetic field, it is possible to provide an electric efficiency of the heating process not more than 0.50-0.55. At the same time, heating of such billets in a rotating magnetic field of permanent magnets can reach up to 0.75-0.85. To study the power, electromechanical and temperature modes of induction heating units with permanent magnets, a numerical model was developed that allows solving the conjugate electromagnetic and thermal problem of heating aluminum billets with a rectangular and cylindrical cross section.

*Keywords:* Rotating magnetic field of permanent magnets, induction heating, active power in the heated product, mechanical moment of resistance of a heated workpiece, temperature field, rotation speed of a magnetic field, number of pole pairs, concentrators of a magnetic field.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-30-43

#### REFERENCES

1. Mach F., Karban P., Doležel I. Induction heating of cylindrical non-magnetic ingots by rotation in static magnetic field generated by permanent magnets. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2012, vol. 236 (18), pp. 4732–4744.
2. Inkin A.I., Blank A.V., Aliferov A.I., Porsev E.G., Promzelev V.A. Issledovanie elektromagnitnykh parametrov ustanovok induktsionnogo nagreva s postoyannymi magnitami [Investigation of the electromagnetic parameters of induction heating installations with permanent magnets] *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki – Proceedings of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*, 2012, no. 1-1, pp. 178–182.
3. Aliferov A.I., Bikeev R.A., Blank A.V., Morev A.E., Timofeev V.N. Issledovanie energeticheskikh parametrov sistem induktsionnogo nagreva s magnitami [Research of energy parameters of induction heating systems with magnets]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 1 (54), pp. 122–127.
4. Dughiero F., Forzan M., Zerbetto M. *Device for induction heating of a billet*. Patent, no. WO2013128241, 2013.

5. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. Kaskadnye E-N-skhemy zameshcheniya dlya rascheta magnitoelektricheskikh ustanovok induktsionnogo nagreva [Cascade E-H-schemes of substitution for the calculation of magnetoelectric induction heating installations]. *Elektrotehnika – Russian Electrical Engineering*, 2011, no. 6, pp. 36–41. (In Russian).
6. Lupi S., Forzan M., Aliferov A. *Induction and direct resistance heating: theory and numerical modeling*. Heidelberg, Springer, 2015. 370 p. ISBN 978-3-319-03478-2. doi: 10.1007/978-3-319-03479-9.
7. Dughiero F., Forzan M., Pozza C., Zerbetto M. Multi rotors permanent magnet heater for controlling temperature distribution in aluminum billets. *International Scientific Colloquium Modelling for Electromagnetic, Processing MEP-2014*, Hannover, September 16–19, 2014, pp. 415–420.
8. Aliferov A.I., Bikeev R.A., Vlasov D.S., Promzelev V.A., Morev A.E., Lupi S. Energetic and thermal performance of induction heating system with permanent magnets. *2016 11th International Forum on Strategic Technology. Proceedings of IFOST-2016*, June 1–3, 2016, Novosibirsk, Russia, pp. 127–129. ISBN 978-5-7782-2918-1.
9. Aliferov A.I., Bikeev R.A., Vlasov D.S., Promzelev V.A., Morev A.E. Electromechanical and energetic characteristics of system of induction heating by permanent magnets. *17th International Conference on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices EDM 2016*, Erlangol, Altai, Russia, pp. 518–521. doi: 10.1109/EDM.2016.7538790.
10. Bikeev R.A., Promzelev V.A., Blank A.V., Morev A.E. Osobennosti nagreva nemagnitnykh izdelii pryamougol'nogo secheniya vo vrashchayushchemsya pole postoyannykh magnetov [Features of heating non-magnetic products of rectangular cross-section in a rotating field of permanent magnets]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 325, no. 2, pp. 143–148.
11. Dughiero F., Forzan M., Lupi S. Induction heating of aluminum billets rotating in a DC magnetic field. *VIII International Conference on Problems of Control and Modelling Complex Systems, Samara*, June 24–29, 2006, pp. 171–176.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Алиферов Александр Иванович** – родился в 1956 году, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой автоматизированных электротехнологических установок (АЭТУ) Новосибирского государственного технического университета (НГТУ). Область научных интересов: энерго- и ресурсосберегающие электротехнологии. Опубликовано более 200 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: alif@ngs.ru).

**Aliferov Alexander Ivanovich** (b. 1956) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, head of the department of automated electrotechnical installations in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on energy and resource saving electro-technologies. He is the author of more than 200 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: alif@ngs.ru).



**Жуловян Владимир Владимирович** – родился в 1936 году, д-р техн. наук, профессор кафедры электротехнических комплексов НГТУ. Область научных интересов: разработка теории электро-механических преобразователей энергии с модулированным магнитным потоком, электропривод. Опубликовано 35 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: zhulovyan@mail.ru).

**Zhulovyan Vladimir Vladimirovich** (b. 1936) – Doctor of Sciences (Eng.) professor, Novosibirsk State Technical University. His research interests include development of the theory of electromechanical energy converters with a modulated magnetic flux and electric drives. He has published 35 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: zhulovyan@mail.ru).



**Морев Андрей Эдуардович** – родился в 1992 году, аспирант кафедры АЭТУ НГТУ. Область научных интересов: нагрев цветных металлов в переменном магнитном поле постоянных магнитов. Опубликовано более 20 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: glhficcup@yandex.ru).

**Morev Andrey Eduardovich** (b. 1992) – a postgraduate student at the department of automated electrotechnical installations in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on heating of non-ferrous metals in an alternating magnetic field of permanent magnets. He is the author of more than 20 scientific papers. (Address: Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: glhficcup@yandex.ru).



**Промзелев Владислав Алексеевич** – родился в 1988 году, инженер кафедры АЭТУ НГТУ. Область научных интересов: ресурсосберегающие и энергосберегающие электротехнологии. Опубликовано более 15 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: promzelev@mail.ru).

**Promzelev Vladislav Alekseevich** (b. 1988) – an engineer at the department of automated electrotechnical installations of the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on resource-and-energy saving electrotechnologies. He is the author of more than 15 scientific papers. (Address: Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: promzelev@mail.ru).

*Статья поступила 04 октября 2018 г.  
Received October 04, 2018*

---

To References:

Aliferov A.I., Zhulovyan V.V., Morev A.E., Promzelev V.A. Nagrev nemagnitnykh izdelii tsilindricheskogo i pryamougol'nogo poperechnogo secheniya v magnitnom pole vrashchayushchikhsya postoyannykh magnetov [Heating of nonmagnetic workpieces of cylindrical and rectangular cross section in the magnetic field of rotating permanent magnets]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp. 30–43. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-30-43.

УДК: 621.314.232

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИСТОЧНИКА ПИТАНИЯ  
ДЛЯ БЕСКОНТАКТНОГО ПОДВОДА ЭНЕРГИИ  
КАК ЭЛЕМЕНТА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ****В.Н. Аносов, В.М. Кавешников, Е.О. Орел***Новосибирский государственный технический университет*

В работе решается задача составления математического описания двухобмоточного однофазного трансформатора с воздушным зазором, используемого в транспортном средстве с бесконтактным подводом энергии от кабеля, заложенного в дорогу. Источник питания расположен под проезжей частью дороги, а приемник находится на борту транспортного средства. Бесконтактная передача энергии осуществляется по принципу трансформатора с воздушным зазором. В данной работе разрабатывается структурная схема трансформатора с воздушным зазором как элемента системы автоматического управления. В отличие от общеизвестного математического описания в статье учитывается, что материал магнитопровода, площадь сердечника в воздушном зазоре и величина воздушного зазора могут изменяться. Полученная структурная схема позволяет проводить анализ и синтез системы автоматического управления транспортным средством с учетом свойств бесконтактного источника питания, а также оптимизировать процессы в проектируемой системе.

*Ключевые слова:* транспортное средство, бесконтактный подвод энергии, трансформатор, воздушный зазор, структурная схема, анализ и синтез.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-44-51

**Постановка задачи**

При повышении стоимости энергоресурсов и экологических требований к используемым транспортным средствам (ТС) ставится вопрос об использовании новых источников энергии. Напольные безрельсовые транспортные средства, рассматриваемые в работе, различаются между собой набором источников энергии в составе их энергетической установки. В настоящее время приобрели актуальность исследования автономных ТС с гибридными и комбинированными энергоустановками, посвященные поиску наилучших схемных и конструктивных решений, а также их алгоритмов управления.

Стремление создать более совершенные ТС привело к появлению иных технических решений, одним из которых является бесконтактный подвод энергии от заложенного в дорогу кабеля, к достоинствам которого относятся независимость от окружающей среды, необслуживаемость, возможность автоматического управления движением ТС без участия человека-оператора в контуре регулирования.

Силовые кабели не подвергаются износу благодаря отсутствию механической связи с токоприемником ТС, как при питании от контактной сети. Срок их службы определяется только сроком службы изоляции.

Пробег бесконтактного ТС не ограничен количеством запасенной энергии в отличие от аккумуляторных транспортных средств, где мощность, развиваемая тяговыми двигателями, уменьшается по мере разряда батареи. Много времени уходит на смену батарей и на их заряд. Эксплуатация предлагаемого в работе транспорта значительно проще, чем аккумуляторного, так как отпадает необходимость в уходе за аккумуляторными батареями, их смене и ремонте.

Использование указанных ТС экономически оправданно в условиях взрывоопасной окружающей среды.

Установка на борту ТС дополнительной легкой аккумуляторной батареи (АБ) позволит ему двигаться по дорогам, не оборудованным указанным источником энергии. АБ будет подзаряжаться, пока ТС находится в пределах системы питания. Это позволит рассматривать транспорт как единую систему, а не исследовать отдельные подсистемы [1, 2, 5].

Источник энергии таких ТС расположен под проезжей частью дороги, а приемник энергии находится на электротранспорте (рис. 1).

Бесконтактная передача энергии осуществляется по принципу трансформатора с воздушным зазором (рис. 2). Силовой кабель с магнитопроводом, заложенные в дорожное полотно, являются первичной обмоткой, а обмотка, находящаяся на ТС – вторичной. Магнитное поле зависит от величины воздушного зазора, магнитное сопротивление которого на данном этапе исследований принято соизмеримым с сопротивлением сердечника, так как при движении ТС величина воздушного зазора может изменяться в поперечном и вертикальном направлении в достаточно широких пределах.

При решении прикладных задач управления транспортным средством необходимо составить адекватное математическое описание (МО) объекта в удобной для

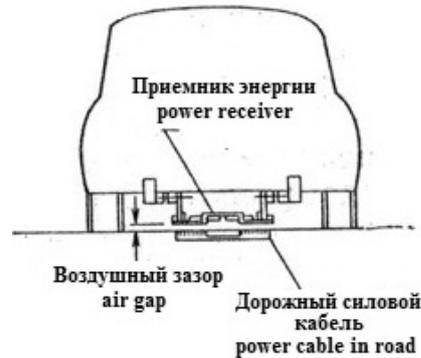


Рис. 1 – Схема работы транспортного средства с индуктивным подводом питания

Fig. 1 – Operation scheme of a vehicle with inductive power supply

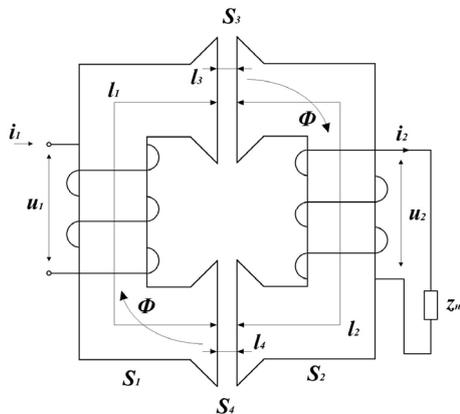


Рис. 2 – Трансформатор с воздушным зазором

Fig. 2 – An air-gap transformer

исследователя форме. Форма математического описания должна позволять применение известных методов, в частности методов ТАУ. С другой стороны, МО должно обеспечивать необходимую точность для оценки динамических свойств системы. Однако стремление к точности отражения физических процессов не должно приводить к излишнему усложнению МО при сохранении интересующих исследователя специфических свойств и особенностей конкретного исследуемого объекта. Использование структурных схем при математическом описании облегчит решение задачи синтеза системы тягового электропривода при создании или модернизации электротранспортного средства. В отечественной и зарубежной литературе практически не уделяется внимания структурному подходу при математическом описании исследуемых источников питания.

Целью данной работы является разработка структурной схемы источника бесконтактного подвода энергии к транспортному средству, учитывающую изменение внешних воздействий при разных режимах движения исследуемого ТС. Это МО должно удовлетворять критериям, обозначенным выше. Такая постановка вопроса в научно-технической литературе является новой с точки зрения решения задач управления ТС.

исследователя форме. Форма математического описания должна позволять применение известных методов, в частности методов ТАУ. С другой стороны, МО должно обеспечивать необходимую точность для оценки динамических свойств системы. Однако стремление к точности отражения физических процессов не должно приводить к излишнему усложнению МО при сохранении интересующих исследователя специфических свойств и особенностей конкретного исследуемого объекта. Использование структурных схем при математическом описании облегчит решение задачи синтеза системы тягового электропривода при создании или модернизации электротранспортного средства. В отечественной и зарубежной литературе практически не уделяется внимания структурному подходу при математическом описании исследуемых источников питания.

### Структурная схема источника бесконтактного подвода энергии

Математическому описанию трансформаторов посвящено достаточно много работ. Так, в [3] решается задача составления схемы замещения как однофазных, так и многофазных трансформаторов. В [4] рассматривается методика определения магнитодвижущей силы неразветвленного магнитопровода с воздушным зазором. В [5] приведены результаты имитационного моделирования системы электропривода с бесконтактным подводом энергии без учета изменений зазора между источником энергии и транспортным средством.

В литературе уделяется недостаточное внимание математическому описанию трансформатора с воздушным зазором как элемента автоматической системы управления. В данной работе разрабатывается структурная схема источника бесконтактной передачи энергии с учетом естественных возмущающих воздействий.

Как известно [3, 4], однофазный двухобмоточный трансформатор описывается следующей системой уравнений в мгновенных значениях переменных:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} + i_1 r_1, \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} + i_2 r_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^4 h_i l_i = i_1 w_1 + i_2 w_2,$$

где  $\psi_1, \psi_2, i_1, i_2, r_1, r_2, w_1, w_2$  – потокосцепления, токи, активные сопротивления и число витков первичной и вторичной обмотки трансформатора;  $h_i$  – напряженности магнитного поля;  $l_1, l_2$  – длины средних линий магнитопровода;  $l_3, l_4$  – длины магнитных силовых линий в воздушном зазоре.

Потокосцепления обмоток делятся на две составляющие: по основному магнитному потоку  $\psi_\mu$  и потоку рассеяния  $\psi_P$ .

$$\psi_1 = \psi_{1\mu} + \psi_{1P},$$

$$\psi_2 = \psi_{2\mu} + \psi_{2P}.$$

Первые определяются произведением числа витков обмоток на величину магнитного потока, а вторые – произведениями соответствующих токов на индуктивность рассеяния:

$$\psi_{1\mu} = w_1 \Phi, \quad \psi_{1P} = L_{1P} i_1,$$

$$\psi_{2\mu} = w_2 \Phi, \quad \psi_{2P} = L_{2P} i_2.$$

Левая часть третьего уравнения системы (1) может быть представлена в виде (см. рис. 2)

$$\sum_{i=1}^4 h_i l_i = h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_3 l_3(\xi) + h_4 l_4(\xi), \quad (2)$$

где  $h_1, h_2$  – напряженности магнитного поля в первом и втором участке магнитопровода;  $h_3, h_4$  – напряженности магнитного поля в воздушных зазорах магнитной цепи;  $\xi$  – параметр, зависящий от расположения ТС, изменение которого в общем случае носит случайный характер.

Учитывая, что напряженность магнитного поля в воздушных зазорах одна и та же:

$$h_{34} = h_3 = h_4,$$

а величина воздушного зазора равна их сумме:

$$l_{34}(\xi) = l_3(\xi) + l_4(\xi),$$

уравнение (2) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^3 h_i l_i = h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_{34} l_{34}(\xi).$$

Функция  $l_{34}(\xi)$  определяется геометрически величинами вертикального и поперечного смещения ТС в процессе движения и носит вероятностный характер.

Магнитный поток в неразветвленной магнитной цепи одинаков для любого поперечного сечения магнитопровода:

$$\Phi = b_1 S_1 = b_2 S_2 = b_3 S_3 = b_4 S_4,$$

где  $b_1, b_2$  – значение магнитной индукции;  $S_1, S_2$  – площади поперечного сечения магнитопровода;  $b_3, b_4$  – значение магнитной индукции,  $S_3, S_4$  – площади поперечного сечения воздушного зазора.

Для участков магнитной цепи 1 и 2 из ферромагнитного материала (см. рис. 2) значения магнитной индукции  $b_1$  и  $b_2$  связаны с напряженностью магнитного поля соотношениями:

$$b_1 = h_1 \mu_{01}(h),$$

$$b_2 = h_2 \mu_{02}(h).$$

Магнитные свойства ферромагнитного сердечника представлены известными кривой намагничивания  $b(h)$  и зависимостью  $\mu_0(h)$ .

В воздушных зазорах магнитная индукция  $b_{34}$  связана с напряженностью  $h_{34}$  простым соотношением

$$b_{34} = \mu_0 h_{34}.$$

В представленном выражении  $\mu_0$  – величина магнитной проницаемости в воздушном зазоре.

Учитывая, что

$$\Phi = bS,$$

$$h = \frac{b}{\mu_0},$$

система уравнений (1) двухобмоточного трансформатора принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= w_1 S_1 \frac{db_1}{dt} + L_{p1} \frac{di_1}{dt} + i_1 r_1, \\
 u_2 &= w_2 S_2 \frac{db_2}{dt} + L_{p2} \frac{di_2}{dt} + i_2 r_2, \\
 F &= \frac{l_{34}(\xi)}{S_{34} \mu_0} b_{34} + \sum_{i=1}^2 \frac{l_i}{S_i \mu_{0i}} b_i = i_1 w_1 + i_2 w_2,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где  $F$  – намагничивающая сила.

Структурная схема двухобмоточного трансформатора с воздушным зазором в соответствии с уравнениями (3) может быть представлена в следующем виде (рис. 3).

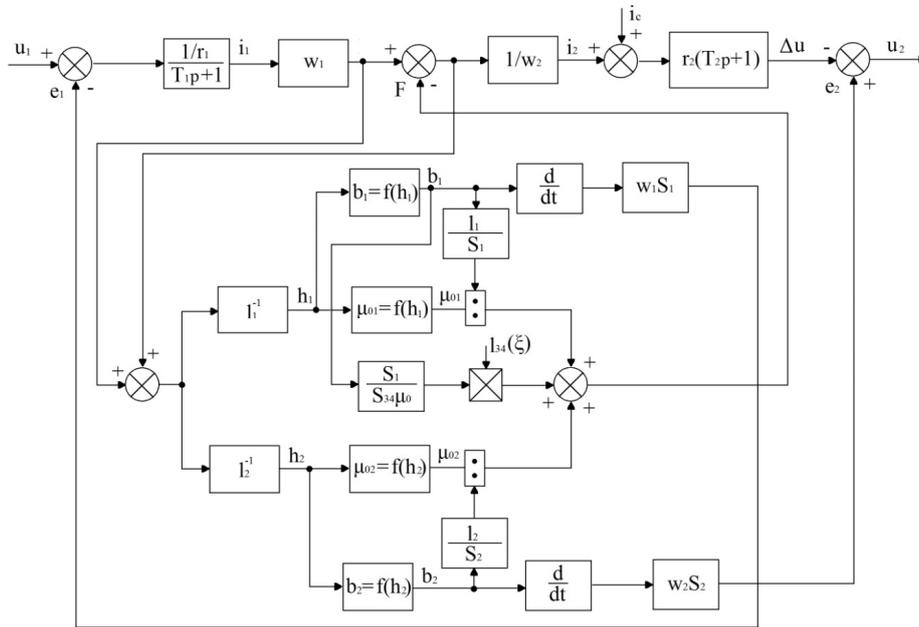


Рис. 3 – Структурная схема трансформатора с воздушным зазором  
 Fig. 3 – Structural diagram of an air-gap transformer

Как следует из рис. 3, источник питания является нелинейным объектом. В структурной схеме содержатся как несущественные, так и существенные нелинейные звенья типа «произведение/деление». В схеме имеются два возмущающих воздействия, одним из которых является ток нагрузки  $i_c$ , введение которого в полученную структуру не вызывает проблем. Второе возмущение реализует изменение величины воздушного зазора как в продольном, так и в вертикальном направлении, и учет его воздействия является проблемой. Изменение этого возмущающего воздействия может носить случайный характер, что должно учитываться при анализе и синтезе системы управления. Зависимость  $l_{34}(\xi)$  аналитически определить не представляется возможным, так как параметр  $\xi$  зависит от состояния дорожного покрытия, скорости движения и других дорожных условий.

Это можно сделать экспериментальным путем, что требует больших затрат времени и средств, или методом структурного моделирования с использованием генератора случайных чисел с различными законами распределения. Эта задача выходит за рамки данной статьи и является предметом дальнейших исследований.

Коэффициенты отдельных звеньев структурной схемы определяются по каталожным данным при моделировании типового трансформатора или легко рассчитываются при проектировании нового источника питания.

В рассматриваемой структурной схеме авторами определены способ (мультипликативное звено) и точка ввода сигнала второго возмущающего воздействия  $I_{34}(\xi)$ . При этом возможно исследование реакции системы как на типовое воздействие (единичный скачок или синусоидальный сигнал), так и на случайный сигнал с неизвестными пока характеристиками.

### Заключение

Полученная структурная схема может в дальнейшем служить адекватной основой для разработки системы автоматического управления тяговым электроприводом ТС с учетом статических и динамических свойств источника питания электропривода. Важнейшим ее свойством является возможность учета изменяющегося воздушного зазора между магнитопроводами подвижной и неподвижной части бесконтактной системы передачи энергии. Полученная структура позволит произвести математическое моделирование тягового электропривода специального транспортного средства с индуктивным подводом энергии в целом.

#### *Задачи дальнейших исследований*

1. Структурное моделирование источника питания в программной среде MATLAB-Simulink с различными видами нагрузки.
2. Изучение влияния величины воздушного зазора  $I_{34}$  и площадей  $S_3$  и  $S_4$  на потери энергии в нагрузке.
3. Анализ динамики системы тягового электропривода специального транспортного средства.
4. Разработка алгоритма управления транспортным средством с бесконтактным подводом энергии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Uhlemeyer A.** Project planning for systems with contact less energy and data transmission [Electronic resource] // Materials of seminars of Drive Academy, SEW Eurodrive, Bruchsal, Germany, 3–7 dec. 2007. – 2007. – 1 electron-optical disk (CD-ROM).
2. **Мани Л.** Транспорт, энергетика и будущее : пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 160 с.
3. **Байков А.И.** Математические модели трансформаторов при анализе силовой части электроприводов // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. – 2013. – № 5 (102). – С. 316–327.
4. **Немцов М.В., Немцова М.Л.** Электротехника и электроника. – М.: Академия, 2007. – 424 с.
5. Исследование режимов работы системы энергообеспечения автономного подводного аппарата с бесконтактной передачей энергии / В.А. Герасимов, Г.Е. Кувшинов, А.Ю. Филоженко, П.И. Чепурин // Подводные исследования и робототехника. – 2013. – № 2 (16). – С. 24–32.

## MATHEMATICAL DESCRIPTION OF A POWER SUPPLY SOURCE FOR CONTACTLESS ENERGY SUPPLY AS A CONTROL SYSTEM ELEMENT

**Anosov V.N., Kaveshnikov V.M., Orel E.O.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The task of compiling a mathematical description of a two-winding single-phase transformer with an air gap used in a vehicle with a contactless power supply from a cable laid in the road is solved in the work. The power source is located under the carriageway of a road, and the receiver is on the board of a vehicle. Contactless energy transfer is carried out according to the principle of an air-gap transformer. A block schematic diagram of an air-gap transformer as an automatic control system element is developed in this work. In contrast to the well-known mathematical description, the article takes into account that a magnetic core material, a core area in an air gap and an air gap size are changeable. The resulting block schematic diagram allows analyzing and synthesizing the automatic control system of a vehicle taking into account properties of a contactless power source. It also helps to optimize processes in the projected system.

*Keywords:* vehicle, contactless power supply, transformer, air gap, block schematic diagram, analysis and synthesis.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-44-51

### REFERENCES

1. Uhlemeyer A. Project planning for systems with contactless energy and data transmission. *Materials of seminars of Drive Academy, SEW Eurodrive, Bruchsal, Germany, 3–7 dec., 2007.* 1 electron-optical disk CD–ROM.
2. Money L. Transportation energy and the future. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1984 (Russ. ed.: Mani L. Transport, energetika i budushchee. Moscow, Mir Publ., 1987. 160 p.).
3. Bayakov A.I. Matematicheskie modeli transformatorov pri analize silovoi chasti elektroprivodov [Mathematical models of transformers when analyzing power part of electric drives]. *Trudy Nizhnegorodskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. R.E. Alekseeva – Transactions of Nizhni Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev*, 2013, no. 5 (102), pp. 316–327.
4. Nemtsov M.V., Nemtsova M.L. *Elektrotehnika i elektronika* [Electrical engineering and electronics]. Moscow, Akademiya Publ., 2007. 424 p.
5. Gerasimov V.A., Kuvshinov G.E., Filozhenko A.Yu., Chepurin P.I. Issledovanie rezhimov raboty sistemy energoobespecheniya avtonomnogo podvodnogo apparata s beskontaktnoi peredachei energii [Study of power supply system operation modes of an autonomous underwater vehicle with contactless energy supply]. *Podvodnye issledovaniya i robototekhnika – Underwater Investigations and Robotics*, 2013, no. 2 (16), pp. 24–32.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Аносов Владимир Николаевич** – родился в 1946 году, д-р техн. наук, доцент, заведующий кафедрой ЭАПУ, НГТУ. Область научных интересов: автоматизированный электропривод специальных транспортных средств. Опубликовано свыше 100 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: anosovvn@gmail.com).

**Anosov Vladimir Nikolaevich** (b. 1946) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, head of the electric drive and industrial plant automation department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on automated electric drives of special vehicles. He is the author of more than 100 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: anosovvn@gmail.com).



**Кавешников Владимир Михайлович** – родился в 1946 году, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры ЭАПУ, НГТУ. Область научных интересов: автоматизированный электропривод специальных транспортных средств. Опубликовано свыше 100 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: vldi@yandex.ru).

**Kaveshnikov Vladimir Mikhailovich** (b. 1946) – Candidate of Sciences PhD (Eng.), associate professor, assistant professor at the electric drive and industrial plant automation department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on automated electric drives of special vehicles. He is the author of more than 100 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: vldi@yandex.ru).



**Орел Егор Олегович** – родился в 1995 году, бакалавр, студент кафедры ЭАПУ, факультет мехатроники и автоматизации, НГТУ. Область научных интересов: мехатронные системы. Опубликовано три научные работы. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: eg.orel@ya.ru).

**Orel Egor Olegovich** (b. 1995) – a master student at the electric drive and industrial plant automation department, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on mechatronic systems. He is the author of 3 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: eg.orel@ya.ru).

*Статья поступила 05 февраля 2018 г.  
Received February 05, 2018*

---

To references:

Anosov V.N., Kaveshnikov V.M., Orel E.O. Matematicheskoe opisanie istochnika pitaniya dlya beskontaktnogo podvoda energii kak elementa sistemy upravleniya [Mathematical description of a power supply source for contactless energy supply as a control system element]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp. 44–51. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-44-51.

УДК 621.396.96

**СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНОЙ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ  
ПОВЕРХНОСТНО-РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОБЪЕКТА****В.В. Артюшенко, А.В. Никулин, М.А. Степанов***Новосибирский государственный технический университет*

В статье рассмотрен синтез инвариантной к углу визирования геометрической модели поверхностно-распределенного объекта, составленной из четырех точек, излучающих статистически не связанные сигналы. Известный в настоящее время метод синтеза геометрических моделей, инвариантных к углу визирования, предполагает, что к излучателям подводятся некоррелированные нормальные случайные процессы с равной дисперсией, а конфигурация модели представляет собою квадрат. Установлено, что для получения инвариантных свойств модели данные условия не являются обязательными. Показано, что четырехточечная модель будет иметь независимые от угла визирования параметры распределения угловых шумов при расположении пар излучателей на ортогональных прямых и соблюдении ряда приведенных в статье требований к дисперсии сигналов, подаваемых на излучатели. Требуемое значение ширины распределения угловых шумов можно получить путем изменения расстояний между излучателями модели. Предложена конфигурация четырехточечной геометрической модели, допускающая управление параметрами ПРВ угловых шумов без перемещения излучающих точек. Получены аналитические выражения, позволяющие синтезировать инвариантную к углу визирования модель по заданным значениям параметров распределения угловых шумов. Приведены примеры синтеза четырехточечных геометрических моделей, инвариантных к углу визирования с использованием полученных аналитических соотношений. Полученные теоретические результаты подтверждены математическим моделированием.

*Ключевые слова:* угловые шумы, моделирование, отражение от распределенных объектов, инвариантная модель.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-52-63

**Введение**

При отражении электромагнитной волны от распределенного объекта (к такому относятся, например, поверхность Земли, морская поверхность, метеорологические образования и другие) возникают флуктуации фазового фронта. Эти флуктуации обусловлены интерференцией в точке наблюдения отраженных радиоволн от большого количества элементов объекта и, в первую очередь, приводят к тому, что измеренное угловое положение объекта также начинает флуктуировать. Это явление получило название угловых шумов. Оно было исследовано в рамках статистической теории радиолокации протяженных объектов такими учеными как Р.В. Островитянов, Ф.А. Басалов, Р. Делано, А.А. Монаков, Е.А. Штагер и рядом других [1–5]. В их работах показана значимость угловых шумов, изучены их свойства, а также предлагаются алгоритмы распознавания объектов на их основе. В частности, угловые шумы имеют принципиально важное значение для бортовых радиолокационных станций, работающих в режиме маловысотного полета, а также практически во всех задачах, связанных с измерением угловых

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-37-00073.

© 2018 В.В. Артюшенко, А.В. Никулин, М.А. Степанов

координат объектов (например, при определении координат цели головкой самонаведения или в ближнем воздушном бою). Очевидно, что при проведении моделирования радиолокационных отражений от распределенного объекта необходимо адекватно воспроизводить все их характеристики, в том числе и угловые шумы.

Для описания угловых шумов распределенных объектов используют плотность распределения вероятностей (ПРВ). В литературе показано, что ПРВ угловых шумов определяется выражением [1]

$$W(\gamma) = \frac{\mu_\gamma}{2(1 + \mu_\gamma^2(\gamma - m_\gamma)^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – выбранная относительная угловая координата [1];  $m_\gamma$  – математическое ожидание;  $\mu_\gamma$  – параметр, характеризующий эффективную «ширину» распределения.

Расчет характеристик распределения угловых шумов произвольного распределенного объекта сравнительно легко осуществить, если известно распределение по объему рассматриваемого объекта плотности интенсивности сигналов его элементарных отражателей  $F_r(x, y, z)$  [1, 5]. Для расчета параметров распределения можно воспользоваться следующими выражениями [1]:

$$m_\gamma = \frac{\int \gamma F_r(\gamma) d\gamma}{\int F_r(\gamma) d\gamma} = \frac{\int \gamma F_r(\gamma) d\gamma}{\sigma_H^2}, \quad \mu_\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_H^2}{\int \gamma (\gamma - m_\gamma)^2 F_r(\gamma) d\gamma}}, \quad (2)$$

где  $\sigma_H^2$  – мощность отраженного сигнала, равная сумме мощностей сигналов, отраженных от точек распределенного объекта.

Понятно, что для адекватного моделирования угловых шумов замещающая геометрическая модель должна обеспечить параметры распределения, равные соответствующим параметрам для реального объекта.

### 1. Постановка задачи

В [6] предложены геометрические модели, составленные из четырех излучающих точек, обладающие свойством инвариантности к углу визирования. Параметры ПРВ угловых шумов, формируемых такими моделями, не зависят от угла визирования. Математическое ожидание моделей, рассмотренных в [6], всегда равно нулю (в противном случае модель перестает быть инвариантной), а параметр  $\mu_\gamma$  определяется только геометрическим размером модели и никак не зависит от мощностей излучаемых сигналов.

На рис. 1 показана конфигурация предложенной в [6] инвариантной модели с четырьмя излучателями ( $\theta$  – угол визирования модели). Для синтеза данной модели излучатели следует расположить в вершинах квадрата, стороны которого равны [6–8]

$$L = \frac{2}{\mu_\gamma}. \quad (3)$$

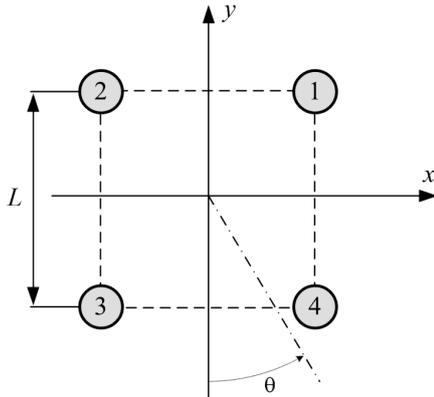


Рис. 1 – Четырехточечная модель с инвариантными свойствами

Fig. 1 – An invariant four-point model

Дисперсии сигналов, подводимых к излучателям модели, принимаются равными друг другу.

Для изменения эффективной «ширины» распределения угловых шумов, формируемых такой моделью, требуется изменить расстояние между излучателями. Однако при выполнении моделирования хотелось бы иметь возможность управлять значением параметра  $\mu_\gamma$  электрическим способом, т. е. путем изменения дисперсий сигналов, подводимых к излучателям.

Управление математическим ожиданием ПРВ угловых шумов такой модели не предполагается – для инвариантных моделей оно всегда равно нулю.

**Цель работы:** предложить способ синтеза четырехточечной геометрической модели, инвариантной к направлению визирования, управление параметрами ПРВ которой не требует перемещения излучателей.

## 2. Решение задачи

Рассмотрим четырехточечную геометрическую модель, показанную на рис. 2. Данная модель представляет собой четыре точечных излучателя, расположенных на плоскости. Положение каждого излучателя определяется расстоянием до начала координат  $L_i$  и углом  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

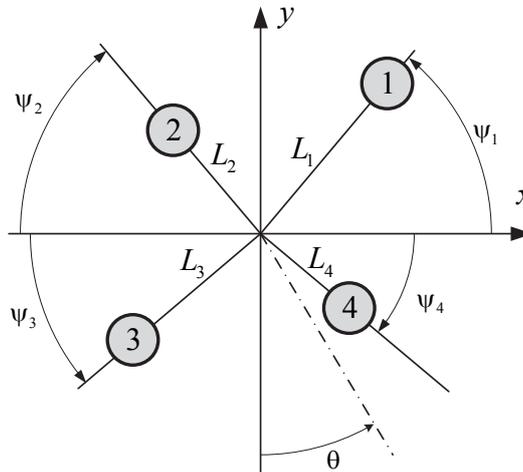


Рис. 2 – Четырехточечная геометрическая модель

Fig. 2 – A four-point geometric model

К излучателям модели подводятся сигналы, представляющие собой некоррелированные узкополосные случайные процессы с нормальным распределением мгновенных значений. Обозначим дисперсии сигналов как  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Запишем функцию распределения плотности интенсивности сигналов излучателей модели:

$$F_r(x, y) = \sigma_1^2 \delta(x - L_1 \cos \psi_1) \delta(y - L_1 \sin \psi_1) + \\ + \sigma_2^2 \delta(x + L_2 \cos \psi_2) \delta(y - L_2 \sin \psi_2) + \sigma_3^2 \delta(x + L_3 \cos \psi_3) \delta(y + L_3 \cos \psi_3) + \\ + \sigma_4^2 \delta(x - L_4 \cos \psi_4) \delta(y + L_4 \cos \psi_4), \quad (4)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция.

При визировании модели на рис. 2 под углом  $\theta$  ( $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ) можно найти проекции излучателей модели на обобщенную прямую  $\gamma$ , ортогональную линии визирования (рис. 3).

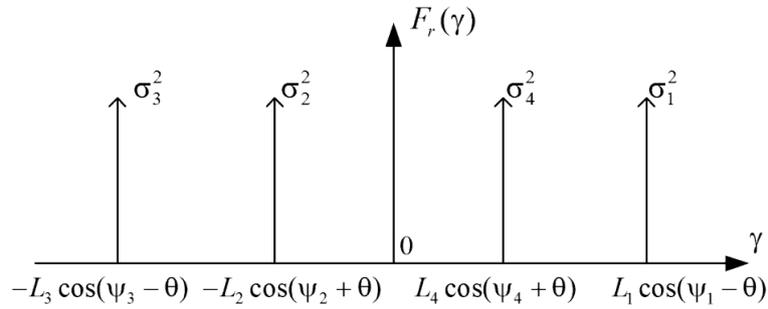


Рис. 3 – Функция распределения интенсивности сигналов излучателей модели

Fig. 3 – The intensity distribution function of the emitters of the model

Запишем выражения, определяющие значение математического ожидания и параметра  $\mu_\gamma$  распределения угловых шумов для рассматриваемой модели:

$$m_\gamma = \frac{\sigma_1^2 L_1 \cos(\psi_1 - \theta) - \sigma_3^2 L_3 \cos(\psi_3 - \theta) + \dots}{\sigma_H^2} \dots \\ \dots \frac{+ \sigma_4^2 L_4 \cos(\psi_4 + \theta) - \sigma_2^2 L_2 \cos(\psi_2 + \theta)}{\sigma_H^2}, \quad (5)$$

$$\mu_\gamma^2 = \frac{\sigma_H^2}{\sigma_1^2 L_1^2 \cos^2(\psi_1 - \theta) + \sigma_3^2 L_3^2 \cos^2(\psi_3 - \theta) + \sigma_4^2 L_4^2 \cos^2(\psi_4 + \theta) + \dots} \dots \\ \dots \frac{+ \sigma_2^2 L_2^2 \cos^2(\psi_2 + \theta) - m_{\gamma 4}^2 \sigma_H^2}{\sigma_H^2}, \quad (6)$$

где  $\sigma_H^2 = \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2$ .

Как видно из выражений (5), (6) значение математического ожидания и параметра  $\mu_\gamma$  ПРВ угловых шумов зависит от угла визирования  $\theta$ .

На основании выражений (5) и (6) запишем систему уравнений, гарантирующих инвариантность параметров распределения угловых шумов модели к углу визирования:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 L_1 \cos(\psi_1 - \theta) - \sigma_3^2 L_3 \cos(\psi_3 - \theta) + \sigma_4^2 L_4 \cos(\psi_4 + \theta) - \\ - \sigma_2^2 L_2 \cos(\psi_2 + \theta) = 0; \\ \sigma_1^2 L_1^2 \cos^2(\psi_1 - \theta) + \sigma_3^2 L_3^2 \cos^2(\psi_3 - \theta) + \sigma_4^2 L_4^2 \cos^2(\psi_4 + \theta) + \\ + \sigma_2^2 L_2^2 \cos^2(\psi_2 + \theta) = \text{const}. \end{cases} \quad (7)$$

Первое уравнение системы (7) гарантирует равенство нулю математического ожидания (5). Второе – независимость параметра  $\mu_\gamma$  от угла визирования при нулевом математическом ожидании.

Поиск решения системы уравнений (7) относительно дисперсий  $\sigma_i^2$  при произвольных значениях параметров, определяющих расположение излучателей, крайне затруднен. Рассмотрим частные случаи конфигурации модели, в которых удается получить решение.

### 3. Первый способ решения системы (7)

Первое уравнение системы (7) может быть выполнено если:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 L_1 = \sigma_3^2 L_3; \\ \sigma_2^2 L_2 = \sigma_4^2 L_4; \\ \psi_1 = \psi_3; \\ \psi_2 = \psi_4. \end{cases} \quad (8)$$

Попарное равенство углов  $\psi_1 = \psi_3$  и  $\psi_2 = \psi_4$  говорит о том, что излучатели № 1 и 3 лежат на одной прямой, так же как и излучатели № 2 и 4.

При выполнении системы равенств (8) инвариантность параметра  $\mu_\gamma$  фактически определяется только знаменателем выражения (6), который в таком случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} A \cos^2(\psi_1 - \theta) + B \cos^2(\psi_2 + \theta) + C \cos^2(\psi_3 - \theta) + \\ + D \cos^2(\psi_4 + \theta) = \text{const}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A = \sigma_1^2 L_1^2$ ,  $B = \sigma_2^2 L_2^2$ ,  $C = \sigma_3^2 L_3^2$ ,  $D = \sigma_4^2 L_4^2$ .

Исключить зависимость выражения (9) от угла  $\theta$  возможно, если две прямые, проходящие через пары излучателей (№ 1, 3) и (№ 2, 4), будут ортогональны.

Тогда углы, определяющие положения излучателей, будут равны:  $\psi_1 = \psi$ ,  $\psi_2 = \frac{\pi}{2} - \psi$ ,  $\psi_3 = \psi$ ,  $\psi_4 = \frac{\pi}{2} - \psi$ . При этом выражение (9) примет вид

$$A \cos^2(\psi - \theta) + B \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi + \theta\right) + C \cos^2(\psi - \theta) + D \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi + \theta\right) = \text{const.}$$

Используя формулы приведения, получим:

$$\begin{aligned} A \cos^2(\psi - \theta) + B \sin^2(\psi - \theta) + C \cos^2(\psi - \theta) + D \sin^2(\psi - \theta) = \\ = (A + C) \cos^2(\psi - \theta) + (B + D) \sin^2(\psi - \theta) = \text{const.} \end{aligned} \quad (10)$$

Для того чтобы выражение (10) не зависело от угла  $\theta$ , необходимо выполнение условия:

$$A + C = B + D$$

или

$$\sigma_1^2 L_1^2 + \sigma_3^2 L_3^2 = \sigma_4^2 L_4^2 + \sigma_2^2 L_2^2.$$

Таким образом, решение системы (7) сводится к выполнению ряда требований:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1^2 / \sigma_3^2 &= L_3 / L_1; \\ \sigma_2^2 / \sigma_4^2 &= L_4 / L_2; \\ \sigma_1^2 / \sigma_2^2 &= L_2 (L_2 + L_4) (L_1 (L_1 + L_3))^{-1}; \\ \sigma_3^2 / \sigma_4^2 &= L_4 (L_2 + L_4) (L_3 (L_1 + L_3))^{-1}; \\ \sigma_H^2 &= \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2; \\ \psi_1 &= \psi_3 = \psi; \\ \psi_2 &= \psi_4 = \frac{\pi}{2} - \psi. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Параметры распределения угловых шумов при этом равны:

$$m_\gamma = 0, \quad \mu_\gamma^2 = \frac{\sigma_H^2}{\sigma_1^2 L_1^2 + \sigma_3^2 L_3^2}. \quad (12)$$

Путем несложных преобразований выражение для  $\mu_\gamma$  можно привести к виду

$$\mu_\gamma = \sqrt{\frac{1}{L_1 L_3} + \frac{1}{L_2 L_4}}. \quad (13)$$

Таким образом, значение параметра  $\mu_\gamma$  при соблюдении выражений (11) определяется только геометрическими размерами модели и не зависит от дисперсии сигналов, подводимых к излучателям.

Решив систему уравнений (11) относительно дисперсий сигналов, подводимых к излучателям, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \sigma_H^2 \frac{L_2 L_3 L_4}{(L_1 + L_3)(L_1 L_3 + L_2 L_4)}, \\ \sigma_2^2 &= \sigma_H^2 \frac{L_1 L_3 L_4}{(L_2 + L_4)(L_1 L_3 + L_2 L_4)}, \\ \sigma_3^2 &= \sigma_H^2 \frac{L_1 L_2 L_4}{(L_1 + L_3)(L_1 L_3 + L_2 L_4)}, \\ \sigma_4^2 &= \sigma_H^2 \frac{L_1 L_2 L_3}{(L_2 + L_4)(L_1 L_3 + L_2 L_4)}.\end{aligned}\tag{14}$$

Полученные выражения позволяют синтезировать модель с инвариантными свойствами, не требующую равной дисперсии сигналов, подводимых к излучателям, и конфигурации излучателей в виде правильного многоугольника. Однако при использовании допущений (11) модель не позволяет управлять значением  $\mu_\gamma$  электрическим способом.

Заметим, что, положив в системе (11)  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L$ , получим геометрическую модель с инвариантными свойствами, рассмотренную в [6]. Ее излучатели расположены в вершинах квадрата. Сигналы всех излучателей имеют одинаковую дисперсию, равную четверти от  $\sigma_H^2$ .

#### 4. Второй способ решения системы (7)

Еще одним решением системы (7) является случай расположения трех излучателей модели в вершинах правильного треугольника с равными дисперсиями и четвертого излучателя в центре системы координат (рис. 4).

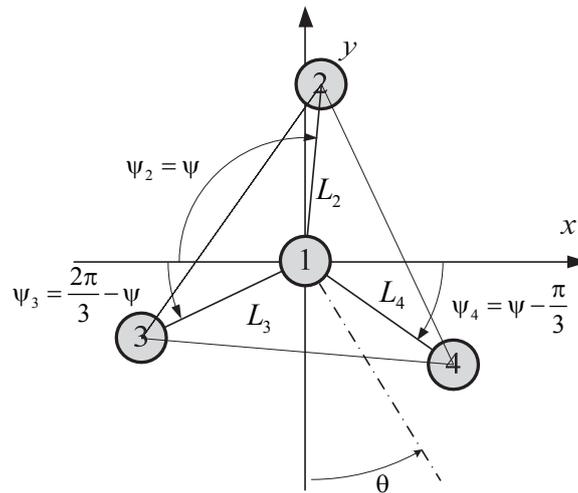


Рис. 4 – Инвариантная четырехточечная геометрическая модель

Fig. 4 – A four-point geometric model

В таком случае система (7) примет вид

$$\begin{cases} \sigma^2 L \cos(\psi_3 - \theta) + \sigma^2 L \cos(\psi_4 + \theta) - \sigma^2 L \cos(\psi_2 + \theta) = 0; \\ \sigma^2 L^2 \cos^2(\psi_3 - \theta) + \sigma^2 L^2 \cos^2(\psi_4 + \theta) + \sigma^2 L^2 \cos^2(\psi_2 + \theta) = \text{const}. \end{cases} \quad (15)$$

где  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma$ , а  $L_2 = L_3 = L_4 = L$ . Поскольку излучатель № 1 расположен в центре системы координат ( $L_1 = 0$ ), значение дисперсии сигнала, подводимого к нему, не оказывает влияния на инвариантность модели.

Для правильного треугольника углы, определяющие положение излучателей, связаны следующими соотношениями:  $\psi_2 = \psi$ ,  $\psi_3 = 2\pi/3 - \psi$ ,  $\psi_4 = \psi - \pi/3$ . Подставив эти соотношения в (15) и учитывая, что  $\cos(2\pi/3 - \psi - \theta) = -\cos(\pi/3 + \psi + \theta)$ , получим:

$$\begin{cases} \sigma^2 L \cdot 0 = 0; \\ \sigma^2 L^2 \cdot 1,5 = \text{const}(\theta). \end{cases}$$

Таким образом, условия инвариантности параметров распределения угловых шумов для рассматриваемого случая выполняются вне зависимости от значений  $\sigma$  и  $L$ .

Параметры распределения угловых шумов равны:

$$m_\gamma = 0, \quad \mu_\gamma^2 = \frac{2\sigma_H^2}{3\sigma^2 L^2}. \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что для управления параметром  $\mu_\gamma$  достаточно изменять соотношение дисперсий сигналов  $\sigma_H^2/\sigma^2$ . При этом значение  $\mu_\gamma$  изменится в диапазоне

$$\mu_\gamma \in [\sqrt{2}/L, +\infty). \quad (17)$$

Левая граница диапазона обусловлена тем, что отношение  $\frac{\sigma_H}{\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 3\sigma^2}}{\sigma}$

имеет минимум в том случае, если значение дисперсии сигнала центрального излучателя равно нулю  $\sigma_H/\sigma = \sqrt{3}$ .

Дисперсии сигналов, подводимых к излучателям модели, можно рассчитать по выражениям:

$$\sigma^2 = \frac{2\sigma_H^2}{3\mu_\gamma^2 L^2}, \quad \sigma_1^2 = \sigma_H^2 \left( \frac{\mu_\gamma^2 L^2 - 2}{\mu_\gamma^2 L^2} \right). \quad (18)$$

## 5. Пример синтеза модели

Исходными данными для синтеза модели являются параметры распределения угловых шумов ( $\mu_\gamma$  и  $m_\gamma$ ) и значение мощности отраженного сигнала  $\sigma_H^2$ .

Например, синтезируем геометрическую модель для радиолокационного объекта с параметрами:  $\mu_\gamma = 1,5$ ,  $m_\gamma = 0$  и  $\sigma_H^2 = 1$  двумя способами.

1. Исходя из выражений (13) и (14) можно найти расстояния от начала координат до излучателей и дисперсии сигналов излучателей.

На рис. 5, а показана синтезированная модель с рассчитанными параметрами:  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 2,828$ ,  $L_3 = 0,5$ ,  $L_4 = 1,414$ ,  $\psi_1 = \psi_3 = 30^\circ$ ,  $\psi_2 = \psi_4 = 60^\circ$ . Дисперсии сигналов, подводимых к излучателям:  $\sigma_1^2 = 0,296$ ,  $\sigma_2^2 = 0,037$ ,  $\sigma_3^2 = 0,593$ ,  $\sigma_4^2 = 0,074$ .

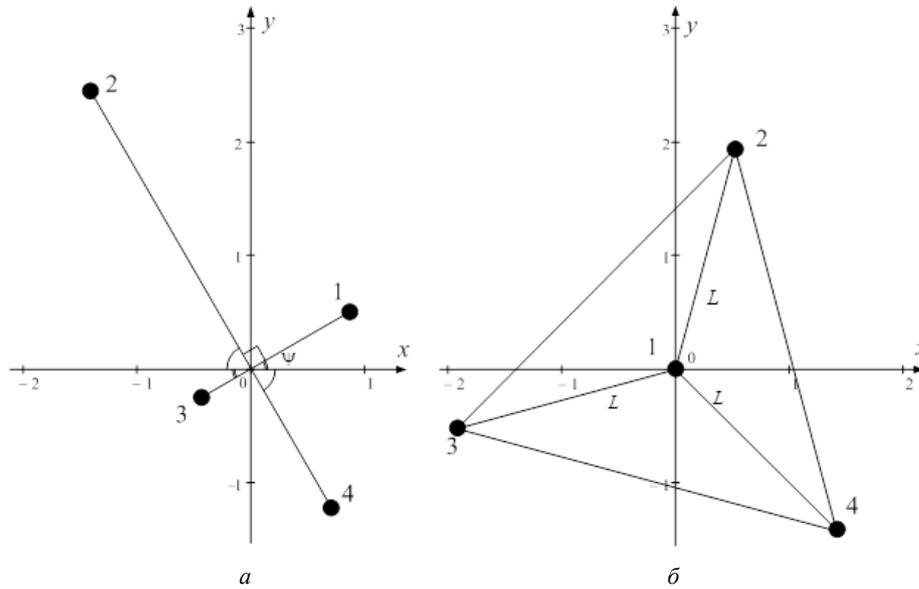


Рис. 5 – Расположение излучателей инвариантной модели  
Fig. 5 – The location of the emitters of the proposed invariant model

2. Расположим излучатели модели согласно рис. 5, б. Выберем значение  $L$  таким образом, чтобы для заданного  $\mu_\gamma$  выполнялось условие (15). По выражениям (18) рассчитаем значения дисперсий сигналов, подводимых к излучателям модели.

На рис. 5, б показана синтезированная модель с рассчитанными параметрами:  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = L_3 = L_4 = 2$ ,  $\psi_1 = 0^\circ$ ,  $\psi_2 = 105^\circ$ ,  $\psi_3 = 15^\circ$ ,  $\psi_4 = 45^\circ$ . Дисперсии сигналов, подводимых к излучателям:  $\sigma_1^2 = 0,778$ ,  $\sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = 0,074$ .

В обоих случаях полученные значения параметров распределения угловых шумов не зависят от угла визирования  $\theta$  и соответствуют заданным. В модели, синтезированной первым способом, управлять значением  $\mu_\gamma$  можно только путем изменения расстояний между излучателями. В модели, синтезированной вторым способом, изменить значение  $\mu_\gamma$  можно электрическим способом, т.е. путем изменения дисперсий сигналов, подводимых к излучателям.

### Заключение

Предложена четырехточечная геометрическая модель поверхностно-распределенного объекта, инвариантная к углу визирования, допускающая управление параметром ширины ПРВ угловых шумов при помощи изменения мощностей излучаемых сигналов. Сформулированы требования к геометрической конфигурации излучающей части такой модели. Получены аналитические соотношения, позволяющие осуществлять ее синтез по заданным значениям параметров ПРВ угловых шумов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Островитянов Р.В., Басалов Ф.А.** Статистическая теория радиолокации протяженных целей. – М.: Радио и связь, 1982. – 232 с.
2. **Skolnik M.I.** Radar handbook. – 3<sup>rd</sup> ed. – New York: McGraw Hill, 2008. – 1352 p.
3. **Фельдман Ю.И., Мандуровский И.А.** Теория флуктуаций локационных сигналов, отраженных распределенными целями / под ред. Ю.И. Фельдмана. – М.: Радио и связь, 1988. – 272 с.
4. **Зубкович С.Г.** Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности. – М.: Советское радио, 1968. – 224 с.
5. **Штагер Е.А.** Рассеяние радиоволн на телах сложной формы. – М.: Радио и связь, 1986. – 184 с.
6. **Артюшенко В.В., Никулин А.В.** Алгоритм имитации отражений от земной поверхности на основе использования моделей, инвариантных к углу наблюдения // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Общетеχνическая (ОТ). – 2017. – № 4. – С. 6–10.
7. **Artyushenko V.V., Savinykh I.S.** Modeling of reflections from the Earth's surface using the two-dimensional geometric models // 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON): proceedings, 18–22 September 2017, Novosibirsk Akademgorodok, Russia. – Novosibirsk: IEEE, 2017. – P. 323–326. – doi: 10.1109/SIBIRCON.2017.8109898.
8. **Артюшенко В.В., Киселев А.В., Степанов М.А.** Задание отражающих свойств распределенных объектов в терминах шумов координат // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2015. – № 3 (28). – С. 17–28. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-17-28.

### SYNTHESIS OF AN INVARIANT FOUR-POINT MODEL OF A SURFACE-DISTRIBUTED OBJECT

**Artyushenko V.V., Nikulin A.V., Stepanov M.A.**  
*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The synthesis of a four-point geometric model of a surface-distributed object invariant to the viewing angle is considered in the article. The previously proposed method for synthesizing invariant geometric models assumes that uncorrelated normal random processes with equal dispersion are supplied to emitters and the configuration of the model is a square. It is established that these conditions are not necessary for obtaining invariant properties of the model. It is shown that the four-point model will have angle noise distribution parameters independent of the viewing angle if pairs of emitters are located on orthogonal lines and a number of requirements for the dispersion of signals supplied to the emitters are met. The desired value of the width of angle noise distribution can be obtained by changing distances between the emitters of the model and dispersion of signals supplied to the emitters. The configuration of the four-point geometric model that allows the control of the parameters of the PDF angle noise without moving the emitters is proposed. Analytical expressions which allow synthesizing a model invariant to the viewing angle from the given values of angle noise distribution parameters are obtained. An example of the synthesis of four-point geometric models invariant to the viewing angle using the obtained analytical relations is given. The theoretical results obtained are confirmed by numerical simulation.

*Keywords:* angle noise, simulation, reflections from distributed objects, invariant model.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-52-63

## REFERENCES

1. Ostrovityanov R.V., Basalov F.A. *Statisticheskaya teoriya radiolokatsii protyazhennykh tselei* [Statistical theory of extended objectives radar]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982. 232 p.
2. Skolnik M.I. *Radar handbook*. 3rd ed. New York, McGraw Hill, 2008. 1352 p.
3. Fel'dman Yu.I., Mandurovskii I.A. *Teoriya fluktuatsii lokatsionnykh signalov, otrazhennykh raspredelennymi tsel'yami* [Theory of fluctuations of radar signals reflected by distributed targets]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1988. 272 p.
4. Zubkovich S.G. *Statisticheskie kharakteristiki radiosignalov, otrazhennykh ot zemnoi poverkhnosti* [Statistical characteristics of radio signals reflected from the ground surface]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1968. 224 p.
5. Shtager E.A. *Rasseyaniye radiovoln na telakh slozhnoi formy* [The scattering of radio waves by bodies of complex shape]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1986. 184 p.
6. Artyushenko V.V., Nikulin A.V. Algoritm imitatsii otrazhenii ot zemnoi poverkhnosti na osnove ispol'zovaniya modelei, invariantnykh k uglu nablyudeniya [An algorithm for simulation of ground return signals based on using models are invariant to viewing angle change]. *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Obshchetechnicheskaya (OT) – Problems of electronics. General Engineering series*, 2017, no. 4, pp. 6–10.
7. Artyushenko V.V., Savinykh I.S. Modeling of reflections from the Earth's surface using the two-dimensional geometric models. *2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON): proceedings*, 18–22 September 2017, Novosibirsk Akademgorodok, Russia, pp. 323–326. doi: 10.1109/SIBIRCON.2017.8109898.
8. Artyushenko V.V., Kiselev A.V., Stepanov M.A. Zadanie otrazhayushchikh svoystv raspredelennykh ob'ektov v terminakh shumov koordinat [Definition of reflective properties of distributed objects in terms of angle noises]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2015, no. 3 (28), pp. 17–28. doi: 10.17212/1727-2769-2015-3-17-28.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Артюшенко Вадим Валерьевич** – родился в 1992 году, канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: имитация радиотехнических сигналов. Опубликовано 20 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: artushenkomail@mail.ru).

**Artyushenko Vadim Valerievich** (b. 1992) – Candidate of Sciences (Eng.), an assistant professor at the Department of Radio Receiving and Radio Transmitting Devices, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on radio signal simulation. He is the author of 20 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: artushenkomail@mail.ru).



**Никулин Андрей Викторович** – родился в 1989 году, канд. техн. наук, доцент кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: имитационное моделирование сложной радиоэлектронной обстановки, радиолокация, радиосвязь. Имеет более 40 публикаций. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: nil\_rtu@ngs.ru).

**Nikulin Andrey Victorovich** (b. 1989) – Candidate of Sciences (Eng.), an associate professor at the Department of Radio Receiving and Radio Transmitting Devices, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on simulation of complex electronic environment, radar detecting and ranging, and radio communication. He is the author of more than 40 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: nil\_rtu@ngs.ru).



**Степанов Максим Андреевич** – родился в 1982 году, канд. техн. наук, доцент кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств. Область научных интересов: имитационное моделирование сложной радиоэлектронной обстановки, радиолокация, радиосвязь. Опубликовано более 50 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: m.stepanov@corp.nstu.ru).

**Stepanov Maksim Andreevich** (b. 1982) – Candidate of Sciences (Eng.), an associate professor at the Department of Radio Receiving and Radio Transmitting Devices, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on simulation of complex electronic environment, radar detecting and ranging, and radio communication. He is the author of more than 50 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: m.stepanov@corp.nstu.ru).

*Статья поступила 17 сентября 2018 г.  
Received September 17, 2018*

---

To Reference:

Artyushenko V.V., Nikulin A.V., Stepanov M.A. Sintez invariantnoi chetyrekhtocheynoi modeli poverkhnostno-raspredeennogo ob"ekta [Synthesis of an invariant four-point model of a surface-distributed object]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp. 52–63. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-52-63.

УДК621.314

**АНАЛИЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЕМПФЕРНОЙ ОБМОТКИ ДЛЯ  
СОЗДАНИЯ ПУСКОВОГО МОМЕНТА ТРЕХКАСКАДНОГО  
СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА****М.А. Жарков, А.В. Сапсалева, С.А. Харитонов,  
Г.С. Зиновьев, В.В. Жуловян***Новосибирский государственный технический университет*

В последние годы при проектировании электротехнического оборудования летательных аппаратов в части систем электроснабжения отдается предпочтение совмещению функций стартера (в частности газотурбинных двигателей) и системы генерирования электрической энергии в одном агрегате, который получил название «стартер-генератор». Такое техническое решение позволяет улучшить массогабаритные показатели и повысить надежность систем электроснабжения летательных аппаратов. Эта тенденция особенно отчетливо стала проявляться в связи с реализацией концепции «полностью электрического самолета», что потребовало значительного увеличения мощности и функциональных возможностей генераторов и устройств преобразования параметров электрической энергии как основных, так и дополнительных каналов генерирования. В статье рассмотрена возможность реализации двигательных режимов работы трехкаскадного бесконтактного генератора с демпферной обмоткой, что позволяет использовать его в качестве стартера в процессе запуска газотурбинного двигателя. Найдены соотношения, позволяющие определить длительность первого этапа запуска газотурбинного двигателя.

*Ключевые слова:* газотурбинный двигатель, трехкаскадный синхронный генератор, электростартерный запуск, асинхронный режим пуска.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-64-76

**Введение**

Для функционирования газотурбинного двигателя (ГТД) необходимо создать условия для подачи топлива в камеру сгорания, такие как расход воздуха и давление. Для создания этих условий ротор ГТД необходимо раскрутить до оборотов, необходимых для выхода на режим малого газа.

Наибольшее распространение для запуска ГТД летательных аппаратов получили турбостартерный и электрический способы запуска [1]. При турбостартерном запуске в качестве стартера используется турбокомпрессорный стартер, представляющий собой малогабаритный газотурбинный двигатель с ограниченной продолжительностью работы в стартерном режиме. Использование турбостартеров усложняет производство и эксплуатацию газотурбинного двигателя, увеличивает общее время запуска.

Этим объясняется преимущественное применение для запуска газотурбинных двигателей на летательных аппаратах электрических способов, при которых запуск осуществляется либо непосредственно стартером, либо стартер-генератором. В качестве источника электрической энергии используются бортовые аккумуляторные батареи или аэродромный источник электрической энергии. Электростартер является отдельной конструктивной единицей относительно большой массы и габаритов и выполняет только функции запуска. В дальнейшем во время полета он не используется, увеличивая полетную массу самолета.

Поэтому при проектировании электротехнического оборудования современных летательных аппаратов, как правило, отдается предпочтение совмещению функций стартера газотурбинных двигателей и системы генерирования электрической энергии в одном агрегате, который получил название «стартер-генератор» (СТГ) [2, 3]. Такое совмещение позволяет уменьшить полетную массу летательного аппарата и повысить надежность системы электроснабжения и удачно вписывается в концепцию полностью электрического самолета [3, 4].

В то же время отечественной промышленностью выпускаются бесконтактные генераторы с вращающимся выпрямителем серии ГТ, которые в настоящее время широко используются на самолетах и вертолетах [5]. Как отмечается в [5], генераторы этого типа обладают высокими удельными массогабаритными показателями и возможностями достижения требуемого качества электрической энергии. Несмотря на то что машины данного типа выпускаются как генераторы, существует возможность их использования в двигательном режиме для осуществления запуска газотурбинного двигателя. В статье рассматривается один из возможных способов запуска ГТД с помощью бесконтактного генератора с вращающимся выпрямителем.

### 1. Генераторный режим СТГ

Бесконтактные генераторы с вращающимся выпрямителем серии ГТ представляют собой трехкаскадный электромеханический преобразователь, содержащий основную электрическую машину с демпферной клеткой, возбудитель и подвозбудитель. Схема соединения обмоток электрических машин бесконтактного генератора и цепей их питания приведена на рис. 1.

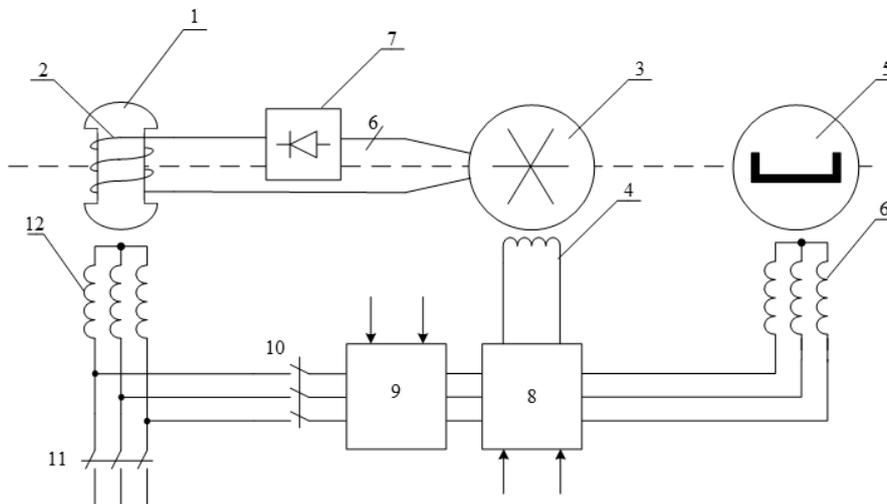


Рис. 1 – Структурная схема соединения обмоток электрических машин бесконтактного генератора и цепей их питания

Fig. 1 – A block diagram of connection of windings of electric machines of a contactless generator and their supply circuits

Основная электрическая машина и возбудитель представляют собой синхронный генератор с электромагнитным возбуждением, а подвозбудитель – магнитоэлектрический генератор. Индуктор 1 основной электрической машины с обмоткой возбуждения 2, якорная обмотка возбудителя 3, вращающийся выпрямитель 7

и постоянные магниты индуктора подвозбудителя 5 располагаются на общем валу, связанным с валом ГТД. В генераторном режиме работы, который является основным для рассматриваемого электромеханического преобразователя, обмотка возбуждения основной электрической машины получает питание постоянным током от вращающегося выпрямителя, входы которого связаны с выходами якорной обмотки возбудителя. При вращении роторного вала в якорной обмотке 6 подвозбудителя индуцируется трехфазная система ЭДС, которая через промежуточный выпрямитель обеспечивает питание постоянным током обмотки возбуждения 4 возбудителя. В обмотке якоря 3 возбудителя также индуцируется трехфазная система ЭДС. Напряжение обмотки якоря после выпрямления во вращающемся выпрямителе 7 обеспечивает питание обмотки возбуждения основной электрической машины.

На рис. 1 обозначены также блок регулирования 8 и блок управления режимами работы основной электрической машины 9. Линейные контакторы 10 и 11 осуществляют переключение якорной обмотки основной электрической машины 12 в генераторном и стартерном режиме работы.

## 2. Стартерный режим СТГ

Возможность использования основной электрической машины в качестве стартера, т. е. в двигательном режиме, вытекает из условия обратимости электрических машин. При рассмотрении данного режима будем исходить из того, что СТГ должен обеспечить запуск газотурбинного двигателя за время 45...50 с, а максимальная мощность запуска не превышает 20 % номинальной мощности СТГ в режиме генерирования [6, 7].

Из условия обратимости следует, что для использования основной электрической машины (синхронного генератора) при запуске ГТД в качестве стартера необходимо обеспечить ее работу в режиме синхронного двигателя. Известно, что пуск синхронного двигателя непосредственным включением в сеть имеет весьма ограниченные возможности. Для пуска синхронных двигателей применяют специальные способы, сущность которых состоит в предварительной раскрутке ротора до скорости, близкой к синхронной, при которой обеспечивается магнитная связь между статором и ротором.

Для первоначальной раскрутки общего ротора всех машин электромеханического преобразователя без изменения его конструкции могут быть реализованы частотный и асинхронный способы пуска синхронных двигателей. Рассмотрим асинхронный пуск основной электрической машины. Реализовать данный режим позволяет наличие в полюсных наконечниках системы возбуждения основной электрической машины демпфирующих стержней, которые образуют на роторе короткозамкнутую клетку. Если обеспечить питание якорной обмотки 12 основной электрической машины трехфазной системой токов, не подавая питание на обмотку возбуждения, то взаимодействие токов, индуцируемых в короткозамкнутых стержнях демпферной обмотки, с магнитным полем якорной обмотки создаст асинхронный электромагнитный момент.

Таким образом, весь процесс фазы запуска ГТД, реализуемый посредством бесконтактного синхронного генератора системы электроснабжения летательного аппарата, можно разбить на два этапа. На первом этапе запуска реализуется асинхронный режим работы основной электрической машины. Электромагнитный момент, создаваемый стартером при работе в асинхронном режиме, обеспечивается демпферной клеткой. Роторная обмотка возбуждения на данном этапе не запитывается. Основной момент сопротивления, который необходимо преодолеть стартер-генератору в процессе запуска газотурбинного двигателя, создает

компрессор. Этот момент пропорционален квадрату частоты вращения  $\omega$  компрессора:

$$M_c = A_k \omega^2, \quad (1)$$

где  $A$  – постоянная, характеризующая параметры компрессора.

Таким образом, в начальном процессе пуска стартер-генератор должен развить момент, необходимый для преодоления только инерции вращающихся частей [8]. Поэтому асинхронный момент, создаваемый демпферной клеткой основной электрической машины при подключении ее статорной обмотки к трехфазной системе токов, оказывается достаточным для осуществления начальной раскрутки вала газотурбинного двигателя.

Первый этап фазы запуска позволяет достичь необходимой скорости вращения, при которой становится возможным использование напряжений магнитоэлектрического генератора подвозбудителя, индуцируемых в его обмотке якоря, для вычисления угла положения ротора. Это позволяет перейти ко второму этапу фазы запуска газотурбинного двигателя, в процессе которого обеспечивается работа основной электрической машины в режиме синхронного двигателя с зависимой коммутацией фаз якорной обмотки. Для этого подается питание на ее обмотку возбуждения, а для синхронизации осей магнитных потоков ротора и статора используется полученная информация о положении вала машины, в соответствии с которой реализуется полеориентированная векторная система управления [9].

Команду на переход ко второму этапу фазы запуска формирует блок регулирования  $\delta$ , в котором контролируется напряжение, индуцируемое в обмотках якоря подвозбудителя. По этой команде обмотка якоря  $b$  подвозбудителя через выпрямитель, располагаемый в блоке регулирования, подключается к обмотке возбуждения  $5$  возбудителя, питаемая ее постоянным током. Обмотка якоря синхронного возбудителя  $3$  соединяется через блок вращающегося выпрямителя  $7$  с обмоткой возбуждения  $2$  основного генератора. В результате обмотка возбуждения основной электрической машины также получает питание постоянным током. По этой же команде (перехода ко второму этапу фазы запуска) блок регулирования  $\delta$  на основании напряжений обмотки якоря  $b$  подвозбудителя формирует сигналы, определяющие угловое положение ротора относительно полюсов обмотки статора  $12$  основной электрической машины. Эти сигналы поступают на вход блока  $9$ . На основании этих сигналов в блоке  $9$  формируется закон управления силовыми ключами инвертора, обеспечивающий оптимальную ориентацию полюсов обмотки статора  $12$  основной электрической машины относительно магнитного потока обмотки возбуждения  $2$ . В результате во втором этапе фазы запуска основная электрическая машина переводится в режим синхронного двигателя с коммутацией фаз обмотки статора  $3$ , зависящей от их положения относительно магнитного поля индуктора  $1$ . (Синхронные двигатели, работающие с зависимой коммутацией фаз, часто называют вентильными двигателями, в англоязычной литературе – BLDC или PMSM.)

Второй этап запуска заканчивается, когда частота вращения роторного модуля оказывается достаточной для запуска и зажигания газотурбинного двигателя. Рекомендуемое значение скорости вращения вала для стабильной и надежной работы газотурбинного двигателя составляет 55 % от номинальной скорости газотурбинного двигателя, при этой скорости работа основной электрической машины в режиме стартера может быть завершена [12].

После запуска и зажигания газотурбинного двигателя линейный контактор  $10$  размыкается, а линейный контактор  $11$  замыкает свои контакты. Главная электрическая машина переходит в режим бесконтактного синхронного генератора.

Трехфазное электрическое напряжение генератора через линейный переключатель  $11$  подается в бортовую сеть самолета. Для стабилизации напряжения может быть использован полупроводниковый преобразователь тока в обмотке возбуждения генератора, входящий в состав блока регулирования  $\delta$ .

### 3. Оценка времени пуска на первом этапе фазы разгона

Как известно, демпфирующие стержни синхронного генератора выполняют функции успокоительной обмотки и должны обеспечивать механическую прочность ротора, повышать коэффициент синусоидальной формы с одновременным обеспечением равномерности магнитного поля в рабочем пространстве, уменьшать последствия плохо распределенных трехфазных нагрузок и демпфировать вибрации во время переходных нагрузок. Но они не рассчитаны для выполнения функций беличьей клетки при работе машины в режиме асинхронного двигателя.

Прямой пуск синхронных машин в асинхронном режиме привлекает своей простотой и экономичностью [10], но требует разработки специальной конструкции пусковой клетки, так как в процессе пуска в ротор выделяется значительная энергия, которая может приводить к его перегреву. Вариант, связанный с усложнением конструкции ротора трехкаскадного синхронного генератора летательных аппаратов, для практической реализации вряд ли приемлем. Поэтому следует рассмотреть вопросы, связанные с ограничением напряжения питания и временем работы на первом этапе фазы запуска ГТД. Понятно, что асинхронный пуск при пониженном напряжении уменьшает воздействие пусковых токов на синхронную машину, но количество энергии, выделяющейся в роторе мощных электрических машин, уменьшается незначительно – на 10...11 % [11]. Следовательно, в качестве основного фактора следует оценить время работы на первом этапе фазы запуска ГТД. Это тем более важно при наложенных ограничениях на время запуска газотурбинного двигателя (45...50 с), и максимальную мощность запуска (менее 20 % номинальной мощности СТГ в режиме генерирования).

При анализе электромеханических процессов примем следующие допущения.

1. Скорость протекания электромагнитных процессов в переходных режимах по отношению к скорости протекания электромеханических процессов пренебрежимо мала.

2. Связь между валами электрических машин трехкаскадного агрегата абсолютно жесткая.

3. Силами трения в шарикоподшипниковых узлах роторной системы бесконтактного генератора пренебрегаем.

В результате данных допущений расчетную модель электромеханических процессов можно описать классическим уравнением движения привода

$$M - M_c = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (2)$$

где  $M$  – асинхронный электромагнитный момент электрической машины;  $M_c$  – статический момент сопротивления движению;  $J$  – момент инерции электромеханизмов трехкаскадного генератора, приведенный к оси вращения вала роторной системы;  $\omega$  – угловая скорость вала роторной системы.

В соответствии с принятыми допущениями момент статического сопротивления движению определяется уравнением (1), с учетом которого уравнение (2) приводится к виду

$$M - A_k \omega^2 = J \frac{d\omega}{dt}.$$

Представим данное уравнение относительно производной по времени:

$$dt = J \frac{d\omega}{M - A_k \omega^2}.$$

Для оценки прогнозируемого времени пуска положим, что в процессе первого этапа запуска блок управления режимами работы основной электрической машины обеспечивает постоянство ее электромагнитного момента во всем диапазоне изменения частоты вращения. С учетом данного условия после интегрирования прогнозируемое время пуска до заданного значения скорости  $\omega_1$  определится выражением

$$t_{p1} = \frac{J}{2\sqrt{MA_k}} \ln \left| \frac{\sqrt{M/A_k} + \omega_1}{\sqrt{M/A_k} - \omega_1} \right|.$$

Обозначим  $T = J / \sqrt{MA_k}$  – инерционная постоянная времени [9], тогда относительное значение прогнозируемого времени пуска до заданной скорости будет равно:

$$\tau = \frac{t_{p1}}{T} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{M/A_k} + \omega_1}{\sqrt{M/A_k} - \omega_1} \right|. \quad (3)$$

На рис. 2 представлено семейство характеристик  $\tau = f(\omega_1)$  при  $M / A_k = \text{const}$ .

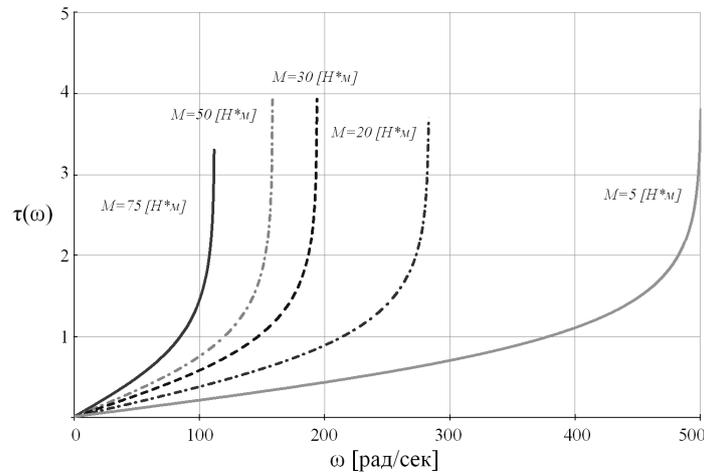


Рис. 2 – Семейство характеристик  $\tau = f(\omega_1)$

Fig. 2 – A set of curves of  $\tau = f(\omega_1)$

Анализ характеристик показывает, что рациональное значение времени запуска не должно превышать двух относительных величин. Эта величина определяет время выхода на установившийся режим в процессе первого этапа фазы запуска ГТД. Следовательно, дальнейшее увеличение времени первого этапа фазы запуска фактически не приводит к увеличению скорости вращения вала роторной системы. Таким образом, можно рекомендовать ограничение времени первого этапа фазы запуска на уровне 1,5 относительных единиц.

#### 4. Результаты моделирования

Моделирование проводилось в программном пакете PSIM, реализованная модель была максимально приближена к реальному устройству, в том числе была создана модель электромеханической части трехкаскадного генератора. На рис. 3 представлена модель силовой части стартер-генераторной системы, в которой трехкаскадный генератор представлен системой из трех электрических машин, объединенных общим валом. Реализация момента сопротивления на валу была выполнена с помощью блока моментной нагрузки, входным параметром которого была функция зависимости момента от угловой частоты вращения вала.

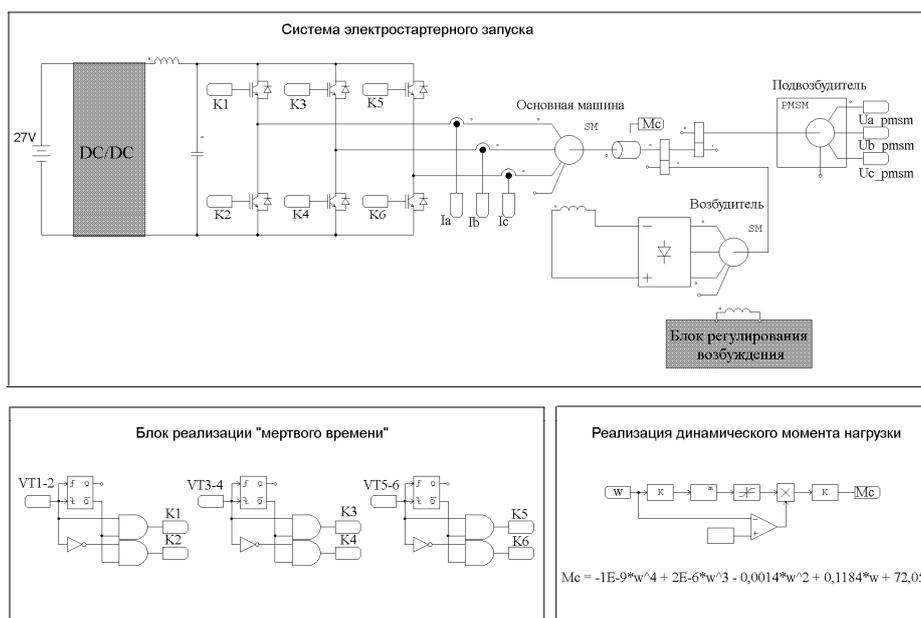


Рис. 3 – Математическая модель силовой части стартер-генераторной системы

Fig. 3. A mathematical model of the power part of the starter-generator system

Также была реализована дискретная система управления на основе DLL-блока, с помощью которого реализуется имитация выполнения алгоритмов, написанных на языке программирования С (рис. 4).

Все результаты моделирования представлены в относительных величинах, за базовые параметры были взяты номинальные параметры скорости, действующего значения тока и напряжения для генераторного режима работы синхронной машины, электромагнитный момент и момент сопротивления приводились к максимальному моменту сопротивления на валу машины. Представленные на рис. 5 осциллограммы соответствуют диапазону времени от нуля до момента перехода в синхронный режим. Осциллограммы соответствуют асинхронному пуску трехкаскадного синхронного генератора, электромагнитный момент и обороты вала имеют колебательный характер с затуханием.

Результаты работы стартер-генераторной системы в пусковом режиме представлены на рис. 6–8, осциллограммы скорости вала ( $n^*$ ) и задания на скорость ( $n_{ref}^*$ ), осциллограмма тока фазы А статорной обмотки синхронной машины ( $I_a^*$ ), осциллограммы момента сопротивления на валу ( $T_{сопр}^*$ ) и электромагнитного момента синхронной машины ( $T_{эм}^*$ ) соответственно. Моделирование

проводилось при изменении момента нагрузки на валу, в соответствии с работой реального газотурбинного двигателя самолета. Номинальное значение задания на скорость вращения вала соответствует 55 % от номинальной скорости вращения вала в режиме генерирования, данная скорость необходима и достаточна для уверенного выхода ГТД на режим малого газа.

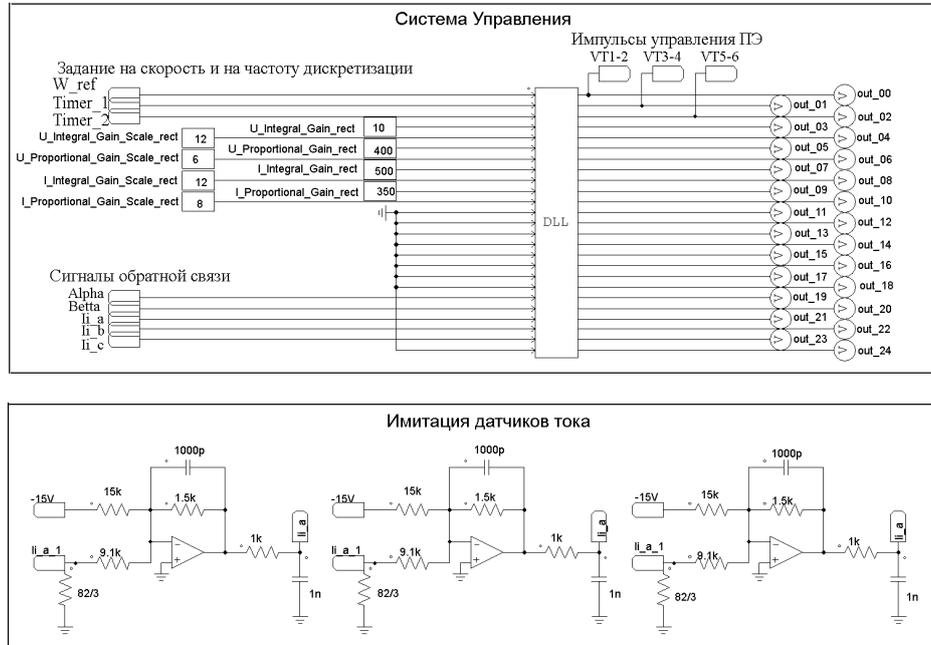


Рис. 4 – Математическая модель микропроцессорной системы управления  
 Fig. 4. A mathematical model of a microprocessor control system

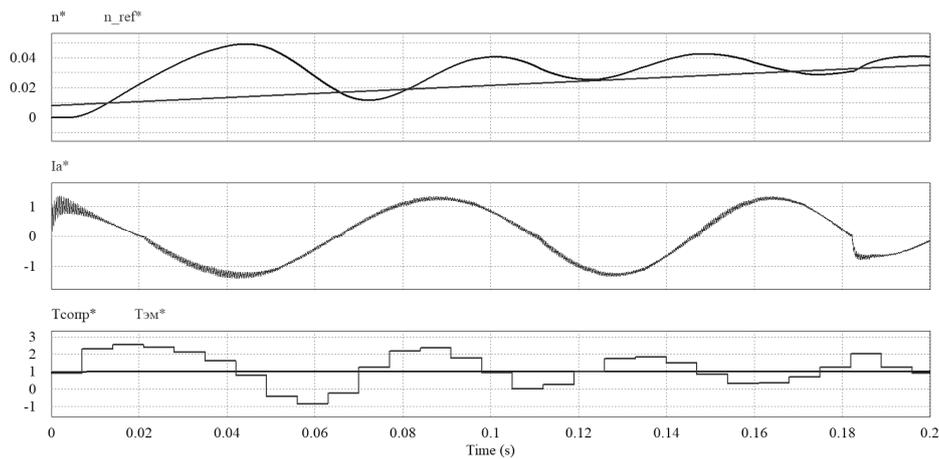


Рис. 5 – Осциллограммы скорости вала, тока и момента машины на участке асинхронного запуска  
 Fig. 5 – Oscillograms of the shaft speed, current and torque of the machine in the asynchronous start length

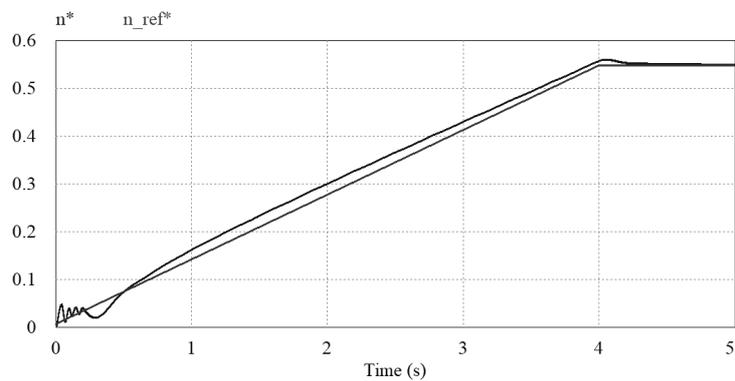


Рис. 6 – Осциллограммы скорости вала синхронного генератора

Fig. 6 – Oscillograms of the shaft speed of a synchronous generator

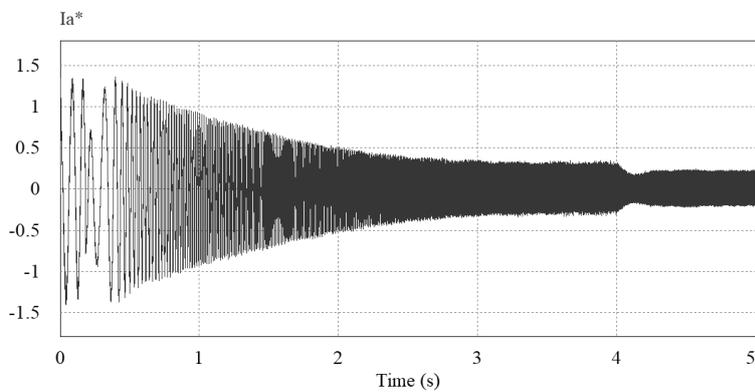


Рис. 7 – Осциллограмма тока фазы А синхронного генератора

Fig. 7 – Oscillograms of the A phase current of a synchronous generator

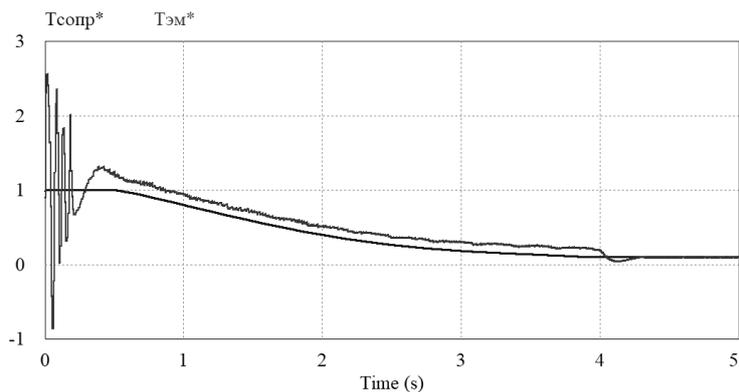


Рис. 8 – Осциллограммы момента сопротивления и электромагнитного момента синхронного генератора

Fig. 8 – Oscillograms of the moment of resistance and the electromagnetic moment of a synchronous generator

Результаты моделирования показывают, что электромагнитный момент, создаваемый в асинхронном режиме пуска, достаточен для преодоления начального момента сопротивления и вывода основной электрической машины на скорость вращения вала, необходимую для перехода в синхронный режим работы.

### Заключение

1. Показана возможность реализации двигательных режимов работы трехкаскадного бесконтактного генератора с демпферной обмоткой.
2. Возможность реализации двигательных режимов работы трехкаскадного бесконтактного генератора с демпферной обмоткой позволяет использовать его в качестве стартера в процессе запуска газотурбинного двигателя.
3. Найдены соотношения, позволяющие определить длительность первого этапа фазы запуска ГТД.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Авиационное оборудование / Ю.А. Андриевский, Ю.Е. Воскресенский, Ю.П. Доброленский и др.; под ред. Ю.П. Доброленского. – М.: Воениздат, 1989. – 248 с.
2. **Zharkov M.A., Kharitonov S.A., Simin V.S.** Electric starter mode of synchronous generator with permanent // 14th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices. – Erlagol, Altai, 2013. – P. 392–394.
3. Experiment results of laboratory tests of electrical starting system powered by a DC source / M.A. Zharkov, P.A. Bachurin, S.A. Kharitonov, D.V. Korobkov, R.Yu. Sarakhanova, V.S. Simin // 17th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices. – Erlagol, Altai, 2016. – P. 623–627.
4. Электрический самолет: от идеи до реализации: монография / А.В. Левин, И.И. Алексеев, С.А. Харитонов, Л.К. Ковалев. – М.: Машиностроение, 2010. – 288 с.
5. Электрический самолет: концепция и технологии: монография / А.В. Левин, С.М. Мусин, С.А. Харитонов, К.Л. Ковалев, А.А. Герасин, С.П. Халютин. – Уфа: УГАТУ, 2014. – 388 с.
6. Электрооборудование летательных аппаратов. Т. 1: учебник для вузов / под ред. С.А. Грузкова. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 568 с.
7. **Кац Б.М., Жаров Э.С., Винокуров В.К.** Пусковые системы авиационных газотурбинных двигателей. – М.: Машиностроение, 1976. – 220 с.
8. **Локай В.И., Максимова М.К., Стрункин В.А.** Газовые турбины двигателей летательных аппаратов: теория, конструкция и расчет. – М.: Машиностроение, 1991. – 512 с.
9. Авиационные электрические машины. Ч. 1. Машины постоянного и переменного тока. Трансформаторы / К.С. Бобов, В.А. Винокуров, В.С. Аскерко, М.В. Кравчук, Г.И. Панасюк. – М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1960. – 642 с.
10. **Ставровский Б.А., Панов В.И.** Автоматизированный электропривод летательных аппаратов. – Киев: [б. и.], 1974. – 392 с.
11. Система частотного пуска мощного турбогенератора высокотемпературной гелиевой энергоустановки / Е.Ю. Анишев, А.В. Каржев, Г.Б. Лазарев, А.Н. Новаковский, А.Т. Султанов // Вестник ВНИИЭ. – М., 2004.
12. **Глебов И.А., Шулаков Н.В., Крутяков Е.А.** Проблемы пуска сверхмощных синхронных машин. – Л.: Наука, 1988.
13. **Барвинский А.П., Козлова Ф.Г.** Электрооборудование самолетов: учебник для средних специальных учебных заведений. – М.: Транспорт, 1990. – 320 с.

**ANALYSIS OF THE USE OF DAMPER WINDINGS TO CREATE  
A STARTING TORQUE OF THE THREE-STAGE  
SYNCHRONOUS GENERATOR**

**Zharkov M.A., Sapsalev A.V., Kharitonov S.A.,  
Zinoviev G.S., Zhulovyan V.V.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

In recent years while designing electrical systems of aircraft electrical equipment preference is given to combining the functions of a starter and a system for generating electrical energy in one unit, which was named the starter-generator. This solution allows improving mass and dimensions parameters and increasing reliability. This trend became especially apparent in connection with the implementation of the concept of a "fully electric aircraft," which led to a significant increase in the capacity and functionality of generators and devices for converting electrical energy into both primary and additional generation channels, which in turn made it possible to realize the motor (starter) mode using the generation channels. The article considers the possibility of realizing the motor operating modes of a three-stage brushless generator with a damper winding, which allows it to be used as a starter in the process of starting a gas turbine engine. The relations to determine the duration of the first stage of starting the gas turbine engine have been found.

*Keywords:* electric starting, three-stage synchronous generator, gas turbine engine, starter-generator, asynchronous start mode.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-64-76

REFERENCES

1. Dobrolenskii Yu.P., ed. *Aviatsionnoe oborudovanie* [Aircraft equipment]. Moscow, Voenizdat Publ., 1989. 248 p.
2. Zharkov M.A., Kharitonov S.A., Simin V.S. Electric starter mode of synchronous generator with permanent. *14th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices*, Erlagol, Altai, 2013, pp. 392–394.
3. Zharkov M.A., Bachurin P.A., Kharitonov S.A., Korobkov D.V., Sarakhanova R.Yu., Simin V.S. Experiment results of laboratory tests of electrical starting system powered by a DC source. *17th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices*, Erlagol, Altai, pp. 623–627.
4. Levin A.V., Alekseev I.I., Kharitonov S.A., Kovalev L.K. *Elektricheskii samolet: ot idei do realizatsii* [An electric plane. From idea to realization]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2010. 288 p.
5. Levin A.V., Musin S.M., Kharitonov S.A., Kovalev L.K., Gerasin A.A., Khalyutin S.P. *Elektricheskii samolet: kontseptsiya i tekhnologii* [An electric plane. Concept and technology]. Ufa, UGATU Publ., 2014. 388 p.
6. Gruzkov S.A., ed. *Elektrooborudovanie letatel'nykh apparatov*. T. 1 [Electrical equipment of aircraft. Vol. 1]. Moscow, MEI Publ., 2005. 568 p.
7. Kats B.M., Zharov E.S., Vinokurov V.K. *Puskovye sistemy aviatsionnykh gazoturbinnnykh dvigatelei* [Launch systems of aviation gas turbine engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 220 p.
8. Lokai V.I., Maksutova M.K., Strunkin V.A. *Gazovye turbiny dvigatelei le-tatel'nykh apparatov: teoriya, konstruksiya i raschet* [Gas turbines of aircraft engines. Theory, construction and calculation]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991. 512 p.
9. Bobov K.S., Vinokurov V.A., Askerko B.C., Kravchuk M.V., Panasyuk G.I. *Aviatsionnye elektricheskii mashiny*. Ch. 1. *Mashiny postoyannogo i peremennogo toka. Transformatory* [Aviation electrical machines. Pt. 1. Machines for direct and alternating current. Transformers]. Moscow, VVIA im. N.E. Zhukovskogo, 1960. 642 p.
10. Stavrovskii B.A., Panov V.I. *Avtomatizirovanniy elektroprivod letatel'nykh apparatov* [Automated electric drive of aircraft]. Kiev, 1974. 392 p.

11. Anishev E.Yu., Karzhev A.V., Lazarev G.B., Novakovskii A.N., Sultanov A.T. Sistema chastotnogo puska moshchnogo turbogeneratora vysokotemperaturnoi gelievoi energoustanovki [Frequency start-up system for a powerful turbo-generator of a high-temperature helium power plant]. *Vestnik VNIIE*. Moscow, 2004.
12. Glebov I.A., Shulakov N.V., Krutyakov E.A. *Problemy puska sverkhmoshchnykh sinkhronnykh mashin* [Problems of launching heavy-duty synchronous machines]. Leningrad, Nauka Publ., 1988. 196 p.
13. Barvinskii A.P., Kozlova F.G. *Elektrooborudovanie samoletov* [Electrical equipment of aircraft]. Moscow, Transport Publ., 1990. 320 p.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Жарков Максим Андреевич** – родился в 1988 году, ведущий инженер-конструктор, Институт силовой электроники, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: силовая электроника, авиационные системы генерирования, электропривод. Опубликовано 25 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: maks.zharkoff@yandex.ru).

**Zharkov Maksim Andreevich** (b. 1988) – a leading design engineer, Institute of Power Electronics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on power electronics, aircraft generating systems, and electric drive. He is the author of 25 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: maks.zharkoff@yandex.ru).



**Сапсалева Анатолий Васильевич** – родился в 1950 году, д-р техн. наук, профессор кафедры электроники и электротехники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: силовая электроника, безредукторные электроприводы и их системы управления, электрические машины. Опубликовано более 120 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: sapsalevav@ngs.ru).

**Sapsalev Anatoliy Vasil'yevich**, (b. 1950) – Doctor of Science (Eng.), professor at the Department of Electronics and Electrical Engineering, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on gearless electric drives and their control systems and power electronics. He is author of more than 120 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: sapsalevav@ngs.ru).



**Харитонов Сергей Александрович** – родился в 1950 году, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электроники и электротехники, директор Института силовой электроники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: силовая электроника, авиационные системы генерирования, непосредственные преобразователи частоты, системы накопления электрической энергии. Опубликовано более 300 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: Kharit1@yandex.ru).

**Kharitonov Sergey Aleksandrovich** (b. 1950) – Doctor of Science (Eng.), professor, head of the Department of Electronics and Electrical Engineering, Director of Institute of Power Electronics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on power electronics, aircraft generating systems, and direct frequency converters. He is the author of 300 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: kharit1@yandex.ru).



**Зиновьев Геннадий Степанович** – д-р техн. наук, проф. кафедры электроники и электротехники (ЭЭ), Новосибирский государственный технический университет (НГТУ), научный руководитель НИЛ ЭОПС. Область научных интересов: энергоэффективные регуляторы переменного напряжения, плавный пуск двигателей, силовая электроника. Автор учебника по основам силовой электроники, пяти изданий, трех монографий, более 110 патентов и авторских свидетельств, более 250 публикаций статей и докладов. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: genstep@mail.ru).

**Zinoviev Gennady Stepanovich** – Doctor of Sciences (Eng.), a professor at the Electronics and Electrical Engineering Department in the Novosibirsk State Technical University, a research supervisor of the Research Laboratory “Optimization of Energy in Converting Systems”. His research interests are currently focused on energy-efficient AC voltage regulators, soft-start of engines, and power electronics. He is the author of the textbook on power electronics, three monographies devoted to electromagnetic compatibility of converters, more than 110 patents and over 200 publications. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: genstep@mail.ru).



**Жуловян Владимир Владимирович** – родился в 1936 году, д-р техн. наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет. Область научных интересов: разработка теории электро-механических преобразователей энергии с модулированным магнитным потоком, электропривод. Опубликовано 35 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: zhulovyan@mail.ru).

**Zhulovyan Vladimir Vladimirovich** (b. 1936), Doctor of Sciences (Eng.), professor, Novosibirsk State Technical University. His research interests include development of the theory of electromechanical energy converters with a modulated magnetic flux, and electric drives. He has published 35 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: zhulovyan@mail.ru).

*Статья поступила 18 июля 2018 г.  
Received July 18, 2018*

---

To References:

Zharkov M.A., Sapsalev A.V., Kharitonov S.A., Zinoviev G.S., Zhulovyan V.V. Analiz ispol'zovaniya dempfernoi obmotki dlya sozdaniya puskovogo momenta trekhkaskadnogo sinkhronnogo generator [Analysis of the use of damper windings to create a starting torque of three-stage synchronous generator]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp. 64–76. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-64-76.

УДК 550.837:517.958

**О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
В ЗАДАЧАХ АЭРОЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ В СРЕДАХ С РЕЛЬЕФОМ  
И СЛОЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

**Д.С. Киселев, Н.В. Кондратьев, Ю.И. Кошкина,**

**Д.В. Вагин, М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик**

*Новосибирский государственный технический университет*

Работа посвящена методу геометрической 3D-инверсии данных аэроэлектроразведки во временной области в существенно неоднородных геологических средах, характеризующихся резкими перепадами высот рельефа поверхности Земли, изменяющимися толщинами контрастных по проводимости слоев, наличием латеральных неоднородностей проводимости в слоях, перекрывающих локальные целевые объекты. В рассматриваемых ситуациях, во-первых, невозможно «визуально» по форме снятых сигналов определить наличие и положение целевого объекта, а во-вторых, неучет сложной формы рельефа поверхности Земли и границ между другими слоями геоэлектрической модели может приводить либо к пропуску целевых объектов, либо к появлению ложных аномалий. Метод основан на использовании специальной параметризации, которая включает в себя физические свойства структурных частей геоэлектрической модели и их геометрические характеристики. Важной отличительной особенностью является параметризация изогнутых границ между слоями геоэлектрической модели с помощью опорных точек, определяющих плавную деформацию этих границ в процессе нелинейной 3D-инверсии. Для описания таких поверхностей используются бикубические сплайны. Работоспособность предлагаемого подхода показана на примере обработки синтетических данных, полученных для сложной геоэлектрической модели среды с рельефом и верхним проводящим латерально неоднородным слоем переменной толщины, построенной как обобщение результатов интерпретации данных электромагнитных зондирований по ряду площадей Восточной Сибири. Показано, что за небольшое количество итераций местоположение (как в плане, так и по глубине) целевого объекта в виде кимберлитовой трубки и его основные характеристики были определены с достаточно высокой точностью.

*Ключевые слова:* аэроэлектроразведка, метод конечных элементов, 3D-инверсия, рельеф, электромагнитное поле.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-77-92

### **Введение**

При проведении аэроэлектромагнитных исследований важнейшую роль играет качество обработки получаемых данных. Одной из основных задач аэроэлектроразведки является поиск твердых полезных ископаемых на небольших и средних глубинах [1, 2]. Целевые объекты (рудные тела, кимберлитовые трубки) в этом случае имеют небольшие размеры, а вмещающие их геологические среды характеризуются, как правило, латерально неоднородными по проводимости и по тол-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (№ гранта МК-5010.2018.9).

© 2018 Д.С. Киселев, Н.В. Кондратьев, Ю.И. Кошкина, Д.В. Вагин, М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик

щине верхними слоями, перекрывающими слои с целевыми объектами, и довольно существенными перепадами высот в рельефе поверхности Земли.

Все эти факторы делают практически бессмысленным применение распространенных на сегодняшний день локальных одномерных инверсий для определения местоположения целевых объектов. В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвященных вопросам 3D-инверсии. Многие авторы рассматривают мелкоячеистые инверсии (основанные на разбиении исследуемого объема на мелкие ячейки), в которых определяются значения удельной электрической проводимости [3–7]. Однако эти инверсии, в зависимости от уровня регуляризирующих добавок в минимизируемом функционале невязки между расчетными и практическими данными, дают либо слишком «гладкие» геоэлектрические модели, либо, наоборот, лишком «пестрые» картины проводимости. В первом случае как минимум очень плохо определяются границы целевых объектов, а как максимум целевые объекты могут быть вообще не выявлены на фоне других «размытых» неоднородностей. Во втором же случае резко растет количество «эквивалентных» решений и вполне могут быть получены ложные целевые объекты. По сути, эти манипуляции, нацеленные на фактически «ручную» настройку параметров регуляризации, делают систему инверсии субъективной, зависящей от конкретного пользователя, что резко снижает доверие к получаемым геологическим моделям.

Альтернативным подходом является 3D-инверсия, основанная на представлении геоэлектрической модели геологической среды с использованием комбинации физических (проводимости) и геометрических (описывающих границы структурных частей геоэлектрической модели) параметров [8–14]. Применение таких подходов позволяет существенно снизить число искомых параметров геоэлектрической модели, тем самым снижая вычислительные затраты и число возможных эквивалентных моделей и соответственно улучшая сходимость инверсии. Кроме того, это позволяет практически без увеличения вычислительных затрат использовать адаптивные регуляризации, что освобождает пользователя от необходимости каких-либо действий по управлению процессом нелинейной инверсии, улучшает сходимость инверсии и обеспечивает возможность получения «геологически» адекватных моделей.

Однако в работах [9–13], в которых были использованы геометрические 3D-инверсии, не рассматриваются такие часто встречающиеся на практике ситуации, когда рельеф поверхности Земли и искривленные границы между геологическими слоями характеризуются резкими перепадами высот, в то время как в работах [15, 16] показано существенное влияние этого фактора на измеряемый сигнал. В работе [17] был рассмотрен подход к геометрической 3D-инверсии для ситуации с искривленными, но фиксированными геологическими границами, что несколько сужает ее возможности.

В данной работе мы рассмотрим метод 3D-инверсии, также основанный на совместном поиске геометрических и физических параметров, но в котором в искомые параметры геоэлектрической модели будут входить не только параметры, описывающие границы восстанавливаемых неоднородностей по латерали внутри геологических слоев и значения проводимости в них, но и параметры, характеризующие форму искривленных границ между слоями, а также проводимости слоев вмещающей среды. Такая параметризация позволит наиболее полно описать геологическую модель, снизить зависимость от априорных данных, и в результате повысить достоверность восстанавливаемых геоэлектрических моделей геологической среды.

### 1. Параметризация геоэлектрической модели геологической среды в задачах аэроэлектроразведки и математический аппарат 3D-инверсии

Геоэлектрическая модель представляется набором субгоризонтальных слоев, количество которых может быть взято из априорных геологических данных или определено из 1D-инверсии. В каждом из слоев в рамках обследуемой области задается блочная структура, представляющая собой ряды блоков, ориентированных вдоль некоторого направления. Будем считать, что это направление совпадает с осью  $X$ . Тогда неизвестными параметрами могут являться  $x$ -координаты границ отдельных блоков,  $y$ -координаты рядов блоков, а также значения удельной электрической проводимости внутри каждого блока. Каждая из внутренних границ как между соседними блоками, так и между рядами блоков характеризуется одним параметром, что позволяет восстанавливать геоэлектрическую модель как «непрерывную». Внешние (в плане) границы блоков как по  $x$ -, так и по  $y$ -координате могут перемещаться независимо от внешних границ соседних блоков. Очевидно, что в этом случае при сжатии блоковой структуры (т. е. при смещении ее крайних левых границ вправо или крайних правых границ влево) освободившееся место занимает «внешняя» среда – в данном случае среда с удельной проводимостью соответствующего слоя, значение которой также входит в вектор искомых параметров. Форма верхних и нижних границ блоков (по вертикали, т. е. в определенном смысле «по  $Z$ ») повторяет форму поверхностей, определяющих границы между соответствующими слоями геоэлектрической модели.

Все поверхности (поверхность Земли и границы между слоями) описываются с помощью бикубических сплайнов [18], которые, в свою очередь, строятся по наборам точек  $\{(x_p^m, y_p^m, z_p^m), p = 1 \dots P_m\}$ , где  $m$  – номер соответствующей поверхности (поверхность Земли, границы между слоями);  $P_m$  – число точек, использованных для ее описания [19].

При этом предусмотрено два способа параметризации этих поверхностей при решении обратной задачи. В первом случае форма поверхности является фиксированной: например, повторяет рельеф поверхности Земли, которая фиксируется в процессе аэросъемки и включается в исходные данные при выполнении инверсии, или является строго горизонтальной и др. В этом случае параметром является приращение вдоль вертикальной оси ( $Z$ ) всех точек  $(x_p^m, y_p^m, z_p^m)$ , описывающих эту поверхность (по которым строится сплайн для представления ее в конечно-элементной сетке [19]). Во втором случае форма поверхности определяется в процессе инверсии. В этом случае задается начальная форма этой поверхности (например, повторяющая рельеф поверхности Земли или строго горизонтальная) и вводится несколько опорных точек, расположенных в плане по некоторой регулярной сетке, с помощью которых эта форма будет изменяться. Параметрами в этом случае будут являться приращения  $z$ -координаты этих точек. Коррекция поверхности осуществляется следующим образом. После нахождения значений этих параметров на очередной итерации нелинейной инверсии с помощью билинейного интерполянта осуществляется расчет приращений значений  $z$ -координат для всех точек  $(x_p^m, y_p^m, z_p^m)$ , по которым строится описывающий подбираемую поверхность сплайн, и строится новая поверхность.

В зависимости от выбранного способа параметризации поверхности (или поверхностей) в вектор искомых параметров для каждой восстанавливаемой границы

геоэлектрической модели добавляется либо один параметр, либо несколько – по числу заданных опорных точек для подбора формы поверхности.

Компоненты вектора параметров, описывающих геоэлектрическую модель, ищутся путем минимизации следующего функционала:

$$\Phi^\alpha(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^K \sum_{l=1}^L (\omega_{il} \delta \varepsilon_{il}(\mathbf{b}))^2 + \sum_{m=1}^M \alpha_m (b_m - \bar{b}_m) \rightarrow \min_{\mathbf{b}}, \quad (1)$$

где  $K$  – количество положений приемно-генераторной установки аэросистемы;  $L$  – количество временных каналов;  $\delta \varepsilon_{il}(\mathbf{b})$  – разность теоретических  $\varepsilon_{il}$  и измеренных  $\tilde{\varepsilon}_{il}$  значений сигналов ЭДС в приемнике для  $i$ -го положения приемно-генераторной установки в  $l$ -й момент времени;  $M$  – количество искоемых параметров, являющихся компонентами вектора  $\mathbf{b}$ ;  $\bar{b}_m$  – значение  $m$ -го параметра  $b_m$  на предыдущей итерации.

Значения весовых функций  $\omega_{il}$  выбираются равными  $1/\tilde{\varepsilon}_{il}$ , при этом, если  $\tilde{\varepsilon}_{il}$  принимает значение ниже некоторого заданного порога  $\bar{\varepsilon}_{il}$ , определяемого уровнем ошибки измерений для каждой конкретной аэросистемы, то значение весовой функции берется равным  $1/\bar{\varepsilon}_{il}$ . Регуляризирующие параметры  $\alpha_m$  выбираются адаптивно в процессе решения обратной задачи. Регуляризирующая добавка с параметрами  $\alpha_m$  обеспечивает поиск очередного приближения искоемых параметров в заданных диапазонах значений, что позволяет не нарушать геометрию структурных частей геологической модели и не приводит к нефизическим значениям их удельной электрической проводимости.

Представляя значения  $\delta \varepsilon_{il}(\mathbf{b})$  в виде первых двух слагаемых ряда Тейлора в окрестности значений параметров на предыдущей итерации  $\bar{\mathbf{b}}$ , получим

$$\delta \varepsilon_{il}(\mathbf{b}) \approx \delta \varepsilon_{il}(\bar{\mathbf{b}}) + \sum_{m=1}^M \left. \frac{\partial(\delta \varepsilon_{il})}{\partial b_m} \right|_{\mathbf{b}=\bar{\mathbf{b}}} \Delta b_m, \quad (2)$$

где  $\Delta b_m = b_m - \bar{b}_m$ .

Способ вычисления производных  $\frac{\partial(\delta \varepsilon_{il})}{\partial b_m}$  существенно зависит от типа параметров.

Если параметр  $b_m$  соответствует координате границы между блоками (рядами блоков) или значению проводимости внутри блока, для вычисления производных  $\frac{\partial(\delta \varepsilon_{il})}{\partial b_m}$  решается следующее векторное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{A}}^{s/m} + \sigma^m \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{s/m}}{\partial t} = (\sigma^m - \sigma) \bar{\mathbf{E}}. \quad (3)$$

В уравнении (3) поле  $\bar{\mathbf{E}}$  является результатом решения прямой задачи, описанной в работе [19], для значений параметров  $\bar{b}_m$ , полученных на предыдущей итерации и определяющих текущее распределение удельной проводимости  $\sigma(x, y, z)$ . Значение функции  $\sigma^m(x, y, z)$  отлично от значений функции

$\sigma(x, y, z)$  только в местах, где изменилась проводимость из-за приращения значения  $\bar{b}_m$  параметра  $b_m$  на величину  $\partial b_m$ .

В этом случае значения производных невязок сигналов (ЭДС) в приемниках  $\frac{\partial(\delta\varepsilon_{il})}{\partial b_m} = \frac{\partial\varepsilon_{il}}{\partial b_m}$  определяются по значениям  $\bar{\mathbf{A}}^{slm}(x, y, z, t)$  в виде  $-\frac{\partial(\nabla \times \bar{\mathbf{A}}^{slm})}{\partial t} \frac{k_r}{\partial b_m}$ , где  $k_r$  – момент приемника.

Вариационная постановка и конечноэлементная аппроксимация для уравнения (3) строится так же, как и при решении прямой задачи [19]. Принцип построения конечноэлементной сетки также является аналогичным [19, 20], однако размеры шагов сетки берутся в два раза большими и увеличивается коэффициент разрядки. В результате вычислительные затраты на решение уравнения (3) по сравнению с решением прямой задачи сокращаются более чем на порядок.

Если параметр  $b_m$  соответствует геометрическим параметрам, описывающим поверхности между слоями геоэлектрической модели, или значениям проводимости слоев, для вычисления производных  $\frac{\partial(\delta\varepsilon_{il})}{\partial b_m}$  решается задача, полностью аналогичная прямой задаче [19], но при этом распределение проводимости определяется с учетом изменения соответствующего параметра  $b_m$  на  $\partial b_m$ . В этом случае значения производных невязок сигналов (ЭДС) в приемниках  $\frac{\partial\varepsilon_{il}}{\partial b_m}$  определяются

в виде  $\nabla \times (\bar{\mathbf{E}}^m - \bar{\mathbf{E}}) \frac{k_r}{\partial b_m}$ , где  $\bar{\mathbf{E}}^m$  является результатом решения прямой задачи в

области, полученной в результате изменения значения  $\bar{b}_m$  параметра  $b_m$  на значение  $\bar{b}_m + \partial b_m$ . Заметим, что конечноэлементная сетка для вычисления  $\bar{\mathbf{E}}^m$  должна быть полностью топологически эквивалентна сетке, используемой для решения прямой задачи, т.е. прообразы этих сеток (в шаблонных координатах [19]) должны быть одинаковыми.

Подставляя соотношение (2) в (1), получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^\alpha(\mathbf{b}) = & \sum_{i=1}^K \sum_{l=1}^L \left( \omega_{il} \left( \delta\varepsilon_{il}(\bar{\mathbf{b}}) + \sum_{m=1}^M \frac{\partial(\delta\varepsilon_{il})}{\partial b_m} \Big|_{\mathbf{b}=\bar{\mathbf{b}}} \Delta b_m \right) \right)^2 + \\ & + \sum_{m=1}^M \alpha_m (\Delta b_m)^2 \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{b}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Минимизация (4) приводит к СЛАУ вида

$$(\mathbf{A} + \alpha)\Delta \mathbf{b} = \mathbf{f}, \quad (5)$$

где компоненты матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора правой части  $\mathbf{f}$  вычисляются с помощью соотношений

$$A_{ps} = \sum_{i=1}^K \sum_{l=1}^L \omega_{il}^2 \frac{\partial(\delta\varepsilon_{il})}{\partial b_p} \frac{\partial(\delta\varepsilon_{il})}{\partial b_s},$$

$$f_p = - \sum_{i=1}^K \sum_{l=1}^L \omega_{il}^2 \delta \varepsilon_{il}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial(\delta \varepsilon_{il})}{\partial b_p}, \quad p, s = 1 \dots M. \quad (6)$$

В СЛАУ (5) матрица  $\alpha$  является диагональной матрицей с элементами  $\alpha_m$  на главной диагонали.

Выбор коэффициентов  $\alpha_m$  на каждой итерации нелинейной инверсии осуществляется следующим образом [11]. Сначала берутся некоторые (достаточно малые) начальные значения  $\alpha_m$  и определяются значения приращений  $\Delta b_m$  из решения системы (5). Далее проверяется, чтобы каждое из значений  $b_m = \bar{b}_m + \Delta b_m$  не выходило за границы, установленные для данного параметра. Кроме того, для геометрических параметров, описывающих латеральные границы блоков, контролируется, что значения координат левых границ блоков (и рядов блоков) не превышают значений координат их правых границ и чрезмерно не приближаются к ним. Для геометрических параметров, описывающих поверхности между слоями, контролируется, что  $z$ -координаты точек, по которым строится сплайн соответствующей поверхности, не превышают  $z$ -координаты точек соседней (сверху или снизу) поверхности и чрезмерно не приближаются к ним. Для тех параметров  $b_m$ , для которых контролируемое условие нарушается, соответствующие параметры регуляризации  $\alpha_m$  увеличиваются в  $k$  раз (мы использовали  $k = 2$ ) и решение системы (5) повторяется. Поскольку размер системы (5) достаточно мал (несколько сотен), эта процедура практически не требует вычислительных затрат, но позволяет получить новые параметры  $b_m$  как минимизирующие линеаризованный функционал  $\tilde{\Phi}(\mathbf{b})$ , так и удовлетворяющие наложенным на  $b_m$  ограничениям. В результате сходимость процедуры нелинейной инверсии значительно улучшается.

Обратим внимание на один важный аспект. Для выполнения геометрической инверсии мы формируем равномерную сетку (далее мы будем называть ее «структурной» сеткой), покрывающую область, в которой должна восстанавливаться геоэлектрическая структура геологической среды. Шаг в этой сетке определяется точностью, требуемой для определения координат границ аномальных тел (например, при решении обратных задач аэроэлектроразведки мы берем этот шаг равным 10 м). Блоки стартовой модели конструируются так, чтобы координаты их границ совпадали с координатами этой «структурной» сетки. Приращения  $\Delta b_m$ , найденные из системы (5) на очередном шаге нелинейной инверсии и соответствующие геометрическим параметрам, корректируются таким образом, чтобы очередное значение параметра  $b_m$  (координата границы блока или ряда блоков) совпало с ближайшей координатой «структурной» сетки. Заметим также, что приращения  $\partial b_m$  геометрических параметров для расчета производных  $\frac{\partial(\delta \varepsilon_{il})}{\partial b_m}$  берутся равными одному шагу «структурной» сетки.

Использование «структурной» сетки позволяет исключить появление очень мелких и «лишних» шагов в конечноэлементной сетке, что в свою очередь позволяет избежать резкого ухудшения обусловленности матрицы конечноэлементной системы и роста ее размера.

Однако в результате такой коррекции приращений геометрических параметров, найденных из системы (5), нарушается соответствие их значений найденным

значениям приращений физических параметров (т. е. соответствующих проводимостей блоков). Поэтому значения  $b_m$ , соответствующие проводимостям, пересчитываются из минимизации функционала (4) при фиксированных (новых) значениях параметров  $b_\mu = \bar{b}_\mu + \Delta b_\mu$ , соответствующих геометрическим параметрам (т. е. фактически решается подсистема системы (5) с исключенными из нее неизвестными, соответствующими уже найденным и зафиксированным значениям геометрических параметров).

## 2. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проводились на синтетических данных, получаемых для геоэлектрической модели, типичной для условий Восточной Сибири. Эта модель была построена как обобщенная по результатам интерпретации аэроэлектро-разведочных работ. Она содержит четыре слоя переменной толщины. В первом (верхнем) слое удельное сопротивление изменяется в диапазоне от 20 Ом·м до 50 Ом·м. Во второй слабопроводящий слой с сопротивлением  $\rho = 200$  Ом·м помещен локальный объект с размерами  $100 \times 100$  м<sup>2</sup> в плане и пониженным до 10 Ом·м сопротивлением. Он имитирует целевой объект – кимберлитовую трубку. Определение этого объекта по данным электромагнитной съемки затруднено следующими факторами.

Верхний слой (перекрывающий целевой) со средним значением  $\rho = 45$  Ом·м содержит значительные латеральные неоднородности пониженного (до 20...35 Ом·м) сопротивления, а изменения его толщины достигают 60 м (от 64 до 3 м). Помимо этого рассматриваемая геоэлектрическая модель характеризуется большими перепадами высот рельефа поверхности Земли, которые достигают порядка 100 м при смещении на 1 км по латерали. Третий слой геоэлектрической модели с  $\rho = 30$  Ом·м имеет слабоменяющуюся толщину и расположен на глубинах приблизительно от 240 до 340 м. Ниже этого слоя задана среда с  $\rho = 100$  Ом·м. Трехмерный вид этой геоэлектрической модели, рассеченной плоскостями  $y = -4450$  м,  $y = -4250$  м,  $y = -4150$  м (это сечение проходит через целевой объект),  $y = -4050$  м, показан на рис. 1.

С использованием 3D-моделирования для рассмотренной геоэлектрической модели были синтезированы данные аэроэлектромагнитной съемки для 26 временных каналов в диапазоне от 10 мкс до 1 мс вдоль десяти полетных линий (профилей), удаленных друг от друга примерно на 50 м. Общее количество точек измерений составило около 1300. На рис. 2 показаны электрограммы для пяти временных каналов вдоль профиля  $y \approx -4150$  м (который проходит непосредственно над целевым объектом – кимберлитовой трубкой) и профиля  $y \approx -4050$  м (расположенного сбоку от трубки).

Из представленных результатов видно, что по виду сигналов невозможно определить даже само наличие трубки (не говоря уже о ее местоположении) при том, что ее влияние в сигнале достаточно существенно и достигает 30 % (заметим, что в рассматриваемых условиях такой уровень сигнала является уверенно измеримым с использованием современной измерительной аппаратуры). Поэтому определить наличие и местоположение целевого объекта в таких условиях становится возможным только с использованием аппарата высокоразрешающей 3D-инверсии.

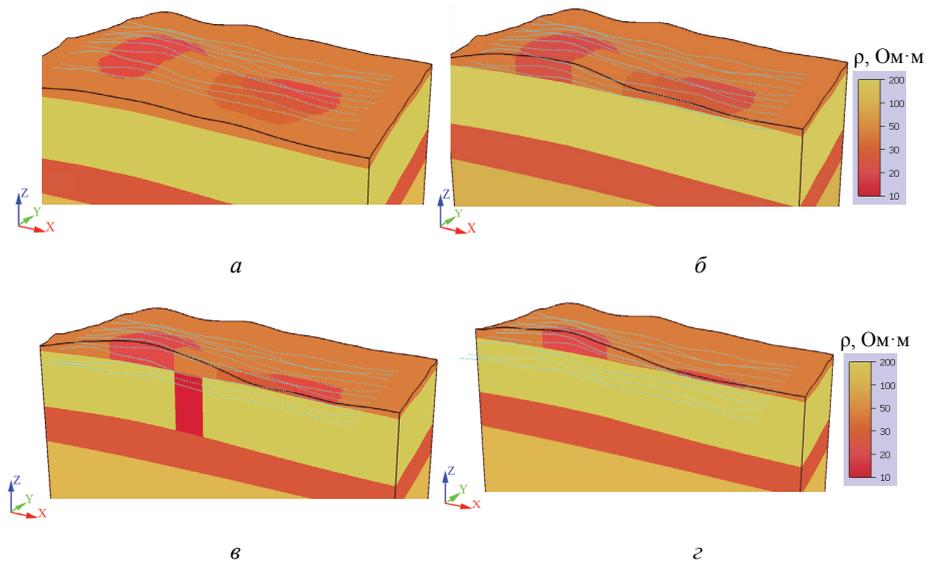


Рис. 1 – Трехмерный вид истинной геоэлектрической модели, рассеченной вдоль плоскостей:

$y = -4450$  м (а),  $y = -4250$  м (б),  $y = -4150$  м (в),  $y = -4050$  м (г)

Fig. 1 – A 3-D view of the true geoelectrical model cut along the planes:

$y = -4450$  m (a),  $y = -4250$  m (b),  $y = -4150$  m (c),  $y = -4050$  m (d)

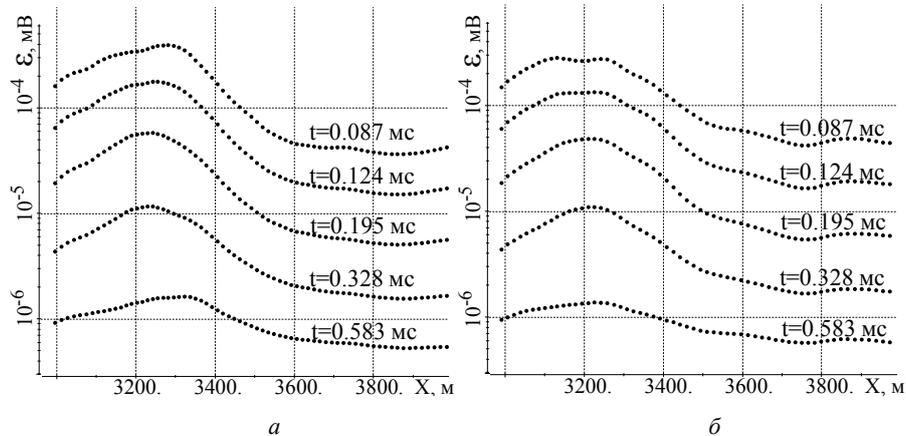


Рис. 2 – Электрограммы для пяти временных каналов вдоль профилей  $y = -4150$  м (а) (над трубкой) и  $y = -4050$  м (б) (сбоку от трубки), рассчитанные для истинной модели («практические» данные для инверсии)

Fig. 2 – Data in five time channels along the profiles  $y = -4150$  m (a) (which runs directly over the tube) and  $y = -4050$  m (b) (which runs outside the tube) calculated for the true model (synthetic data for inversion)

Для параметризации геоэлектрической модели были заданы две блочные структуры: в верхнем слое блочная структура содержала  $7 \times 5$  блоков, а блочная структура во втором слое содержала  $6 \times 4$  блоков. Искомыми параметрами были

взяты значения удельной электрической проводимости внутри блоков,  $x$ -координаты границ блоков и  $y$ -координаты рядов блоков. Эти блочные структуры показаны на рис. 3.

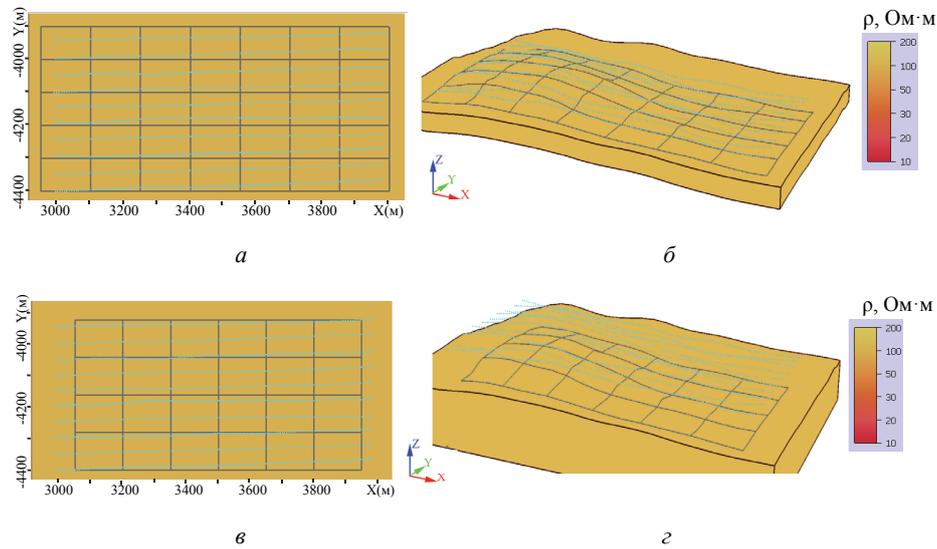


Рис. 3 – Параметризация геоэлектрической модели:

$a$  и  $b$  – блочная структура в верхнем слое;  $c$  и  $d$  – блочная структура во втором слое;  
 $a$  и  $c$  – вид сверху;  $b$  и  $d$  – трехмерный вид

Fig. 3. Parameterization of the geoelectrical model:

( $a$ ,  $b$ ) – a block structure in the top layer; ( $c$ ,  $d$ ) – a block structure in the second layer;  
 ( $a$ ,  $c$ ) – top views; ( $b$ ,  $d$ ) 3-D views

Для поиска формы границы между верхним и следующим за ним (вторым) слоем была использована следующая параметризация. По сети  $250 \times 200$  м (в пределах от 2750 до 4250 м по оси  $x$  и от  $-4500$  до  $-3700$  по  $y$ ) было расставлено 35 опорных точек, приращения которых вдоль вертикальной оси являются параметрами, определяющими изменение формы поверхности между этими слоями. При нулевых значениях этих параметров форма этой параметризуемой поверхности повторяет форму рельефа поверхности Земли на глубине 50 м.

Верхняя и нижняя границы третьего слоя искались строго горизонтальными и в качестве определяющих их параметров были взяты значения  $z$ -координат соответствующих плоскостей. Начальные (для инверсии) значения этих  $z$ -координат были взяты равными  $-250$  м и  $-300$  м (в то время как средние значения  $z$ -координат верхней и нижней границы третьего слоя в истинной модели составляют 240 и 340 м соответственно).

Также в качестве параметров геоэлектрической модели были взяты удельные электрические сопротивления слоев.

Таким образом, общее количество параметров, которые должны быть определены в ходе 3D-инверсии, было 200.

В качестве стартовой геоэлектрической модели была взята однородная среда (с «правильным» рельефом) с удельным электрическим сопротивлением, равным  $100 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

В ходе нелинейной 3D-инверсии было сделано 9 итераций, при этом значение

функционала невязки  $\Phi(\mathbf{b}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K \sum_{l=1}^L (\omega_{il} \delta \varepsilon_{il}(\mathbf{b}))^2}{KL}}$  изменилось от 0,41 (для стартовой модели) до 0,27.

На рис. 4 представлен трехмерный вид геоэлектрической модели, полученной в результате девяти итераций нелинейной 3D-инверсии. Эта модель, так же как и истинная модель (см. рис. 1), представлена с расчленением плоскостями  $y = -4450$  м,  $y = -4250$  м,  $y = -4150$  м (через целевой объект),  $y = -4050$  м.

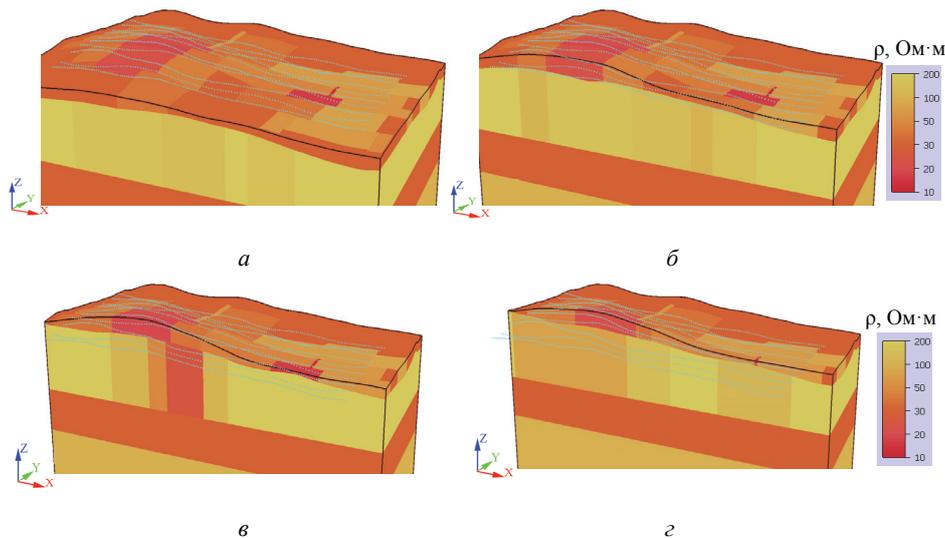


Рис. 4 – Трехмерный вид полученной после 9-й итерации геоэлектрической модели, расчлененной вдоль плоскостей:

$y = -4450$  м (а),  $y = -4250$  м (б),  $y = -4150$  м (в),  $y = -4050$  м (г)

Fig. 4 – A 3-D view of the geoelectrical model obtained after the 9th iteration; this model is cut along the planes:

$y = -4450$  m (a),  $y = -4250$  m (b),  $y = -4150$  m (c),  $y = -4050$  m (d)

Сравнивая полученную в результате 3D-инверсии геоэлектрическую модель с истинной моделью, можно сделать следующие выводы. Несмотря на очень существенно искажающие сигнал факторы, связанные с резкими перепадами высот в рельефе поверхности Земли, с неровным по толщине верхним слоем и неоднородной по латерали его проводимостью, положение целевого объекта и контраст его удельного сопротивления по отношению к удельному сопротивлению содержащего его слоя были определены с высокой степенью достоверности (рис. 1, в и 4, в). Хотя целевой объект в восстановленной модели имеет чуть большие размеры по латерали и чуть более высокое значение удельного сопротивления по сравнению с объектом истинной модели, точка бурения будет определена достоверно и попадет практически в центр искомого объекта.

Заметим, что с достаточно высокой точностью определено не только местоположение в плане целевого объекта, но и его положение по глубине: определенная в результате 3D-инверсии форма поверхности между верхним и следующим за ним (целевым) слоем достаточно хорошо соответствует форме соответствующей поверхности в истинной модели.

Заметим также, что положение верхней и нижней кромки, а также сопротивление третьего слоя также были определены достаточно хорошо.

На рис. 5 представлены электрограммы, рассчитанные для геоэлектрических моделей, полученных после первой итерации 3D-инверсии (эти кривые показаны светлым цветом) и после последней, девятой итерации (более темные линии). Для сравнения на этом рисунке точками показаны «практические» данные (синтезированные для истинной модели). Из представленных результатов видно, что полученные кривые, рассчитанные для восстановленной в результате инверсии геоэлектрической модели, достаточно хорошо соответствуют «практическим» данным.

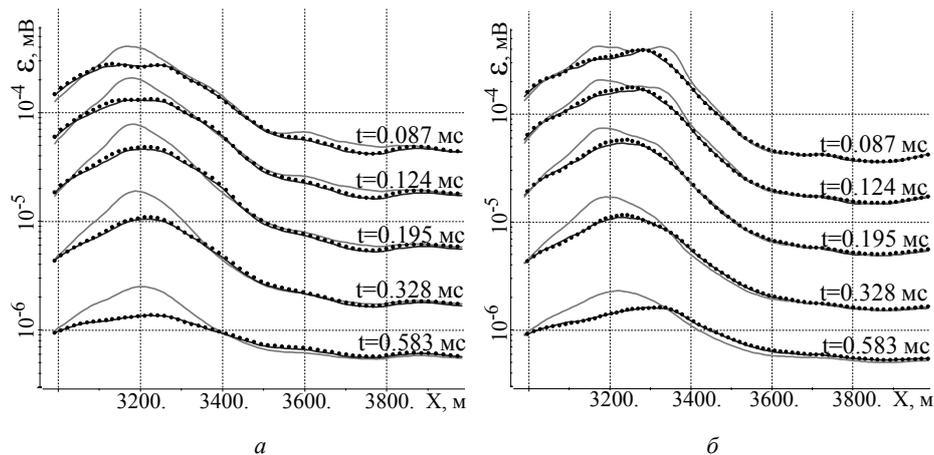


Рис. 5 – Электрограммы для пяти временных каналов вдоль профилей  $y = -4150$  м (а) (над трубкой) и  $y = -4050$  м (б) (сбоку от трубки), рассчитанные для истинной модели (черные точки), и для геоэлектрических моделей, полученных после первой (светлая кривая) и девятой (темная кривая) итераций 3D-инверсии

Fig. 5. Data in five time channels along the profiles  $y = -4150$  m (a) (which runs directly over the tube) and  $y = -4050$  m (b) (which runs outside the tube) calculated for the true model (black points) and for the geoelectrical models obtained after the first (light curves) and ninth (dark curves) iterations of the 3-D inversion

### Заключение

Представленный в работе программно-математический аппарат нелинейной геометрической 3D-инверсии аэроданных и предложенный подход к параметризации геоэлектрической модели позволяют с достаточно высокой точностью определять местоположение (как в плане, так и по глубине) целевого объекта в виде кимберлитовой трубки и его основные характеристики в сложных геоэлектрических условиях: резких перепадов высот в рельефе поверхности Земли, неровного по толщине и неоднородного по латерали верхнего слоя, т.е. когда ни по форме снятых сигналов, ни по результатам 1D-инверсий данных целевой объект выявить невозможно.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kaminski V., Prikhodko A., Oldenburg D. Using ERA low frequency E-field profiling and UBC 3D frequency-domain inversion to delineate and discover a mineralized zone in Porcupine district, Ontario, Canada // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2011. – Vol. 30 (1). – P. 1262–1266. – doi: 10.1190/1.3627433.

2. Parametric 3D inversion of airborne time domain electromagnetics / M.S. McMillan, D.W. Oldenburg, E. Haber, C. Schwarzbach // ASEG Extended Abstracts. – 2015. – Vol. 2015 (1). – P. 1–5. – doi: 10.1071/ASEG2015ab101.
3. **Haber E., Schwarzbach C.** Parallel inversion of large-scale airborne time-domain electromagnetic data with multiple OcTree meshes // Inverse Problems. – 2014. – Vol. 30, N 5. – P. 055011. – doi: 0266-5611/14/055011.
4. **Liu Y., Yin C.** 3D inversion for multipulse airborne transient electromagnetic data // Geophysics. – 2015. – Vol. 81 (6). – P. E401–E408. – doi: 10.1190/geo2015-0481.1.
5. **Oldenburg D.W., Haber E., Shekhtman R.** Three dimensional inversion of multisource time domain electromagnetic data // Geophysics. – 2013. – Vol. 78 (1). – P. E47–E57. – doi: 10.1190/geo2012-0131.1.
6. **Yang D., Oldenburg D.W.** Three-dimensional inversion of airborne time-domain electromagnetic data with applications to a porphyry deposit // Geophysics. – 2012. – Vol. 77, N 2. – P. B23–B34. – doi: 10.1190/geo2011-0194.1.
7. **Yang D., Oldenburg D.W., Haber E.** 3-D inversion of airborne electromagnetic data parallelized and accelerated by local mesh and adaptive soundings // Geophysical Journal International. – 2014. – Vol. 196, N 3. – P. 1492–1507. – doi: 10.1093/gji/ggt465.
8. **Dehiya R.S.A., Gupta P.K., Israil M.** Interpretation of CSEM data using 2D block inversion algorithm // Extended Abstract, 22nd EM Induction Workshop. – Weimar, Germany, 2014. – P. 4.
9. Multiple body parametric inversion of frequency- and time-domain airborne electromagnetics / M.S. McMillan, C. Schwarzbach, E. Haber, D.W. Oldenburg // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2016. – Vol. 35 – P. 846–851. – doi: 10.1190/segam2016-13868448.1.
10. 3D parametric hybrid inversion of time-domain airborne electromagnetic data / M.S. McMillan, C. Schwarzbach, E. Haber, D. W. Oldenburg // Geophysics. – 2015. – Vol. 80, N 6. – P. K25–K36. – doi: 10.1190/geo2015-0141.1.
11. Application of the marine circular electric dipole method in high latitude Arctic regions using drifting ice floes / V. Mogilatov, M. Goldman, M. Persova, Yu. Soloveichik, Yu. Koshkina, O. Trubacheva, A. Zlobinskiy // Journal of Applied Geophysics. – 2016. – Vol. 135. – P. 17–31. – doi: 10.1016/j.jappgeo.2016.08.007.
12. Geometrical nonlinear 3D inversion of airborne time domain EM data / M.G. Persova, Yu.G. Soloveichik, Yu.I. Koshkina, D.V. Vagin, O.S. Trubacheva // Near Surface Geoscience 2016 – First Conference on Geophysics for Mineral Exploration and Mining. Extended abstract. – Barcelona, 2016. – doi: 10.3997/2214-4609.201602114.
13. Методы и алгоритмы восстановления трехмерной структуры проводимости и поляризуемости среды по данным электромагнитных зондирований на основе конечноэлементного 3D-моделирования / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Г.М. Тригубович, М.Г. Токарева // Физика Земли. – 2013. – Т. 3. – С. 30–45.
14. **Singh A.D.R., Gupta P.K., Israil M.** Development of block Inversion algorithm and its comparison with cell inversion schemes // Extended Abstract, 22nd EM Induction Workshop. – Weimar, Germany, 2014. – P. 4.
15. The topography effect on the airborne EM data / M.G. Persova, Yu.G. Soloveichik, D.V. Vagin, D.S. Kiselev, Yu.I. Koshkina, I.I. Patrushev, E.I. Simon // Saint Petersburg 2018. Innovations in Geosciences – Time for Breakthrough, St. Petersburg, Russia, 9–12 April 2018. – St. Petersburg, 2018. – doi: 10.3997/2214-4609.201800314.
16. 3D time-domain airborne EM forward modeling with topography / C. Yin, Y. Qi, Y. Liu, J. Cai // Journal of Applied Geophysics. – 2016. – Vol. 134. – P. 11–22. – doi: 10.1016/j.jappgeo.2016.08.002.
17. Multidimensional processing of the airborne EM data in the complex media / M.G. Persova, Yu.G. Soloveichik, D.V. Vagin, P.A. Domnikov, D.S. Kiselev, Yu.I. Koshkina, E.I. Simon // Engineering and mining geophysics 2018: 14 conference and exhibition, Kazakhstan, Almaty, 23–27 Apr. 2018. – Almaty, 2018. – Art. У08-01 (46459). – doi: 10.3997/2214-4609.201800541.
18. **Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г.** Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.
19. Применение неконформных сеток с шестигранными ячейками для 3D-моделирования технологий аэроэлектроразведки / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин,

- Д.С. Киселев, Н.В. Кондратьев, Ю.И. Кошкина, О.С. Трубачева // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2018. – № 1 (38). – С. 64–79. – doi: 10.17212/1727-2769-2018-1-64-79.
20. Finite-element solution to multidimensional multisource electromagnetic problems in the frequency domain using non-conforming meshes / Yu.G. Soloveichik, M.G. Persova, P.A. Domnikov, Yu.I. Koshkina, D.V. Vagin // *Geophysical Journal International*. – 2018. – Vol. 212, N 3. – P. 2159–2193. – doi: 10.1093/gji/ggx530.

**PARAMETERIZATION OF A GEOELECTRICAL MODEL  
IN AIRBORNE ELECTROMAGNETIC PROBLEMS WITH  
APPLICATIONS TO COMPLEX MEDIA INCLUDING TOPOGRAPHY  
AND VARIED THICKNESS LAYERS**

**Kiselev D.S., Kondratyev N.V., Koshkina Yu.I., Vagin D.V.,  
Persova M.G., Soloveichik Yu.G.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The paper describes the method of the geometric 3-D inversion of airborne electromagnetic time-domain data in significantly inhomogeneous geological media which are characterized by sharp changes in the Earth relief, varying thickness of layers with different conductivity, and laterally inhomogeneous conductivity in the layers overlapping local target objects. In these situations it is impossible to “visually” (using only signal shapes) determine the presence and location of the target object. In addition, neglecting the complex shape of the Earth relief and borders between other layers of the geoelectrical model can either lead to a failure in finding target objects or result in erroneous anomalies. The method is based on the use of a special parameterization which includes physical properties of structural parts of the geoelectrical model and their geometric characteristics. The main feature is the parameterization of the curved borders between the geoelectrical model layers with the use of control points defining the smooth deformation of these borders during the nonlinear 3-D inversion process. In order to represent these surfaces, the bicubic splines are used. The workability of the proposed approach is shown by the example of processing synthetic data obtained for a complex geoelectrical model with the topography and a laterally inhomogeneous overlapping layer with varied thickness. This model has been constructed as generalization on the basis of the results of interpretations of the electromagnetic sounding data obtained on several areas in Eastern Siberia. It is shown that after several iterations, the location (both in the plan and in the depth) of the target object in the form of a kimberlite pipe and its main characteristics have been determined with quite high accuracy.

*Keywords:* airborne electromagnetic survey, 3-D inversion, topography, electromagnetic field.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-77-92

REFERENCES

1. Kaminski V., Prikhodko A., Oldenburg D. Using ERA low frequency E-field profiling and UBC 3D frequency-domain inversion to delineate and discover a mineralized zone in Porcupine district, Ontario, Canada. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 2011, vol. 30 (1), pp. 1262–1266. doi: 10.1190/1.3627433.
2. McMillan M.S., Oldenburg D.W., Haber E., Schwarzbach C. Parametric 3D inversion of airborne time domain electromagnetics. *ASEG Extended Abstracts*, 2015, vol. 2015 (1), pp. 1–5. doi: 10.1071/ASEG2015ab101.
3. Haber E., Schwarzbach C. Parallel inversion of large-scale airborne time-domain electromagnetic data with multiple OcTree meshes. *Inverse Problems*, 2014, vol. 30, no. 5, p. 055011. doi: 10.1088/0266-5611/30/5/055011.
4. Liu Y., Yin C. 3D inversion for multipulse airborne transient electromagnetic data. *Geophysics*, 2015, vol. 81 (6), pp. E401–E408. doi: 10.1190/geo2015-0481.1.
5. Oldenburg D.W., Haber E., Shekhtman R. Three dimensional inversion of multisource time domain electromagnetic data. *Geophysics*, 2013, vol. 78 (1), pp. E47–E57. doi: 10.1190/geo2012-0131.1.

6. Yang D., Oldenburg D.W. Three-dimensional inversion of airborne time-domain electromagnetic data with applications to a porphyry deposit. *Geophysics*, 2012, vol. 77, no. 2, pp. B23–B34. doi: 10.1190/geo2011-0194.1.
7. Yang D., Oldenburg D.W., Haber E. 3-D inversion of airborne electromagnetic data parallelized and accelerated by local mesh and adaptive soundings. *Geophysical Journal International*, 2014, vol. 196, no. 3, pp. 1492–1507. doi: 10.1093/gji/ggt465.
8. Dehiya R.S.A., Gupta P.K., Israil M. Interpretation of CSEM data using 2D block inversion algorithm. *Extended Abstract, 22nd EM Induction Workshop*, Weimar, Germany, 2014, p. 4.
9. McMillan M.S., Schwarzbach C., Haber E., Oldenburg D.W. Multiple body parametric inversion of frequency- and time-domain airborne electromagnetics. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 2016, vol. 35, pp. 846–851. doi: 10.1190/segam2016-13868448.1.
10. McMillan M.S., Schwarzbach C., Haber E., Oldenburg D.W. 3D parametric hybrid inversion of time-domain airborne electromagnetic data. *Geophysics*, 2015, vol. 80, no. 6, pp. K25–K36. doi: 10.1190/geo2015-0141.1.
11. Mogilatov V., Goldman M., Persova M., Soloveichik Yu., Koshkina Yu., Trubacheva O., Zlobinskiy A. Application of the marine circular electric dipole method in high latitude Arctic regions using drifting ice floes. *Journal of Applied Geophysics*, 2016, vol. 135, pp. 17–31. doi: 10.1016/j.jappgeo.2016.08.007.
12. Persova M.G., Soloveichik Yy.G., Koshkina Yu.I., Vagin D.V., Trubacheva O.S. Geometrical nonlinear 3D inversion of airborne time domain em data. *Near Surface Geoscience 2016 – First Conference on Geophysics for Mineral Exploration and Mining*. Extended abstract, Barcelona, 2016. doi: 10.3997/2214-4609.201602114.
13. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Trigubovich G.M., Tokareva M.G. Methods and algorithms for reconstructing three-dimensional distributions of electric conductivity and polarization in the medium by finite-element 3D modeling using the data of electromagnetic sounding. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2013, vol. 49 (3), pp. 329–343. doi: 10.1134/S1069351313030117. Translated from *Fizika Zemli*, 2013, vol. 3, pp. 30–45.
14. Singh A.D.R., Gupta P.K., Israil M. Development of block Inversion algorithm and its comparison with cell inversion schemes. *Extended Abstract, 22nd EM Induction Workshop*, Weimar, Germany, 2014, p. 4.
15. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Vagin D.V., Kiselev D.S., Koshkina Yu.I., Patrushev I.I., Simon E.I. The topography effect on the airborne EM data. *Saint Petersburg 2018. Innovations in Geosciences – Time for Breakthrough*, St. Petersburg, Russia, 9–12 April 2018, doi: 10.3997/2214-4609.201800314.
16. Yin C., Qi Y., Liu Y., Cai J. 3D time-domain airborne EM forward modeling with topography. *Journal of Applied Geophysics*, 2016, vol. 134, pp. 11–22. doi: 10.1016/j.jappgeo.2016.08.002.
17. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Vagin D.V., Domnikov P.A., Kiselev D.S., Koshkina Yu.I., Simon E.I. Multidimensional processing of the airborne EM data in the complex media. *Engineering and mining geophysics 2018: 14 conference and exhibition*, Kazakhstan, Almaty, 23–27 Apr. 2018, art. Y08-01 (46459). doi: 10.3997/2214-4609.201800541.
18. Soloveichik Yu.G., Royak M.E., Persova M.G. *Metod konechnykh elementov dlya resheniya skalyarnykh i vektornykh zadach* [The finite element method for the solution of scalar and vector problems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007. 896 p.
19. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Vagin D.V., Kiselev D.S., Kondratyev N.V., Koshkina Y.I., Trubacheva O.S. Primenenie nekonformnykh setok s shestigrannymi yacheikami dlya 3D-modelirovaniya tekhnologii aeroelektrozvedki [Application of non-conforming meshes with hexahedral cells for 3D modelling of airborne electromagnetic technologies]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 1 (38), pp. 64–79. doi: 10.17212/1727-2769-2018-1-64-79.
20. Soloveichik Yu.G., Persova M.G., Domnikov P.A., Koshkina Yu.I., Vagin D.V. Finite-element solution to multidimensional multisource electromagnetic problems in the frequency domain using non-conforming meshes. *Geophysical Journal International*, 2018, vol. 212, no. 3, pp. 2159–2193. doi: 10.1093/gji/ggx530.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Киселев Дмитрий Сергеевич** – родился в 1990 году, аспирант, ассистент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование. Опубликовано 20 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: harlequin\_00@mail.ru).

**Kiselev Dmitry Sergeevich** (b. 1990) – a postgraduate student, an assistant lecturer at the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on finite element modeling. He is the author of 20 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: harlequin\_00@mail.ru).



**Кондратьев Николай Владимирович** – родился в 1991 году, ассистент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: разработка и оптимизация параллельных программ решения СЛАУ, полученных в результате конечноэлементной аппроксимации в задачах электромагнетизма в системах с общей и разделяемой памятью. Опубликовано 7 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: kondratyev@ami.nstu.ru).

**Kondratyev Nikolay Vladimirovich** (b. 1991) – an assistant lecturer at the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on the development and optimizations of parallel programs, acceleration of numerical modeling on CPU and GPU devices, development and implementation of distributed calculation systems for numerical modeling. He is the author of 7 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: kondratyev@ami.nstu.ru).



**Кошкина Юлия Игоревна** – родилась в 1990 году, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: разработка и реализация алгоритмов интерпретации данных электромагнитных зондирований. Опубликовано 30 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: koshkina\_yui@mail.ru).

**Koshkina Yulia Igorevna** (b. 1990) – Candidate of Sciences (Eng.), an associate professor at the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on the development and implementation of algorithms for electromagnetic sounding data interpretation. She is the author of 30 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: koshkina\_yui@mail.ru).



**Вагин Денис Владимирович** – родился в 1985 году, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование электромагнитных полей. Опубликовано более 70 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: vdv\_wk@mail.ru).

**Vagin Denis Vladimirovich** (b. 1985) – Candidate of Sciences (Eng.), an associate professor at the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on finite element modeling of electromagnetic fields. He is the author of more than 70 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: vdv\_wk@mail.ru).



**Персова Марина Геннадьевна** – родилась в 1978 году, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование и наукоемкое программное обеспечение для моделирования и сопровождения технологий. Опубликовано более 150 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: persova@ami.nstu.ru).

**Persova Marina Gennad'evna** (b. 1978) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, professor at the applied mathematics department, Novosibirsk State Technical University. Her research interests are currently focused on finite element modeling and knowledge-intensive software for modeling and supporting technologies. She is the author of more than 150 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: persova@ami.nstu.ru).



**Соловейчик Юрий Григорьевич** – родился в 1957 году, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент САН ВШ, заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: конечноэлементное моделирование и наукоемкое программное обеспечение для моделирования и сопровождения технологий. Опубликовано более 150 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: soloveychik@ami.nstu.ru).

**Soloveichik Yuri Grigorievich** (b. 1957) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, head of the department of applied mathematics, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on finite element modeling and knowledge-intensive software for modeling and supporting technologies. He is the author of more than 150 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: soloveychik@ami.nstu.ru).

Статья поступила 25 октября 2018 г.  
Received October 25, 2018

---

To Reference:

Kiselev D.S., Kondratyev N.V., Koshkina Yu.I., Vagin D.V., Persova M.G., Soloveichik Yu.G. O parametrizatsii geoelektricheskoi modeli v zadachakh aereoel'ektorazvedki v sredakh s rel'efom i sloyami peremennoi tolshchiny [Parameterization of a geoelectrical model in airborne electromagnetic problems with applications to complex media including topography and varied thickness layers]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no.4 (41), pp. 77–92. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-77-92.

УДК 621.3.049.77.002.5

**ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ  
В МЭМС С ЛАТЕРАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ  
ЭЛЕКТРОДОВ В РЕЖИМЕ С КОНТРОЛИРУЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ****Р.Е. Синицкий, В.П. Драгунов, И.Е. Руденко,  
Д.Б. Колосков, Е.В. Драгунова***Новосибирский государственный технический университет*

В работе представлены результаты исследования влияния непараллельности электродов на электромеханические взаимодействия в МЭМС с латеральным смещением электродов в режиме работы с контролируемым напряжением. Анализ проведен для двух случаев движения подвижного электрода: с увеличением и с уменьшением среднего межэлектродного зазора. Получены выражения для оценки емкостей, потенциальных энергий, электростатических сил, критического напряжения и критического смещения подвижного электрода при различных наклонах электродов.

Установлено, что в МЭМС с латеральным смещением непараллельных электродов, при котором увеличивается средний межэлектродный зазор, контролируемое смещение подвижного электрода возможно при любом приложенном напряжении и взаимном наклоне электродов во всем интервале перекрытия электродов.

Обнаружено, что в МЭМС с латеральным смещением электродов, при котором средний межэлектродный зазор уменьшается, возможно нестабильное состояние системы, приводящее к неконтролируемому движению подвижного электрода, направленному в сторону увеличения площади перекрытия электродов, – критический эффект (аналог эффекта “pull-in instability”). Таким образом, движение подвижного электрода с увеличением среднего межэлектродного зазора является неустойчивым, в отличие от движения с уменьшением межэлектродного зазора. После наступления критического состояния система перестает реагировать на изменения управляющего напряжения. Показано, что данный критический эффект возможен при параметрах системы  $\tilde{\Delta} \geq 1$  и  $\lambda \geq 1$ . Установлено, что в данном случае при увеличении взаимного наклона электродов значение критического смещения подвижного электрода уменьшается, а зависимость критического напряжения  $\lambda_{cr}$  от  $\tilde{\Delta}$  имеет практически линейную зависимость при  $\tilde{\Delta} \geq 2$ .

*Ключевые слова:* МЭМС, латеральное смещение электродов, режим работы с контролируемым напряжением, микромеханический конденсатор, электрическая сила, контролируемое смещение электрода, критические значения, критический эффект.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-93-109

**Введение**

Глобальная тенденция миниатюризации элементной базы электроники и развитие концепции интернета вещей (Internet of Things – IoT) привели к созданию не имеющих аналогов миниатюрных устройств широкого назначения – микроэлектромеханических систем (МЭМС), предназначенных для измерения физических характеристик или воздействия на окружающую среду – сенсоров и актуаторов. Параметры таких устройств напрямую зависят от совокупности различных связей и взаимодействий, реализующихся между различными частями конструкции устройства: механические, электрические, оптические и т. д. Среди наиболее распространенных МЭМС-устройств можно выделить микроакселерометры [1–7],

микрогироскопы [8–11], микрофоны [12–15], кантилеверы [16–18], микрозеркала [19–21], микронасосы [22–24] и др. Основными элементами таких систем являются микроэлектромеханические преобразователи (МЭМП) энергии, основанные на различных принципах действия, среди которых, электростатический является наиболее технологичным [1–3, 6–7, 10, 12–17, 19–20, 22–23, 25]. Наибольший вклад в параметры электростатических преобразователей вносят электромеханические взаимодействия между различными частями конструкции.

При создании электростатических МЭМС возникает необходимость расчета емкостей, сил и относительных смещений электродов с достаточной для практических применений точностью.

Согласно литературным данным [1–24] в большинстве случаев при моделировании и проектировании используются модели электростатических МЭМС с параллельными электродами [1–6, 8–18], что при их серийном производстве труднодостижимо. В то же время непараллельность электродов, возникающая за счет технологических погрешностей при изготовлении, сборке и работе устройств, может приводить к значительным отклонениям значений параметров от расчетных величин, что, в свою очередь, скажется на достижимых параметрах системы и даже на ее работоспособности [26–31].

Ранее нами было рассмотрено влияние непараллельности электродов на электромеханические взаимодействия в МЭМС с двухэлектродной и гребенчатой конструкцией электродов с изменением межэлектродного зазора между заряженными электродами [28]. В данной работе исследуется влияние непараллельности электродов на электромеханические взаимодействия в МЭМС с изменяемой площадью перекрытия электродов МЭМП в режиме работы с контролируемым напряжением.

### 1. Описание модели

В качестве объекта исследования влияния непараллельности электродов на электромеханические взаимодействия в МЭМС (электрические емкости и силы) при латеральном смещении электродов (в плоскости устройства) использовали модель конденсатора переменной емкости (рис. 1, *a* и *б*), содержащего два плоских непараллельных электрода длиной  $a$ , шириной  $b$ , наименьшим межэлектродным зазором  $d_0$  и наибольшим межэлектродным зазором  $d_0 + \Delta$ . В данной конструкции подвижный электрод, закрепленный на упругом подвесе, может перемещаться относительно неподвижного только вдоль оси  $x$ . В расчетах принимали, что угол наклона  $\alpha$  мал и не изменяется при смещении подвижного электрода.

Изменение электрической емкости такой системы при латеральном смещении подвижного электрода может осуществляться за счет движения подвижного электрода с увеличением (рис. 1, *a*) и с уменьшением среднего межэлектродного зазора (рис. 1, *б*).

Пренебрегая особенностями распределения электрического поля у краев электродов (краевыми эффектами), зависимость емкости двухэлектродного конденсатора с непараллельными электродами от смещения подвижного электрода при малых  $\alpha$  для этих двух случаев соответственно может быть представлена в виде

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ab}{\Delta} \ln \left( \frac{d_0 + \Delta(x/b)}{d_0} \right), \quad (1)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ab}{\Delta} \ln \left( \frac{d_0 + \Delta}{d_0 + \Delta(1-x/b)} \right), \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды между электродами;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная;  $x$  – величина смещения подвижного электрода от начального положения, при котором площадь перекрытия электродов минимальна.

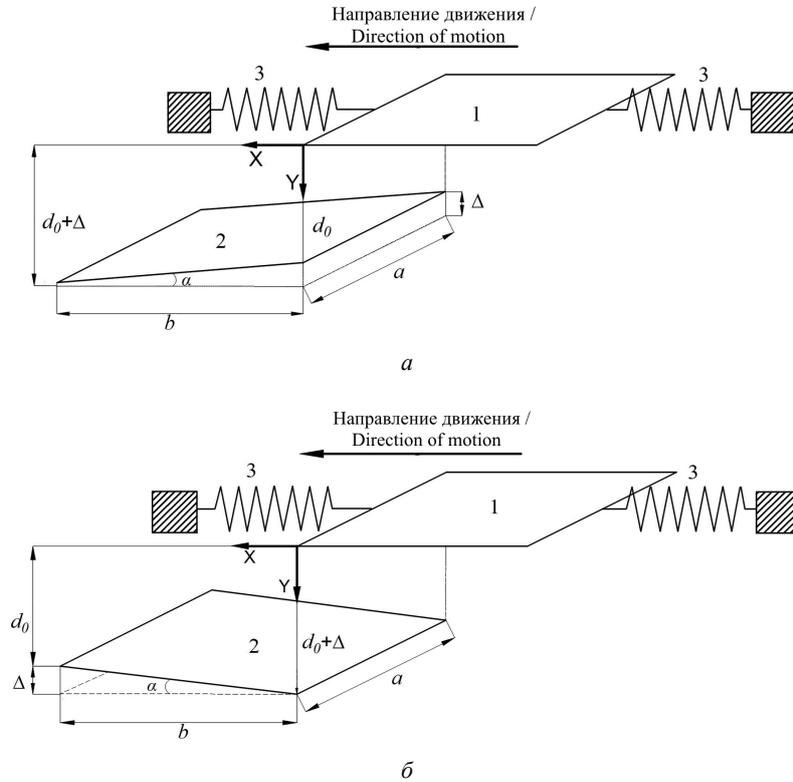


Рис. 1 – Двухэлектродная модель конденсатора переменной емкости с непараллельными электродами:

1 – подвижный электрод; 2 – неподвижный электрод; 3 – упругие подвесы; а – движение подвижного электрода с увеличением среднего межэлектродного зазора; б – движение подвижного электрода с уменьшением среднего межэлектродного зазора

Fig.1 – A two-electrode model of the variable capacitor with non-parallel electrodes:

1 – is a movable electrode; 2 – is a fixed electrode; 3 – is an elastic suspensions; а – is a movable electrode movement with an increase in an average interelectrode gap; б – is a movable electrode movement with a decrease in an average interelectrode gap

Рассмотрим изменение электрической емкости и силы в такой системе при перемещении подвижного электрода за счет контролируемого очень медленного (квазистационарного) изменения напряжения  $V$ , приложенного между электродами.

Полагая, что в квазистатическом случае на электроды действуют только возвращающая сила упругости подвеса и электрическая сила, можно показать, что в случае МЭМС с непараллельными электродами в режиме с контролируемым напряжением выражение для потенциальной энергии системы может быть представлено в виде

$$W = \frac{kx^2}{2} - \frac{CV^2}{2}, \quad (3)$$

где  $k$  – коэффициент жесткости упругого подвеса и  $C$  – емкость конденсатора с непараллельными электродами.

С учетом (1) и (2) выражение (3) для движения подвижного электрода с увеличением и с уменьшением среднего межэлектродного зазора в безразмерных переменных принимает вид:

$$\tilde{W}_1 = \frac{\tilde{x}^2}{2} - \frac{\lambda}{\tilde{\Delta}} \ln(1 + \tilde{\Delta}\tilde{x}); \quad (4)$$

$$\tilde{W}_2 = \frac{\tilde{x}^2}{2} - \frac{\lambda}{\tilde{\Delta}} \ln\left(\frac{1 + \tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}(1 - \tilde{x})}\right), \quad (5)$$

где  $\tilde{W}_1 = W_1/(kb^2)$  – приведенная потенциальная энергия системы при движении с увеличением среднего межэлектродного зазора;  $\tilde{W}_2 = W_2/(kb^2)$  – при движении с уменьшением среднего межэлектродного зазора;  $\tilde{x} = x/b$  – относительное смещение подвижного электрода;  $\tilde{\Delta} = \Delta/d_0$ ,  $\lambda = V^2 \epsilon \epsilon_0 a / (2d_0 kb)$  – приведенное напряжение.

На рис. 2 и 3 представлены зависимости приведенной потенциальной энергии системы  $\tilde{W}_i$  от относительного смещения подвижного электрода  $\tilde{x}$ , рассчитанные с использованием (4) и (5) для различных приложенных напряжений (рис. 2) и наклонов электродов (рис. 3).

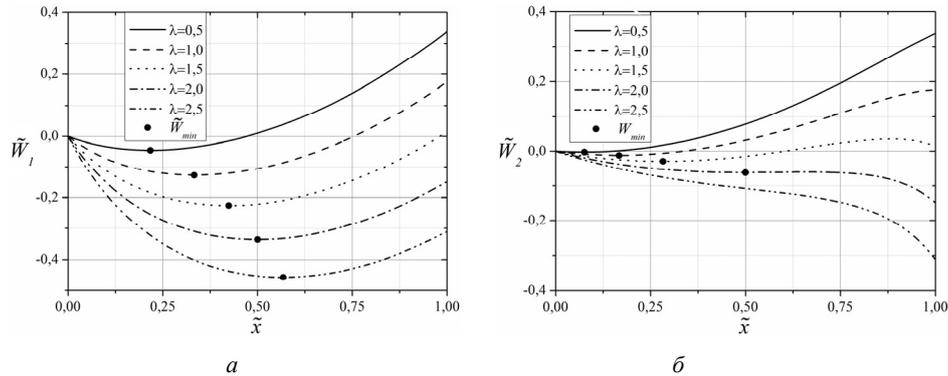


Рис. 2 – Зависимости приведенной потенциальной энергии системы от относительного смещения подвижного электрода для различных  $\lambda$  при  $\tilde{\Delta} = 6,0$ :

$a$  – движение с увеличением среднего межэлектродного зазора;  $b$  – движение с уменьшением среднего межэлектродного зазора

Fig. 2 – Dependences of the system normalized potential energy on the relative movable electrode displacement for different  $\lambda$  at  $\tilde{\Delta} = 6,0$ :

$a$  – is a movable electrode movement with an increase in an average interelectrode gap;  $b$  – is a movable electrode movement with a decrease in an average interelectrode gap

Из анализа (4) и рис. 2,  $a$  следует, что при увеличении приложенного напряжения точка устойчивого равновесия  $\tilde{W}_{\min}$  монотонно смещается в область больших  $\tilde{x}$  и сохраняется в интервале  $0 < \tilde{x} < 1$ . Таким образом, изменяя приложенное напряжение, в случае смещения подвижного электрода с увеличением среднего межэлектродного зазора, можно установить произвольное контролируемое отно-

сительное расположение электродов во всем интервале  $0 < \tilde{x} < 1$ . Такое поведение наблюдалось и у системы с параллельными электродами.

В отличие от случая смещения подвижного электрода с увеличением среднего межэлектродного зазора, при движении с уменьшением среднего межэлектродного зазора (рис. 2, б) точка устойчивого равновесия с увеличением приложенного напряжения сначала тоже монотонно смещается в область больших  $\tilde{x}$ , но затем вообще исчезает – в системе исчезает устойчивое состояние. При этом подвижный электрод начинает неконтролируемо смещаться в область больших  $\tilde{x}$  (критический эффект – аналог эффекта “pull-in instability”).

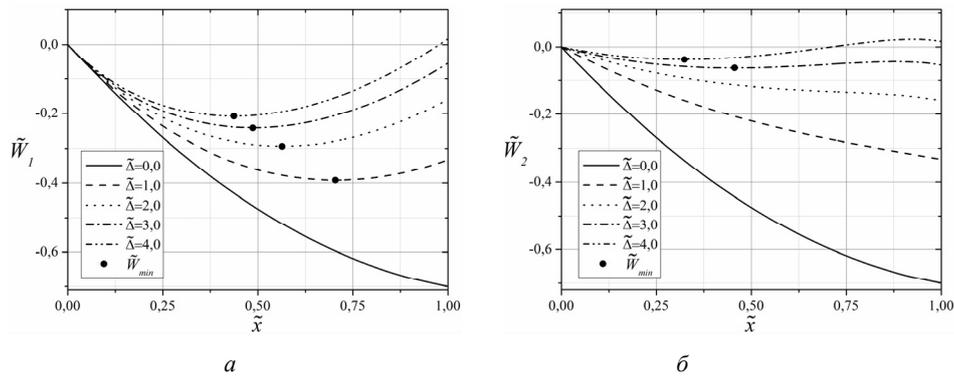


Рис. 3 – Зависимости приведенной потенциальной энергии системы от относительного смещения подвижного электрода для различных  $\tilde{\Delta}$  при  $\lambda = 1, 2$ :

*a* – движение с увеличением среднего межэлектродного зазора; *b* – движение с уменьшением среднего межэлектродного зазора

Fig. 3 – Dependences of the system normalized potential energy on the relative movable electrode displacement for different  $\tilde{\Delta}$  at  $\lambda = 1, 2$ :

*a* – is a movable electrode movement with an increase in average interelectrode gap; *b* – is a movable electrode movement with a decrease in an average interelectrode gap

Из рис. 3 видно, что с увеличением  $\tilde{\Delta}$  точка устойчивого равновесия  $\tilde{W}_{\min}$  для обоих случаев смещается в сторону меньших  $\tilde{x}$ , так как при этом электростатическая сила, действующая на электроды, уменьшается из-за увеличения среднего зазора между электродами. Следует отметить, что в конструкции конденсатора с увеличением среднего межэлектродного зазора (см. рис. 1, *a*) устойчивое положение подвижного электрода наблюдается при любых  $\tilde{\Delta}$  и при любом действующем напряжении  $\lambda$  в интервале  $0 < \tilde{x} < 1$  (рис. 3, *a*), как и для конденсатора с параллельными электродами. В то же время в конструкции с уменьшением среднего межэлектродного зазора (см. рис. 1, *b*) существуют такие значения  $\tilde{\Delta}$ , при которых устойчивое положение подвижного электрода не наблюдается (рис. 3, *b*).

## 2. Анализ полученных результатов

Такое поведение системы при изменении приложенного напряжения и наклона электродов можно объяснить, анализируя уравнение равновесия (баланса сил) между возвращающей силой упругости подвеса  $F_{уп}$  и электрической силой  $F_{эд}$ .

В первом случае, когда при увеличении приложенного напряжения и соответствующего смещения подвижного электрода происходит увеличение среднего межэлектродного зазора, уравнение равновесия в безразмерных переменных можно представить в следующем виде:

$$\tilde{F}_{уп} + \tilde{F}_{эл} = \tilde{x} - \frac{\lambda}{1 + \tilde{\Delta}\tilde{x}} = 0. \quad (6)$$

На рис. 4 приведены зависимости электрической силы и силы упругости подвеса, действующих на электроды, от смещения электродов  $\tilde{x}$  для различных значений  $\lambda$  при  $\tilde{\Delta} = 2,0$ . Маркерами отмечены положения электродов, соответствующие равенству возвращающей силы упругости подвеса  $\tilde{F}_{уп}$  и электрической силы  $\tilde{F}_{эл}$ , а следовательно, и минимуму потенциальной энергии при заданных  $\lambda$  и  $\tilde{\Delta}$ .

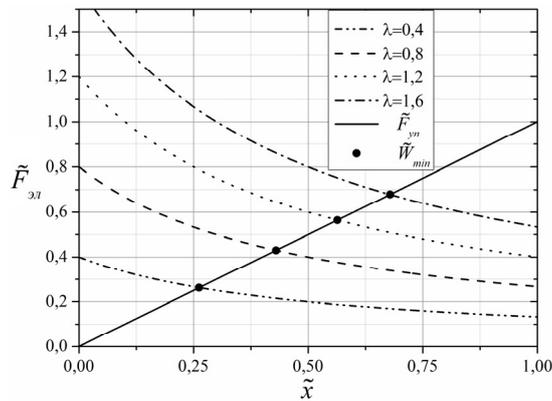


Рис. 4 – Зависимости электрической силы и силы упругости подвеса (сплошная линия) от относительного смещения подвижного электрода для различных значений  $\lambda$  при движении электрода с увеличением среднего межэлектродного зазора и  $\tilde{\Delta} = 2,0$

Fig. 4 – Dependences of an electric force and an elastic force (solid line) on the relative displacement of the movable electrode in the case of the movable electrode movement with an increase in an average interelectrode gap for different  $\lambda$  and  $\tilde{\Delta} = 2,0$

Анализ (6) в квазистатическом случае позволяет получить зависимость смещения подвижного электрода (положения точки устойчивого равновесия) от действующего напряжения:

$$\tilde{x} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\tilde{\Delta}\lambda}}{2\tilde{\Delta}}. \quad (7)$$

Зависимости относительного смещения подвижного электрода  $\tilde{x}$  при его движении с увеличением среднего межэлектродного зазора от приведенного напряжения  $\lambda$ , рассчитанные с использованием (7) при различных  $\tilde{\Delta}$ , показаны на рис. 5. Видно, что в отличие от модели с параллельными электродами ( $\tilde{\Delta} = 0$ )

зависимость положения точки устойчивого равновесия от приведенного напряжения при наличии наклона нелинейна. Также видно, что устойчивое положение подвижного электрода в данном случае наблюдается при любых  $\tilde{\Delta}$  и при любом приложенном напряжении, как и для конденсатора с параллельными электродами.

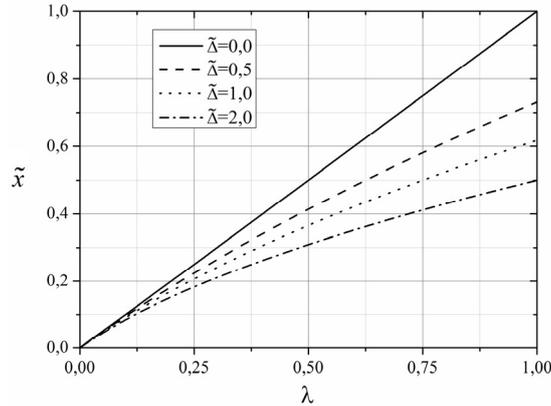


Рис. 5 – Зависимости относительного смещения подвижного электрода при движении с увеличением межэлектродного зазора от приведенного напряжения  $\lambda$  для различных  $\tilde{\Delta}$

Fig. 5 – Dependences of a relative displacement of the movable electrode in the case of the movable electrode movement with an increase in an average interelectrode gap on the normalized voltage  $\lambda$  for different  $\tilde{\Delta}$

Отметим, что после того как будет достигнуто максимальное перекрытие электродов, в данном случае дальнейшее увеличение приложенного напряжения не будет приводить к изменению взаимного расположения электродов.

Во втором случае, когда при увеличении приложенного напряжения и соответствующего смещения подвижного электрода происходит уменьшение среднего межэлектродного зазора, уравнение равновесия в безразмерных переменных можно представить в следующем виде:

$$\tilde{F}_{\text{уп}} + \tilde{F}_{\text{эл}} = \tilde{x} - \frac{\lambda}{1 + \tilde{\Delta}(1 - \tilde{x})} = 0. \quad (8)$$

На рис. 6 приведены зависимости электрической силы и силы упругости подвеса (сплошная линия), действующих на электроды, от смещения электродов  $\tilde{x}$  для различных  $\lambda$  и  $\tilde{\Delta} = 2,0$  для данного случая. Маркерами отмечены положения электродов, соответствующие равенству силы упругости подвеса  $\tilde{F}_{\text{уп}}$  и электрической силы  $\tilde{F}_{\text{эл}}$  (минимуму потенциальной энергии) при заданных  $\lambda$  и  $\tilde{\Delta}$ .

Видно, что в случае смещения с уменьшением среднего межэлектродного зазора равенство сил будет наблюдаться не всегда, а только до тех пор, пока не будет достигнута критическая точка  $\tilde{x}_{cr}$  (пустой маркер). При дальнейшем увеличении приложенного напряжения подвижный электрод начнет неконтролируемо смещаться к точке  $\tilde{x} = 1$ , стремясь занять положение с максимальным перекрытием электродов (критический эффект).

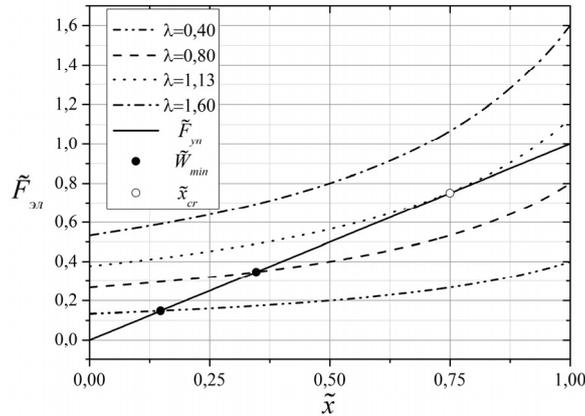


Рис. 6 – Зависимости электрической силы и силы упругости подвеса (сплошная линия) от относительного смещения подвижного электрода для различных  $\lambda$  и  $\tilde{\Delta} = 2,0$  при движении электрода с уменьшением среднего межэлектродного зазора

Fig. 6 – Dependences of an electric force and an elastic force (solid line) on a relative displacement of the movable electrode in the case of the movable electrode movement with a decrease in an average interelectrode gap for different  $\lambda$  and  $\tilde{\Delta} = 2,0$

В этом случае в квазистатическом режиме зависимость положения точки устойчивого равновесия подвижного электрода от действующего напряжения принимает вид

$$\tilde{x} = \frac{(1 + \tilde{\Delta}) - \sqrt{(1 + \tilde{\Delta})^2 - 4\tilde{\Delta}\lambda}}{2\tilde{\Delta}}. \quad (9)$$

На рис. 7 приведены зависимости относительного смещения подвижного электрода от приложенного напряжения в случае его движения с уменьшением межэлектродного зазора для различных  $\tilde{\Delta}$ . Эти зависимости отражают характерные особенности поведения данной электромеханической системы при изменении управляющего напряжения. Видно, что в интервале  $1 < \lambda \leq \lambda_{cr}$  каждому значению управляющего напряжения соответствуют два состояния системы. При этом нижняя ветвь с  $0 < \tilde{x} \leq \tilde{x}_{cr}$  соответствует устойчивому состоянию системы, а верхняя с  $\tilde{x} \geq \tilde{x}_{cr}$  – неустойчивому.

Данный критический эффект характеризуется значениями критического смещения  $\tilde{x}_{cr}$  и критического напряжения  $\lambda_{cr}$ .

Анализируя поведение относительного изменения приращения силы упругости  $F_1$  и электрической силы  $F_2$ :

$$F_1 = \frac{1}{\tilde{F}_{уп}} \frac{\partial \tilde{F}_{уп}}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\tilde{x}}, \quad F_2 = \frac{1}{\tilde{F}_{эл}} \frac{\partial \tilde{F}_{эл}}{\partial \tilde{x}}$$

от относительного смещения  $\tilde{x}$  (рис. 8), видно, что в случае, когда при увеличении приложенного напряжения и соответствующего смещения подвижного элект-

трода происходит увеличение среднего межэлектродного зазора, относительное изменение приращения силы упругости  $F_1$  всегда больше относительного изменения приращения электрической силы  $F_2$  (рис. 8, а). В результате на участке  $0 < \tilde{x} < 1$  силе упругости удается скомпенсировать возрастание электрической силы при случайных флуктуациях системы, приводящих к увеличению смещения электрода. В то же время в случае, когда при увеличении приложенного напряжения и соответствующего смещения подвижного электрода происходит уменьшение среднего межэлектродного зазора (рис. 8, б), при изменении смещения от нуля до  $\tilde{x}_{cr}$  превалирует  $F_1$ , а при  $\tilde{x} > \tilde{x}_{cr} - F_2$ .

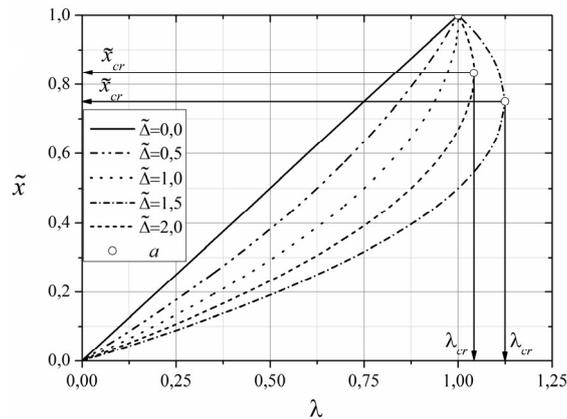


Рис. 7 – Зависимости относительного смещения подвижного электрода при движении с уменьшением межэлектродного зазора от приведенного напряжения  $\lambda$  для различных  $\tilde{\Delta}$

Fig. 7 – Dependences of a relative displacement of the movable electrode in the case of the movable electrode movement with a decrease in an average interelectrode gap on the normalized voltage  $\lambda$  for different  $\tilde{\Delta}$

В критической точке (точка «а» на рис. 7 и 8, б)  $F_1 = F_2$ . В результате на участке  $0 < \tilde{x} < \tilde{x}_{cr}$  силе упругости удается скомпенсировать возрастание электрической силы при случайных флуктуациях системы, приводящих к увеличению смещения электрода. Однако на участке с  $\tilde{x} \geq \tilde{x}_{cr}$  малейшие флуктуации в сторону увеличения смещения приведут к дальнейшему увеличению смещения электрода (критический эффект – аналог эффекта “pull-in instability”) вплоть до  $\tilde{x} = 1$ , так как в этом случае сила упругости уже не сможет скомпенсировать приращение электрической силы. Анализ показывает, что зависимость критического смещения подвижного электрода  $\tilde{x}_{cr}$  от  $\tilde{\Delta}$  может быть представлена в виде

$$\tilde{x}_{cr} = \frac{\tilde{\Delta} + 1}{2\tilde{\Delta}}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что критический эффект проявляется лишь при  $\tilde{\Delta} \geq 1$ . Причем при увеличении  $\tilde{\Delta}$  значение критического смещения  $\tilde{x}_{cr}$  уменьшается и стремится к 0,5.

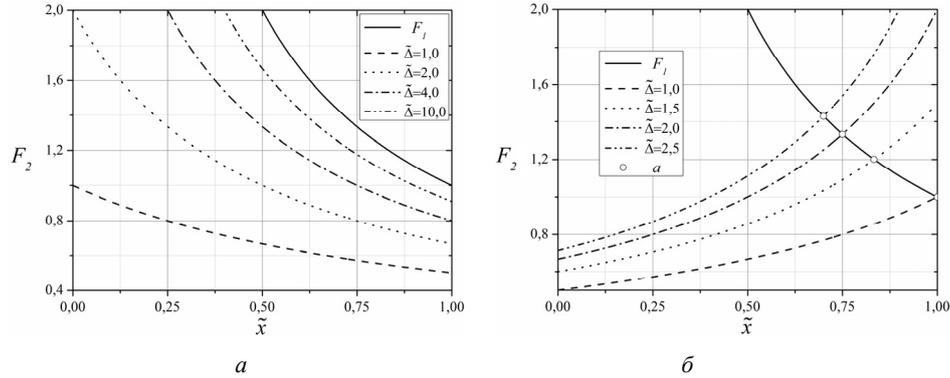


Рис. 8 – Зависимости относительного изменения приращения силы упругости  $F_1$  и электрической силы  $F_2$  от относительного смещения  $\tilde{x}$ :

$a$  – движение с увеличением среднего межэлектродного зазора;  $b$  – движение с уменьшением среднего межэлектродного зазора

Fig. 8 – Dependences of a relative change in the elastic force  $F_1$  and the electric force  $F_2$  increments on the relative displacement  $\tilde{x}$ :

$a$  – is a movable electrode movement with an increase in an average interelectrode gap;  $b$  – is a movable electrode movement with a decrease in an average interelectrode gap

При подстановке (10) в (9) зависимость критического напряжения от относительного наклона электродов принимает вид

$$\lambda_{cr} = \frac{(\tilde{\Delta} + 1)^2}{4\tilde{\Delta}}. \quad (11)$$

Зависимость критического напряжения от  $\tilde{\Delta}$ , рассчитанная с использованием (11), приведена на рис. 9.

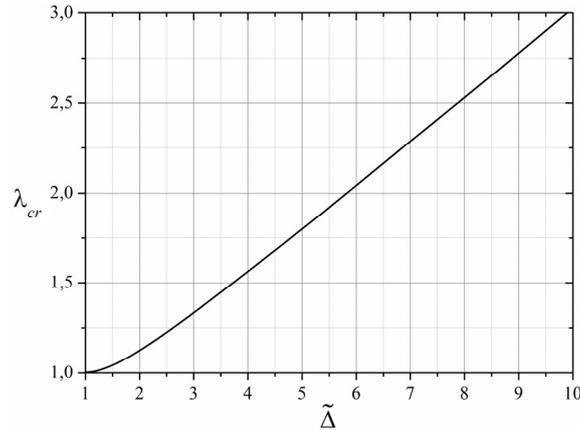


Рис. 9 – Зависимость критического напряжения от  $\tilde{\Delta}$

Fig. 9. Dependence of a critical voltage on  $\tilde{\Delta}$

Согласно рис. 9  $\lambda_{cr}$  при  $\tilde{\Delta} \geq 2$  начинает практически линейно зависеть от  $\tilde{\Delta}$ :

$$\lambda_{cr} \approx 0,6475 + 0,2325\tilde{\Delta}.$$

После наступления критического состояния система перестает реагировать на изменения управляющего напряжения. Таким образом, можно сказать, что движение подвижного электрода с увеличением среднего зазора является неустойчивым, в отличие от движения с уменьшением межэлектродного зазора.

### Заключение

Исследование влияния непараллельности электродов на электромеханические взаимодействия в МЭМС с латеральным смещением электродов в режиме с контролируемым напряжением показало, что процессы, сопровождающие смещения подвижного электрода в случае его движения с увеличением и с уменьшением среднего межэлектродного зазора, существенно различаются.

Показано, что изменяя приложенное напряжение при смещении подвижного электрода с увеличением среднего межэлектродного зазора, можно установить произвольное контролируемое относительное расположение электродов во всем интервале перекрытия электродов  $0 < \tilde{x} < 1$ . После того как будет достигнуто максимальное перекрытие электродов, в данном случае дальнейшее увеличение приложенного напряжения не будет приводить к изменению взаимного расположения электродов.

Установлено, что в отличие от случая с движением подвижного электрода переменного конденсатора с увеличением среднего межэлектродного зазора при движении с уменьшением среднего межэлектродного зазора установить произвольное контролируемое относительное расположение электродов во всем интервале перекрытия электродов не всегда возможно.

Обнаружено, что в случае движения подвижного электрода с уменьшением среднего межэлектродного зазора существует такое критическое положение подвижного электрода  $\tilde{x}_{cr}$  (и значение напряжения  $\lambda_{cr}$ ), при котором электростатическая сила начинает преобладать над упругой силой, что приводит к неконтролируемому смещению подвижного электрода, направленному в сторону увеличения площади перекрытия электродов – наблюдается критический эффект (аналог эффекта “pull-in instability”). После наступления критического состояния система перестает реагировать на изменения управляющего напряжения.

Полученные выражения для оценки емкостей, потенциальных энергий, электростатических сил, критического напряжения и смещения подвижного электрода при различных наклонах электродов показали, что критический эффект проявляется лишь при  $\tilde{\Delta} \geq 1$  и  $\lambda \geq 1$ . При увеличении взаимного наклона электродов значение  $\tilde{x}_{cr}$  уменьшается, а  $\lambda_{cr}$  – растёт. Причем значение  $\lambda_{cr}$  при  $\tilde{\Delta} \geq 2$  начинает практически линейно зависеть от  $\tilde{\Delta}$ .

Обнаруженные особенности электромеханических взаимодействий в МЭМС с латеральным смещением электродов необходимо учитывать при разработке, изготовлении и сборке микроэлектромеханических устройств.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Chiang C.-T.** Design of a CMOS MEMS accelerometer used in IoT devices for seismic detection // IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems. – 2018. – Vol. 8, N 3. – P. 566–577. – doi: 10.1109/JETCAS.2018.2825604.
2. **Nazdrowicz J., Napieralski A.** Electrical equivalent model of MEMS accelerometer in Matlab/SIMULINK environment // 2018 XIVth International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH): proceedings. – Lviv, Ukraine, 2018. – P. 69–72. – doi: 10.1109/MEMSTECH.2018.8365704.

3. New stability method of a multirate controller for a three-axis high-Q MEMS accelerometer with simultaneous electrostatic damping / L.E. Ciotirca, O. Bernal, J. Enjalbert, T. Cassagnes, H. Tap, H. Beaulaton, S. Sahin // *IEEE Sensors Journal*. – 2018. – Vol. 18, N 15. – P. 6106–6114. – doi: 10.1109/JSEN.2018.2844682.
4. **Zakriya M., Elfadel I.M., Rasras M.** High dynamic range Z-axis hybrid spring MEMS capacitive accelerometer // 2018 Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS and MOEMS (DTIP). – Roma, Italy, 2018. – P. 1–4. – doi: 10.1109/DTIP.2018.8394219.
5. Different methods of capacitive comb drive MEMS accelerometer simulations / J. Nazdrowicz, M. Szenner, C. Maj, A. Napieralski // 2018 Baltic URSI Symposium (URSI). – Poznań, Poland, 2018. – P. 254 – 256. – doi: 10.23919/URSI.2018.8406772.
6. Design, fabrication, and calibration of a full silicon WLP MEMS sandwich accelerometer / Q. Hu, N. Li, C. Xing, W. Mei, P. Sun // 2018 19th International Conference on Electronic Packaging Technology. – Shanghai, China, 2018. – P. 919–933. – doi: 10.1109/ICEPT.2018.8480835.
7. **Aydemir A., Akin T.** Fabrication of a three-axis capacitive MEMS accelerometer on a single substrate // 2015 IEEE SENSORS. – Busan, South Korea, 2015. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ICSENS.2015.7370307.
8. **Shah M.A., Iqbal F., Lee B.-L.** Design and analysis of a single-structure three-axis MEMS gyroscope with improved coupling spring // 2016 IEEE 11th Annual International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems. – Piscataway, NJ, 2016. – P. 188–191. – doi: 10.1109/JMEMS.2017.2754506.
9. High scale-factor stability frequency-modulated MEMS gyroscope: 3-axis sensor and integrated electronics design / P. Minotti, S. Della, G. Mussi, A. Bonfanti, S. Facchinetti, A. Tocchio, V. Zega, C. Comi, A.L. Lacaita, G. Langfelder // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2018. – Vol. 65, N 6. – P. 5040–5050. – doi: 10.1109/TIE.2017.2772212.
10. Design and fabrication of a novel MEMS vibrating ring gyroscope / Z. Kou, J. Liu, H. Cao, H. Feng, J. Ren, Q. Kang, Y. Shi // 2017 IEEE 3rd Information Technology and Mechatronics Engineering Conference. – Chongqing, China, 2017. – P. 131–134. – doi: 10.1109/ITOEC.2017.8122396.
11. Quadruple mass vibrating MEMS gyroscope with symmetric design / G. Wu, G.L. Chua, N. Singh, Y. Gu // *IEEE Sensors Letters*. – 2018. – Vol. 2, N 4. – doi: 10.1109/LENS.2018.2873000.
12. **Fang W., Huang Q.** A study of the mechanical reliability of a MEMS microphone // Proceedings of the 20th IEEE International Symposium on the Physical and Failure Analysis of Integrated Circuits IPFA 2013. – Suzhou, China, 2013. – P. 716–719. – doi: 10.1109/IPFA.2013.6599261.
13. New architecture of MEMS microphone for enhanced performances / J. Czamy, A. Walther, B. Desloges, Ph. Robert, E. Redon, T. Verdot, K. Ege, C. Guianvarc'h, J.L. Guyader // 2013 International Semiconductor Conference Dresden–Grenoble. – Dresden, Germany, 2013. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ISCDG.2013.6656312.
14. Design and simulation of silicon and polymer based piezoelectric MEMS microphone / Y.C. Muralidhar, B.S. Somesh, K.N. Neethu, L.R. Yeshashwini, V.S. Naganja, S.L. Pinjare // 2013 International Conference on Emerging Trends in Communication, Control, Signal Processing and Computing Applications. – Bangalore, India, 2013. – P. 1–6. – doi: 10.1109/C2SPCA.2013.6749409.
15. Development of capacitive MEMS microphone based on slit-edge for high signal-to-noise ratio / I. Yoo, J. Sim, S. Yang, H. Kim // 2018 IEEE Micro Electro Mechanical Systems. – Belfast, Northern Ireland, 2018. – P. 1072–1075. – doi: 10.1109/MEMSYS.2018.8346745.
16. Modeling of a bistable MEMS mechanism with torsion/cantilever beams / Y. Wu, J. Wang, X. Zhang, C. Zhang, G. Ding // 2010 IEEE 5th International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems. – Xiamen, China, 2010. – P. 153–156. – doi: 10.1109/NEMS.2010.5592168.
17. Simulation and analysis of actuation voltage of electrostatically actuated RF MEMS Cantilever and fixed – fixed switches with variable beam parameters / P. Sindhuja, V. Sharma, M.D. Upadhyay, A.V. Singh // 2016 International Conference on Micro-

- Electronics and Telecommunication Engineering (ICMETE). – IEEE, 2016. – P. 450–454. – doi: 10.1109/ICMETE.2016.84.
18. **Chu C., Liao X., Chen C.** Improved dynamic range of microwave power sensor by MEMS cantilever beam // *Journal of Microelectromechanical Systems*. – 2017. – Vol. 26, N 6. – P. 1183–1185. – doi: 10.1109/JMEMS.2017.2754506.
  19. MEMS deformable mirror actuated by electrostatic piston array / A. Uno, Y. Hirai, T. Tsuchiya, O. Tabata // 2016 International Conference on Optical MEMS and Nanophotonics. – Singapore, 2016. – P. 1–2. – doi: 10.1109/OMN.2016.7565822.
  20. A high fill factor 1×20 MEMS mirror array based on ISC bimorph structure / Q. Chen, J. Ding, W. Wang, H. Xie // 2016 International Conference on Optical MEMS and Nanophotonics. – Singapore, 2016. – P. 1–2. – doi: 10.1109/OMN.2016.7565912.
  21. Portable Fourier transform infrared spectrometer based on an electrothermal MEMS mirror / D. Wang, X. Han, H. Liu, Q. Chen, W. Wang, H. Xie // 2017 19th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems. – Kaohsiung, Taiwan, 2017. – P. 265–268. – doi: 10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994039.
  22. **Grzebyk T.** MEMS vacuum pumps // *Journal of Microelectromechanical Systems*. – 2017. – Vol. 26, N 4. – P. 705–717. – doi: 10.1109/JMEMS.2017.2676820.
  23. Graphene gas pumps / D. Davidovikj, D. Bouwmeester, H.S.J. van der Zant, P.G. Steeneken // 2018 IEEE Micro Electro Mechanical Systems. – Belfast, Northern Ireland, 2018. – P. 628–631. – doi: 10.1109/MEMSYS.2018.8346632.
  24. On-chip high-voltage charge pump with MEMS post-processed standard 5-V CMOS on SOI for electroosmotic flow micropumps / Y. Okamoto, H. Takehara, K. Fujimoto, T. Ichiki, T. Ohba, Y. Mita // *IEEE Electron Device Letters*. – 2018. – Vol. 39, N 6. – P. 851–854. – doi: 10.1109/LED.2018.2829925.
  25. **Косцов Э.Г.** Состояние и перспективы микро- и нанoeлектромеханики // *Автометрия*. – 2009. – Т. 43, № 3. – С. 3–52.
  26. **Остертак Д.И., Пельменев К.Г.** Анализ электростатических взаимодействий в плоскопараллельных МЭМС со смещением электродов // *Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации*. – 2018. – № 1 (38). – С. 7–21. – doi: 10.17212/1727-2769-2018-1-7-21.
  27. **Драгунов В.П., Остертак Д.И., Драгунова Е.В.** Особенности функционирования несбалансированных МЭМС // *Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации*. – 2017. – № 4 (37). – С. 58–69. – doi: 10.17212/1727-2769-2017-4-58-69.
  28. **Драгунов В.П., Киселев Д.Е., Синицкий Р.Е.** Особенности электромеханических взаимодействий в МЭМС с непараллельными электродами // *Нано- и микросистемная техника*. – 2017. – Т. 19, № 6. – С. 360–369. – doi: 10.17587/nmst.19.360-369.
  29. **Драгунов В.П., Остертак Д.И.** Расчет латеральной составляющей электростатической силы в // *Научный вестник Новосибирского государственного технического университета*. – 2009. – № 1 (34). – С. 229–233.
  30. **Драгунов В.П., Остертак Д.И.** Электростатические взаимодействия в МЭМС со встречно-штыревой структурой // *Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации*. – 2009. – № 1 (12). – С. 99–106.
  31. **Драгунов В.П., Косцов Э.Г.** МЭМ электростатический генератор энергии // *Нано- и микросистемная техника*. – 2007. – № 11. – С. 47–52.

**FEATURES OF ELECTROMECHANICAL INTERACTIONS  
IN MEMS WITH A LATERAL DISPLACEMENT OF NON-PARALLEL  
ELECTRODES IN THE VOLTAGE CONTROLLED MODE**

**Sinitskiy R.E., Dragunov V.P., Rudenko I.E.,  
Koloskov D.B., Dragunova E.V.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The paper presents the results of the research into the effect of the electrodes non-parallelism on electromechanical interactions in MEMS with a lateral displacement of electrodes in the voltage controlled operating mode. The analysis was carried out for two cases of a movable electrode

movement: with increasing and with decreasing an average interelectrode gap. Expressions were obtained for the calculation of capacitances, potential energies, electrostatic forces, critical voltage, and a critical displacement of a movable electrode at different slopes of the electrodes.

It was established that in MEMS with a lateral displacement of non-parallel electrodes, with increasing an average interelectrode gap, a controlled displacement of the movable electrode is possible in the entire range of its length at any applied voltages and a mutual slope of the electrodes.

It was found that in MEMS with a lateral displacement of non-parallel electrodes, with decreasing an average interelectrode gap, an unstable state of the system is possible, leading to an uncontrolled movement of the movable electrode directed towards increasing an electrode overlap area – a critical effect (similar to “pull-in instability”). Thus, the movement of a movable electrode with increasing an average interelectrode gap is unstable in contrast to the movement with decreasing an average interelectrode gap. After the onset of a critical state, the system ceases to respond to changes in control voltage. It was shown that this critical effect is possible with system parameters  $\lambda \geq 1$  and  $\tilde{\Delta} \geq 1$ . It was ascertained that in this case, with an increase in the mutual slope of the electrodes, the value of a critical displacement of the movable electrode decreases, and the dependence of the critical voltage  $\lambda_{cr}$  on  $\tilde{\Delta}$  is almost linear at  $\tilde{\Delta} \geq 2$ .

*Keywords:* MEMS, lateral displacement of electrodes, microelectromechanical capacitor, electric force, voltage controlled mode, critical effect, controlled electrode displacement, critical values.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-93-109

#### REFERENCES

1. Chiang C.-T. Design of a CMOS MEMS accelerometer used in IoT devices for seismic detection. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 2018, vol. 8, no. 3, pp. 566–577. doi: 10.1109/JETCAS.2018.2825604.
2. Nazdrowicz J., Napieralski A. Electrical equivalent model of MEMS accelerometer in Matlab/SIMULINK environment. *2018 XIVth International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH): proceedings*, Lviv, Ukraine, 2018, pp. 69–72. doi: 10.1109/MEMSTECH.2018.8365704.
3. Ciotirca L.E., Bernal O., Enjalbert J., Cassagnes T., Tap H., Beaulaton H., Sahin S. New stability method of a multirate controller for a three-axis high-Q MEMS accelerometer with simultaneous electrostatic damping. *IEEE Sensors Journal*, 2018, vol. 18, no. 15, pp. 6106–6114. doi: 10.1109/JSEN.2018.2844682.
4. Zakriya M., Elfadel I.M., Rasras M. High dynamic range Z-axis hybrid spring MEMS capacitive accelerometer. *2018 Symposium on Design, Test, Integration & Packaging of MEMS and MOEMS*, Roma, Italy, 2018, pp. 1–4. doi: 10.1109/DTIP.2018.8394219.
5. Nazdrowicz J., Szenner M., Maj C., Napieralski A. Different methods of capacitive comb drive MEMS accelerometer simulations. *2018 Baltic URSI Symposium*, Poznań, Poland, 2018, pp. 254–256. doi: 10.23919/URSI.2018.8406772.
6. Hu Q., Li N., Xing C., Mei W., Sun P. Design, fabrication, and calibration of a full silicon WLP MEMS sandwich accelerometer. *2018 19th International Conference on Electronic Packaging Technology*, Shanghai, China, 2018, pp. 919–933. doi: 10.1109/ICEPT.2018.8480835.
7. Aydemir A., Akin T. Fabrication of a three-axis capacitive MEMS accelerometer on a single substrate. *2015 IEEE SENSORS*, Busan, South Korea, 2015, pp. 1–4. doi: 10.1109/ICSENS.2015.7370307.
8. Shah M.A., Iqbal F., Lee B.-L. Design and analysis of a single-structure three-axis MEMS gyroscope with improved coupling spring. *2016 IEEE 11th Annual International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems*. Piscataway, NJ, 2016, pp. 188–191. doi: 10.1109/JMEMS.2017.2754506.
9. Minotti P., Della S., Mussi G., Bonfanti A., Facchinetti S., Tocchio A., Zega V., Comi C., Lacaita A.L. Langfelder high scale-factor stability frequency-modulated MEMS gyroscope: 3-axis sensor and integrated electronics design. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, vol. 65, no. 6, pp. 5040–5050. doi: 10.1109/TIE.2017.2772212.

10. Kou Z., Liu J., Cao H., Feng H., Ren J., Kang Q., Shi Y. Design and fabrication of a novel MEMS vibrating ring gyroscope. *2017 IEEE 3rd Information Technology and Mechatronics Engineering Conference, Chongqing, China, 2017*, pp. 131–134. doi: 10.1109/ITOEC.2017.8122396.
11. Wu G., Chua G.L., Singh N., Gu Y. A quadruple mass vibrating MEMS gyroscope with symmetric design. *IEEE Sensors Letters*, 2018, vol. 2, no. 4. doi: 10.1109/LSENS.2018.2873000.
12. Fang W., Huang Q. A study of the mechanical reliability of a MEMS microphone. *Proceedings of the 20th IEEE International Symposium on the Physical and Failure Analysis of Integrated Circuits IPFA 2013, Suzhou, China, 2013*, pp. 716–719. doi: 10.1109/IPFA.2013.6599261.
13. Czamy J., Walther A., Desloges B., Robert Ph., Redon E., Verdout T., Ege K., Guianvarc'h C., Guyader J.L. New architecture of MEMS microphone for enhanced performances. *2013 International Semiconductor Conference Dresden–Grenoble, 2013*, pp. 1–4. doi: 10.1109/ISCDG.2013.6656312.
14. Muralidhar Y.C., Somesh B.S., Neethu K.N., Yeshashwini L.R., Naganja V.S., Pinjare S.L. Design and simulation of silicon and polymer based piezoelectric MEMS microphone. *2013 International Conference on Emerging Trends in Communication, Control, Signal Processing and Computing Applications, Bangalore, India, 2013*, pp. 1–6. doi: 10.1109/C2SPCA.2013.6749409.
15. Yoo I., Sim J., Yang S., Kim H. Development of capacitive MEMS microphone based on slit-edge for high signal-to-noise ratio. *2018 IEEE Micro Electro Mechanical Systems, Belfast, Northern Ireland, 2018*, pp. 1072–1075. doi: 10.1109/MEMSYS.2018.8346745.
16. Wu Y., Wang J., Zhang X., Zhang C., Ding G. Modeling of a bistable MEMS mechanism with torsion/cantilever beams. *2010 IEEE 5th International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems, Xiamen, China, 2010*, pp. 53–156. doi: 10.1109/NEMS.2010.5592168.
17. Sindhuja P., Sharma V., Upadhyay M.D., Singh A.V. Simulation and analysis of actuation voltage of electrostatically actuated RF MEMS cantilever and fixed – fixed switches with variable beam parameters. *2016 International Conference on Micro-Electronics and Telecommunication Engineering, 2016*, pp. 450–454. doi: 10.1109/ICMETE.2016.84.
18. Chu C., Liao X., Chen C. Improved dynamic range of microwave power sensor by MEMS cantilever beam. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2017, vol. 26, no. 6, pp. 1183–1185. doi: 10.1109/JMEMS.2017.2754506.
19. Uno A., Hirai Y., Tsuchiya T., Tabata O. MEMS deformable mirror actuated by electrostatic piston array. *2016 International Conference on Optical MEMS and Nanophotonics, Singapore, 2016*, pp. 1–2. doi: 10.1109/OMN.2016.7565822.
20. Chen Q., Ding J., Wang W., Xie H. A high fill factor  $1 \times 20$  MEMS mirror array based on ISC bimorph structure. *2016 International Conference on Optical MEMS and Nanophotonics, Singapore, 2016*, pp. 1–2. doi: 10.1109/OMN.2016.7565912.
21. Wang D., Han X., Liu H., Chen Q., Wang W., Xie H. Portable Fourier transform infrared spectrometer based on an electrothermal MEMS mirror. *2017 19th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, Kaohsiung, Taiwan, 2017*, pp. 265–268. doi: 10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994039.
22. Grzebyk T. MEMS vacuum pumps. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2017, vol. 26, no. 4, pp. 705–717. doi: 10.1109/JMEMS.2017.2676820.
23. Davidovikj D., Bouwmeester D., Zant H.S.J. van der, Steeneken P.G. Graphene gas pumps. *2018 IEEE Micro Electro Mechanical Systems, Belfast, Northern Ireland, 2018*, pp. 628–631. doi: 10.1109/MEMSYS.2018.8346632.
24. Okamoto Y., Takehara H., Fujimoto K., Ichiki T., Ohba T., Mita Y. On-chip high-voltage charge pump with MEMS post-processed standard 5-V CMOS on SOI for electroosmotic flow micropumps. *IEEE Electron Device Letters*, 2018, vol. 39, no. 6, pp. 851–854. doi: 10.1109/LED.2018.2829925.

25. Kostsov E.G. Sostoyanie i perspektivy mikro- i nanoelektromekhaniki [Status and prospects of micro- and nanoelectromechanics]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 3–52. (In Russian).
26. Ostertak D.I., Pelmenev K.G. Analiz elektrostatocheskikh vzaimodeistvii v ploskoparallelnykh MEMS so smescheniem elektrodov [An analysis of electrostatic interactions in parallel-plate MEMS with an electrode offset]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 1 (38), pp. 7–21. doi: 10.17212/1727-2769-2018-1-7-21.
27. Dragunov V.P., Ostertak D.I., Dragunova E.V. Osobennosti funktsionirovaniya nesbalansirovannykh MEMS [Peculiarities of unbalanced MEMS operation]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2017, no. 4 (37), pp. 58–69. doi: 10.17212/1727-2769-2017-4-58-69.
28. Dragunov V.P., Kiselev D.E., Sinitskii R.E. Osobennosti elektromekhanicheskikh vzaimodeistvii v MEMS s neparallelnymi elektrodami [Specific features of the electromechanical interactions in MEMS with nonparallel electrodes]. *Nano- i mikrosistemnaya tekhnika – Journal of Nano- and Microsystem Technique*, 2017, vol. 19, no. 6, pp. 360–369. doi: 10.17587/nmst.19.360-369.
29. Dragunov V.P., Ostertak D.I. Raschet lateral'noi sostavlyayushchei elektrostatocheskoi sily v MEMS [The calculation of lateral electrostatic force component of MEMS]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 1 (34), pp. 229–233.
30. Dragunov V.P., Ostertak D.I. Elektrostatocheskie vzaimodeistviya v MEMS so vstrechnoshtyrevoi strukturoi [Coulomb interactions in interdigitated MEMS]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2009, no. 1 (12), pp. 99–106.
31. Dragunov V.P., Kostsov E.G. MEM elektrostatocheskii generator energii [Microelectromechanical Electrostatic Power Generator]. *Nano- i mikrosistemnaya tekhnika – Journal of Nano- and Microsystem Technique*, 2007, no. 11, pp. 47–52.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Синицкий Родион Евгеньевич** – родился в 1994 году, магистрант кафедры ППИМЭ Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: нано- и микросистемная техника. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: sinitskiy.rodion@yandex.ru).

**Sinitskiy Rodion Evgenievich** (b. 1994) – a graduate student at the Department of Semiconductor Devices and Microelectronics in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on nano- and microsystem technology. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: sinitskiy.rodion@yandex.ru).



**Драгунов Валерий Павлович** – родился в 1947 году, д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры ППИМЭ Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: наноэлектроника, физика низкоразмерных структур, нано- и микросистемная техника. Опубликовано более 160 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: drag@adm.nstu.ru).

**Dragunov Valery Pavlovich** (b. 1947) – Doctor of Science (Eng.), associatet professor, professor at the Department of Semiconductor Devices and Microelectronics in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on nanoelectronics, physics of low-dimensional structures, nano- and microsystem technology. He is the author of more than 160 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: drag@adm.nstu.ru).



**Руденко Игорь Евгеньевич** – родился в 1997 году, студент кафедры ШПИМЭ Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: наноэлектроника, нано- и микросистемная техника. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: igor\_rudenko.ru@mail.ru).

**Rudenko Igor Evgenievich** (b. 1997) – a student at the Department of Semiconductor Devices and Microelectronics in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on nanoelectronics, nano- and microsystem technology. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: igor\_rudenko.ru@mail.ru).



**Колосков Дмитрий Борисович** – родился в 1998 году, студент кафедры ШПИМЭ Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: наноэлектроника, нано- и микросистемная техника. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: dimakoloskov2009@gmail.com).

**Koloskov Dmitrii Borisovich** (b. 1998) – a student at the Department of Semiconductor Devices and Microelectronics in the Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on nanoelectronics, nano- and microsystem technology. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russian Federation. E-mail: dimakoloskov2009@gmail.com).



**Драгунова Евгения Валерьевна** – родилась в 1978 году, канд. экон. наук, доцент, доцент кафедры экономической информатики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов – информационные технологии, изучение типологий роста высокотехнологических компаний. Опубликовано более 80 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, Новосибирск, пр. Карла Маркса 20. E-mail: EVDragunova@ngs.ru, Dragunova@corp.nstu.ru).

**Dragunova Evgeniya Valer'evna** (b. 1978) – Candidate of Sciences (Econ.), associate professor, associate professor at the Department of Computer Science in Economics, Novosibirsk State Technical University. The area of her scientific interests is information technologies and growth typologies of high-tech enterprises. She is the author of more than 80 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: EVDragunova@ngs.ru, Dragunova@corp.nstu.ru)

*Статья поступила 22 октября 2018 г.*

*Received October 22, 2018*

---

To Reference:

Sinitskiy R.E., Dragunov V.P., Rudenko I.E., Koloskov D.B., Dragunova E.V. Osobennosti elektromekhanicheskikh vzaimodeistvii v MEMS s lateral'nym smeshcheniem neparallelnykh elektrodov v rezhime s kontroliruemym napryazheniem [Features of electromechanical interactions in MEMS with lateral displacement of non-parallel electrodes in the voltage controlled mode]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp. 93–109. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-93-109.

УДК 004.82

**МОДЕЛЬ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ОБУЧАЮЩЕГО АГЕНТА  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАССУЖДЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗДРАВОВОГО  
СМЫСЛА. ПРИМЕНЕНИЕ В ТРЕНАЖЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ****В.И. Хабаров, К.В. Спешилов***Новосибирский государственный технический университет*

В работе рассматривается концепция обучающего агента как системы искусственного интеллекта, ориентированной на поддержку процесса обучения профессиональным навыкам в совокупности с техническими средствами типа тренажерных комплексов. Концептуализация понятия «обучающий агент» позволяет сформировать класс интеллектуальных систем, ориентированных на специфику профессионального обучения и позволяющих моделировать деятельность опытного наставника. Наиболее подходящей моделью поведения такого типа интеллектуальных агентов является модель, известная как модель *рассуждений на основе здравого смысла* (commonsense reasoning). Предлагается реализация такого агента, основанного на *исчислении событий* как расширении языка логики предикатов первого порядка. В качестве приложения рассматривается архитектура интеллектуального тренажерного комплекса (на примере тренажерного комплекса оперативного персонала сортировочной горки для железнодорожной станции), включающая обучающего агента.

*Ключевые слова:* интеллектуальный обучающий агент, рассуждения на основе здравого смысла, исчисление событий, тренажерный комплекс.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-110-119

**Введение**

Целью данной работы является создание концепции *интеллектуального обучающего агента* (ИОА). ИОА представляет собой рационального агента, среду которого можно разделить на две составляющие: среду обучаемого (СО) и среду мира (СМ), в котором тренируется обучаемый. При использовании тренажерных комплексов миром будет являться ограниченная псевдофизическая модель реальных объектов.

ИОА не имеет доступа к знаниям обучаемого в каждый момент времени и может лишь делать предположения о них, исходя из действий обучаемого на тренировке или во время экзамена. Процесс обучения направлен на изменение знаний обучаемого, но не гарантирует этого. Для повышения эффективности обучения ИОА необходимо учитывать траекторию обучения для каждого обучаемого, новые задания должны формироваться с учетом вероятности возникновения допускаемых ошибок. В каждый момент времени знания обучаемого можно описать некоторым набором правил.

Таким образом, среда обучаемого является частично наблюдаемой, стохастической, последовательной, динамической и дискретной; может быть как одноагентной, так и мультиагентной, в зависимости от количества обучающих агентов, воздействующих на обучаемого. Среда мира зависит от тренажерного комплекса и может быть как полностью, так и частично наблюдаемой, как детерминированной, так и стохастической и т. д. С каждой из сред ИОА взаимодействует по отдельности, используя различные датчики и исполнительные механизмы, которые также зависят от реализации тренажерного комплекса. Показателем производительности ИОА можно считать максимизацию оценок обучаемых на экзамене.

Отличительные особенности данного типа агентов заключаются в том, что:

- агент может исследовать среду, т. е. самого обучаемого. Благодаря этому он способен выбрать для каждого обучаемого оптимальную траекторию обучения;
- агент способен рассматривать и оценивать действия обучаемого, а также выявлять ошибки, допущенные обучаемым в процессе обучения;
- агент способен продемонстрировать правильное решение в любой момент тренировки с указанием причины каждого принимаемого им решения;
- агент способен выявить «точку невозврата» – момент времени тренировки, после которого уже невозможно получить правильное решение – откатить решение до этого момента времени и продемонстрировать правильное решение с данной точки траектории обучения.

В общем случае ИОА является обучающим агентом, основанном на модели и цели [1].

### 1. Концепция интеллектуального обучающего агента

Процесс обучения на тренажерном комплексе с использованием обучающего агента может быть представлен с помощью модификации сетей Петри, представленной в [2, 3] следующим образом (рис. 1).

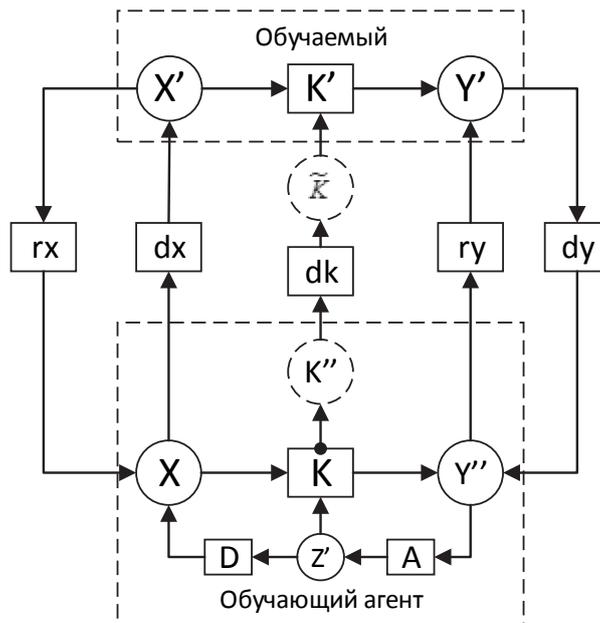


Рис. 1 – Процесс обучения с обучающим агентом

Fig. 1 – Learning with a tutoring agent

Обозначения на рис. 1:  $X$  – база данных, содержащая задания, доступные обучающему агенту;  $K$  – база знаний обучающего агента об окружающем мире;  $Y''$  – предполагаемое обучающим агентом на основе своих знаний решение задания;  $X'$  – задание, выданное обучаемому;  $K'$  – знания обучаемого;  $Y'$  – ответ на задание, данный обучаемым на основании своих знаний;  $dx$ ,  $dy$  – сенсоры взаимодействия обучаемого и обучающего агента;  $rx$ ,  $ry$  – исполнительные механизмы

взаимодействия обучаемого и обучающего агента;  $A$  – оператор анализа ответа обучаемого;  $Z'$  – выявленные ошибки,  $D$  – планировщик следующего задания;  $K''$  – метаданные, содержащие знания об окружающем мире, которых не хватает обучаемому для правильного решения задания;  $dk$  – интерпретатор языка метаданных обучающего агента в язык метаданных обучаемого;  $\tilde{K}$  – новые знания, получаемые обучаемым.

Процесс обучения начинается с того, что обучающий агент выбирает из базы данных заданий  $X$  некоторое задание  $x$ . Выбор задания основывается на знаниях обучающего агента о знаниях обучаемого. Затем, используя доступный инструмент взаимодействия  $dx$ , обучающий агент сообщает задание обучаемому. В качестве инструмента взаимодействия могут выступать устный вопрос, билет, электронный тест, начальные условия тренировки при использовании тренажерного комплекса. Получив задание, обучаемый с помощью блока обратной связи  $rx$  может уточнить его у обучающего агента. Таким образом, цепочка  $X \rightarrow dx \rightarrow X' \rightarrow rx \rightarrow X \rightarrow dx \rightarrow X'$  служит для постановки задания. Получив на вход задание, понятное обучаемому агенту, он преобразует его в задание, понятное обучаемому, при этом полностью соответствующее тому, что первоначально предполагал обучающий агент.

После того как обучаемый получает понятное для него задание, он формирует свое решение  $y'$ , используя свои знания о предметной области задания  $K'$ . Параллельно с решением обучаемого обучающий агент строит решение  $y''$ , используя свои знания  $K$  о предметной области. Используя датчик  $dy$ , обучающий агент может узнать решение обучаемого. При помощи механизма исполнения  $ry$  обучающий агент может уточнить у обучаемого, правильно ли тот понял решение обучаемого. Таким образом, цепочка  $Y' \rightarrow dy \rightarrow Y \rightarrow ry \rightarrow Y' \rightarrow dy \rightarrow Y$  позволяет обучаемому агенту получить понятный для него ответ обучаемого.

Процесс обучения останавливается, если результат, полученный через цепочку  $X \rightarrow dx \rightarrow X' \rightarrow K' \rightarrow Y' \rightarrow dy \rightarrow Y$ , совпадает с результатом, полученным через цепочку  $X \rightarrow K \rightarrow Y''$  для всех возможных заданий из  $X$ , т. е. если результат, полученный обучаемым, совпадает с результатом, полученным обучающим агентом.

В случае, если ответ обучаемого не совпадает с решением обучающего агента, то обучающий агент анализирует решение обучаемого, находит в нем ошибки ( $Z'$ ) и, используя свои знания об окружающем мире, формирует на некотором метаязыке знания  $K'$ , которых не хватает обучаемому для правильного решения текущего задания. Обучаемый с помощью интерпретатора  $dk$  преобразует их в понятную для себя форму  $\tilde{K}$  и изменяет свою базу знаний  $K'$ . Таким образом, при использовании обучения с обучающим агентом нельзя гарантировать того, что базы знаний  $K$  и  $K'$  равны. После изменения базы знаний обучаемого обучающий агент формирует новое задание и процесс повторяется снова.

Процесс проверки знаний обучаемого может быть представлен следующим образом (рис. 2).

Обозначения на рис. 2:  $X$  – база данных, содержащая задания, доступные обучаемому агенту;  $O$  – база знаний обучающего агента об обучаемом, другими словами – представление обучающего агента об обучаемом;  $Y''$  – предполагаемый обучающим агентом на основе своих знаний об обучаемом ответ обучаемого;  $X'$  – задание, выданное обучаемому;  $K'$  – знания обучаемого;  $Y'$  – ответ на

задание, данный обучаемым на основании своих знаний;  $dx, dy$  – сенсоры взаимодействия обучаемого и обучающего агента;  $rx, ry$  – исполнительные механизмы взаимодействия обучаемого и обучающего агента;  $A$  – оператор анализа ответа обучаемого;  $Z$  – изменение представления обучающего агента об обучаемом;  $D$  – планировщик следующего задания.

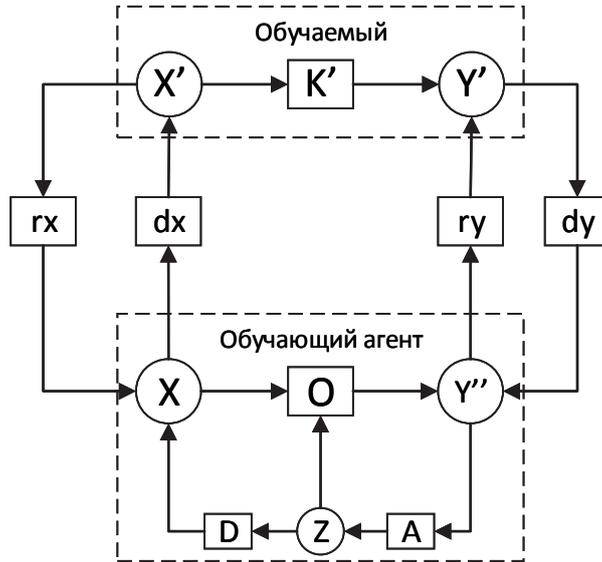


Рис. 2 – Процесс проверки знаний обучаемого  
 Fig. 2 – Testing of a trainee

Цепочки формирования задания  $X \rightarrow dx \rightarrow X' \rightarrow rx \rightarrow X \rightarrow dx \rightarrow X'$  и ознакомления с ответом  $Y' \rightarrow dy \rightarrow Y'' \rightarrow ry \rightarrow Y' \rightarrow dy \rightarrow Y''$  аналогичны соответствующим цепочкам, описанным для процесса тестирования обучаемого. Однако обучающий агент уже не строит свое решение задания, а ожидает от обучаемого некоторого решения, основываясь на своих представлениях  $O$  о данном обучаемом.

Процесс проверки знаний будет закончен тогда и только тогда, когда результат, полученный с использованием цепи  $X \rightarrow dx \rightarrow X' \rightarrow K' \rightarrow Y' \rightarrow dy \rightarrow Y''$ , будет совпадать с результатом, полученным с использованием цепи  $X \rightarrow K \rightarrow Y''$  для всех заданий из  $X$ . Если полученные результаты отличаются, то это означает, что обучающий агент неправильно оценивает знания обучаемого и должен улучшить свое представление об обучаемом. Блок  $A$  позволяет выявить ошибки, допущенные обучающим агентом в оценке знаний обучаемого. Представление обучающего агента об обучаемом необходимо скорректировать на основании выявленных ошибок  $Z$ . После корректировки своих знаний обучающий агент планирует и выдает новое задание, используя блок  $D$ .

Таким образом, обычный процесс обучения с обучающим агентом с последующим тестированием можно представить в следующем виде (рис. 3).

Свои знания о предметной области обучающий агент может сформировать двумя способами: обучаясь у другого обучающего агента (обучение с обучающим агентом) или выполняя эксперимент на объектах реального мира или их модели (обучение, контролируемое самим обучаемым) (рис. 4).

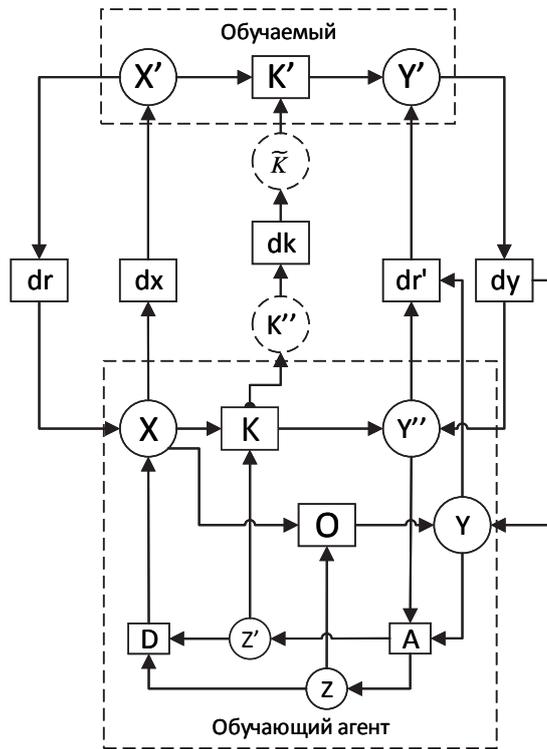


Рис. 3 – Процесс обучения с обучающим агентом с последующим тестированием обучаемого

Fig. 3 – Learning with a tutoring agent with the following testing of a trainee

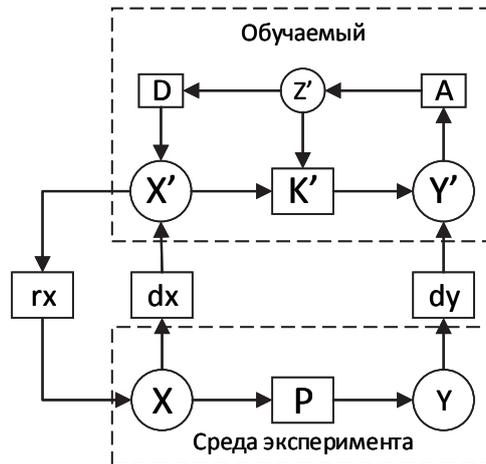


Рис. 4 – Процесс обучения, контролируемый самим обучаемым

Fig. 4. The learning process controlled by the trainee himself

В этом случае обучаемый сам формирует свои знания, устанавливая некоторые исходные значения для эксперимента  $X$  и наблюдая за откликом среды  $Y$ , получаемому из  $X$  с помощью оператора  $P$ , инкапсулирующего в себе законы среды. Обучение завершается тогда и только тогда, когда для всех, интересующих обучаемого состояний  $x'$  результат, получаемый через цепочку  $X' \rightarrow rx \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow Y \rightarrow dy \rightarrow Y'$ , равен результату, получаемому через цепочку  $X' \rightarrow rx \rightarrow X \rightarrow dx \rightarrow X' \rightarrow K' \rightarrow Y'$ .

Исходя из того, что в большинстве тренажеров в роли инструктора выступает опытный специалист, получивший часть своих навыков с помощью обучения с обучающим агентом, а часть – из опыта своей работы (обучение, контролируемое самим обучаемым), знания, получаемые обучаемыми, могут быть неполными и содержать ошибочное представление о процессах, происходящих на реальных объектах.

## 2. Реализация интеллектуального обучающего агента

Одной из основных проблем при создании ИОА является выбор модели представления знаний агентом. Эта модель должна отвечать трем основным требованиям:

- 1) агент должен быть способен сформировать свое решение задания (цепочка  $X \rightarrow K \rightarrow Y''$  (рис. 3));
- 2) агент должен уметь передавать свои знания обучаемому (цепочка  $K \rightarrow K'' \rightarrow dk \rightarrow \tilde{K} \rightarrow K'$  (рис. 3));
- 3) агент должен быть способен изменять свои знания при самостоятельно контролируемом обучении (цепь  $A \rightarrow Z' \rightarrow K'$  (рис. 4)).

Необходимая для тренажерных комплексов модель объекта на основе ограниченной физической модели обычно представлена на математическом языке. Однако применение этого языка для описания модели поведения обучающего агента усложняет процесс обучения, так как возникает необходимость перевода обоснования принимаемых ИОА решений в термины, используемые обучаемым для принятия решений. В качестве формализации таких механизмов можно рассматривать рассуждения на основе здравого смысла (commonsense reasoning) – процесс принятия решений, свойственный человеку, основанный на использовании качественных отношений вместо количественных [4]. Примерами формализации таких рассуждений являются ситуационное исчисление (Situation calculus) [5, 6], исчисление флюентов (Fluent calculus) [7], исчисление событий (Event calculus) [4, 8], логические продукционные системы (Logic production systems) [9]. Рассмотрим более подробно язык исчисления событий как подходящий формализм для создания обучающих агентов.

Исчисление событий является расширением многосортной логики предикатов первого порядка, вводит в нее понятия события, флюента, момента времени и систему аксиом для работы с ними; позволяет определять знания об одновременных и спровоцированных событиях, не прямых эффектах, событиях, имеющих продолжительность, и т. д.

Механизмы представления знаний в контексте тренажерных комплексов представлены в таблице.

Рассмотрим правила поведения обучающего агента в среде тренажерного комплекса на примере управления стрелочным переводом для Тренажерного комплекса оперативного персонала сортировочной горки (ТК ОПСГ) [10]. На языке исчисления событий их можно представить в следующем виде.

**Представление знаний на разных уровнях тренажера с искусственным интеллектуальным агентом в роли инструктора**

**Knowledge representation on different levels of a simulator with an artificial intellectual agent-instructor**

Ультраоператор	Описание	Представление знаний
$P$	Модель поведения объектов реального мира, реализованная в тренажере с некоторой точностью (псевдофизический мир)	Жестко запрограммированные алгоритмы поведения
$K$	Модель поведения объектов реального мира в видении интеллектуального агента-инструктора	Аксиомы исчисления событий
$K'$	Модель поведения объектов реального мира в видении обучаемого	Правила типа «если – то» на естественном языке

Стрелочный перевод характеризуется направлением, таким образом определен флюент

$\text{НаправлениеСтрелки}(\text{стрелка}, \text{направление})$ .

Оператор может изменить направление стрелки. Прямым эффектом этого действия будет изменение направление перевода на противоположное:

$\text{HoldsAt}(\text{НаправлениеСтрелки}(\text{стрелка}, \text{направление}), t) \wedge$

$\text{ПротивоположноеНаправление}(\text{направление}, \text{противоположное}) \Rightarrow$

$\text{Initiates} \left( \begin{array}{l} \text{СменитьНаправление}(\text{стрелка}), \\ \text{НаправлениеСтрелки}(\text{стрелка}, \text{противоположное}), t \end{array} \right)$

$\text{Terminates} \left( \begin{array}{l} \text{СменитьНаправление}(\text{стрелка}), \\ \text{НаправлениеСтрелки}(\text{стрелка}, \text{направление}), t \end{array} \right)$

Для принятия решения о переводе стрелки оператор должен оценить необходимость перевода, основываясь на знаниях о целевом пути приближающегося вагона и достижимых путях от данного стрелочного перевода:

$\text{ПутьНазначения}(\text{вагон}, \text{путь}) \wedge$

$\neg \text{СтрелкаВедетК}(\text{стрелка}, \text{направление}, \text{путь}) \wedge$

$\text{ПротивоположноеНаправление}(\text{направление}, \text{противоположное}) \wedge$

$\text{СтрелкаВедетК}(\text{стрелка}, \text{противоположное}, \text{путь}) \wedge$

$\text{HoldsAt}(\text{НаправлениеСтрелки}(\text{стрелка}, \text{направление}), t) \Rightarrow$

$\text{HoldsAt}(\text{НужноПеревестиСтрелку}(\text{стрелка}), t)$

Если есть необходимость в переводе стрелки и нет опасности создания аварийной ситуации (например, столкновения с уже стоящими на целевом пути вагонами), то оператор совершает действие перевода стрелки:

$\text{HoldsAt}(\text{НужноПеревестиСтрелку}(\text{стрелка}), t) \wedge$

$\neg \text{HoldsAt}(\text{СтрелкаЗанята}(\text{стрелка}), t) \wedge$

$\neg \text{СоздаетсяАварийнаяСитуация}(\text{вагон}, t) \Rightarrow$

$\text{Harrens}(\text{СменитьНаправление}(\text{стрелка}), t)$

Смена направления в качестве непрямого эффекта влечет изменение значения флюента  $\text{НужноПеревестиСтрелку}(\text{стрелка})$ :

$\text{Terminates} \left( \begin{array}{l} \text{СменитьНаправление}(\text{стрелка}), \\ \text{НужноПеревестиСтрелку}(\text{стрелка}), t \end{array} \right)$

Занятость стрелки определяет флюент  $\text{СтрелкаЗанята}(\text{стрелка})$ , события

$\text{ВагонПокинулСтрелку}(\text{вагон}, \text{стрелка}),$

$\text{ВагонЗанялСтрелку}(\text{вагон}, \text{стрелка})$ :

$\text{Initiates} \left( \begin{array}{l} \text{ВагонЗанялСтрелку}(\text{вагон}, \text{стрелка}), \\ \text{СтрелкаЗанята}(\text{стрелка}), t \end{array} \right)$

$\text{Terminates} \left( \begin{array}{l} \text{ВагонПокинулСтрелку}(\text{вагон}, \text{стрелка}), \\ \text{СтрелкаЗанята}(\text{стрелка}), t \end{array} \right)$

Важным условием работы оператора является избежание аварийных ситуаций, даже если его действия ведут к появлению нештатной, но неаварийной ситуации. Так, допустить столкновение вагонов (аварийная ситуация) хуже, чем отправить вагон не на тот путь (нештатная, но не аварийная ситуация). Возникновение аварийных ситуаций можно описать следующим образом:

$\text{HoldsAt}(\text{ВозможноСтолкновение}(\text{вагон1}, \text{вагон2}), t) \Rightarrow$

$\text{СоздаетсяАварийнаяСитуация}(\text{вагон1}, t)$

$\text{HoldsAt}(\text{ВозможноСтолкновение}(\text{вагон1}, \text{вагон2}), t) \Rightarrow$

$\text{HoldsAt}(\text{ВозможноСтолкновение}(\text{вагон2}, \text{вагон1}), t).$

$\text{HoldsAt}(\text{Скорость}(\text{нагонящийВагон}, v_n), t) \wedge$

$\text{HoldsAt}(\text{Скорость}(\text{вагон}, v), t) \wedge$

$\text{нагонящийВагон} \neq \text{вагон} \wedge$

$\text{HoldsAt}(\text{Расстояние}(\text{нагонящийВагон}, \text{вагон}, s), t) \wedge$

$\text{ОпасноеПревышение}(v_n, v, s) \Rightarrow$

$\text{HoldsAt}(\text{ВозможноСтолкновение}(\text{нагонящийВагон}, \text{вагон}), t)$

Пример другого агента, имитирующего работу оператора ТК ОПСГ, приведен в [11].

### Заключение

В работе предложена концептуализация нового типа интеллектуальных агентов: интеллектуального обучающего агента. Такой агент может применяться для автоматизации процесса обучения как с использованием, так и без использования тренажерных технологий во многих сферах деятельности. ИОА может также быть использован для формирования баз знаний других интеллектуальных агентов.

В статье выделены отличающие особенности данного типа агентов. Предложена реализация ИОА для интеллектуального тренажерного комплекса, основанного на исчислении событий как одном из формализмов рассуждений на основе здравого смысла. В дальнейшем планируется расширение концепции ИОА, включающее в структуру ИОА модуль самообучения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Russel S., Norvig P. Artificial intelligence: a modern approach. – 3<sup>rd</sup> ed. – Upper Saddle River, NJ: Printice Hall, 2009. – 1153 p.
2. Чечкин А.В. Математическая информатика. – М.: Наука, 1991. – 416 с.
3. Хабаров В.И. Интегрированные системы планирования и анализа экспериментов: дис. ... техн. наук. – Новосибирск, 1992. – 315 с.
4. Mueller E.T. Commonsense reasoning: an event calculus approach. – 2<sup>nd</sup> ed. – Waltham, MA, Morgan Kaufmann, 2015. – 517 p.
5. McCarthy J., Hayes P. Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence // Machine Intelligence. – 1969. – Vol. 4. – P. 463–502.
6. Lin F. Situation calculus // Handbook of Knowledge Representation / ed. by F. van Harmelen, V. Lifschitz and B. Porter. – Amsterdam; Boston: Elsevier, 2008. – P. 649–669.
7. Thielscher M. Introduction to the fluent calculus // Linkoping Electronic Articles in Computer and Information Science. – 1998. – Vol. 3, N 14.
8. Shanahan M. A circumscriptive calculus of events // Artificial Intelligence. – 1995. – N 77. – P. 249–284.
9. Kowalski R., Sadri F. Reactive computing as model generation // New Generation Computing. – 2015. – Vol. 33 (1). – P. 33–67.
10. Патент на полезную модель 154990 Российская Федерация. Тренажерный комплекс оперативного персонала сортировочной горки / В.И. Хабаров и др. – № 014143893/11; заявл. 30.10.2014; опубл. 20.09.2015, Бюл. № 26.
11. Speshilov K., Khabarov V. Creating a model of an operator of a simulator complex using commonsense reasoning // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 178. – P. 394–400.

**A MODEL OF AN INTELLECTUAL TUTORING AGENT BASED  
ON COMMONSENSE REASONING. ITS APPLICATION  
IN SIMULATOR COMPLEXES**

**Khabarov V.I., Speshilov K.V.**

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The paper considers the concept of a tutoring agent as an artificial intelligence system oriented at supporting the process of professional skills training in combination with technical equipment such as simulator complex. Conceptualization of the concept of the “tutoring agent” makes it possible to form a class of intellectual systems focused on the specifics of professional training and to model the activities of an experienced mentor. The most appropriate behavior model for this type of intelligent agents is commonsense reasoning. The implementation of such an agent based on the event calculus as an extension of the first-order logic is proposed. The architecture of an intelligent training complex that includes a tutoring agent is considered as an application (on the example of the training complex of operating personnel of the marshalling yard for a railway station).

*Keywords:* intellectual tutoring agent, commonsense reasoning, event calculus, simulator complex.

DOI: 10.17212/1727-2769-2018-4-110-119

## REFERENCES

1. Russel S. Norvig P. Artificial Intelligence: a modern approach. 3<sup>rd</sup> ed. Upper Saddle River, NJ, Printice Hall Press, 2009. 1153 p.
2. Chechkin A.V. *Matematicheskaya informatika* [Mathematical informatics]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 416 p.
3. Khabarov V.I. *Integrirovannyye sistemy planirovaniya i analiza eksperimentov*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Integrated systems for planning and analysis of experiments. Dr. eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 1992. 315 p.

4. Mueller E.T. Commonsense reasoning: an event calculus approach. 2<sup>nd</sup> ed. Waltham, Morgan Kaufmann, 2015. 517 p.
5. McCarthy J., Hayes P. Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence. *Machine Intelligence*, 1969, vol. 4, pp. 463–502.
6. Lin F. Situation calculus. *Handbook of Knowledge Representation*. Ed. by F. van Harmelen, V. Lifschitz and B. Porter. Amsterdam, Boston, Elsevier, 2008, pp. 649–669.
7. Thielscher M. Introduction to the fluent calculus. *Linkoping Electronic Articles in Computer and Information Science*. 1998, vol. 3, no. 14.
8. Shanahan M. A circumscriptive calculus of events. *Artificial Intelligence*, 1995, no. 77, pp. 249–284.
9. Kowalski R. Sadri F. Reactive computing as model generation. *New Generation Computing*, 2015, vol. 33 (1), pp. 33–67.
10. Khabarov V.I., et al. *Trenazhernyi kompleks operativnogo personala sortirovochnoi gorki* [Simulator complex for marshalling yard personnel]. Patent RF, no. 154990, 2015.
11. Speshilov K. Khabarov V. Creating a model of an operator of a simulator complex using commonsense reasoning. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 178, pp. 394–400.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**Хабаров Валерий Иванович** – родился в 1951 году, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент Академии Высшей школы РФ, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: искусственный интеллект, математическое моделирование транспортных потоков, методы планирования экспериментов. Опубликовано около 150 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: khabarov51@mail.ru).

**Khabarov Valeriy Ivanovich** (b. 1951) – Doctor of Sciences (Eng.), professor, corresponding member of the Russian Higher School Academy of Sciences, professor of the department of theoretical and applied computer science of Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on artificial intelligence, mathematical modelling of traffic flows, and design of experiments. He is the author of about 150 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. Email: khabarov51@mail.ru).



**Спешиллов Константин Владимирович** – родился в 1990 году, аспирант Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов: представление знаний, рассуждения на основе здравого смысла. Опубликовано 11 научных работ. (Адрес: 630073, Россия, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: costspeshilov@gmail.com).

**Speshilov Konstantin Vladimirovich** (b. 1990) – PhD student at Novosibirsk State Technical University. His research interests are knowledge representation, and commonsense reasoning. He is the author of 11 scientific papers. (Address: 20, Karl Marx Av., Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: costspeshilov@gmail.com).

Статья поступила 23 мая 2018 г.  
Received May 23, 2018

## To referennces:

Khabarov V.I., Speshilov K.V. Model' intellektual'nogo obuchayushchego agenta s ispol'zovaniem rassuzhdenii na osnove zdravogo smysla. Primenenie v trenazhernykh tekhnologiyakh [A model of an intellectual tutoring agent based on commonsense reasoning. Its application in simulator complexes]. *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii – Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences*, 2018, no. 4 (41), pp.110-119. doi: 10.17212/1727-2769-2018-4-110-119.

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК  
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Выпуск 4(41) октябрь–декабрь 2018**

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Корректор *И.Е. Семенова*  
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
Издание соответствует коду 95 2000 ОК 005-93 (ОКП)

---

Подписано в печать 17.12.2018. Выход в свет 19.12.2018. Бумага офсетная. Формат 70×108 1/16  
Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 10,5. Печ. л. 7,5. Изд. № 18. Заказ № 471

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20