

# **СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ**

**№ 1 (91)  
2018**

**В НОМЕРЕ:**

- ◆ **АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ**
- ◆ **СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**
- ◆ **СООБЩЕНИЯ**

### **Учредитель**

Новосибирский государственный технический университет

### **Главный редактор**

**А.Г. Вострецов**, д-р техн. наук, проф., засл. деятель науки РФ, НГТУ, г. Новосибирск

### **Заместитель главного редактора**

**В.И. Денисов**, д-р техн. наук, проф., засл. деятель науки РФ, НГТУ, г. Новосибирск

### **Ответственный секретарь**

**А.А. Воевода**, д-р техн. наук, проф., НГТУ, г. Новосибирск

### **Редакционная коллегия:**

**Ю.Е. Воскобойников**, д-р физ.-мат. наук, проф., СибСТРИН, г. Новосибирск

**Ю.Д. Григорьев**, д-р техн. наук, проф., СПбГЭТУ (ЛЭТИ), г. С.-Петербург

**А.М. Малышенко**, д-р техн. наук, проф., ТПУ, г. Томск

**Ю.Ф. Мухомад**, д-р техн. наук, проф., засл. деятель науки РФ, ИрГУПС, г. Иркутск

**А.И. Рубан**, д-р техн. наук, проф., засл. деятель науки РФ,

СФУ, Ин-т косм. и информ. технологий, г. Красноярск

**В.И. Хабаров**, д-р техн. наук, проф., СГУПС, г. Новосибирск

### **Журнал зарегистрирован**

**в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания**

**и средств массовых коммуникаций в 2002 г.**

**(свидетельство ПИ № 77-11739 от 08 февраля 2002 г.)**

Адрес редакции: 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20. E-mail: [ucit@ucit.ru](mailto:ucit@ucit.ru)

Web site: <http://journals.nstu.ru/sbornik/>

Editorial adress: 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

---

---

**СБОРНИК  
НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

---

---

ISSN 2307-6879

№ 1 (91)

2018

**СОДЕРЖАНИЕ**

*АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ*

<b>Бобобеков К.М., Тауров Э.Ш.</b> Вычисление взаимно простого разложения для одноканальных передаточных функций с использованием матрицы Сильвестра.....	7
<b>Бобобеков К.М.</b> Формализация полиномиального метода синтеза одноканальных систем с использованием матрицы Сильвестра.....	31
<b>Трошина Г.В.</b> Определение параметров динамического объекта второго порядка при действии зашумленных периодических сигналов.	68

*СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ*

<b>Воевода А.А., Романников Д.О.</b> Синтез нейронных сетей с несколькими переменными.....	86
<b>Романников Д.О.</b> Исследование работы нейронных сетей на примере задачи управления обратным маятником.....	95
<b>Романников Д.О.</b> О синтезе нейронных сетей.....	104

*СООБЩЕНИЯ*

<b>Кононов Ю.М.</b> Опыт получения высшего образования и формирование направления научного исследования.....	112
Правила для авторов.....	122

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Корректор *Л.Н. Кинит*  
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

---

Лицензия № ИД 04303 от 20.03.01. Подписано в печать 28.05.2018  
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 7,2  
Печ. л. 7,75. Изд. № 132. Заказ № 820. Цена договорная

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

**Editorial board**

Novosibirsk State Technical University

***Chief Editor***

***Vostretsov A.G.***, D. Sc. (Eng.), Novosibirsk State Technical University,  
Novosibirsk, RF

***Deputy Chief Editor***

***Denisov V.I.***, D. Sc. (Eng.), Novosibirsk State Technical University,  
Novosibirsk, RF

***Executive Secretary***

***Voevoda A.A.***, D. Sc. (Eng.), Novosibirsk State Technical University,  
Novosibirsk, RF

***The members of the editorial Board***

***Voskoboinikov Yu.E.***, D. Sc. (Eng.), Novosibirsk State University of Architecture  
and Civil Engineering, Novosibirsk, RF

***Grigor'ev Iu.D.***, D. Sc. (Eng.), Saint-Petersburg Electrotechnical University "LETI",  
Saint-Petersburg, RF

***Malysenko A.M.***, D. Sc. (Eng.), National Research Tomsk Polytechnic University,  
Tomsk, RF

***Mukhopad Iu.F.***, D. Sc. (Eng.), Irkutsk State University of Railway Engineering,  
Irkutsk, RF

***Ruban A.I.***, D. Sc. (Eng.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, RF

***Khabarov V.I.***, D. Sc. (Eng.), Siberian Transport University, Novosibirsk, RF

*The journal is registered  
in the RF Ministry for press, broadcasting  
and masscommunications in 2002  
(certificate PI № 77-11739 from February 08, 2002)*

Editorial address: 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation.

E-mail: [ucit@ucit.ru](mailto:ucit@ucit.ru)

Web Site: <http://journals.nstu.ru/sbornik/>

© Authors, 2018

© Novosibirsk State

Technical University, 2018

**CONTENTS**

*AUTOMATIC CONTROL AND IDENTIFICATION*

<b>Bobobekov K.M., Taurov E.Sh.</b> Calculation of a mutually simple expansion for single-channel transfer functions using the Sylvester matrix.....	7
<b>Bobobekov K.M.</b> Formalization of a polynomial method for the synthesis of single-channel systems using the Sylvester matrix.....	31
<b>Troshina G.V.</b> Parameters determination for the second order dynamic object at the action of the noisy periodic signals.....	68

*INFORMATION PROCESSING*

<b>Voevoda A.A., Romannikov D.O.</b> Synthesis of neural networks with several variables.....	86
<b>Romannikov D.O.</b> Investigation of the work of neural networks on the example of the problem of the control of the back panel.....	95
<b>Romannikov D.O.</b> About of synthesis of neural networks.....	104

*SHORT PAPERS*

<b>Kononov Y.M.</b> Experience of higher education. Organisation of direction of scientific research.....	112
Rules for authors.....	122

Editor *L.N. Kinsht*  
Publishing Editor *I.P. Brovanova*  
Computer imposition *S.I. Tkacheva*

---

License № ID 04303 from 20.03.01. Signed in print 28.05.2018. Format 60 × 84/16  
Offset Paper. Circulation is 300 copies. Educational-ed. liter. 7,2. printed pages 7,75.  
Publishing number 132. Order number 820.

---

It is printed in printing house of Novosibirsk State Technical University  
630073, Novosibirsk, 20 K. Marx prospekt

*АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
И ИДЕНТИФИКАЦИЯ*

УДК 681.513

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЗАИМНО ПРОСТОГО РАЗЛОЖЕНИЯ  
ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ СИЛЬВЕСТРА\***

К.М. БОБОБЕКОВ<sup>1</sup>, Э.Ш. ТАУРОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 630087, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматизи. Е-mail: kurbon\_111@mail.ru  
<sup>2</sup> 734042, РТ, г. Душанбе, пр. академиков Раджабовых, 10, Таджикский технический университет имени акад. М.С. Осими, старший преподаватель кафедры теоретической механики и сопротивления материалов. Е-mail: taurov79@mail.ru

В зависимости от используемого математического описания объекта (например, использования дифференциальных уравнений, передаточных функций, полиномиальных описаний) развиваются различные методы синтеза. При синтезе регуляторов важно формализовать методику синтеза таким образом, чтобы в результате обеспечить желаемые требования к системе автоматического управления (регулирования). В данной работе анализируются и развиваются полиномиальные методы синтеза регуляторов. При анализе и синтезе систем автоматического управления, как правило, используется взаимно простое разложение передаточной функции, или, другими словами, полиномы числителя и знаменателя не имеют одинаковых корней. Для решения этой задачи проще всего использовать команду *roots* или команду *minreal*, например, если используем пакет Matlab. Обычно при полиномиальном методе синтеза переходят от полиномиальных уравнений к числовым матричным уравнениям, что приводит к так называемой матрице Сильвестра. Для определения взаимно простых полиномов, как известно, можно воспользоваться указанной матрицей Сильвестра. Если матрица Сильвестра вырожденная, то это говорит о существовании одинаковых корней полиномов числителя и знаменателя. В работе исследуется возможность использования матрицы Сильвестра и уточняется алгоритм приведения к взаимно простому виду. Работа алгоритма иллюстрируется на шести примерах. Актуальность решения задачи приведения к взаимно простому виду объясняется тем, что эта методика используется при решении задачи полиномиального метода синтеза одноканальных и многоканальных систем.

**Ключевые слова:** передаточная функция, одноканальная система, взаимно простое разложение, матрица Сильвестра, вырожденная матрица, однородная линейная система уравнений

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-7-30

---

\* Статья получена 08 ноября 2017 г.



## ВВЕДЕНИЕ

В анализе и синтезе систем автоматического управления (САУ) важную роль играет взаимная простота (*coprime*) полиномов числителя и знаменателя передаточной функции как объекта, так и регулятора. Если полиномы числителя и знаменателя имеют одинаковые корни, то могут возникнуть проблемы как с управляемостью, так и с наблюдаемостью. Кстати, при переходе к описанию в пространстве состояний  $(A, b, c)$  это приводит к увеличению размеров матрицы  $A$  и векторов  $b$  и  $c$ . Кроме того, из-за неустойчивых корней система может стать неустойчивой. Это требование, так же как и обычное условие *правильности* или *строгой правильности* [13, 17], следует учитывать при анализе и синтезе САУ. В данной работе подробно анализируется применение матрицы Сильвестра для поиска взаимно простого разложения передаточной функции, схематично изложенного в работах [1, р. 192–195; 2]. Актуальность данного исследования существенно возрастает, если учесть, что матрица Сильвестра также может быть использована при синтезе регулятора. С такими примерами синтеза регуляторов можно познакомиться, например, в [1, 2, 7, 8, 10–14, 16–18], а также в диссертационных работах [19, 20].

Допустим, у передаточной функции  $w(s) = n(s)/d(s)$  полиномы  $n(s) = \sum_{i=0}^m n_i s^i$  и  $d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i$  имеют одинаковые корни, которые следует сократить. Для удобства можно ввести обозначения:

$$\deg n(s) = m, \quad \deg d(s) = n.$$

В данной работе предполагается, что передаточная функция *правильная*, т. е.  $\deg n(s) \leq \deg d(s)$ . Безусловно, можно пойти по простейшему пути, а именно: воспользовавшись командой Matlab [15], например *roots*, вычислить корни полиномов  $n(s)$  и  $d(s)$ , выполнить сокращение и получить взаимно простое представление  $w(s) = \bar{n}(s)/\bar{d}(s)$ . Другими словами, имеем

$$w(s) = n(s)/d(s) = \bar{n}(s)/\bar{d}(s), \quad (1)$$

где  $\deg \bar{d}(s) < n$ . Это полиномиальное уравнение с неизвестными полиномами  $\bar{n}(s) = \sum_{i=0}^{m-r} \bar{n}_i s^i$  и  $\bar{d}(s) = \sum_{i=0}^{n-r} \bar{d}_i s^i$ , где  $r$  – число одинаковых корней поли-

номов  $n(s)$  и  $d(s)$ . Исследуем вопрос использования матрицы Сильвестра, по сути переход от полиномиального уравнения к числовому матричному уравнению, для получения взаимно простого разложения.

### 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЗАИМНО ПРОСТОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Из выражения (1) несложно получить уравнение

$$d(s)(-\bar{n}(s)) + n(s)\bar{d}(s) = 0. \tag{2}$$

Это полиномиальное уравнение с неизвестными полиномами<sup>1</sup>  $\bar{n}(s) = \sum_{i=0}^{m-r} \bar{n}_i s^i$  и  $\bar{d}(s) = \sum_{i=0}^{n-r} \bar{d}_i s^i$ . Полиномиальное уравнение (2) с двумя неизвестными полиномами  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$  можно преобразовать к матричному уравнению с коэффициентами и неизвестными из множества вещественных чисел:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d & n & d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline d_0 & n_0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ d_1 & n_1 & d_0 & n_0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & d_1 & n_1 & \vdots & d_0 & n_0 \\ d_n & n_n & \dots & \dots & \vdots & d_1 & n_1 \\ 0 & 0 & d_n & n_n & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & d_n & n_n \end{pmatrix}}_{\Re} \begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ \dots \\ -\bar{n}_{n-1} \\ \bar{d}_{n-1} \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

Кратко уравнение (3) можно записать

$$\Re x = 0. \tag{4}$$

---

<sup>1</sup> Уравнение  $d(s)(-\bar{n}(s)) + n(s)\bar{d}(s) = 0$  имеет бесконечно много решений, где  $n(s) = \bar{n}(s)r(s)$ ,  $d(s) = \bar{d}(s)r(s)$ , так как можем выбирать любой полином  $r(s) \neq 0$ .

Для упрощения записи матрицы  $\mathfrak{R}$  здесь взяли  $m = n$ . Кроме того, пока предполагаем, что сократится по одному корню, т. е.  $r = 1$ . Это соответствует вектору-столбцу из коэффициентов полиномов  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$ . Здесь матрица  $\mathfrak{R}$  размером  $2n \times 2n$  состоит из коэффициентов  $d_i$  и  $n_i$ . Это однородное линейное алгебраическое уравнение. Матрицу  $\mathfrak{R}$  называют результирующей матрицей Сильвестра<sup>2</sup> (*Sylvester resultant*). Если матрица Сильвестра вырожденная, то существует ненулевое решение<sup>3</sup> (3). Это означает, что полиномы  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$  степени  $n-1$  или меньше, удовлетворяющие уравнению (2), существуют. Таким образом,  $n(s)$  и  $d(s)$  не взаимно простые. Если матрица Сильвестра не вырожденная, то ненулевых решений (3) не существует или эквивалентно нет полиномов  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$  степени меньше  $n$ . Таким образом,  $n(s)$  и  $d(s)$  взаимно простые. Вышесказанное запишем в виде следствия [1, р. 193].

<sup>2</sup> Матрицей Сильвестра (*Sylvester resultant* [1, р. 193]) принято называть матрицу вида

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} d_0 & n_0 & | & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ d_1 & n_1 & | & d_0 & n_0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & | & d_1 & n_1 & \vdots & d_0 & n_0 \\ d_n & n_n & | & \vdots & \vdots & \vdots & d_1 & n_1 \\ 0 & 0 & | & d_n & n_n & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & \vdots & d_n & n_n \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup> Для обоснования существования решения можно, например, воспользоваться:

**Следствие 3.2** [1, р. 51]

1. Для любой заданной матрицы  $A$  размером  $m \times n$ , где  $m \geq n$ , существует решение  $x$  уравнения  $xA = y$  для любого вектора-строки  $y$ , если и только если матрица  $A$  имеет полный столбцовый ранг.

2. Для любой заданной матрицы  $A$  размером  $m \times n$ , где  $m \geq n$ , и любого вектора-строки  $y$  размером  $1 \times n$ , пусть  $x_p$  будет решением  $xA = y$  и пусть  $k = m - \rho(A)$ . Если  $k = 0$ , решение  $x_p$  единственное. Если  $k > 0$ , тогда для любых  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ , вектор

$$x = x_p + \alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_k n_k$$

есть решение  $xA = y$ , где  $n_i A = 0$  и множество векторов  $\{n_1, \dots, n_k\}$  линейно независимое.

**Следствие.**  $d(s)$  и  $n(s)$  не взаимно простые если и только если матрица Сильвестра вырожденная.

Если матрица Сильвестра вырожденная, тогда отношение  $n(s)/d(s)$  может быть сведено к виду  $n(s)/d(s) = \bar{n}(s)/\bar{d}(s)$ , где  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$  взаимно простые.

**Обсудим, как получить взаимно простое разложение** непосредственно из уравнения (3). Исследуем линейную независимость столбцов  $\mathfrak{R}$  в направлении слева направо. Мы назовем столбцы, сформированные из  $d_i$ ,  $d$ -столбцами, и сформированные из  $n_i$  –  $n$ -столбцами. Тогда каждый  $d$ -столбец линейно независимый от столбцов с левой стороны. Действительно, так как  $d_n \neq 0$ , первый  $d$ -столбец линейно независимый (ненулевой). Второй  $d$ -столбец также линейно независим от столбцов слева, так как с левой стороны от  $d_n$  все элементы нулевые. Продолжая аналогичные рассуждения (слева направо) для  $d$ -столбцов, делаем заключение, что *все  $d$ -столбцы линейно независимые от столбцов слева*. С другой стороны,  $n$ -столбец может быть зависимый или не зависимый от столбцов слева. Получим, что если  $n$ -столбец становится линейно зависимым от столбцов слева, тогда все последующие  $n$ -столбцы линейно зависимые от столбцов слева. Пусть  $\mu$  обозначает число линейно независимых  $n$ -столбцов в матрице  $\mathfrak{R}$ . Тогда  $(\mu + 1)$ -й  $n$ -столбец – это первый  $n$ -столбец, который становится линейно зависимым от столбцов слева, и будем называть его *первым зависимым  $n$ -столбцом*. Обозначим через  $\mathfrak{R}_1$  подматрицу  $\mathfrak{R}$ , которая включает первый зависимый  $n$ -столбец и все столбцы слева. Таким образом,  $\mathfrak{R}_1$  состоит из  $\mu + 1$   $d$ -столбцов (все они линейно-независимые) и  $\mu + 1$   $n$ -столбцов (последний  $n$ -столбец линейно зависим от предыдущих). Таким образом, матрица  $\mathfrak{R}_1$  ранга  $2\mu + 1$  содержит  $2(\mu + 1)$  столбцов. Другими словами, матрица  $\mathfrak{R}_1$  имеет ядро размерности один и, следовательно, имеет один ненулевой вектор из ядра. Заметим, что если  $c$  – вектор из ядра, т. е.  $\mathfrak{R}_1 c = 0$ , то и  $\alpha c$  также принадлежит ядру при любом ненулевом  $\alpha \in R$ . Хотя мы можем использовать любой вектор из ядра, будем использовать вектор из ядра с единицей, стоящей в последнем элементе вектора из ядра. Для удобства такой вектор можно называть нормированным вектором из ядра (*monic null vector*).

**Примечание:** из вышеприведенных рассуждений следует, что *степень* приведенной передаточной функции  $\bar{n}(s)/\bar{d}(s)$  равна  $\mu$ .

По сути, это соответствует теореме 7.4 в работе [1, р. 195]. Здесь под степенью передаточной функции подразумевается степень полинома знаменателя, которая в соответствии с алгоритмом приведения больше или равна степени числителя.

## 2. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗАИМНО ПРОСТЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Проиллюстрируем процедуру вычисления взаимно простого разложения, использующего матрицу Сильвестра, на нескольких примерах.

**Пример 1.** Найдем взаимно простое разложение для передаточной функции

$$n(s)/d(s) = s + 1/s + 1,$$

здесь  $d(s)$  и  $n(s)$  – полиномы числителя и знаменателя, где степень полинома числителя  $m = 1$  и степень полинома знаменателя  $n = 1$ . Сформируем матрицу Сильвестра размером  $2n \times 2n$ . Так как  $\deg \bar{d}(s) < n$ , поэтому степени полиномов  $\bar{d}(s)$  и  $\bar{n}(s)$  будут нулевые:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \end{pmatrix}}_x = 0,$$

где матрица  $\mathfrak{R}$  размером  $2 \times 2$  имеет ранг 1 (здесь и далее ранг матрицы  $\mathfrak{R}$  обозначим через  $q$ ), что показывает наличие одинакового корня (корней) в  $d(s)$  и  $n(s)$ . Матрица  $\mathfrak{R}$  состоит из одного  $(dn)$ -блочного столбца, одного  $d$ -столбца (линейно независимого – ненулевой вектор!) и одного линейно зависимого  $n$ -столбца, что позволяет определить значение  $\mu = 0$ , т.е.  $\mu + 1 = 1$ . В данном случае  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$  квадратная – нет необходимости отбрасывать строки. Для поиска элемента из ядра (решения вышеприведенного уравнения) опять используем команду **null**:

```
>> n=[1 1]; d=[1 1]; R=[d; n]'; rank(R)
>> x=null(R);
>> x1=x/x(2)
x1 = (-1 1)'
```

Это соответствует  $(-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0)^t = (-1 \quad 1)^t$ , или

$$\frac{\bar{n}(s)}{\bar{d}(s)} = \frac{\bar{n}_0}{\bar{d}_0} = 1,$$

что подтверждает работоспособность алгоритма для вырожденного случая.

**Пример 2.** Найдем взаимно простое разложение для передаточной функции

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 7s + 12}.$$

Здесь очевидно, что  $n(s)/d(s) = (s+1)(s+2)/(s+3)(s+4)$ , но мы это забываем и «отрабатываем» методику поиска взаимно простого разложения, что соответствует равенству степеней  $m = n = 2$ . Так как предполагаем взаимное сокращение полиномов, то  $\deg \bar{d}(s) < n$ , поэтому степени полиномов  $\bar{d}(s)$  и  $\bar{n}(s)$  берем на единицу меньше, т. е. равные единице. Матрица Сильвестра размером  $2n \times 2n = 4 \times 4$

$$\begin{array}{cc|cc} d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left( \begin{array}{cc|cc} 12 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 12 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \underbrace{\begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \end{array} \right) \\ x \end{array}} = 0$$

имеет ранг четыре, т. е. матрица Сильвестра невырожденная и, следовательно, полиномы  $n(s)$  и  $d(s)$  взаимно простые. Вышеприведенное уравнение не имеет ненулевых решений, что подтверждает работоспособность алгоритма и в этом «вырожденном» случае.

**Пример 3.** Рассмотрим чрезвычайно простой пример с целью формализации алгоритма поиска взаимно простого разложения

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2}.$$

В нашем случае  $n = 2$ , и поэтому выберем степени взаимно простых полиномов на единицу меньше. Формируем матрицу Сильвестра: первый  $(dn)$ -блочный столбец – это столбцы  $d$  и  $n$ , дополненные снизу нулями, так как высота столбцу должна быть равна  $2n = 2 \cdot 2 = 4$ . Далее справа дописываем столбцы  $(dn)$  со смещением вниз на одну позицию и дополняем нулями:

$$\begin{array}{cccc}
 d & n & d & n \\
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4
 \end{array}
 \left( \begin{array}{cc|cc}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 2 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 2 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right)
 \underbrace{\left( \begin{array}{c}
 -\bar{n}_0 \\
 \bar{d}_0 \\
 -\bar{n}_1 \\
 \bar{d}_1
 \end{array} \right)}_x = \underbrace{\left( \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right)}_R.$$

У матрицы  $R$  размером  $4 \times 4$  ранг равен двум ( $q = 2$ ). Матрица  $R$  состоит из двух линейно независимых  $d$ -столбцов и двух  $n$ -столбцов, причем линейно зависимых от столбцов слева, то есть  $\mu = 0$ . Тогда второй столбец из матрицы  $R$  – это первый линейно зависимый  $n$ -столбец ( $\mu + 1 = 1$ ). Выбираем слева направо линейно независимые столбцы до первого линейно зависимого столбца, который включаем в матрицу  $R_1$ , и вычисляем вектор из ядра:

```

>>n=[1 2 1]; d=[1 2 1]; R1=[d; n]';
>>x=null(R1);
x1=x/x(2)

```

В результате получим нормированный вектор из ядра

$$x_1 = (-1 \ 1)^t,$$

что позволяет определить взаимно простое представление передаточной функции

$$(-\bar{n}_0 \ \bar{d}_0)^t = (-1 \ 1)^t,$$

или

$$\frac{\bar{n}(s)}{\bar{d}(s)} = \frac{\bar{n}_0}{\bar{d}_0} = 1.$$

**Пример 4.** Определим взаимно простое разложение

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 7s^2 + 15s + 9}. \tag{5}$$

Здесь полиномы числителя и знаменателя не взаимно простые –  $n(s)/d(s) = (s+1)(s+2)/(s+3)(s+4)$ , но это забываем и проверяем методикку. В нашем случае  $n = 3$  и  $m = 2$ , т. е. матрица содержит 3  $dn$ -блочных столбца. Матрица Сильвестра размером  $2n \times 2n = 6 \times 6$

$$\begin{matrix} & d & n & d & n & d & n \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 15 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} -\bar{n}_0 \\ -\bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ -\bar{d}_1 \\ -\bar{n}_2 \\ -\bar{d}_2 \end{matrix} = 0 \tag{6}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathfrak{R}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_x$

имеет ранг, равный пяти ( $q = 5 < 6$ ), что указывает на наличие одинаковых нулей и полюсов. В матрицу  $\mathfrak{R}$  входит три линейно независимых  $d$ -столбца, а именно 1, 3 и 5-й столбцы, и два линейно независимых  $n$ -столбца ( $5 - 3 = 2$ ), а именно 2 и 4-й столбцы. Таким образом,  $\mu = 2$ . Шестой столбец – это первый линейно зависимый столбец (6) – в данном случае столбцы вычеркивать не нужно. Следовательно,  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$ . Так как  $rank(\mathfrak{R}_1) = 5$ , ядро  $\mathfrak{R}_1$  одномерное. Решим уравнение  $\mathfrak{R}_1 x = 0$ :

```
>>n=[2 3 1 0]; d=[9 15 7 1]; R=[d 0 0; n 0 0; 0 d 0; 0 n 0; 0 0 d; 0 0 n];
>>m=rank(R);
>>x=null(R);
x1=x/x(6)
```



Вектор из ядра

$$x_1 = (-2 \ 9 \ -1 \ 6 \ 0 \ 1)^t$$

позволяет определить взаимно простое представление передаточной функции

$$x = (-\bar{n}_0 \ \bar{d}_0 \ -\bar{n}_1 \ \bar{d}_1 \ -\bar{n}_2 \ \bar{d}_2)^t = (-2 \ 9 \ -1 \ 6 \ 0 \ 1)^t.$$

Таким образом, от не взаимно простых полиномов передаточной функции (5) перейдем к уравнению (7):

$$\frac{\bar{n}(s)}{\bar{d}(s)} = \frac{s+2}{s^2+6s+9}, \quad (7)$$

где  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$  – взаимно простые полиномы.

**Решение задачи без использования команды *null*.** Можно решить задачу без использования команды *null*. Применим методикку синтеза регулятора с использованием полиномиального разложения [10, 13, 16, 19, 20] к задаче поиска взаимно простого разложения передаточной функции. Так как матрица  $\mathfrak{R}$  размером  $6 \times 6$  имеет ранг пять, мы можем «перенести» шестой столбец направо, так как он линейно зависимый от первых пяти:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \left( \begin{array}{cc|cc|c} 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 9 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 15 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underbrace{\left( \begin{array}{c} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ -\bar{n}_2 \end{array} \right)}_{x_1} = \underbrace{\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)}_{(-\bar{d}_2)}. \quad (8)$$

Так как шестая строка матрицы  $\mathfrak{R}_1$  линейно зависима, ее отбрасываем:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 9 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 15 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}_2} \underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ -\bar{n}_2 \end{pmatrix}}_{x_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_c (-\bar{d}_2).$$

Ввиду невырожденности  $\mathfrak{R}_2$  уравнение  $\mathfrak{R}_2 x_1 = -c \bar{d}_2$  можем решить так:

$$x_1 = \mathfrak{R}_2^{-1} (-c \bar{d}_2).$$

Откуда

$$x_1 = (-2\bar{d}_2 \quad 9\bar{d}_2 \quad -1\bar{d}_2 \quad 6\bar{d}_2 \quad 0)^t.$$

Итак, вернемся от  $x_1$  к вектору  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= (-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0 \quad -\bar{n}_1 \quad \bar{d}_1 \quad -\bar{n}_2 \quad \bar{d}_2)^t = \\ &= (-2\bar{d}_2 \quad 9\bar{d}_2 \quad -1\bar{d}_2 \quad 6\bar{d}_2 \quad 0 \quad \bar{d}_2)^t. \end{aligned}$$

Если зададим  $\bar{d}_2 = 1$ , то получим уравнение (6). Таким образом, получили взаимно простые полиномы  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$ , которые соответствуют (8).

**Пример 5** [1, р. 194–195]. Найдем взаимно простое разложение для передаточной функции

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{6s^3 + s^2 + 3s - 20}{2s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 16s + 10}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} n(s) &= (s^2 + 1, 5s + 2, 4946)(s + 1, 33), \\ d(s) &= (s^2 + 1, 5s + 2, 4946)(s^2 + 2s + 2), \end{aligned}$$

т. е. для числителя и знаменателя имеются общие множители  $s^2 + 1,5s + 2,4946$ . В данном случае  $n=4$  и  $m=3$ . Составим матрицу Сильвестра: первый и второй столбцы – это столбцы  $d$  и  $n$ , дополненные снизу нулями так, чтобы высота столбца была равна  $2n=2 \cdot 4=8$ . Справа дописываем столбцы  $d$  и  $n$  со смещением вниз на одну позицию и с дополнением сверху нулями. В итоге эту процедуру повторяем столько раз, чтобы размер матрицы  $\mathfrak{R}$  стал равным  $2n \times 2n = 8 \times 8$ :

$$\underbrace{\begin{array}{cccc|cccc} d & n & d & n & d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 3 & 10 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & 1 & 16 & 3 & 10 & -20 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 15 & 1 & 16 & 3 & 10 & -20 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & 6 & 15 & 1 & 16 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 6 & 15 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}}_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \\ -\bar{n}_3 \\ \bar{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица  $\mathfrak{R}$  размером  $8 \times 8$  имеет ранг  $q=6$ , т. е. матрица  $\mathfrak{R}$  вырожденная, это подтверждает наличие одинаковых корней в  $n(s)$  и  $d(s)$ . Другими словами, эти полиномы не взаимно простые. Очевидно, что все четыре  $d$ -столбца, а именно 1, 3, 5 и 7-й столбцы матрицы  $\mathfrak{R}$ , линейно независимые. Заключаем, что в матрице  $\mathfrak{R}$  только два  $n$ -столбца ( $6-4=2$ ), а именно 2 и 4-й столбцы линейно независимые, откуда получаем, что  $\mu=2$ . Тогда  $(\mu+1)$ -й  $n$ -столбец, т. е. третий  $n$ -столбец – это первый  $n$ -столбец, линейно зависимый от столбцов слева. Таким образом, матрица  $\mathfrak{R}_1$  включает первый зависимый  $n$ -столбец, т. е. в матрицу  $\mathfrak{R}_1$  размером  $8 \times 6$  входят шесть столбцов слева из матрицы  $\mathfrak{R}$ . Это можно прокомментировать следующим образом: матрица  $\mathfrak{R}$  вырожденная, т. е. должны сократиться одинаковые корни в числителе и знаменателе, и у матрицы должно остаться  $2 \cdot 3 = 6$  столбцов. Так как все элементы последней строки матрицы  $\mathfrak{R}_1$  нулевые, ее можем выбросить.

То есть матрица  $\mathfrak{R}_1$  будет размером  $7 \times 6$  и ранга пять: размерность ядра – единица.

$$\begin{array}{cccccc}
 d & n & d & n & d & n \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 3 & 10 & -20 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & 16 & 3 & 10 & -20 \\ 7 & 6 & 15 & 1 & 16 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & 6 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix}}_x & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array} \quad (10)$$

Воспользуемся командой  $x=\text{null}(\mathfrak{R}_1)$  Matlab для определения вектора из ядра:

```
>> n=[-20 3 1 6 0]; d=[10 16 15 7 2]; R1=[d 0 0; n 0 0; 0 d 0; 0 n 0; 0 0 d; 0 0 n];
>> x=null(R1)
x = [0.686 0.343 -0.5145 0.3430 0.0000 0.1715]'
```

В результате получили вектор из ядра  $x$ , который «нормируем»:

```
>> x1=x/x(6),
x1 = [4 2 -3 2 0 1]'
```

Мы нашли вектор  $x_1$  из ядра  $\mathfrak{R}_1$ , т. е.  $\mathfrak{R}_1 x_1 = 0$ . Другими словами, в соответствии с (10) нашли коэффициенты полиномов  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$ :

$$(-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0 \quad -\bar{n}_1 \quad \bar{d}_1 \quad -\bar{n}_2 \quad \bar{d}_2)^t = (4 \quad 2 \quad -3 \quad 2 \quad 0 \quad 1)^t,$$

что соответствует

$$\bar{n}(s) = -4 + 3s + 0 \cdot s^2, \quad \bar{d}(s) = 2 + 2s + s^2.$$

Взаимно простое представление передаточной функции (9) найдено:

$$w(s) = \frac{6s^3 + s^2 + 3s - 20}{2s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 16s + 10} = \frac{3s - 4}{s^2 + 2s + 2}.$$

**Пример 6.** Найдем взаимно простое разложение для передаточной функции

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 16s^2 + 9s + 2},$$

где  $n(s) = (s+1)(s+1)(s+1)$ ,  $d(s) = (s+1)(s+1)(s+1)(s+1)(s+2)$ , но предполагаем, что нам неизвестно это разложение. В данном случае  $n = 5$  и  $m = 3$ . Используя уравнение (3) для данного случая, получим

$$\begin{matrix} & d & n & d & n & d & n & d & n & d & n \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \left( \begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 3 & 9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 16 & 3 & 9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 14 & 1 & 16 & 3 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 14 & 1 & 16 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 14 & 1 & 16 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \\ -\bar{n}_3 \\ \bar{d}_3 \\ -\bar{n}_4 \\ \bar{d}_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{matrix} \tag{11}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathfrak{R}}$

Матрица  $\mathfrak{R}$  размером  $2n \times 2n = 10 \times 10$  имеет ранг  $q = 7$ , что подтверждает наличие одинаковых корней в  $n(s)$  и  $d(s)$ . Очевидно, что все  $d$ -столбцы линейно независимые, откуда следует, что второй и четвертый  $n$ -столбцы также линейно независимые ( $7 - 5 = 2$ ), следовательно, получаем  $\mu = 2$ . Далее, третий  $n$ -столбец – это первый  $n$ -столбец, линейно зависимый от столбцов слева (11). Вычеркнем все столбцы правее шестого столбца. Так как все элемен-

ты 9-й и 10-й строк матрицы  $\mathfrak{R}$  после вычеркивания столбцов 7, 8, 9 и 10 нулевые, их также вычеркиваем. В результате получим матрицу  $\mathfrak{R}_1$  размером  $8 \times 6$  и ранга пять:

$$\begin{array}{cccccc}
 & d & n & d & n & d & n \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \left( \begin{array}{cc|cc|cc}
 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 16 & 3 & 9 & 3 & 2 & 1 \\
 14 & 1 & 16 & 3 & 9 & 3 \\
 6 & 0 & 14 & 1 & 16 & 3 \\
 1 & 0 & 6 & 0 & 14 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right) & \underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix}}_x & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. & (12)
 \end{array}$$

Очевидно, что размерность ядра  $\mathfrak{R}_1$  – единица. Решим уравнение (12):

$$x = [0.2582 \quad -0.5146 \quad 0.00 \quad -0.7746 \quad 0.0 \quad -0.2582]^t.$$

После нормировки получим

$$x_1 = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1]^t.$$

Другими словами, нашли коэффициенты полиномов  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$ :

$$(-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0 \quad -\bar{n}_1 \quad \bar{d}_1 \quad -\bar{n}_2 \quad \bar{d}_2)^t = (-1 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1)^t,$$

что соответствует

$$\bar{n}(s) = 1 + 0s + 0 \cdot s^2, \quad \bar{d}(s) = 2 + 3s + s^2,$$

или

$$\frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 16s^2 + 9s + 2} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Задача поиска взаимно простого разложения решена с использованием алгоритма, предложенного в работе [1, р. 192–195] и детализированного в данной работе. Следует отметить, что количество линейно независимых  $n$ -столбцов равно степени знаменателя приведенной передаточной функции и обозначается через  $\mu$ .

### 3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗАИМНО ПРОСТОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Предполагаем, что задана передаточная функция  $w(s) = n(s) / d(s)$ , где

$$n(s) = \sum_{i=0}^m n_i s^i, \quad d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i$$

такая, что степень числителя меньше или равна степени знаменателя  $m \leq n$ . Подчеркнем, что  $n \geq 1$ . Здесь используем обозначения  $n$ -столбца и  $d$ -столбца:

$$n = (n_0, n_1, \dots, n_m)^t, \quad d = (d_0, d_1, \dots, d_n)^t.$$

Два столбца  $d$  и  $n$ , стоящие рядом и дополненные нулями сверху и снизу так, чтобы число элементов в столбцах равнялось  $2n$ , будем называть  $(dn)$ -блочным столбцом. В алгоритме осуществляется исследование уравнения (4)  $\mathfrak{R}x = 0$ , включающее в себя матрицу Сильвестра  $\mathfrak{R}$  и вектор коэффициентов из взаимно простого представления передаточной функции

$$x = (-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0 \mid -\bar{n}_1 \quad \bar{d}_1 \quad \dots \quad -\bar{n}_{n-1} \quad \bar{d}_{n-1})^t.$$

**Алгоритм** состоит из ряда действий.

- Составление матрицы Сильвестра  $\mathfrak{R}$  размером  $2n \times 2n$  из  $n$   $(dn)$ -блоков: первый  $(dn)$ -столбец дополнен снизу нулями до размера  $2n$ , второй  $(dn)$ -столбец получим из первого  $(dn)$ -столбца смещением вниз на одну позицию и дополнением сверху нулями. Аналогичным образом строим  $(dn)$ -столбцы в количестве  $n$ . Формируем  $x$ -столбец из коэффициентов полиномов  $\bar{n}(s)$  и  $\bar{d}(s)$  размером  $2n$ .

- Вычисление ранга матрицы  $\mathfrak{R}$ :  $q = \text{rank}(\mathfrak{R})$ .

- Если  $q = 2n$ , то передаточная функция  $w(s) = n(s)/d(s)$  взаимно простая и, следовательно, выполняется **выход из алгоритма**, иначе  $q < 2n$  – ищем взаимно простое разложение – переход на следующий шаг.
  - Формирование матрицы  $\mathfrak{R}_1$ , состоящей из линейно независимых столбцов матрицы  $\mathfrak{R}$ , взятых слева направо, включая первый линейно зависимый столбец:
    - так как все  $d$ -столбцы в количестве  $n$  матрицы  $\mathfrak{R}$  линейно не зависимы от всех столбцов слева, определяем количество  $\mu$  линейно независимых  $n$ -столбцов слева направо в матрице  $\mathfrak{R}$ :  $\mu = q - n$  – от ранга  $q$  матрицы  $\mathfrak{R}$  отнимаем  $n$  – количество  $d$ -столбцов;
    - $(\mu + 1)$ -й  $n$ -столбец – это первый линейно зависимый  $n$ -столбец (матрица  $\mathfrak{R}_1$  состоит из  $\mu + 1$   $d$ -столбцов (все они линейно независимые) и  $\mu + 1$   $n$ -столбцов (последний  $n$ -столбец линейно зависит от предыдущих));
    - если внизу в матрице  $\mathfrak{R}_1$  имеется нулевая/нулевые строка/строки, то ее/их вычеркиваем – матрица  $\mathfrak{R}_1$  сформирована (матрица  $\mathfrak{R}_1$  имеет ранг  $2\mu + 1$  и содержит  $2(\mu + 1)$  столбец).
  - Формируем вектор  $x$  – у исходного вектора  $x$  вычеркиваем столько последних элементов, сколько столбцов вычеркнули при формировании матрицы  $\mathfrak{R}_1$ .
    - Для определения ненулевого решения  $x$  (состоит из коэффициентов взаимно простых полиномов числителя и знаменателя передаточной функции уравнения  $\mathfrak{R}_1 x = 0$ ) можно воспользоваться командой Matlab **null**( $\mathfrak{R}_1$ ) – вектор  $x$  принадлежит ядру  $\mathfrak{R}_1$ .
    - Найденный вектор нормируем – элементы вектора  $x$  делим на последний его элемент (можно назвать нормированным вектором из ядра – *monic null vector*).
    - Выпишем взаимно простые полиномы передаточной функции объекта.
- Конец алгоритма.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимость приведения передаточной функции  $w(s) = n(s)/d(s)$ , где  $n(s)$  и  $d(s)$  – полиномы от  $s$ , могущие содержать одинаковые корни, к взаимно простому виду объясняется тем, что это условие обязательно при анали-



зе и синтезе САУ. Как было сказано ранее, для этого можно воспользоваться несколькими алгоритмами, а при работе на персональном компьютере можно использовать какой-либо стандартный алгоритм (команду). С учетом того, что эта задача может решаться с применением матрицы Сильвестра, которую используем также при синтезе САУ, в данной работе проведена формализация решения поставленной задачи с использованием указанной матрицы. При этой формализации были уточнены положения алгоритма, которые ранее были упущены при исследовании этого алгоритма другими авторами (например, [1, 2, 19, 20]). Работа алгоритма показана на шести примерах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – 3<sup>rd</sup> ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
2. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984. – 636 p.
3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
4. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
5. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.
6. *Воевода А.А., Вороной В.В., Шоба Е.В.* Модальный синтез многоканального регулятора пониженного порядка с использованием «обратной» производной на примере трехмассовой системы // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1 (46). – С. 15–22.
7. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 1 (38). – С. 195–198.
8. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: полиномиальный метод синтеза двухканальной системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 4 (58). – С. 121–124.
9. *Бобобеков К.М.* О структурных преобразованиях многоканальных линейных систем в матричном полиномиальном представлении // Научный вестник НГТУ. – 2017. – № 2 (67). – С. 7–25.

10. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Синтез линейных многоканальных регуляторов с использованием структурных преобразований // Вестник Астраханского государственного технического университета. – 2017. – № 3. – С. 7–20.
11. *Бобобеков К.М.* Полиномиальный метод синтеза одноканальной двух-массовой системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 25–36.
12. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Расчет параметров регулятора для стабилизации перевернутого маятника по углу отклонения // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 18–32.
13. *Бобобеков К.М.* О нормировании полиномов знаменателей объекта и регулятора при полиномиальном методе синтеза // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 7–24.
14. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* Управление перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 3–14.
15. *Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А.* Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учебное пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2011. – 464 с.
16. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Решение переопределенной линейной системы уравнений при полиномиальном синтезе регуляторов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2017. – № 4 (56). – С. 84–99.
17. *Воевода А.А.* Матричные передаточные функции (основные понятия): конспект лекций по курсу «Проектирование систем управления» для 4–5 курсов АВТФ (специальность 2101) / Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. – 94 с.
18. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов заданной структуры // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2 (51). – С. 214–218.
19. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.
20. *Шоба Е.В.* Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.
21. The modeling tests of the new PID-regulators structures / A.A. Voevoda, V.A. Zhmud, R.Y. Ishimtsev, V.M. Semibalamut // Proceedings of the 18th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, ASM 2009, 7–9 September, 2009, Palma de Mallorca, Spain. – [S. l.], 2009. – P. 165–168.

22. *Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.* О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // *Автометрия*. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

23. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Модальный синтез регуляторов пониженного порядка методом дифференцирования характеристического полинома // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2011. – № 1 (63). – С. 3–12.

24. *Бобобеков К.М.* Об особенностях реализации двухпараметрического регулятора стабилизации положения маятника в среде Matlab // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2016. – № 3 (85). – С. 115–130.

***Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович***, специалист по технологиям машиностроения, 2008–2013 гг. – кафедра «Технология машиностроения металлорежущих станков и инструментов» механико-технологического факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2013 по 2015 г. ассистент Таджикского технического университета. С 2015 г. аспирант кафедры автоматизации Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. Имеет более 20 публикаций. E-mail: kurbon\_111@mail.ru

***Тауров Эмонуддин Шарифович***, инженер-механик по специальности «Автомобили и автомобильное хозяйство», 1998–2003 гг. – кафедра «Автомобили и автомобильное хозяйство» автомобильного факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2003 по 2008 г. ассистент Таджикского технического университета. С 2005 по 2008 г. аспирант кафедры «Теплотехника и теплотехническое оборудование» ТТУ по специальности 01.04.14 «Теоретические основы теплотехники». С 2008 г. старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ТТУ им. акад. М.С. Осими. В настоящее время специализируется в области теплофизики. Имеет более 25 публикаций. E-mail: taurov79@mail.ru

## Calculation of a mutually simple expansion for single-channel transfer functions using the Sylvester matrix\*

K.M. Bobobekov<sup>1</sup>, E.Sh. Taurov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department Automatics. E-mail: kurbon\_111@mail.ru

<sup>2</sup> Novosibirsk State Technical University, 10 academicians of Rajabovs Prospekt, Dushanbe, 734042, Republic of Tajikistan, senior teacher of Department Theoretical Mechanics and Strength of Materials. E-mail: taurov79@mail.ru

Depending on the mathematical used description of the object, for example, the use of differential equations, transfer functions, polynomial descriptions, various methods of synthesis develop. When synthesizing regulators, it is important to formalize the synthesis procedure in such a way as to result in the desired requirements for an automatic control (regulation) system. In the analysis and synthesis of automatic control systems, as a rule, a mutually simple decomposition of the transfer function is used, or in other words, the polynomials of the numerator and the denominator do not have the same roots. To solve this problem, it's easiest to use the *roots* command or the *minreal* command, for example, if we use the Matlab package. Usually, with a polynomial method of synthesis, pass from polynomial equations to numerical matrix equations, which leads to the so-called Sylvester matrix. To determine mutually simple polynomials, as is known, one can use the Sylvester matrix. If the Sylvester matrix is singular, then this suggests the existence of identical roots of the numerator and denominator polynomials. In this paper, we investigate the possibility of using the Sylvester matrix and be defined the algorithm to bringing to a coprime kind. The algorithm is illustrated in five examples. This is explained by the fact that this technique can also be used to solve the problem of synthesis of single-channel and multi-channel systems. The topicality of solving the problem of reduction to a coprime (relatively simple) form is explained by the fact that this method is used in solving the problem of a polynomial method for the synthesis of single-channel and multichannel systems.

**Keywords:** transfer function, single-channel system, a coprime fraction, Sylvester matrix, singular matrix, homogeneous linear equation system

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-7-30

## REFERENCES

1. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 3<sup>rd</sup> ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.
2. Chen C.T. *Linear system theory and design*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984. 636 p.

---

\* Received 08 November 2017.

3. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p.
4. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2. *Mnogomernye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.
5. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polynomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.
6. Voevoda A.A., Voronoy V.V., Shoba E.B. Modal'nyi sintez mnogokanal'nogo regulatora ponizhennogo poryadka s ispol'zovaniem "obratnoi" proizvodnoi na primere trekhmassovoi sistemy [Modal synthesis of multi-channel low-order controller using the "reverse" derivative principle for three-mass system]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (46), pp. 15–22.
7. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya [Stabilisation of two-mass system by a modal method of synthesis with polynomial factorization]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (38), pp. 195–198.
8. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: polinomial'nyi metod sinteza dvukhkanal'noi sistemy [Two-mass system stabilization: polynomial method of two-channel system synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 4 (58), pp. 121–124.
9. Bobobekov K.M. O strukturnykh preobrazovaniyakh mnogokanal'nykh lineinykh sistem v matrichnom polinomial'nom predstavlennii [About structural transformations of multichannel linear systems in the matrix polynomial representation]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 2 (67), pp. 7–25.
10. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Sintez lineinykh mnogokanal'nykh regulyatorov s ispol'zovaniem strukturnykh preobrazovaniy [Synthesis of linear multi-channel regulators using structural transformations]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Astrakhan State Technical University*, 2017, no. 3, pp. 7–20.

11. Bobobekov K.M. Polinomial'nyi metod sinteza odnokanal'noi dvukhmassovoi sistemy [A polynomial method for the synthesis of single-channel two-mass system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 25–36.
12. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Raschet parametrov regul'yatora dlya stabilizatsii perevernutogo mayatnika po uglu otkloneniya [Calculation of controller parameters for the stabilization of the inverted pendulum by corner deviation]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 18–32.
13. Bobobekov K.M. O normirovani polinimov znamenatelei ob"ekta i regul'yatora pri polinomial'nom metode sinteza [About rationing polynomials denominator object and regulator during polynomial method of synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 7–24.
14. Voevoda A.A., Shoba E.B. Upravlenie perevernutym mayatnikom [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 3–14.
15. Gaiduk A.R., Belyaev V.E., P'yavchenko T.A. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya v primerakh i zadachakh s resheniyami v MATLAB* [Theory of automatic control in examples and problems with solutions in MATLAB]. 2nd ed., rev. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011. 464 p.
16. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Reshenie pereopredelennoi lineinoi sistemy uravnenii pri polinomial'nom sinteze regul'yatorov [Solution of an overdetermined linear system of equations for polynomial synthesis of regulators]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System analysis. Modeling*, 2017, no. 4 (56), pp. 84–99.
17. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii: (osnovnye ponyatiya)* [Matrix transfer functions (basic concepts)]. Novosibirsk State Technical University. Novosibirsk, NSTU Publ., 1994. 94 p.
18. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regul'yatorov zadannoi struktury [Polynomial method for calculating multi-channel controllers of a given structure]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (51), pp. 214–218.
19. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regul'yatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [A polynomial method for

calculating the multi-channel controllers low order. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

20. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.

21. Voevoda A.A., Zhmud V.A., Ishimtsev R.Y., Semibalamut V.M. The modeling tests of the new PID-regulators structures. *Proceedings of the IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, ASM 2009*, Palma de Mallorca, Spain, 7–9 September, 2009, pp. 165–168.

22. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. O ponizhenii por-yadka stabiliziruyushchego upravleniya na primere dvojnogo perevernutogo mayatnika [Reducing the stabi-lizing control order for a double inverted pendulum]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumenta-tion and Data Processing*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 69–83. (In Russian).

23. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Modal'nyi sintez regulyatorov ponizhennogo poryadka metodom differentsirovaniya kharakteristicheskogo polinoma [Modal design of reduced order controllers by method of differentiation of the characteristic polynomial]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 1 (63), pp. 3–12.

24. Bobobekov K.M. Ob osobennostyakh realizatsii dvukhparametricheskogo regulyatora stabilizatsii polozheniya mayatnika v srede Matlab [On the peculiarities of realization the two-parameter regulator of stabilization the position pendulum in environment MATLAB]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 115–130.

Для цитирования:

Бобобеков К.М., Тауров Э.Ш. Вычисление взаимно простого разложения для одноканальных передаточных функций с использованием матрицы Сильвестра // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 7–30. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-7-30.

For citation:

Bobobekov K.M., Taurov E.Sh. Vychislenie vzaimno prostogo razlozheniya dlya odnokanal'nykh peredatochnykh funktsii s ispol'zovaniem matritsy Sil'vestra [Calculation of a mutually simple expansion for single-channel transfer functions using the Sylvester matrix]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 7–30. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-7-30.

УДК 681.513

## **ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО МЕТОДА СИНТЕЗА ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ СИЛЬВЕСТРА\***

К.М. БОБОБЕКОВ

*630087, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: kurbon\_111@mail.ru*

Метод синтеза линейных регуляторов для линейных объектов с использованием полиномиального разложения наряду с классическими методами синтеза, такими как синтез в пространстве состояний с использованием наблюдателей полного и пониженного порядка, синтез с использованием передаточных функций и логарифмических частотных характеристик, оптимальные методы синтеза и другие, находит все большее распространение. При полиномиальном методе синтеза, как правило, используется переход от полиномиальных представлений к матричным числовым уравнениям, что приводит к уравнениям с неквадратной вырожденной матрицей Сильвестра. При решении задачи формализации алгоритмов синтеза для многоканальных систем опираются на алгоритмы синтеза одноканальных систем. В данной работе используются результаты, полученные в [1, 2] и других работах, в которых перечисляются требования, предъявляемые к полиномиальному описанию объекта: правильность (строгая правильность) передаточной функции объекта, взаимная простота полиномов числителя и знаменателя передаточной функции объекта. Особо следует отметить требование взаимной простоты полиномов числителя и знаменателя. Невыполнение этого требования приводит прежде всего к вырождению матрицы Сильвестра, а также может привести к нарушению управляемости, наблюдаемости и т. д. Кроме того, необходимо учесть ограничение, накладываемое на выбор степени регулятора, что равносильно ограничению на желаемый характеристический полином замкнутой системы. На основе анализа расчетов многочисленных примеров синтеза одноканальных регуляторов, шесть из которых приведены в данной статье, приведен формализованный алгоритм синтеза регуляторов. Во многих работах при решении задачи синтеза линейно зависимые строки / столбцы в матрице Сильвестра обнуляют совместно с соответствующими параметрами регулятора. В данной работе предлагается линейно зависимые строки с соответствующими неизвестными параметрами регулятора переносить в правую часть уравнения. Это приводит к появлению свободных параметров регулятора, которые можно задавать произвольно (в некоторых случаях накладываются дополнительные ограничения). Это соответствует общему решению системы линейных уравнений, которые при задании сво-

---

\* Статья получена 23 ноября 2017 г.



бодным параметром регулятора конкретных значений приводит к различным вариантам синтезируемого регулятора.

**Ключевые слова:** передаточная функция объекта, строго правильный и не строго правильный объект, взаимно простые и не взаимно простые полиномы, линейное уравнение, однородное и неоднородное полиномиальное уравнение, синтез одноканальных систем, матрица Сильвестра, алгоритм синтеза регуляторов

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-31-67

## ВВЕДЕНИЕ

Взаимная простота (*coprime*) полиномов числителя и знаменателя передаточной функции как объекта, так и регулятора играет важную роль при анализе и синтезе систем автоматического управления (САУ) [1, 2, 5]. Могут возникнуть проблемы с управляемостью и наблюдаемостью в случае, если полиномы числителя и знаменателя объекта имеют одинаковые корни. Также при анализе и синтезе САУ следует учитывать условие *правильности* (*proper*) или *строгой правильности* (*strictly proper*) [13] передаточной функции объекта. В работе подробно анализируется задача синтеза одноканальной системы в случае, когда полиномы числителя и знаменателя передаточной функции объекта взаимно простые [8]. Также рассматривается задача выбора степени регулятора и степени характеристического полинома замкнутой системы (ХПЗС).

Задача синтеза систем управления в теории автоматического управления [1–5, 9, 11, 15, 18, 22] занимает очень важное место, так как она позволяет создавать системы, обеспечивающие различные технические требования, возникающие в различных областях техники. Реальные технические системы можно рассматривать как многоканальные системы, которые в связи со сложностью процессов вынуждают использовать многоканальные регуляторы, расчет параметров которых – довольно сложная задача, которая в настоящее время интенсивно развивается (Гайдук А.Р., Воронов В.В., Ким Д.П., Chen С.Т., Doyle J.C., Dorf R.C., Bishop R.H.). В частности, задача синтеза многоканальных регуляторов в САУ, где объект и регулятор предполагаются линейными, рассматривалась в диссертационных работах [12, 13]. Аппарат полиномиального матричного разложения, используемый в последних вышеуказанных работах, показал свою перспективность и используется в данной работе.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем одноканальные системы автоматического управления (рис. 1), где  $v$  – задающее воздействие (входной сигнал),  $y$  – выходной сигнал,  $e$  – ошибка (разность между входным  $v$  и выходным сигналом  $y$ ),

$w_r(s) = x(s) / y(s)$  – передаточная функция регулятора,  $u$  – управляющий сигнал,  $w_{ob}(s) = n(s) / d(s)$  – передаточная функция объекта. Здесь  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $n(s)$  и  $d(s)$  – полиномы от  $s$ . Передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl}(s) = (x(s)n(s)) / (y(s)d(s) + x(s)n(s)). \quad (1)$$

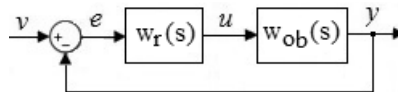


Рис. 1. Структурная схема одноканальной системы с единичной обратной связью

Знаменатель передаточной функции  $w_{cl}(s)$  (1) – *характеристический полином замкнутой системы* (ХПЗС) и при решении задачи синтеза приравнивается к желаемому ХПЗС  $c(s)$  :

$$y(s)d(s) + x(s)n(s) = c(s). \quad (2)$$

Постановка задачи заключается в том, что для заданных полиномов  $d(s)$ ,  $n(s)$  и  $c(s)$  необходимо определить неизвестные полиномы  $y(s)$  и  $x(s)$  из линейного уравнения (2), которое можно рассматривать как линейное уравнение относительно  $y(s)$  и  $x(s)$  – т. е. искать решение уравнения (2) как сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, не задумываясь над физическим смыслом задачи. Но правильное будет учитывать физическую суть задачи, что накладывает дополнительные ограничения на объект, желаемый характеристический полином и регулятор. Последовательно рассмотрим два эти подхода с целью формализации алгоритма синтеза, рассмотренного в ряде работ, в том числе в [1].

## 2. О РЕШЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Так как задача синтеза САУ сводится к решению полиномиального уравнения, остановимся подробнее на этой задаче.

**Теорема 1** [1, р. 272] Для заданных полиномов  $d(s)$ ,  $n(s)$  и  $c(s)$  полиномиальное решение  $y(s)$  и  $x(s)$  уравнения

$$y(s)d(s) + x(s)n(s) = c(s)$$

существует тогда и только тогда, когда  $d(s)$  и  $n(s)$  взаимно простые.

**Комментарий:** здесь нет требования на правильность объекта и нет гарантии, что регулятор будет правильным. Необходимость требования взаимной простоты состоит в том, что если полиномы  $d(s)$  и  $n(s)$  не взаимно простые, например, они включают общий полиномиальный множитель  $\alpha(s)$ , то для существования решения (2) необходимо включить  $\alpha(s)$  в  $c(s)$ , в противном случае решение не существует. Для существования решения необходимо наложить ограничения на выбор  $c(s)$ .

Схема поиска решения уравнения (2) очевидна. Вначале ищем частное решение неоднородного уравнения (2). Для этого с использованием алгоритма Евклида находим решение  $(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$  уравнения

$$\bar{y}(s)d(s) + \bar{x}(s)n(s) = 1.$$

Далее ищем решение уравнения

$$c(s)\bar{y}(s)d(s) + c(s)\bar{x}(s)n(s) = c(s),$$

которое равно  $(c(s)\bar{x}(s), c(s)\bar{y}(s))$  – это частное решение неоднородного уравнения (2). Общее решение однородного уравнения

$$\hat{y}(s)d(s) + \hat{x}(s)n(s) = 0$$

практически очевидно:  $\hat{y}(s) = -n(s)$  и  $\hat{x}(s) = d(s)$ . В итоге общее решение уравнения (2) следующее:

$$y(s) = \bar{y}(s)c(s) + q(s)\hat{y}(s), \quad x(s) = \bar{x}(s)c(s) + q(s)\hat{x}(s).$$

Здесь  $q(s)$  – любой полином (можем задавать произвольно).

**Пример 1** [1, p. 272]. Используем вышеприведенные рассуждения для решения уравнения (2) при

$$n(s) = s - 2, \quad d(s) = s^2 - 1, \quad c(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4,$$

где  $\deg d(s) < \deg c(s)$ . Для удобства назовем  $n(s)$  и  $d(s)$  полиномами числителя и знаменателя передаточной функции, а  $c(s)$  – желаемым характеристическим полиномом. С точки зрения алгебры для определения неизвестных полиномов  $y(s)$  и  $x(s)$  необходимо найти общее решение однородного урав-

нения и частное решение неоднородного уравнения. Тогда сумма их и будет общим решением (2).

Итак, запишем однородное уравнение

$$\hat{y}(s)(s^2 - 1) + \hat{x}(s)(s - 2) = 0$$

и найдем его решение  $\hat{y}(s)$  и  $\hat{x}(s)$ :

$$\hat{y}(s) = -n(s)q(s) = -(s - 2)q(s), \quad \hat{x}(s) = d(s)q(s) = (s^2 - 1)q(s). \quad (3)$$

Уравнение (3) – это общее решение однородного уравнения, причем  $q(s)$  может быть задано любым, в том числе и нулевым.

Запишем неоднородное уравнение, причем возьмем правую часть равной единице

$$\bar{y}(s)(s^2 - 1) + \bar{x}(s)(s - 2) = 1.$$

Полиномы  $\bar{y}(s)$  и  $\bar{x}(s)$  можно получить при помощи алгоритма Евклида [2]. Тогда  $\bar{y}(s) = 1/3$  и  $\bar{x}(s) = -(s + 2)/3$ . Если единицу в правой части заменить на  $c(s)$ , то частное решение неоднородного уравнения будет равно

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{3}c(s), \quad \bar{x}(s) = \frac{-(s + 2)}{3}c(s).$$

Итак, можем записать общее решение:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{3}(s^3 + 4s^2 + 6s + 4) + q(s)(-s + 2), \\ x(s) &= -\frac{1}{3}(s + 2)(s^3 + 4s^2 + 6s + 4) + q(s)(s^2 - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) – это общее решение уравнения (2), содержащее «свободный параметр»  $q(s)$ . Если зададим  $q(s) = 0$ , получим

$$x(s) = -(s + 2)(s^3 + 4s^2 + 6s + 4), \quad y(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4.$$

Выше полиномы  $x(s)$  и  $y(s)$  были названы полиномами числителя и знаменателя регулятора. Следовательно, произойдет *сокращение полиномов* числителя и знаменателя, и, кроме того, получим *неправильный регулятор*  $w_r(s) = -(s+2)$  – степень числителя больше степени знаменателя, что может вызвать затруднение при реализации регулятора.

Если зададим  $q(s) = (s^2 + 6s + 15) / 3$ , то получим правильный регулятор

$$w_r(s) = \frac{-22s - 23}{3s + 34},$$

а если зададим  $q(s) = (1,1s^2 + 6s + 15) / 3$ , то снова получим *неправильный* регулятор

$$w_r(s) = \frac{0,1s^4 - 0,1s^2 - 22s - 23}{-0,1s^3 + 0,2s^2 + 3s + 34}.$$

Если выбрать  $q(s) = -2/3$ , то  $y(s)$  не будет содержать свободный член и система приобретает свойство астатизма.

### 3. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА

Далее рассматриваем систему (рис.1), где полиномы числителя и знаменателя передаточных функции объекта  $w_{ob}(s) = n(s) / d(s)$  и регулятора  $w_r(s) = x(s) / y(s)$  имеют вещественные коэффициенты и, следовательно, полюса системы, т. е. корни ХПЗС  $y(s)d(s) + x(s)n(s) = c(s)$  будут либо вещественными, либо комплексно-сопряженными. В данной постановке задачи при помощи выбора  $x(s)$  и  $y(s)$  решается задача «смещения» полюсов объекта, но не решается задача изменения (смещения) нулей объекта. Действительно, это очевидно:

$$w_{cl}(s) = (x(s)n(s)) / (y(s)d(s) + x(s)n(s)).$$

Вместо прямого решения полиномиального уравнения (2) преобразуем его в «набор» линейных алгебраических уравнений. Вспоминаем, что рассматриваем объекты строго правильные  $\deg n(s) < \deg d(s) = n$  и ищем регу-

лятор правильный, но не строго правильный  $\deg x(s) \leq \deg y(s) = m$ . Тогда  $c(s)$  в уравнении (2) имеет степень не выше  $n + m$ . Развернем полиномы, входящие в (2):

$$\begin{aligned} d(s) &= d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_ns^n, \\ n(s) &= n_0 + n_1s + n_2s^2 + \dots + n_ns^n, \\ y(s) &= y_0 + y_1s + y_2s^2 + \dots + y_ms^m, \\ x(s) &= x_0 + x_1s + x_2s^2 + \dots + x_ms^m, \\ c(s) &= c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_{n+m}s^{n+m}. \end{aligned}$$

Здесь все коэффициенты являются вещественными константами, не обязательно ненулевыми (в частности,  $d_n \neq 0$ ). Подставляя их в (2) и сопоставляя коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , получим  $n + m + 1$  уравнений:

$$\begin{aligned} y_0d_0 + x_0n_0 &= c_0, \\ y_0d_1 + x_0n_1 + y_1d_0 + x_1n_0 &= c_1, \\ &\dots \\ y_md_n + x_mn_n &= c_{n+m}. \end{aligned}$$

Они могут быть записаны в матричном виде

$$\underbrace{[y_0 \ x_0 \ y_1 \ x_1 \ \dots \ y_{m-1} \ x_{m-1} \ y_m \ x_m]}_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{R} = \underbrace{[c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{m+n}]}_{\mathfrak{N}},$$

или

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{N}. \tag{5}$$

Здесь  $\mathfrak{R}$  – матрица Сильвестра<sup>1</sup> (*Sylvester resultant* [1, p. 193]):

$$\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)} = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_n & 0 & \dots & 0 \\ n_0 & n_1 & \dots & n_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_0 & \dots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 \\ \dots & n_0 & \dots & n_{n-1} & n_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_0 & \dots & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n_0 & \dots & n_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В формуле (6), в отличие от (5), указаны размеры матрицы  $\mathfrak{R}$ .

Матрица  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  имеет  $2(m+1)$  строк и  $n+m+1$  столбцов и сформирована из коэффициентов полиномов  $d(s)$  и  $n(s)$ . Две первые строки – это просто коэффициенты  $y(s)$  и  $x(s)$ , упорядоченные в соответствии с возрастанием степеней  $s$  – так называемая блочная  $dn$ -строка. Следующие две строки – это две первые строки, смещенные вправо на одну позицию. Мы повторяем этот процесс до тех пор, пока не получим  $(m+1)$  пару строк из коэффициентов. Строчный вектор слева в уравнении (5) состоит из коэффициентов регулятора  $\mathfrak{Z}(s)$ , который необходимо найти. Если  $\mathfrak{Z}(s)$  имеет степень  $m$ , тогда этот строчный вектор будет содержать  $2(m+1)$  элементов. Строчный вектор справа в выражении (5) состоит из коэффициентов  $\mathfrak{N}(s)$ . Для вычисления уравнения регулятора необходимо решить линейное алгебраическое уравнение (5).

Используя следствие 3.2 [1, p. 51], мы заключаем, что (5) имеет решение для любого  $c(s)$ , если и только если  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  имеет **полный столбцо-**

---

<sup>1</sup> Количество строк матрицы  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  равно количеству элементов вектора-строки  $\mathfrak{Z}$ , а количество столбцов равно количеству элементов вектора-строки  $\mathfrak{N}$  (количество коэффициентов желаемого характеристического полинома).

**второй ранг.** Необходимое условие для  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  иметь полный столбцовый ранг состоит в том, чтобы  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  была квадратная или количество строк было больше, чем количество столбцов, т. е.

$$2(m+1) \geq n+m+1 \text{ или } m \geq n-1.$$

Если  $m < n-1$ , тогда  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  будет неполного столбцового ранга и решение может существовать только лишь для некоторых  $c(s)$ , но не для любых  $c(s)$ .

Если  $m = n-1$ , тогда  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  становится квадратной матрицей размера  $2n \times 2n$ , но  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  невырожденная, если и только если  $d(s)$  и  $n(s)$  взаимно простые. Таким образом, если  $d(s)$  и  $n(s)$  взаимно простые, тогда  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  имеет ранг  $2n$  (полный столбцовый ранг). Если  $m$  увеличить на единицу, тогда число столбцов увеличится на единицу, но число строк увеличится на две. Так как  $d_n \neq 0$ , новая  $d$ -строка линейно независима от предыдущих строк. Таким образом, матрица  $\mathfrak{R}_{2(n+1) \times 2(n+1)}$  имеет ранг  $2(n+1)$  – полный столбцовый ранг. Повторяя аналогичные рассуждения, заключаем, что если  $n(s)$  и  $d(s)$  взаимно простые и если  $m \geq n-1$ , тогда матрица  $\mathfrak{R}_{2(m+1) \times (n+m+1)}$  будет полного столбцового ранга. Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 2** [1, р. 275]. Рассмотрим систему с единичной обратной связью, показанную на рис. 1. Объект описывается строго правильной передаточной функцией  $w_{ob}(s) = n(s)/d(s)$ , где  $n(s)$  и  $d(s)$  – взаимно простые полиномы с  $\deg n(s) < \deg d(s) = n$ . Пусть  $m \geq n-1$ . Тогда для любого полинома  $c(s)$  степени  $n+m$  существует правильная регулятор  $w_r(s) = x(s)/y(s)$  степени  $m$  такой, что передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl}(s) = \frac{n(s)x(s)}{y(s)d(s) + x(s)n(s)} = \frac{n(s)x(s)}{c(s)}.$$



Для проверки некоторых особенностей, связанных с формированием матрицы Сильвестра и с решением системы уравнений (5), приведем несколько примеров расчета регулятора. Это позволит сформулировать алгоритм синтеза.

#### 4. ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ

**Пример 2.** В этом примере рассмотрим случай, когда полиномы  $n(s)$  и  $d(s)$  не взаимно простые, т. е. нарушим необходимое условие взаимной простоты, указанное в теореме 1, и покажем, что при дополнительных ограничениях, наложенных на  $c(s)$ , решение существует. В качестве полиномов  $n(s)$  и  $d(s)$  возьмем *не взаимно простые полиномы* числителя и знаменателя передаточной функции объекта:

$$n(s) = s + 1, \quad d(s) = (s + 1)^2,$$

т. е. передаточная функция объекта  $w_{ob}(s) = (s + 1) / (s + 1)^2$ .

Так как степень объекта  $n = 2$ , зададим степень регулятора на единицу меньше, т. е.  $m = n - 1 = 1$ :

$$w_r(s) = x(s) / y(s),$$

где  $x(s) = (x_1s + x_0)$ ,  $y(s) = (y_1s + y_0)$ . В этом примере используем подсказку, приведенную в работе [1, р. 272]: зададим желаемый характеристический полином такой, чтобы один корень совпадал с общим корнем полиномов числителя и знаменателя объекта  $c(s) = (s + 1)(s + 2)^2$ , т. е.

$$c(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4,$$

что соответствует корням  $\{-1 - 2 - 2\}$ . Для решения задачи синтеза перейдем от полиномиального уравнения (2) к системе линейных уравнений с вектором неизвестных (5). Для этого сформируем матрицу  $\mathfrak{R}$ : первая и вторая строка – это строки  $d$  и  $n$  (блочная  $dn$ -строка), дополненные нулями так, чтобы длина строки было равна  $n + m + 1$ , т. е. равна четырем. Снизу дописываем блочную  $dn$ -строку со смещением вправо на одну позицию и с дополнением слева

нулями. В итоге эту процедуру повторяем столько раз, чтобы размер матрицы  $\mathfrak{R}$  стал равным  $(n + m + 1) \times (n + m + 1) = 4 \times 4$ :

$$\underbrace{(y_0 \quad x_0 \quad y_1 \quad x_1)}_{\mathfrak{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}} = \underbrace{(c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3)}_{\mathfrak{N}},$$

где  $n_0 = 1$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0$ ,  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 2$  и  $d_2 = 1$ . Матрица  $\mathfrak{R}$  имеет ранг, равный трем, и это подтверждает, что полиномы  $d(s)$  и  $n(s)$  не взаимно простые.

Исследуем матрицу  $\mathfrak{R}$ : при вычеркивании одного из 1-го, 2-го, 3-го или 4-го столбцов ранг матрицы  $\mathfrak{R}$  не понижается. При вычеркивании 3-й строки матрицы  $\mathfrak{R}$  ранг матрицы понижается, а при вычеркивании одной из 1-й, 2-й или 4-й строки матрицы  $\mathfrak{R}$  ранг не меняется. Это говорит о том, что следует проанализировать три варианта решения. Приведем один из вариантов.

Итак, вычеркиваем четвертый столбец из матрицы  $\mathfrak{R}$ , умноженный на  $c_3$ , и обозначим  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_1$  и  $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_1$ . Далее перенесем четвертую строку из матрицы  $\mathfrak{R}_1$ , умноженную на  $-x_1$ , вправо. После переноса обозначим  $\mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathfrak{R}_2$ ,  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_1$  и правую частью  $\mathfrak{N}_1 \rightarrow \mathfrak{N}_2$ :

$$\underbrace{(y_0 \quad x_0 \quad y_1)}_{\mathfrak{S}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}_2} = \underbrace{(4 \quad 8 - x_1 \quad 5 - x_1)}_{\mathfrak{N}_2}.$$

Матрица  $\mathfrak{R}$  невырожденная, имеет размер  $3 \times 3$ , и ранг равен трем. Не сложно определить  $\mathfrak{S}_1$ :

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{N}_2 \mathfrak{R}_2^{-1} = (3 - x_1 \quad x_1 + 1 \quad 1).$$

Вернемся от  $\mathfrak{S}_1$  к  $\mathfrak{S}$ :

$$\mathfrak{S} = (3 - x_1 \quad x_1 + 1 \quad 1 \quad x_1).$$

Передаточная функция регулятора будет равна

$$w_r(s) = \frac{x_1 s + (x_1 + 1)}{s + (3 - x_1)}.$$

Как видно, передаточная функция регулятора содержит «свободный» параметр  $x_1$ , и его можно задавать произвольно. Например, если зададим  $x_1 = 0$ , то получим строго правильный регулятор

$$w_r(s) = \frac{1}{s + 3}.$$

**Пример 3.** Возьмем объект из первого примера:

$$w_{ob}(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s - 2}{s^2 - 1}, \quad (7)$$

где полиномы взаимно простые. Степень объекта  $n$  равна 2, *выбираем* степень регулятора на единицу меньше степени объекта  $m = n - 1 = 1$ , откуда степень ХПЗС  $n + m = 3$ . Корни системы зададим равными  $\{-2, -1 \pm i\}$ , или

$$c(s) = (s + 2)(s + 1 + i)(s + 1 - i) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4,$$

где  $c(s)$  – желаемый характеристический полином замкнутой системы. Сформируем матрицу  $\mathfrak{R}$ : первая и вторая строка – это строки  $d$  и  $n$  (блочная  $dn$ -строка), дополненные нулями так, чтобы длина строки было равна  $n + m + 1$ , т. е. равна четырем. Снизу дописываем блочную  $dn$ -строку со смещением вправо на одну позицию и с дополнением слева нулями. В итоге эту процедуру повторяем столько раз, чтобы размер матрицы  $\mathfrak{R}$  стал равным  $(n + m + 1) \times (n + m + 1) = 4 \times 4$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 & x_0 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{N}}. \quad (8)$$

Здесь  $n_0 = -2$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0$ ,  $d_0 = -1$ ,  $d_1 = 0$  и  $d_2 = 1$ . Матрица  $\mathfrak{R}$  имеет ранг четыре, и это подтверждает, что полиномы  $d(s)$  и  $n(s)$  взаимно простые. Определитель  $\det(\mathfrak{R}) = -3$  и обусловленность  $\text{cond}(\mathfrak{R}) = 6$ . Из уравнения (8) не сложно определить искомые параметры  $\mathfrak{Z}$ :

$$(y_0 \quad x_0 \quad y_1 \quad x_1) = (11,33 \quad -7,67 \quad 1 \quad -7,33).$$

В результате получили правильный регулятор

$$w_r(s) = \frac{-7,33s - 7,67}{s + 11,33}.$$

Для того чтобы удостовериться в правильности решения, вычислим ХПЗС:

$$(s + 11,33)(s^2 - 1) + (-7,33s - 7,67)(s - 2) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

**Пример 4.** Продолжим исследование по синтезу регулятора для объекта, рассмотренного в первом и третьем примерах. В отличие от примера 3 зададим степень регулятора равной степени объекта  $m = n = 2$  ( $m > n - 1!$ ):

$$w_r(s) = \frac{x_2 s^2 + x_1 s + x_0}{y_2 s^2 + y_1 s + y_0}.$$

Пусть заданы корни системы  $\{-2 - 2 - 1 \pm i\}$ , т. е. ХПЗС равен

$$c(s) = (s + 2)(s + 2)(s + 1 + i)(s + 1 - i) = s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 16s + 8.$$

Сформируем матрицу  $\mathfrak{R}$  – транспонированную матрицу Сильвестра. Первые две строки – это блочная  $dn$ -строка, дополненная нулями так, чтобы длина строки было равна  $n + m + 1$ , т. е. в данном случае  $n + m + 1 = 5$ . Следующие блочные  $dn$ -строки дописываются аналогично примерам 2 и 3. В итоге размер матрицы  $\mathfrak{R}$  равен  $2(m + 1) \times (n + m + 1) = 6 \times 5$ :

$$\underbrace{\left( \begin{array}{cc|cc|cc} y_0 & x_0 & y_1 & x_1 & y_2 & x_2 \end{array} \right)}_{\mathfrak{Z}} \underbrace{\left( \begin{array}{ccccc} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array} \right)}_{\mathfrak{R}} = \underbrace{\left( \begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{array} \right)}_{\mathfrak{N}}. \quad (9)$$

Значения  $d_i$  и  $n_i$  берем из выражения (7). Матрица  $\mathfrak{R}$  вырожденная, так как ранг равен пяти,  $\text{rank}(\mathfrak{R}) = 5$  и обусловленность  $\text{cond}(\mathfrak{R}) = 6$ . Следовательно, столбцы матрицы  $\mathfrak{R}$  линейно независимы (количество строк больше, чем столбцов). Уравнение (9) имеет много решений<sup>2</sup>.

Исследуем матрицу  $\mathfrak{R}$ : при вычеркивании 4-й или 5-й строк из матрицы  $\mathfrak{R}$  ранг матрицы понижается, а при вычеркивании одной из 1, 2, 3 и 6-й строк матрицы  $\mathfrak{R}$  ранг не меняется. Это говорит о том, что следует проанализировать четыре варианта решения.

**Вариант 1.** Так как произведение вектора-строки  $\mathfrak{Z}$  на матрицу  $\mathfrak{R}$  равно линейной комбинации строк  $\mathfrak{R}$  с коэффициентами из  $\mathfrak{Z}$ , можем перенести первую строку матрицы  $\mathfrak{R}$ , умноженную на  $-y_0$ , направо. После переноса обозначим  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}_1$  и правую часть  $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_1$ :

$$\underbrace{\left( \begin{array}{c|cc|cc|c} x_0 & y_1 & x_1 & y_2 & x_2 \end{array} \right)}_{\mathfrak{Z}_1} \underbrace{\left( \begin{array}{ccccc} n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array} \right)}_{\mathfrak{R}_1} =$$

<sup>2</sup> Для любой заданной матрицы  $A$  размером  $m \times n$ , где  $m \geq n$ , существует решение  $x$  уравнения  $xA = y$  для любого вектора-строки  $y$ , если и только если матрица  $A$  имеет полный столбцовый ранг.

$$= \underbrace{(c_0 - d_0 y_0 \quad c_1 - d_1 y_0 \quad c_2 - d_2 y_0 \quad c_3 \quad c_4)}_{\mathfrak{N}_1}$$

или  $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{N}_1$ . Найдем решение последнего уравнения

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{R}_1^{-1},$$

откуда

$$\mathfrak{Z}_1 = (-4 - 0,5 y_0 \quad 24,7 - 0,5 y_0 \quad -22,3 \quad 1 \quad -0,5 y_0 - 18,7).$$

В решении появился «свободный» параметр  $y_0$ . Вернемся от  $\mathfrak{Z}_1$  к  $\mathfrak{Z}$ :

$$\mathfrak{Z} = (y_0 \quad -4 - 0,5 y_0 \quad 24,7 - 0,5 y_0 \quad -22,3 \quad 1 \quad -0,5 y_0 - 18,7).$$

В результате получим правильную передаточную функцию регулятора

$$w_{r1}(s) = \frac{(0,5 y_0 - 18,7) s^2 - 22,3 s - (4 + 0,5 y_0)}{s^2 + (24,7 - 0,5 y_0) s + y_0}.$$

Передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl1}(s) = \frac{(s - 2) \left( (0,5 y_0 - 18,7) s^2 - 22,3 s - (4 + 0,5 y_0) \right)}{s^4 + 6 s^3 + 14,1 s^2 + 15,9 s + 8}.$$

Продемонстрируем возможность использования свободы выбора параметра  $y_0$ : построим график корневых годографов полинома числителя регулятора (рис. 2).

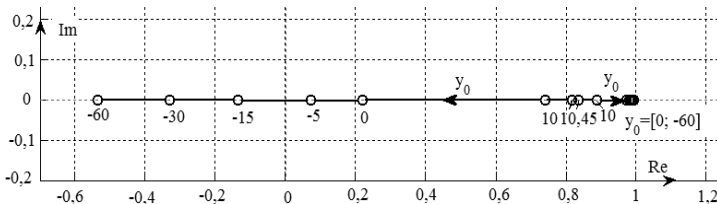


Рис. 2. Корневые годографы для варианта 1

Выбираем значение  $y_0 = 10,45$ , что соответствует самому левому расположению нулей замкнутой системы, откуда

$$w_{r1}(s) = \frac{-13,475s^2 - 22,3s - 9,225}{s^2 + 19,475s + 10,45}.$$

В этом случае, как видно из рис. 3, система имеет перерегулирование, равное 60...70%. Если зададим  $y_0 = 0$ , что соответствует астатизму системы, передаточная функция регулятора

$$w_{r1}(s) = \frac{-18s^2 - 22,3s - 4}{s^2 + 24,7s}$$

будет содержать интегратор и установившаяся ошибка будет равна нулю (рис. 4). Однако по сравнению с предыдущим случаем перерегулирование существенно возрастет.

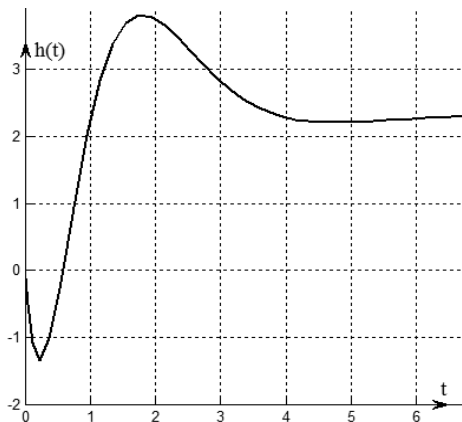


Рис. 3. Переходный процесс системы при подаче единичного входного сигнала при  $y_0 = 10,45$

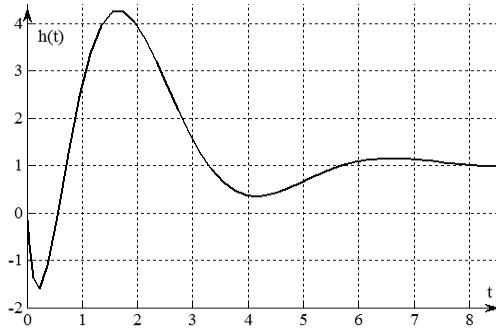


Рис. 4. Переходный процесс системы при  $y_0 = 0$

**Вариант 2.** Перенесем вторую строку матрицы  $\mathfrak{R}$ , умноженную на  $-x_0$ , вправо. После переноса обозначим  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_2$ ,  $\mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}_2$  и правую часть через  $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_2$ :

$$\underbrace{\left( y_0 \mid y_1 \quad x_1 \mid y_2 \quad x_2 \right)}_{\mathfrak{T}_2} \underbrace{\left( \begin{array}{ccccc} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array} \right)}_{\mathfrak{R}_2} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 = \\ 5 \\ 6 \end{matrix} =$$

$$= \underbrace{\left( c_0 - n_0 x_0 \quad c_1 - n_1 x_0 \quad c_2 - n_2 x_0 \quad c_3 \quad c_4 \right)}_{\mathfrak{N}_2}$$

или  $\mathfrak{T}_2 \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{N}_2$ . Найдем решение:

$$\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{N}_2 \mathfrak{R}_2^{-1} = (-8 - 2x_0 \quad 28,7 + x_0 \quad -22,3 \quad 1 \quad -22,7 - x_0).$$

В решении появился «свободный» параметр  $x_0$ . Вернемся от  $\mathfrak{T}_2$  к  $\mathfrak{T}$ :

$$\mathfrak{T} = (-8 - 2x_0 \quad x_0 \mid 28,7 + x_0 \quad -22,3 \mid 1 \quad -22,7 - x_0).$$



В результате получим правильный регулятор

$$w_{r2}(s) = \frac{(-22,7 - x_0)s^2 - 22,3s + x_0}{s^2 + (28,7 + x_0)s - (8 + 2x_0)},$$

что соответствует

$$w_{cl2}(s) = \frac{(s-2)((-22,7 - x_0)s^2 - 22,3s + x_0)}{s^4 + 6s^3 + 14,1s^2 + 15,9s + 8}.$$

Построим график корневых годографов для корней полинома числителя, для чего изменим значение свободного параметра  $x_0$  в пределах от  $-14$  до  $-8$  (рис. 5).

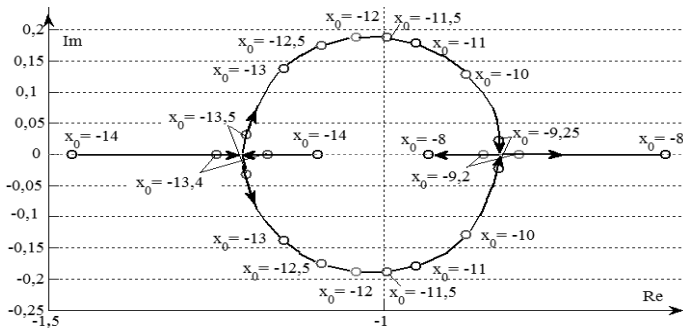


Рис. 5. Корневые годографы для варианта 2

Если выберем  $x_0 = -13,4$ , получим передаточную функцию регулятора

$$w_{r2}(s) = \frac{-9,3s^2 - 22,3s - 13,4}{s^2 + 15,3s + 18,8},$$

нули которой (и, соответственно, передаточной функции замкнутой системы) имеют самое левое расположение.

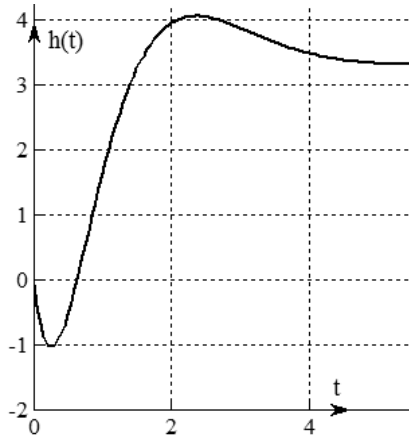


Рис. 6. Переходный процесс системы при подаче единичного входного сигнала при  $x_0 = -13,4$

Как видно из рис. 6, качество перерегулирования улучшилось относительно варианта 1 и примерно равно 20...25 %.

**Вариант 3.** Перенесем третью строчку из матрицы  $\mathfrak{R}$  направо:

$$\underbrace{(y_0 \quad x_0 \mid x_1 \mid y_2 \quad x_2)}_{\mathfrak{S}_3} \underbrace{\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}_3} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 = \\ 5 \\ 6 \end{matrix} =$$

$$= \underbrace{(c_0 \quad c_1 - d_0 y_1 \quad c_2 - d_1 y_1 \quad c_3 - d_2 y_1 \quad c_4)}_{\mathfrak{S}_3}.$$

Откуда найдем

$$\mathfrak{S}_3 = (49,3 - 2y_1 \quad y_1 - 28,7 \quad -22,3 \quad 1 \quad 6 - y_1).$$

Итак, вернемся от  $\mathfrak{Z}_3$  к  $\mathfrak{Z}$ :

$$\mathfrak{Z} = (49,3 - 2y_1 \quad y_1 - 28,7 \quad y_1 \quad -22,3 \quad 1 \quad 6 - y_1),$$

что соответствует регулятору вида

$$w_{r3}(s) = \frac{(6 - y_1)s^2 - 22,3s + (y_1 - 28,7)}{s^2 + y_1s + (49,3 - 2y_1)}.$$

Значения нулей системы соответствуют корням числителя

$$w_{c/3}(s) = \frac{(s - 2)((6 - y_1)s^2 - 22,3s + (y_1 - 28,7))}{s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 15,9s + 8,1}.$$

Корневые годографы нулей приведены на рис. 7.

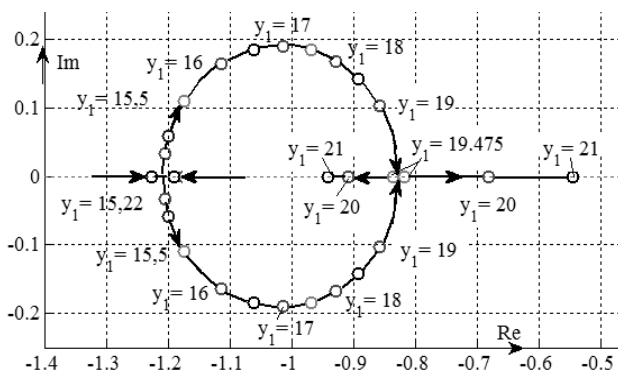


Рис. 7. Корневые годографы для варианта 3

Выбираем  $y_1 = 15,22$ :

$$w_{r3}(s) = \frac{-9,22s^2 - 22,3s - 13,5}{s^2 + 15,22s + 18,86}.$$

**Вариант 4.** Перенесем шестую строчку из матрицы  $\mathfrak{R}$ , умноженную на  $-x_2$ , вправо. После переноса получим

$$\underbrace{\left( \begin{array}{cc|cc} y_0 & x_0 & y_1 & y_2 \end{array} \right)}_{\mathfrak{I}_4} \underbrace{\left( \begin{array}{ccccc} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \end{array} \right)}_{\mathfrak{R}_4} = \underbrace{\left( c_0 \quad c_1 \quad c_2 - n_0 x_2 \quad c_3 - n_1 x_2 \quad c_4 - n_2 x_2 \right)}_{\mathfrak{N}_4},$$

или  $\mathfrak{I}_4 \mathfrak{R}_4 = \mathfrak{N}_4$ . Откуда найдем

$$\mathfrak{I}_4 = \mathfrak{N}_4 \mathfrak{R}_4^{-1} = (37,3 + 2x_2 \quad -22,7 - x_2 \quad 6 - x_2 \quad -22,3 \quad 1).$$

Вернемся от  $\mathfrak{I}_4$  к  $\mathfrak{I}$ :

$$\mathfrak{I} = (37,3 + 2x_2 \quad -22,7 - x_2 \quad 6 - x_2 \quad -22,3 \quad 1 \quad x_2).$$

Выпишем передаточные функции регулятора замкнутой системы:

$$w_{r4}(s) = \frac{x_2 s^2 - 22,3s - (22,7 + x_2)}{s^2 + (6 - x_2)s + (37,3 + 2x_2)},$$

$$w_{cl4}(s) = \frac{(s-2)(x_2 s^2 - 22,3s - (22,7 + x_2))}{s^4 + 6s^3 + 14,1s^2 + 15,9s + 8}.$$

Нули системы зависят от  $x_2$  (рис. 8).

Например, для  $x_2 = -9,2$  передаточная функция регулятора определяет нули замкнутой системы  $\{2 - 1,25 - 1,17\}$ , где первый корень – это ноль объекта. У переходного процесса (рис. 9) перерегулирование равно примерно 25 %.

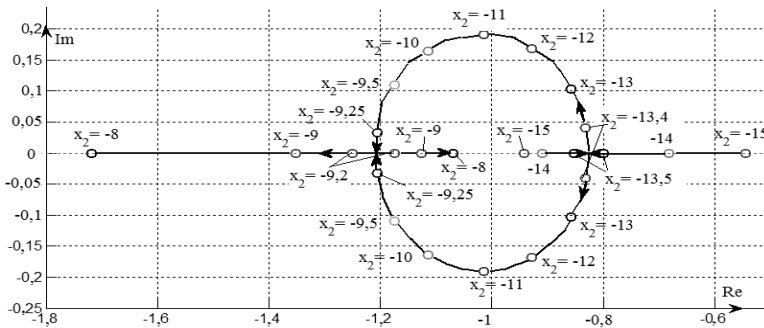


Рис. 8. Корневые годографы для варианта 4

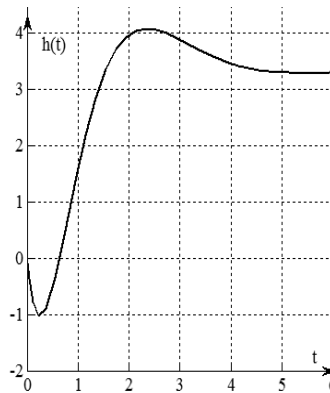


Рис. 9. Переходный процесс в системе  
при  $x_2 = -9,2$

**Пример 5.** Продолжим исследование по синтезу регулятора для объекта

$$w_{ob}(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s-2}{s^2-1}.$$

В отличие от примера 3 зададим степень регулятора равной трем,  $m \geq n - 1 = 3$  :

$$w_r(s) = \frac{x_3 s^3 + x_2 s^2 + x_1 s + x_0}{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s},$$

а свободный параметр знаменателя регулятора берем равным нулю. Степень  $c(s)$  будет равна  $m + n = 5$ ; выберем корни системы  $\{-1, -1, -1, -1, -1\}$ , что соответствует ХПЗС

$$c(s) = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1.$$

Сформируем матрицу  $\mathfrak{R}$  :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0 & | & y_1 & x_1 & | & y_2 & x_2 & | & y_3 & x_3 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{S}} \begin{pmatrix} n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{N}} \cdot (10)$$

Размер матрицы  $\mathfrak{R}$  стал равным  $(2m + 1) \times (n + m + 1) = 7 \times 6$  – мы написали  $(2m + 1)$  вместо  $2(m + 1)$  из-за того, что положили  $y_0 = 0$ . Значения  $d_i$  и  $n_i$  берем из выражения (7). Матрица  $\mathfrak{R}$  вырожденная – ранг равен шести  $rank(\mathfrak{R}) = 6$  и обусловленность  $cond(\mathfrak{R}) = 6$ . Следовательно, столбцы матрицы  $\mathfrak{R}$  линейно независимы. Уравнение (10) имеет ряд решений.

Исследуем матрицу  $\mathfrak{R}$  : при вычеркивании 1-й или 5-й, или 6-й строк из матрицы  $\mathfrak{R}$  ранг матрицы понижается, а при вычеркивании одной из 2, 3, 4 и 7-й строк матрицы  $\mathfrak{R}$  ранг не меняется. Это говорит о том, что следует проанализировать четыре варианта решения уравнения (10).

**Вариант 1.** Перенесем вторую строку матрицы  $\mathfrak{R}$ , умноженную на  $-y_1$ , вправо. После переноса вместо матриц  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{Z}$  и  $\mathfrak{S}$  введем  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{Z}_1$  и  $\mathfrak{S}_1$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0 & | & x_1 & | & y_2 & & x_2 & | & y_3 & & x_3 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{Z}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 & c_1 - d_0 y_1 & c_2 - d_1 y_1 & c_3 - d_2 y_1 & c_4 & c_5 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{S}_1},$$

или  $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S}_1$ . Найдем решение последнего уравнения

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{R}_1^{-1} = (-0,5 \mid -0,5y_1 - 2,75 \mid 18,2 - 0,5y_1 \mid -15,5 \mid 1 \mid 0,5y_1 - 13,2).$$

В решении появился «свободный» параметр  $y_1$ . Вернемся от  $\mathfrak{Z}_1$  к  $\mathfrak{Z}$ :

$$\mathfrak{Z} = (-0,5 \mid y_1 \mid -0,5y_1 - 2,75 \mid 18,2 - 0,5y_1 \mid -15,5 \mid 1 \mid 0,5y_1 - 13,2).$$

В результате получим правильную передаточную функцию регулятора

$$w_{r1}(s) = \frac{(0,5y_1 - 13,2)s^3 - 15,5s^2 + (-0,5y_1 - 2,75)s - 0,5}{s^3 + (18,2 - 0,5y_1)s^2 + y_1s}.$$

Передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl1}(s) = \frac{(s-2)((0,5y_1 - 13,2)s^3 - 15,5s^2 + (-0,5y_1 - 2,75)s - 0,5)}{s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1}.$$

При  $y_1 = 24,4$  получим регулятор с интегратором

$$w_{r1}(s) = \frac{-s^3 - 15,5s^2 - 14,95s - 0,5}{s^3 + 6s^2 + 24,4s}.$$

Переходный процесс в системе (рис. 9) подтверждает астатические свойства.

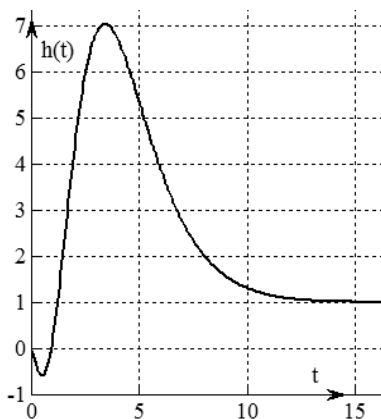


Рис. 10. Переходный процесс в системе при  $y_1 = 24,4$

Вычисление ХПЗС подтверждает правильность вычислений:

$$\begin{aligned} (s^3 + 6s^2 + 24,4s)(s^2 - 1) + (-s^3 - 15,5s^2 - 14,95s - 0,5)(s - 2) = \\ = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1. \end{aligned}$$

**Вариант 2.** Перенесем седьмую строку матрицы  $\mathfrak{R}$  вправо:

$$\underbrace{\left( \begin{array}{c|c|c} x_0 & y_1 & x_1 & y_2 & x_2 & y_3 \end{array} \right)}_{\mathfrak{S}_2} \cdot \underbrace{\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \end{array} \right)}_{\mathfrak{R}_2} =$$

$$= \underbrace{\left( c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 - n_0x_3 \quad c_4 - n_1x_3 \quad c_5 - n_2x_3 \right)}_{\mathfrak{S}_2}.$$



В решении появился «свободный» параметр  $x_3$  :

$$\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{N}_2 \mathfrak{R}_2^{-1} = (-0,5 \mid 2x_3 + 26,5 \quad -x_3 - 16 \mid 5 - x_3 \quad -15,5 \mid 1) .$$

Вернемся от  $\mathfrak{I}_2$  к  $\mathfrak{I}$  :

$$\mathfrak{I} = (-0,5 \mid 2x_3 + 26,5 \quad -x_3 - 16 \mid 5 - x_3 \quad -15,5 \mid 1 \quad x_3) .$$

В результате получили правильную передаточную функцию регулятора

$$w_{r2}(s) = \frac{x_3 s^3 - 15,5 s^2 + (-x_3 - 16)s - 0,5}{s^3 + (5 - x_3)s^2 + (2x_3 + 26,5)s} .$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$w_{cl2}(s) = \frac{(s - 2)(x_3 s^3 - 15,5 s^2 + (-x_3 - 16)s - 0,5)}{s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1}$$

подтверждает правильность вычислений.

Если  $x_3 = -1$ , то получим регулятор из первого варианта

$$w_{r1}(s) = \frac{-s^3 - 15,5 s^2 - 15s - 0,5}{s^3 + 6s^2 + 24,5s} .$$

**Пример 6.** Продолжим исследование по синтезу регулятора для объекта (7). В отличие от примера 3 зададим степень регулятора равной трем  $m \geq n - 1 = 3$  :

$$w_r(s) = \frac{x_3 s^3 + x_2 s^2 + x_1 s + x_0}{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0} .$$

Степень  $c(s)$  равна  $m + n = 5$ ; пусть корни системы будут такие же, как и в примере 5:  $\{-1, -1, -1, -1, -1\}$ , т. е. ХПЗС равен

$$c(s) = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1 .$$

Сформируем матрицу  $\mathfrak{R}$  – матрицу Сильвестра: размер матрицы  $\mathfrak{R}$  оказался равным  $2(m+1) \times (n+m+1) = 8 \times 6$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 & x_0 & | & y_1 & x_1 & | & y_2 & x_2 & | & y_3 & x_3 \end{pmatrix}}_3 \underbrace{\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}^t \quad (11)$$

Значения  $d_i$  и  $n_i$  подставим из выражения (7). Матрица  $\mathfrak{R}$  вырожденная – ранг равен шести  $rank(\mathfrak{R}) = 6$  и обусловленность  $cond(\mathfrak{R}) = 6$ . Следовательно, столбцы матрицы  $\mathfrak{R}$  линейно независимые (количество строк больше, чем столбцов). Уравнение (11) имеет ряд решений.

Исследуем матрицу  $\mathfrak{R}$ : при вычеркивании 7-й строки из матрицы  $\mathfrak{R}$  ранг матрицы понижается, а при вычеркивании одной из 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 8-й строк (их количество обозначим через  $q$ ) матрицы  $\mathfrak{R}$  ранг не понижается. Это говорит о том, что следует проанализировать  $q(q-1)/2 = 7 \cdot 6/2 = 21$  вариант вычеркивания пар строк из матрицы  $\mathfrak{R}$ . Ранг не понижается при вычеркивании пар строк, отмеченных в таблице знаком «+», а клетки таблицы, отмеченные «•», соответствуют запрещенным парам.

**Пары строк, разрешенные к вычеркиванию**

	1	2	3	4	5	6	8
1		•	+	+	+	•	+
2			+	+	+	•	+
3				+	+	+	+
4					•	+	•
5						+	•
6							+
8							

**Вариант 1.** Для решения задачи перенесем 1-ю и 8-ю строки, умноженные на  $-y_0$  и  $-x_3$ , вправо. После переноса обозначим  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_1$  и правую часть  $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_1$ :

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \underbrace{(x_0 \mid y_1 \quad x_1 \mid y_2 \quad x_2 \mid y_3)}_{\mathfrak{S}_1} & \left( \begin{array}{cccccc}
 n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\
 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\
 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2
 \end{array} \right) & \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} = \\
 & \underbrace{(c_0 - d_0 y_0 \quad c_1 - d_1 y_0 \quad c_2 - d_2 y_0 \quad c_3 - n_0 x_3 \quad c_4 - n_1 x_3 \quad c_5 - n_2 x_3)}_{\mathfrak{N}_1};
 \end{array}$$

или  $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{N}_1$ . Найдем решение последнего уравнения  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{R}_1^{-1}$ :

$$\mathfrak{S}_1 = (-0,5(y_0 + 1) \mid 2x_3 - 0,5y_0 + 26,5 \quad -x_3 - 16 \mid 5 - x_3 \quad 0,5y_0 - 15,5 \mid 1).$$

В решении появились два «свободных» параметра  $y_0$  и  $x_3$ . Как и в предыдущих примерах, вернемся от  $\mathfrak{S}_1$  к  $\mathfrak{S}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S} = & (y_0 \quad -0,5(y_0 + 1) \mid 2x_3 - 0,5y_0 + 26,5 \quad -x_3 - 16 \mid \\
 & \mid 5 - x_3 \quad 0,5y_0 - 15,5 \mid 1 \quad x_3).
 \end{aligned}$$

В результате получили правильную передаточную функцию регулятора

$$w_{r1}(s) = \frac{x_3 s^3 + (0,5y_0 - 15,5)s^2 + (-x_3 - 16)s - 0,5(y_0 + 1)}{s^3 + (5 - x_3)s^2 + (2x_3 - 0,5y_0 + 26,5)s + y_0}$$

в предположении, что  $x_3 \neq 0$ , и строго правильную, если  $x_3 = 0$ . Передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl1}(s) = \frac{(s-2)(x_3s^3 + (0,5y_0 - 15,5)s^2 + (-x_3 - 16)s - 0,5(y_0 + 1))}{s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1}.$$

При  $y_0 = 0$  и  $x_3 = 0$  получим строго правильный регулятор

$$w_{r1}(s) = \frac{-15,5s^2 - 16s - 0,5}{s^3 + 5s^2 + 26,5s},$$

обеспечивающий астатические свойства системы.

## 5. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ

Для заданной передаточной функции объекта  $w_{ob}(s) = n(s)/d(s)$  с полиномами

$$n(s) = \sum_{i=0}^{n-1} n_i s^i, \quad d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i$$

указана степень  $n-1$  полинома числителя объекта  $n(s)$ , но она может быть и меньше  $n-1$ . Передаточную функцию регулятора

$$w_r(s) = x(s)/y(s)$$

с полиномами

$$x(s) = \sum_{i=0}^m x_i s^i, \quad y(s) = \sum_{i=0}^m y_i s^i$$

выбираем с одинаковыми степенями:

$$\deg x(s) = \deg y(s) = m \geq n-1.$$

Характеристический полином замкнутой системы будет степени  $m+n$ :

$$c_0 s^0 + c_1 s^1 + \dots + c_{n+m} s^{n+m}.$$

При решении задачи синтеза используется матрица Сильвестра

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} d_0 & n_0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ d_1 & n_1 & | & d_0 & n_0 & | & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & | & d_1 & n_1 & | & d_0 & n_0 \\ d_n & n_n & | & \vdots & \vdots & | & d_1 & n_1 \\ 0 & 0 & | & d_n & n_n & | & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & d_n & n_n \end{pmatrix}.$$

В тексте статьи матрицы такого вида и матрицы транспонированные также называем матрицами Сильвестра.

Опыт, накопленный при решении значительного количества примеров синтеза, позволяет сформулировать следующий алгоритм.

#### **АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ОДНОКАНАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА**

1. Задание степени регулятора  $m \geq n - 1$ .
2. Формирование матричного уравнения  $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{N}$ , где  $\mathfrak{R}$  – матрица Сильвестра.
3. Если  $m = n - 1$ , то матрица Сильвестра невырожденная, квадратная размером  $2n \times 2n$ . Переход к пункту 4.

Если  $m \geq n$ , то размер матрицы  $\mathfrak{R}$  равен  $2(m+1) \times (m+n+1)$ , где  $(2m+2) > (m+n+1)$ , т. е. строк больше, чем столбцов. Ранг матрицы  $\mathfrak{R}$  равен  $m+n+1$ . Переход к пункту 6.

4. Решение уравнения  $\mathfrak{Z}\mathfrak{R} = \mathfrak{N}$ :  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\mathfrak{R}^{-1}$ .
5. Формирование регулятора, проверка (вычисление ХПЗС). КОНЕЦ.
6. Вычисление  $rank \mathfrak{R}$  и при необходимости вычисление  $\det \mathfrak{R}$  и обусловленности  $cond \mathfrak{R}$ . Примечание:  $rank(\mathfrak{R}) < (2n+2)$  на  $q$ :

$$rank(\mathfrak{R}) + q = 2n + 2.$$

Если  $q = 1$ , переход к пункту 7а.

Если  $q = 2$ , переход к пункту 7б.

Значения  $q = 3, 4, \dots$  здесь не рассматриваются.

7а. Поиск линейно независимых строк матрицы  $\mathfrak{R}$ , т. е. тех строк, при вычеркивании которых ранг понижается, – их «убирать» из матрицы  $\mathfrak{R}$  нельзя. Поиск линейно зависимых строк матрицы  $\mathfrak{R}$ , т. е. таких строк, при вычеркивании которых (вычеркиваем по одной строке и будем называть их разре-

шенными) ранг не понижается. Их количество обозначим через  $r$ . После переноса разрешенной строки вправо получаем систему уравнений  $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{N}_1$ , где матрица  $\mathfrak{R}_1$  квадратная и невырожденная. Вектор-строка  $\mathfrak{N}_1$  содержит свободный параметр. Далее выполняем пункты 8, 9, 10 и 11 для всех линейно зависимых строк матрицы  $\mathfrak{R}$  по очереди. КОНЕЦ.

76. Если количество строк больше количества столбцов на 2, то количество вариантов возрастает (но не более  $r(r-1)/2$ ). Получаем различные варианты переноса строк вправо (количество строк, переносимых вправо, равно количеству свободных параметров). Далее выполняем пункты 8, 9, 10 и 11 по очереди для всех линейно зависимых строк матрицы  $\mathfrak{R}$ . КОНЕЦ.

8. Решаем матричное уравнение  $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{N}_1 : \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{R}_1^{-1}$ .

9. По известному  $\mathfrak{Z}_1$  восстанавливаем  $\mathfrak{Z}$ .

10. Выписываем формулу регулятора с параметрами.

11. Используем свободные параметры для достижения каких либо дополнительных требований к САУ, например, для обеспечения астатизма и / или заданного расположения нулей системы.

КОНЕЦ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача синтеза одноканальных регуляторов полиномиальным методом. Рассмотрена задача решения полиномиального алгебраического уравнения: общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения позволяет найти общее решение неоднородного уравнения, что далее может быть применено к синтезу регуляторов. Задача синтеза одноканальных регуляторов было рассмотрена на нескольких примерах, и на основе этих примеров предложен алгоритм вычисления одноканальных регуляторов полиномиальным методом.

Подчеркнем, что если выбираем степень регулятора на единицу меньше степени объекта  $m = n - 1$ , то не сложно вычислить параметры регулятора, а если  $m \geq n$ , то в решении появляются свободные параметры, которые можно задавать произвольно и, соответственно, получать различные регуляторы. Другими словами, существует бесконечно много решений. Но свободные параметры можно использовать для обеспечения каких-либо дополнительных требований (например, расположения нулей системы) либо обеспечения астатизма. Показано, каким образом можно использовать корневые годографы для наилучшего в некотором смысле расположения нулей: в нескольких примерах выбираются такие значения свободных

параметров, при которых корни системы лежали бы как можно левее с целью уменьшения перерегулирования и уменьшения времени переходного процесса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – 3<sup>rd</sup> ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
2. *Kailath T.* Linear systems. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980. – 350 p.
3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
4. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
5. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.
6. *Бобобеков К.М.* Полиномиальный метод синтеза одноканальной двухмассовой системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 25–36.
7. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Расчет параметров регулятора для стабилизации перевернутого маятника по углу отклонения // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 18–32.
8. *Бобобеков К.М.* О нормировании полиномов знаменателей объекта и регулятора при полиномиальном методе синтеза // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 7–24.
9. *Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А.* Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учебное пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2011. – 464 с.
10. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Решение переопределенной линейной системы уравнений при полиномиальном синтезе регуляторов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2017. – № 4 (56). – С. 84–99.
11. *Воевода А.А.* Матричные передаточные функции (основные понятия): конспект лекций по курсу «Проектирование систем управления» для 4–5 курсов АВТФ (специальность 2101) / Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. – 94 с.
12. *Воронной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.

13. *Шоба Е.В.* Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.

14. *Бобобеков К.М.* Об особенностях реализации двухпараметрического регулятора стабилизации положения маятника в среде Matlab // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 115–130.

15. *Dorf R.C., Bishop R.H.* Modern control systems. – 12th ed. – Harlow: Pearson, 2011. – 1111 p.

16. *Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.* О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

17. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* Управление перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 3–14.

18. *Doyle J.C., Francis B., Tannenbaum A.* Feedback control theory. – New York: Macmillan, 1990. – 198 p.

19. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Модальный синтез регуляторов пониженного порядка методом дифференцирования характеристического полинома // Сборник научных трудов НГТУ. – 2011. – № 1 (63). – С. 3–12.

20. *Чехонадских А.В.* Алгебраический метод синтеза алгоритмов автоматического управления пониженного порядка: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 341 с.

21. *Воевода А.А., Ижицкая Е.А.* Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 2 (56). – С. 3–10.

22. *Гайдук А.Р.* Теория автоматического управления: учебник. – М.: Высшая школа, 2010. – 415 с.

23. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Полиномиальный метод синтеза ПИ(Д)-регулятора для неминимально фазового объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 4 (82). – С. 7–20. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-4-7-20.

**Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович**, специалист по технологиям машиностроения, 2008–2013 гг. – кафедра «Технология машиностроения металлорежущих станков и инструментов» механико-технологического факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2013 по 2015 г. ассистент Таджикского технического университета. С 2015 г. аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. Имеет более 25 публикаций. E-mail: kurbon\_111@mail.ru



## Formalization of a polynomial method for the synthesis of single-channel systems using the Sylvester matrix \*

**K.M. Bobobekov**

*Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department Automatics. E-mail: kurbon\_111@mail.ru*

The method of synthesizing linear regulators for linear objects using polynomial decomposition, along with classical synthesis methods, such as synthesis in the state space using full and reduced order observers, transfer functions and synthesis using logarithmic frequency characteristics (LATCH), optimal synthesis methods, and others, finds more and more widespread. With a polynomial method of synthesis, as a rule, a transition from polynomial representations to matrix numeric ones is used, which leads to equations with a non-square degenerate Sylvester matrix. When solving the problem of formalizing synthesis algorithms for multichannel systems, it is necessary to return to the synthesis algorithm for single-channel systems. In this paper, based on the results obtained by Chen, Kailath and other authors, based on an analysis of the calculation of numerous examples of calculating single-channel systems, a formal algorithm for the synthesis of regulators is presented. When solving the problem of formalizing synthesis algorithms for multi-channel systems, rely on algorithms for the synthesis of single-channel systems. In this article, is use the results obtained by Chen, Kailath and other authors, which lists the requirements for the polynomial description of the object: the proper (strictly proper) of the transfer function of the object, the mutual simplicity of the polynomials numerator and denominator transfer function of the object. Of particular note is the requirement of mutual simplicity of numerator and denominator polynomials – failure to do so leads, first of all, to degeneration of the Sylvester matrix, and can also lead to violation of controllability, observability, etc. In addition, it is necessary to take into account the restriction imposed on the choice of the degree of the regulator, which is equivalent to limiting the desired characteristic polynomial of the closed system. Based on the analysis of calculations of numerous examples of synthesis of single-channel regulators, six of which are given in this article, a formalized algorithm for the synthesis of regulators is presented. In many studies, in solving the synthesis problem, linearly dependent rows / columns in the Sylvester matrix are zeroed together with the corresponding parameters of the regulator. In this article is propose linearly dependent rows with corresponding unknown parameters of the regulator to be transferred to the right side of the equation. This leads to the appearance of free regulator parameters, which can be set arbitrarily (in some cases additional limiting are imposed). This corresponds to the general solution of a system of linear equations, which when given by a free parameter of the regulator of specific values leads to different versions of the synthesized regulator.

**Keywords:** the transfer function of an object, a strictly proper and not strictly proper object, mutually simple and not mutually simple polynomials, a linear equation, a homogeneous and inhomogeneous polynomial equation, the synthesis of single-channel systems, the Sylvester matrix, algorithm for the synthesis of regulators

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-31-67

---

\* Received 23 November 2017.

## REFERENCES

1. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 3<sup>rd</sup> ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.
2. Kailath T. *Linear systems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1980. 350 p.
3. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p.
4. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2. *Mnogomernyye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnyye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.
5. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.
6. Bobobekov K.M. Polinomial'nyi metod sinteza odnokanal'noi dvukhmassovoi sistemy [A polynomial method for the synthesis of single-channel two-mass system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 25–36.
7. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Raschet parametrov regul'yatora dlya stabilizatsii perevernutogo mayatnika po uglu otkloneniya [Calculation of controller parameters for the stabilization of the inverted pendulum by corner deviation]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 18–32.
8. Bobobekov K.M. O normirovaniy polinomov znamenatelye ob'ekta i regul'yatora pri polinomial'nom metode sinteza [About rationing polynomials denominator object and regulator during polynomial method of synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 7–24.
9. Gaiduk A.R., Belyaev V.E., P'yavchenko T.A. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya v primerakh i zadachakh s resheniyami v MATLAB* [Theory of automatic control in examples and problems with solutions in MATLAB]. 2nd ed., rev. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011. 464 p.
10. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Reshenie pereopredelennoi lineinoi sistemy uravnenii pri polinomial'nom sinteze regul'yatorov [Solution of an overdetermined linear system of equations for polynomial synthesis of regulators]. *Sov-*

*remennye tekhnologii. Sistemyi analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System analysis. Modeling*, 2017, no. 4 (56), pp. 84–99.

11. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii: (osnovnye ponyatiya)* [Matrix transfer functions (basic concepts)]. Novosibirsk State Technical University. Novosibirsk, NSTU Publ., 1994. 94 p.

12. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [A polynomial method for calculating the multi-channel controllers low order. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

13. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.

14. Bobobekov K.M. Ob osobennostyakh realizatsii dvukhparametricheskogo regulyatora stabilizatsii polozheniya mayatnika v srede Matlab [On the peculiarities of realization the two-parameter regulator of stabilization the position pendulum in environment MATLAB]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 115–130.

15. Dorf R.C., Bishop R.H. *Modern control systems*. 12th ed. Harlow, Pearson, 2011. 1111 p.

16. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. O ponizhenii poryadka stabiliziruyushchego upravleniya na primere dvoynogo perevernutogo mayatnika [Reducing the stabilizing control order for a double inverted pendulum]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 69–83. (In Russian).

17. Voevoda A.A., Shoba E.B. Upravlenie perevernutym mayatnikom [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 3–14.

18. Doyle J.C., Francis B., Tannenbaum A. *Feedback control theory*. New York, Macmillan, 1990. 198 p.

19. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Modal'nyi sintez regulyatorov ponizhennogo poryadka metodom differentsirovaniya kharakteristicheskogo polinoma [Modal design of reduced order controllers by method of differentiation of the characteristic polynomial]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 1 (63), pp. 3–12.

20. Chekhonadskikh A.V. Algebraicheskiei metod sinteza algoritmov avtomaticheskogo upravleniya ponizhennogo poryadka. Diss. doct. tekhn. nauk [Alge-

braic method of synthesis of algorithms for automatic control of reduced order. Dr. eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 341 p.

21. Voevoda A.A., Izhitskaya E.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza [Stabilization of two-mass systems: modal synthesis method]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 2 (56), pp. 3–10.

22. Gaiduk A.R. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [The theory of automatic control]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2010. 415 p.

23. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Polinomial'nyi metod sinteza PI(D)-regulyatora dlya neminimal'no fazovogo ob"ekta [Polynomial method synthesis of PI(D) regulator for non-minimum-phase object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 4 (82), pp. 7–20.

Для цитирования:

Бобобеков К.М. Формализация полиномиального метода синтеза одноканальных систем с использованием матрицы Сильвестра // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 31–67. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-31-67.

For citation:

Bobobekov K.M. Formalizatsiya polinomial'nogo metoda sinteza odnokanal'nykh sistem s ispol'zovaniem matritsy Sil'vestra [Formalization of a polynomial method for the synthesis of single-channel systems using the Sylvester matrix]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 31–67. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-31-67.

УДК 519.24

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ДЕЙСТВИИ ЗАШУМЛЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ\*

Г.В. ТРОШИНА

*630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники. E-mail: troshina@corp.nstu.ru*

Во многих практических исследованиях используются сложные модели высокого порядка. При этом не всегда можно получить значения переменных состояния объекта. Улучшить априорную информацию можно, если использовать измерения, полученные в процессе работы динамической системы, и осуществить настройку параметров объекта. В данной работе на примере динамического объекта второго порядка рассматривается процедура определения неизвестных параметров динамической системы при наличии гауссовских шумов. Представлены основные этапы, необходимые для моделирования информационной матрицы Фишера в среде Simulink. Для оценивания вектора состояния выполнено моделирование фильтра Калмана с обновленной последовательностью. Процедура вычисления элементов информационной матрицы Фишера приведена для установившегося режима. В качестве входных сигналов рассматриваются синусоида и тестовый сигнал типа меандра единичной амплитуды. Для определения неизвестных параметров динамического объекта с помощью рекуррентной схемы метода наименьших квадратов используется несколько блоков. Одна группа блоков отвечает за формирование динамической системы, другая группа блоков соответствует вычислению фильтра Калмана, третья группа блоков содержит формулы, необходимые для вычисления матрицы Фишера. В блоке, соответствующем определению неизвестных параметров динамического объекта, осуществлено пошаговое моделирование рекуррентного метода наименьших квадратов. Выполнено построение графиков поведения оценки параметров как для входного сигнала типа меандра, так и для синусоиды. Приведен график сходимости коэффициента усиления, который используется в рекуррентной процедуре метода наименьших квадратов. Все значения параметров получены для случая, когда динамический объект находится под действием гауссовских шумов динамики и измерителя.

**Ключевые слова:** идентификация, динамический объект, фильтр Калмана, оценивание параметров, матрица Фишера, математическая модель, установившийся режим, рекуррентный метод наименьших квадратов

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-68-85

---

\* Статья получена 04 декабря 2017 г.

## ВВЕДЕНИЕ

При решении большого круга прикладных задач возникает необходимость идентификации математических моделей для управляемых объектов. Отметим работы [1–26], которые посвящены вопросам эффективного оценивания параметров моделей по результатам наблюдений. Ошибки в параметрах модели оказывают существенное влияние и при восстановлении сигнала, и при расчете систем управления. В данной работе предполагаем, что об объекте нам неизвестны лишь значения параметров модели.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается динамический объект в следующей форме:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Psi u_k + \Gamma w_k,$$

$$y_{k+1} = H x_{k+1} + v_{k+1},$$

где  $x_{k+1}$  – вектор состояния;  $u_k$  – вектор управления;  $w_k$  – вектор возмущения;  $y_{k+1}$  – вектор наблюдения;  $v_{k+1}$  – вектор ошибки измерения;  $\Phi$  – матрица состояния;  $\Gamma$  – матрица возмущения;  $\Psi$  – матрица управления;  $H$  – матрица наблюдения;  $Q$  – неотрицательно определенная ковариационная матрица вектора возмущения. Предполагаем, что все переходные процессы закончились, т. е. рассматриваем установившийся режим.

В задаче активной идентификации при оценивании параметров линейных динамических дискретных объектов во многих работах используются фильтр Калмана с обновленной последовательностью и информационная матрица Фишера [14–26]. В данной работе рассматривается установившийся режим для вычисления фильтра Калмана и матрицы Фишера в среде Simulink.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

Приведем процедуру вычислений оценок параметров динамических дискретных объектов для случая, когда неизвестные параметры находятся в матрице состояния. Вывод формул, используемых в данной работе, подробно изложен в работе [14]. В среде Simulink построена модель в виде блоков для

вычисления оценок параметров динамических объектов на основе метода наименьших квадратов. Каждый блок соответствует определенной группе формул. Ниже дан набор формул, необходимый для проведения расчетов.

Первая группа:

$$P_{k+1,k} = \Phi P_{k,k} \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T; \quad (1)$$

$$\Sigma_{k+1} = (H P_{k+1,k} H^T + R)^{1/2}; \quad (2)$$

$$K1_{k+1} = P_{k+1,k} H^T \Sigma_{k+1}^{-1}; \quad (3)$$

$$P_{k+1,k+1} = (I - K1_{k+1} \Sigma_{k+1}^{-1} H) P_{k+1,k}. \quad (4)$$

Первая группа формул соответствует вычислению фильтра Калмана с обновленной последовательностью в установившемся режиме. На рис. 1 дана схема моделирования уравнения (1). Матрицы  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $Q$  являются входными данными для уравнения (1).

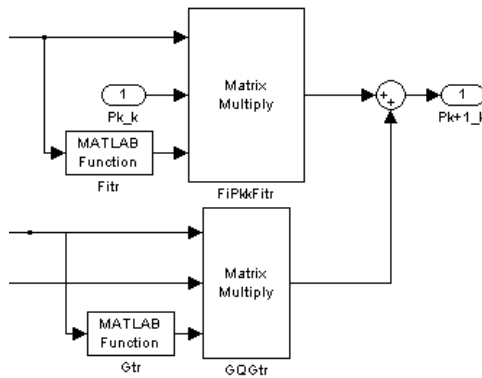


Рис. 1. Вычисление по уравнению (1)

На рис. 2 приведены результаты формирования уравнения (2). Матрицы  $H$  и  $R$  являются входными данными для уравнения (2).

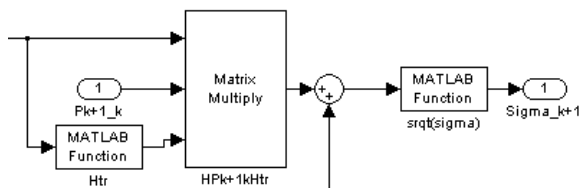


Рис. 2. Вычисление по уравнению (2)

На рис. 3 представлены результаты моделирования уравнения (3).

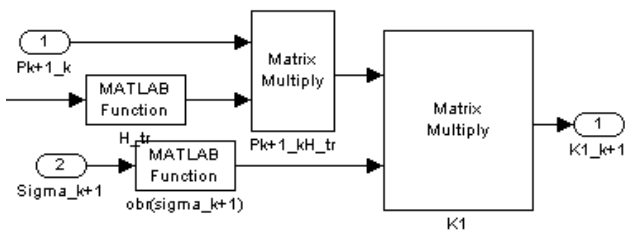


Рис. 3. Вычисление по уравнению (3)

Схема вычисления уравнения (4) показана на рис. 4.

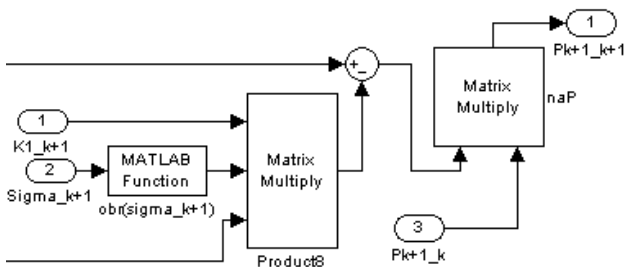


Рис. 4. Вычисление по уравнению (4)

Уравнения второй группы формул:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} P_0 \Phi^T + \Phi \left( \frac{\partial P_0}{\partial \theta_i} \Phi^T + P_0 \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} \right); \quad (5)$$



$$\frac{\partial \Sigma_{\infty}^{-1}}{\partial \theta_i} = \left(-\frac{1}{2}\right) \Sigma_{\infty}^{-3} H \frac{\partial P_1}{\partial \theta_i} H^T; \quad (6)$$

$$\frac{\partial K1_{\infty}}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_i} H^T \Sigma_{\infty}^{-1} + P_1 H^T \frac{\partial \Sigma_{\infty}^{-1}}{\partial \theta_i}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial \theta_i} = & \left( -\frac{\partial K1_{\infty}}{\partial \theta_i} \Sigma_{\infty}^{-1} H - K1_{\infty} \frac{\partial \Sigma_{\infty}^{-1}}{\partial \theta_i} H \right) P_1 + \\ & + \left( I - K1_{\infty} \Sigma_{\infty}^{-1} H \right) \frac{\partial P_1}{\partial \theta_i}. \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 5 приведена схема моделирования уравнения (5).

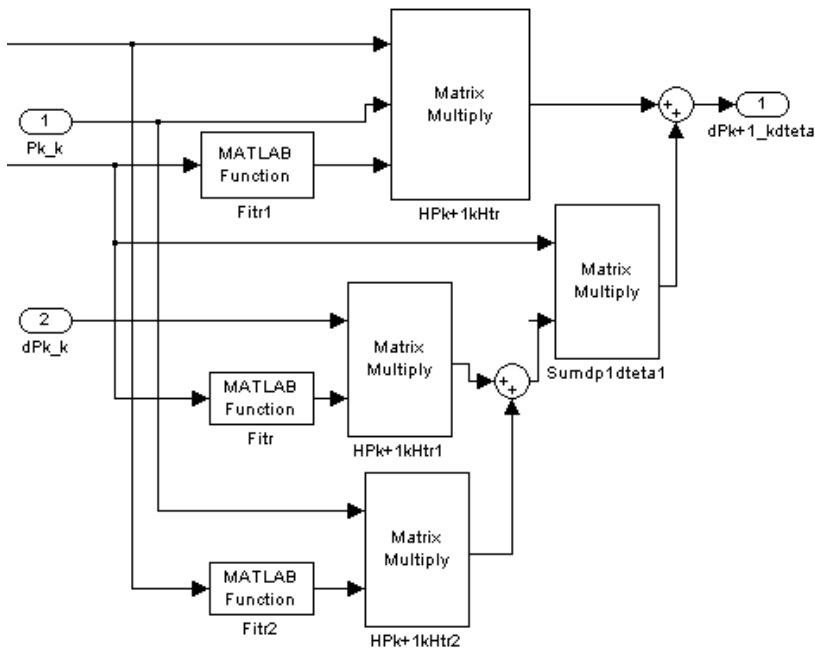


Рис. 5. Вычисление по уравнению (5)

На рис. 6 и 7 показаны блоки для формирования уравнений (6) и (7) соответственно.

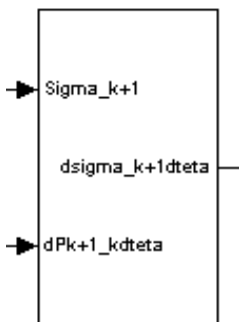


Рис. 6. Блок для вычисления по уравнению (6)

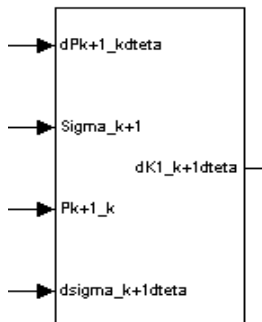


Рис. 7. Блок для вычисления по уравнению (7)

Схема вычисления по уравнению (8) сформирована в блоке, приведенном на рис. 8.

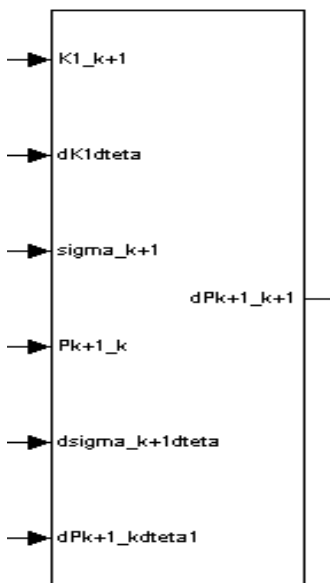


Рис. 8. Блок для вычисления по уравнению (8)

Третья группа формул:

$$K2_\infty = \Phi K1_\infty, \quad \frac{\partial K2_\infty}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} K1_\infty + \Phi \frac{\partial K1_\infty}{\partial \theta_i},$$

$$\Phi_{A,1} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \Phi - K2_\infty \Sigma_\infty^{-1} H & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & 0 & \Phi - K2_\infty \Sigma_\infty^{-1} H \end{bmatrix},$$

$$K_{A,1} = \begin{bmatrix} K2_\infty \\ \frac{\partial K2_\infty}{\partial \theta_1} - K2_\infty \Sigma_\infty^{-1} \frac{\partial \Sigma_\infty}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial K2_\infty}{\partial \theta_2} - K2_\infty \Sigma_\infty^{-1} \frac{\partial \Sigma_\infty}{\partial \theta_2} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{A,1} = \begin{bmatrix} \Psi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{A,1} = \Phi_{A,1} \bar{x}_{A,1} + \Psi_{A,1} u, \quad \Sigma_{A,1} = \Phi_{A,1} \Sigma_{A,1} \Phi_{A,1}^T + K_{A,1} K_{A,1}^T.$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}_{k+1,k}}{\partial \theta_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}_{k+1,k}}{\partial \theta_j} \end{bmatrix}^T \right\} = c_i \left[ \Sigma_{A,k+1,k} + \bar{x}_{A,k+1,k} \bar{x}_{A,k+1,k}^T \right] c_j^T,$$

$$c_i = [0 : \dots : I : \dots : 0],$$

$$M_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ Sp \left[ \frac{\partial \Sigma_{k+1}}{\partial \theta_i} \Sigma_{k+1}^{-2} \frac{\partial \Sigma_{k+1}}{\partial \theta_j} \right] + \right.$$

$$+Sp \left[ H^T \Sigma_{k+1}^{-2} H E \left\{ \left( \frac{\partial \hat{x}_{k+1,k}}{\partial \theta_i} \right) \left( \frac{\partial \hat{x}_{k+1,k}}{\partial \theta_j} \right)^T \right\} \right] + Sp \left[ \Sigma_{k+1}^{-1} \frac{\partial \Sigma_{k+1}}{\partial \theta_i} \Sigma_{k+1}^{-1} \frac{\partial \Sigma_{k+1}}{\partial \theta_j} \right] \Bigg\}.$$

Третья группа формул касается вычисления информационной матрицы Фишера и здесь подробно не рассматривается ввиду громоздкости вычислений. Для оценивания параметров динамических объектов используется рекуррентная схема метода наименьших квадратов [15].

### 3. ПРИМЕР

Порядок определения параметров иллюстрируется на примере объекта второго порядка с одним неизвестным параметром, входящим в матрицу состояния. Рассматривается установившийся режим, что дает возможность упростить математические соотношения. Допустим, что динамический объект описывается в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ \theta_1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} w_{k+1}^1 \\ w_{k+1}^2 \end{pmatrix},$$

$$y_{k+1} = (0 \quad 1) x_{k+1} + v_{k+1},$$

где  $x_{k+1}$  – вектор состояния;  $u_k$  – управление;  $w_k$  – вектор возмущения с нулевым средним;  $y_{k+1}$  – наблюдение;  $v_{k+1}$  – вектор ошибки измерения с нулевым средним.

Моделирование осуществлялось при базовом значении  $\theta_1 = 0.5$ . Следующее значение матрицы  $P$  выбрано в качестве начального значения:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ В этой работе рассматривается активная идентификация.}$$

В качестве входного сигнала выбрана синусоида с периодом  $T = 20$ . Амплитуда входного сигнала равна единице. Эксперимент выполнен для 200 измерений. Для модели, находящейся под действием шумов, получаем следующие результаты оценивания:  $\theta_1 = 0.99$ . Результаты моделирования для модели с шумом и  $\sigma^2 = 0.001$  даны на рис. 9.

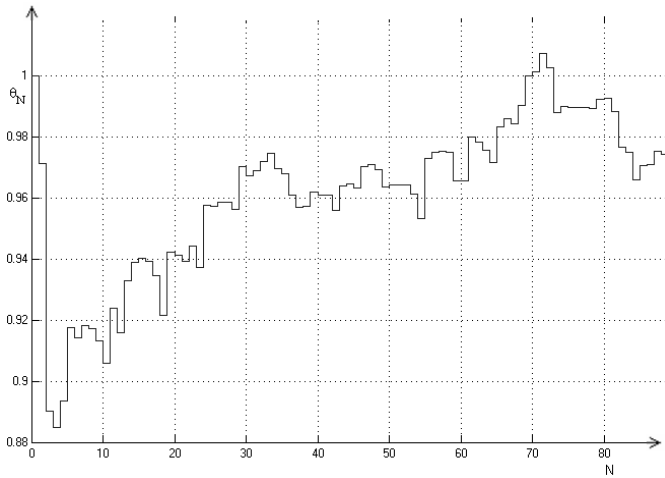


Рис. 9. Оценка параметра при действии входного сигнала в виде синусоиды

График сходимости параметра  $K_N$  при использовании синусоиды в качестве входного сигнала представлен на рис. 10.

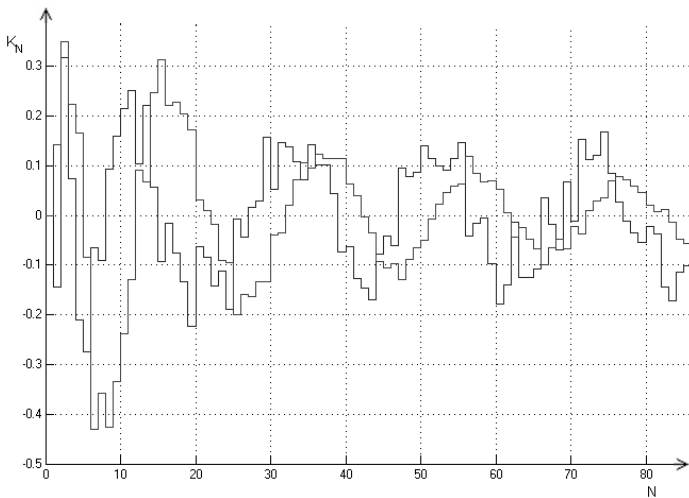


Рис. 10. Поведение параметра  $K_N$  (входной сигнал – синусоида)

График сходимости параметров  $P_N$  в случае, когда входной сигнал – синусоида, приводится на рис. 11.

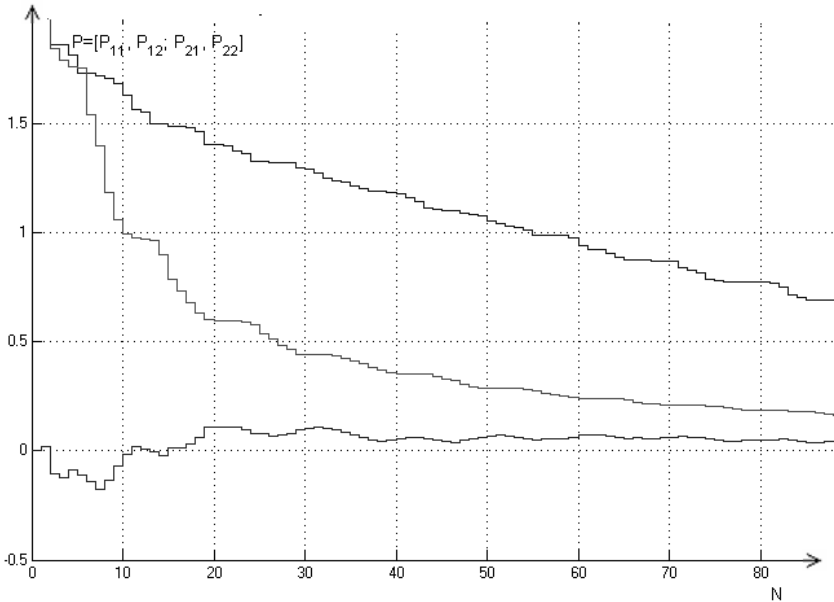


Рис. 11. Поведение параметров  $P_N$  (входной сигнал – синусоида)

Рассмотрим случай, когда в качестве входного сигнала выбран сигнал типа меандра с периодом  $T = 20$ . Амплитуда входного сигнала равна единице. Эксперимент выполнен для 100 измерений. Для модели, находящейся под действием шумов, получаем следующие результаты оценивания:  $\theta_1 = 0.5659$ . При увеличении числа измерений до  $N = 200$  получаем более точную оценку неизвестного параметра:  $\theta_1 = 0.5173$ . Результаты моделирования для модели с шумом и  $\sigma^2 = 0.001$  даны на рис. 12.

График сходимости параметра  $K_N$  при действии входного сигнала типа меандра представлен на рис. 13.

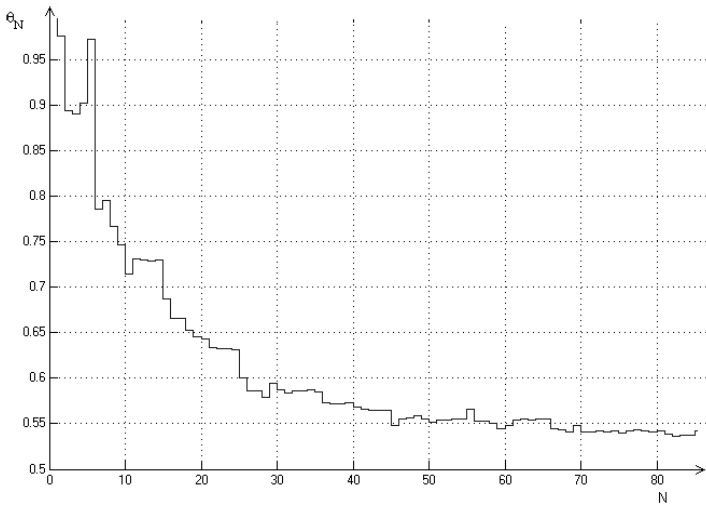


Рис. 12. Оценка параметра при действии входного сигнала типа меандра

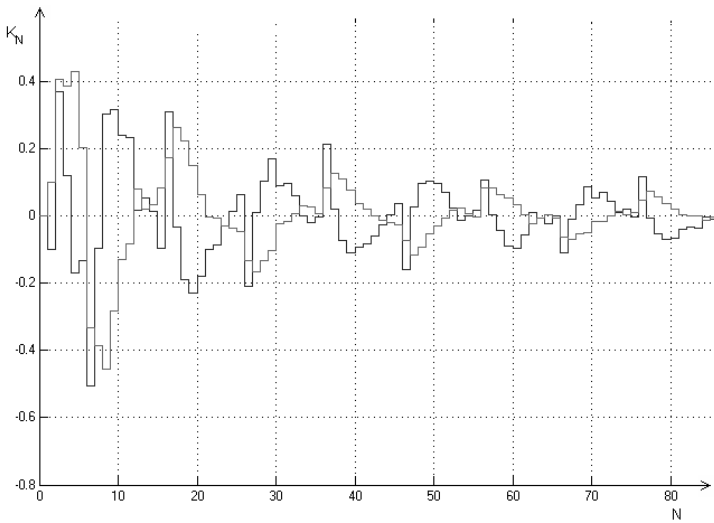


Рис. 13. Поведение параметра  $K_N$  (входной сигнал – меандр)

График сходимости параметров  $P_N$  при действии входного сигнала типа меандра приводится на рис. 14.

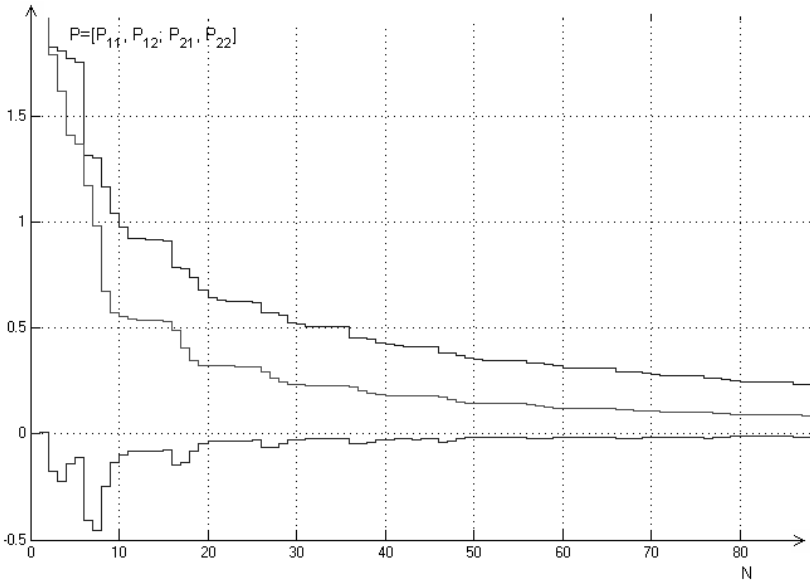


Рис. 14. Поведение параметров  $P_N$  (входной сигнал – меандр)

Рекуррентное оценивание сходится к истинному значению параметра приблизительно за 80–90 итераций. Ошибка измерений находится примерно в пределах 5...7 %.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование динамического объекта, фильтра Калмана с обновленной последовательностью и информационной матрицы Фишера выполнено в среде Simulink. Приводятся результаты оценивания динамических параметров на основе рекуррентного метода наименьших квадратов для динамического объекта второго порядка. В качестве входных сигналов используются входные сигналы типа меандра и синусоида.

В настоящее время разработка специальных входных сигналов признана полезной для повышения точности оценки параметров.



**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем: теория для пользователя / под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
2. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
3. *Mehra R.K.* Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. AC-19, N 6. – P. 753–768.
4. *Mehra R.K.* On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1970. – Vol. AC-15, N 2. – P. 175–184.
5. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С.* Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
6. *Goodwin G.C., Payne R.L.* Dynamic system identification: experiment design and data analysis. – New York: Academic Press, 1977. – 291 p.
7. *Заболотнов Ю.М.* Оптимальное управление непрерывными динамическими системами: учебное пособие. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2005. – 129 с.
8. *Цыпкин Я.З.* Информационная теория идентификации. – М.: Наука: Физматлит, 1995. – 336 с.
9. *Sage A.P., Melsa J.L.* Estimation theory with application to communication and control. – New York: McGraw Hill, 1972. – 540 p.
10. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – New York; Oxford: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
11. *Antsaklis P.J., Michel A.N.* Linear systems. – New York: McGraw Hill, 1997. – 685 p.
12. *Черных И.В.* Simulink: среда создания инженерных приложений / под общ. ред. В.Г. Потемкина. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 496 с.
13. *Огарков М.А.* Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 208 с.
14. *Воевода А.А., Трошина Г.В.* Использование информационной матрицы Фишера при выборе сигнала управления для оценки параметров моделей динамики и наблюдения объектов невысокого порядка // Сборник научных трудов НГТУ. – 2006. – № 3 (45). – С. 19–24.
15. *Воевода А.А., Трошина Г.В.* Рекуррентный метод оценивания параметров в динамическом объекте // Научный вестник НГТУ. – 2016. – № 4 (65). – С. 7–18.

16. Воевода А.А., Трошина Г.В. О некоторых методах фильтрации в задаче идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 2 (76). – С. 16–25.

17. Воевода А.А., Трошина Г.В. Об оценке вектора состояния и вектора параметров в задаче идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 53–68. – doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-53-68.

18. Воевода А.А., Трошина Г.В. Моделирование фильтра Калмана с обновленной последовательностью в среде Simulink // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 2 (80). – С. 7–17. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-2-7-17.

19. Трошина Г.В. Вычислительные аспекты задачи восстановления вектора состояния для модели с неточно заданными параметрами // Сборник научных трудов НГТУ. – 2008. – № 3 (53). – С. 25–34.

20. Трошина Г.В. Моделирование динамических объектов в среде Simulink. Ч. 1 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 3 (81). – С. 55–68. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-3-55-68.

21. Воевода А.А., Трошина Г.В. Стабилизация неминимально фазового объекта с использованием ПИ-регулятора // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 4 (82). – С. 21–30. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-4-21-30.

22. Трошина Г.В. Об использовании фильтра Калмана при идентификации динамических систем // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 3 (77). – С. 37–52.

23. Трошина Г.В. Моделирование динамических объектов в среде Simulink. Ч. 2 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 4 (82). – С. 31–41. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-4-31-41.

24. Трошина Г.В. О методах оценивания вектора состояния в задачах идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 1 (67). – С. 69–78.

25. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of the inverted pendulum control system // Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM2015). – St. Petersburg: LETI Publ., 2015. – Vol. 1. – P. 153–156.

26. The object unknown parameters estimation for the 'inverted pendulum-Cart' system in the steady state / G.V. Troshina, A.A. Voevoda, V.M. Patrin, M.V. Simakina // Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM 2015), Altai, Er-lagol, 29 June – 3 July 2015. – Novosibirsk, 2015. – P. 186–188.

**Трошина Галина Васильевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – идентификация динамических объектов. Имеет более 60 публикаций. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru

## **Parameters determination for the second order dynamic object at the action of the noisy periodic signals \***

**G.V. Troshina**

*Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, candidate of Technical Sciences, associate professor of the computer engineering department. E-mail: troshina@corp.nstu.ru*

Difficult models of a high order are used in many practical researches. At the same time it isn't always possible to receive the state values of an object. It is possible to improve the aprioristic information if to use the measurements received in the work process of dynamic system and to carry out the parameters control of an object. The unknown parameters determination procedure of dynamic system in the presence of the Gaussian noise is considered in this work on the example of the second order dynamic object. The main stages necessary for the modeling of Fischer information matrix in the Simulink environment are presented. For the state vector estimation the Kalman filter modeling with the updated sequence is executed. The calculation procedure of Fischer information matrix elements is provided for the steady-state. The test signal like a meander of single amplitude and the sinusoid are considered as input signals. The several blocks are used for the unknown parameters determination of a dynamic object by means of the least-squares method recurrent scheme. One group of blocks is responsible for the dynamic system formation, the other group of blocks corresponds to the Kalman filter calculation, the third group of blocks contains the formulas necessary for the Fischer matrix calculation. In the block which corresponds to the unknown parameters determination of a dynamic object, the step-by-step modeling of the recurrent least-squares method is carried out. The behavior schedules construction of the parameters estimation both for an input signal like a meander, and for a sinusoid is executed. The convergence schedule of the gain coefficient which is used in the least-squares method recurrent procedure is provided. All values of parameters are received for a case when a dynamic object is under the Gaussian noise of dynamics and measurement.

**Keywords:** identification, dynamic object, Kalman filter, parameter estimation, Fischer matrix, mathematical model, steady-state, recursive least-squares method

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-68-85

---

\* Received 04 December 2017.

## REFERENCES

1. Ljung L. *System identification: theory for the user*. New Jersey, Prentice Hall, 1987. 384 p. (Russ. ed.: L'yung L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya*. Translated from English. Moscow, Nauka Publ., 1991. 432 p.).
2. Eykhoff P. *System identification: parameter and state estimation*. London, John Wiley & Sons, 1974. 555 p. (Russ. ed.: Eikkhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya: otsenivanie parametrov i sostoyaniya*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1975. 683 p.).
3. Mehra R.K. Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. AC-19, no. 6, pp. 753–768.
4. Mehra R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1970, vol. AC-15, no. 2, pp. 175–184.
5. Sage A.P., White C.C. *Optimum system control*. 2<sup>nd</sup> ed. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977 (Russ. ed.: Seidzh E.P., Uait Ch.S. *Optimal'noe upravlenie sistemami*. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1982. 392 p.).
6. Goodwin G.C., Payne R.L. *Dynamic system identification: experiment design and data analysis*. New York, Academic Press, 1977. 291 p.
7. Zabolotnov Yu.M. *Optimal'noe upravlenie nepreryvnymi dinamicheskimi sistemami* [The optimum control of the continuous dynamic systems]. Samara, Samarskii gosudarstvennyi aerokosmicheskii universitet Publ., 2005. 129 p.
8. Tsyplin Ya.Z. *Informatsionnaya teoriya identifikatsii* [Information theory of identification]. Moscow, Nauka Publ., Fizmatlit Publ., 1995. 336 p.
9. Sage A.P., Melsa J.L. *Estimation theory with application to communication and control*. New York, McGraw Hill, 1972. 540 p.
10. Chen C.T. *Linear system theory and design*. New York, Oxford, Oxford University Press, 1999. 334 p.
11. Antsaklis P.J., Michel A.N. *Linear systems*. New York, McGraw Hill, 1997. 685 p.
12. Chernykh I.V. *Simulink: sreda sozdaniya inzhenernykh prilozhenii* [Simulink: the environment of the engineering applications construction]. Moscow, DIALOG-MIFI Publ., 2003. 496 p.
13. Ogarkov M.A. *Metody statisticheskogo otsenivaniya parametrov sluchainykh protsessov* [Statistical estimation methods of the noise processes parameters]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1990. 208 p.
14. Voevoda A.A., Troshina G.V. Ispol'zovanie informatsionnoi matritsy Fishera pri vybore signala upravleniya dlya otsenki parametrov modelei dinamiki i nablyudeniya ob"ektov nevysokogo poryadka [The Fischer information matrix use at the control signal choice for the parameters estimation in the dynamic and meas-

urement models of the low order objects]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 3 (45), pp. 19–24.

15. Voevoda A.A., Troshina G.V. Rekurrentnyi metod otsenivaniya parametrov v dinamicheskom ob'ekte [A recurrent method for parameter estimation in the dynamic object]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (65), pp. 7–18.

16. Voevoda A.A., Troshina G.V. O nekotorykh metodakh fil'tratsii v zadache identifikatsii [About some filtration methods in the identification problem]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 2 (76), pp. 16–25.

17. Voevoda A.A., Troshina G.V. Ob otsenke vektora sostoyaniya i vektora parametrov v zadache identifikatsii [About parameters vector estimation and state vector estimation in identification problem]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 53–68. doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-53-68.

18. Voevoda A.A., Troshina G.V. Modelirovanie fil'tra Kalmana s obnovlennoi posledovatel'nost'yu v srede Simulink [The modelling of the Kalman filter with the updated sequence in Simulink environment]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 2 (80), pp. 7–17. doi: 10.17212/2307-6879-2015-2-7-17.

19. Troshina G.V. Vychislitel'nye aspekty zadachi vosstanovleniya vektora sostoyaniya dlya modeli s netochno zadannymi parametrami [Computing aspects of problem of the state vector recovering for models with inexact given parameters]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2008, no. 3 (53), pp. 25–34.

20. Troshina G.V. Modelirovanie dinamicheskikh ob'ektov v srede Simulink. Ch. 1 [The dynamic objects modelling in Simulink environment. Pt. 1]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 3 (81), pp. 55–68. doi: 10.17212/2307-6879-2015-3-55-68.

21. Voevoda A.A., Troshina G.V. Stabilizatsiya neminimal'no fazovogo ob'ekta s ispol'zovaniem PI-regulyatora [The stabilization of not-minimum-phase object with the PI regulator use]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the*

*Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 4 (82), pp. 21–30. doi: 10.17212/2307-6879-2015-4-21-30.

22. Troshina G.V. Ob ispol'zovanii fil'tra Kalmana pri identifikatsii dinamicheskikh sistem [About Kalman filter using for dynamic systems identification]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 3 (77), pp. 37–52.

23. Troshina G.V. Modelirovanie dinamicheskikh ob"ektov v srede Simulink. Ch. 2 [The dynamic objects modelling in Simulink environment. Pt. 2]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 4 (82), pp. 31–41. doi: 10.17212/2307-6879-2015-4-31-41.

24. Troshina G.V. O metodakh otsenivaniya vektora sostoyaniya v zadachakh identifikatsii [About state vector estimation methods in identification problems]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (67), pp. 69–78.

25. Voevoda A.A., Troshina G.V., Active identification of the inverted pendulum control system [Aktivnaya identifikatsiya sistemy upravleniya perevernutij mayatnik]. *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2015)*. St. Petersburg, LETI Publ., 2015, vol. 1, pp. 153–156.

26. Troshina G.V., Voevoda A.A., Patrino V.M., Simakina M.V. The object unknown parameters estimation for the 'inverted pendulum-Cart' system in the steady state. *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM 2015)*, Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015, pp. 186–188.

Для цитирования:

Трошина Г.В. Определение параметров динамического объекта второго порядка при действии зашумленных периодических сигналов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 68–85. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-68-85.

For citation:

Troshina G.V. Opredelenie parametrov dinamicheskogo ob"ekta vtorigo poryadka pri deistvii zashumlennykh periodicheskikh signalov [Parameters determination for the second order dynamic object at the action of the noisy periodic signals]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 68–85. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-68-85.

*СОВРЕМЕННЫЕ  
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ*

УДК 519.24

**СИНТЕЗ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С НЕСКОЛЬКИМИ  
ПЕРЕМЕННЫМИ\***

А.А. ВОЕВОДА<sup>1</sup>, Д.О. РОМАННИКОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru

<sup>2</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматики. E-mail: dmitry.romannikov@gmail.com

Применение нейронных сетей для решения задач различной направленности, к которым можно отнести задачи классификации (в частности, задачи распознавания образов на изображениях), задачи сегментирования, прогнозирования и динамического программирования и другие, приобрело достаточно большую популярность в настоящее время. Но стоит отметить, что предлагаемые решения всех перечисленных задач основываются на применении методов обучения нейронной сети с использованием градиентного спуска или его модификаций, что влечет за собой набор недостатков: неопределенность в задании начальных значений, отсутствие обоснованных рекомендаций по выбору параметров алгоритмов обучения (шага обучения и других) и другие. В статье исследуется процесс аппроксимации функций двух переменных при помощи алгоритма построения нейронной сети, которая не требует обучения. Основная идея алгоритма заключается в разделении всей поверхности входных координат на проекции поверхностей, через которые проходит плоскость функции активации нейрона (в статье использовалась функция выпрямителя – *relu*), и дальнейшем расчете выходного значения, основанного на следующих этапах: 1) определение принадлежности входной переменной одному из диапазонов, т. е. принадлежности одной из проекций участков плоскостей точек из обучающего множества; 2) исходя из определенной проекции формируется выходное значение при помощи нейрона и функции активации задающей поверхности. Предлагаемый способ синтеза нейронной сети позволяет определить достаточно малое количество нейронов, которое требуется для построения нейронной сети, а также их значения. Последнее особенно важно, так как позволяет существенно ускорить процесс обучения, а точнее, заменить его процессом расчета значений обучающих параметров. Важной особенностью моделей машинного обучения является их поведение в точках за пределами обучающей выборки.

---

\* Статья получена 20 октября 2017 г.

**Ключевые слова:** нейронные сети, сети Петри, искусственный интеллект, преобразование, функция активации, keras, регуляризация, обучение

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-86-94

## ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день в процессе разработки систем, основанных на использовании нейронных сетей [1–9], самым затратным является процесс обучения. С другой стороны, в работах [10, 11] обсуждаются способы построения нейронных систем в таком виде, что они не требуют обучения, а основаны на расчете коэффициентов нейронной сети. Так, в частности, в [10] рассматривается пример построения нейронной сети для решения логико-арифметических задач, в [11] – пример сортировки массива чисел с использованием нейронных сетей и другие.

В статье исследуется процесс аппроксимации функций двух переменных при помощи алгоритма построения нейронной сети, который основан на разделении всей поверхности входных переменных на части, определении принадлежности входной точки одной из частей и формировании выходного сигнала при помощи функции активации нейрона.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Поставленной в работе задачей является разработка метода синтеза нейронной сети для задачи аппроксимации функции нескольких переменных на примере функций параболоиды, гиперболического параболоида и других функций. Входными данными для этой задачи является набор данных для обучения со значениями функции.

В отличие от синтеза функции одной переменной, при синтезе функции нескольких переменных достаточно сложно выполнять построение плоскостей (взятых с суммы входных переменных перед функцией активации) так, чтобы плоскости, проходящие через новые точки, не меняли значения уже построенных плоскостей. Таким образом, основной идеей предлагаемого решения является итеративное построение нейронной сети с двумя скрытыми слоями и одним нейроном в выходном слое. Причем нейроны в первом скрытом слое будут определять принадлежность входной точки к части проекции на плоскость входных переменных, а нейроны во втором слое нужны для



формирования значения функции на плоскости, соединяющей ближайšie три точки в пространстве. Целью такого построения является получение нейронной сети с уже «обученными» коэффициентами.

Решение вышеприведенной задачи прямо вытекает из ее постановки:

1. Первым шагом алгоритма необходимо выбрать любую точку из входного множества и две ближайšie к ней.

2. Построение определителя принадлежности точки к части поверхности выполняется при помощи векторного произведения всех пар сторон треугольника (образованного от трех точек для проведения поверхности). Если все знаки векторного произведения пар сторон одного знака или нулевые, то точка принадлежит части поверхности. Согласно [8, 10] такую функцию можно построить при помощи нейронов. Выходным значением данной функции является либо ноль, либо единица, что соответствует принадлежности точки части плоскости.

3. Формирование значения функции в вычисляемой точке выполняется при помощи суммы сигналов нейронов с функцией активации выпрямителя (*relu*). Вычисление обучаемых коэффициентов нейронной сети для данной функции может быть выполнено при помощи решения системы линейных уравнений с использованием уравнения плоскости, проходящий через три точки.

Одной из особенностей данной схемы построения нейронной сети является то, что в случае, когда точка лежит на стороне проекции треугольника, в данной схеме она определяется двумя нейронами определителя, что ведет к двойному суммированию в выходном нейроне. Для устранения данной проблемы необходимо либо учитывать пересечение со стороной только для одного треугольника, либо итоговую сумму делить на количество срабатываемых определителей.

Используя вышеприведенный алгоритм, можно получить структуру нейронной сети, приведенную на рис. 1. При помощи этой структуры и вышеприведенного алгоритма были получены функции параболоиды, гиперболического параболоида и другие (рис. 2).

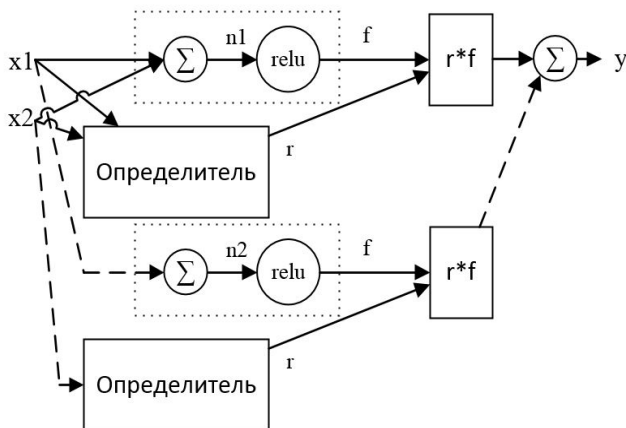


Рис. 1. Структура нейронной сети для формирования значений функции двух переменных

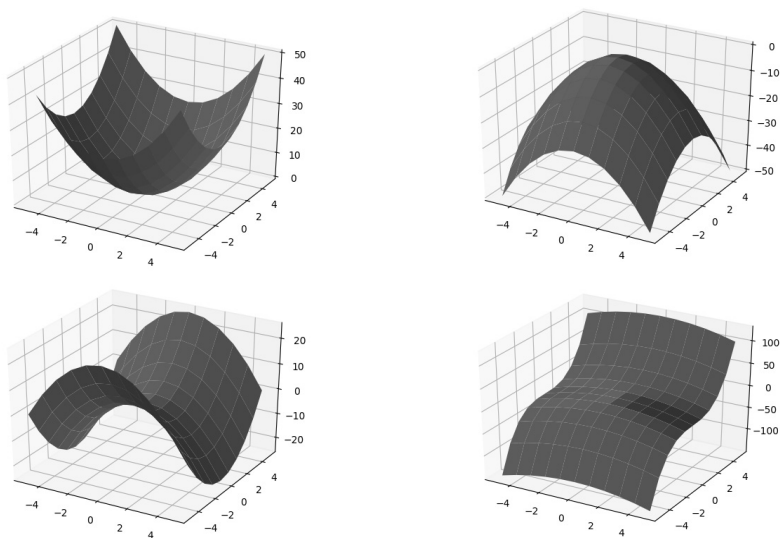


Рис. 2. Графики поверхностей, построенных при помощи структуры нейронной сети, изображенной на рис. 1. Приведены поверхности параболоида ( $x_1^2 + x_2^2 = y$ ), отрицательного гиперолоида ( $-x_1^2 - x_2^2 = y$ ), гиперболического параболоида ( $x_1^2 - x_2^2 = y$ ) и функции третьего порядка ( $x_1^3 - x_2^2 + 1 = y$ )

Из рис. 2 видно, что выходное значение синтезируемой нейронной сети позволяет достаточно точно описать заданные поверхности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследуется процесс аппроксимации функций двух переменных при помощи алгоритма построения нейронной сети, которая не требует обучения. Основная идея алгоритма заключается в разделении всей поверхности входных координат на проекции поверхностей, через которые проходит плоскость функции активации нейрона (в статье использовалась функция выпрямителя – *relu*), и дальнейшем расчете выходного значения, основанного на следующих этапах: 1) определение принадлежности входной переменной одному из диапазонов, т. е. принадлежности одной из проекций участков плоскостей точек из обучающего множества; 2) исходя из определенной проекции формируется выходное значение при помощи нейрона и функции активации задающей поверхности.

Предлагаемый способ синтеза нейронной сети позволяет определить достаточно малое количество нейронов, которые требуются для построения нейронной сети, а также их значения. Последнее особенно важно, так как позволяет существенно ускорить процесс обучения, а точнее, заменить его процессом расчета значений обучающих параметров. Важной особенностью моделей машинного обучения является их поведение в точках за пределами обучающей выборки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bishop C.* Pattern recognition and machine learning. – New York: Springer, 2007. – 738 p. – (Information science and statistics).
2. *Richert W., Coelho L.* Building machine learning systems with Python. – Birmingham: Packt Publ., 2013. – 290 p.
3. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction. – 2<sup>nd</sup> ed. – New York: Springer, 2013. – 745 p. – (Springer series in statistics).
4. *Lantz B.* Machine learning with R. – Birmingham: Packt Publ., 2013. – 396 p.
5. *Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A.* Foundations of machine learning. – Cambridge, MA: MIT Press, 2012. – 432 p. – (Adaptive computation and machine learning series).

6. *Conway D., White J.M.* Machine learning for hackers. – Sebastopol, CA: O'Reilly, 2012. – 324 p.
7. Welcome to the Deep Learning tutorial [Electronic resource]. – URL: <http://deeplearning.stanford.edu/tutorial/> (accessed: 25.04.2018).
8. *Haykin S.* Neural networks: a comprehensive foundation. – New York: MacMillan Publ., 1994. – 1104 p.
9. *Романников Д.О.* О преобразовании сети Петри в нейронную сеть // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 98–103.
10. *Воевода А.А., Романников Д.О.* Синтез нейронной сети для решения логико-арифметических задач // Труды СПИИРАН. – 2017. – Вып. 54. – С. 205–223.
11. *Voevoda A.A., Romannikov D.O.* A binary array asynchronous sorting algorithm with using Petri nets // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 803, N 1. – P. 012178.
12. *Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep learning. – Cambridge, MA: MIT Press, 2016.
13. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E.* ImageNet classification with deep convolutional neural networks // Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems: NIPS 12. – Lake Tahoe, Nevada, 2012. – P. 1097–1105.
14. *Graves A., Mohamed A., Hinton G.* Speech recognition with deep recurrent neural networks // Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013. – Vancouver, Canada, 2013.
15. *Deng L., Hinton G.E., Kingsbury B.* New types of deep neural network learning for speech recognition and related applications: an overview // Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013. – Vancouver, Canada, 2013.

**Воевода Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление многоканальными объектами. Имеет более 300 публикаций. E-mail: [ucit@ucit.ru](mailto:ucit@ucit.ru)

**Романников Дмитрий Олегович**, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматике Новосибирского государственного технического универси-

тета. Основное направление научных исследований – нейронные сети, сети Петри. Имеет более 60 публикаций. E-mail: dmitry.romannikov@gmail.com

### Synthesis of neural networks with several variables\*

**A.A. Voevoda<sup>1</sup>, D.O. Romannikov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, doctor of Technical Sciences, professor of the automation department. E-mail: ucit@ucit.ru

<sup>2</sup>Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, candidate of Technical Sciences, associate professor of the automation department. E-mail: dmitry.romannikov@gmail.com

The use of neural networks for solving problems of various orientations, to which classification problems (in particular, image recognition problems on images), tasks of segmentation, forecasting and dynamic programming, etc., have become quite popular at the present time. But, it is worth noting that the proposed solutions to all these problems are based on the use of neural network training methods using gradient descent or its modifications, which entails a set of shortcomings: uncertainty in setting initial values, lack of well-founded recommendations on the choice of parameters of algorithms training (step of training and others) and others. The article investigates the process of approximation of functions of two variables using the neural network construction algorithm, which does not require training. The main idea of the algorithm is the separation of the entire surface of the input coordinates into the projection of the surfaces through which the plane of the neuron activation function passes (in the article the rectifier function was used) and further calculation of the output value based on the steps: 1) determining the belonging of the input variable to one of the ranges i.e. the belonging of one of the projections of sections of the planes of points from the learning set; 2) based on a certain projection, the output value is formed using a neuron and the activation function of the master surface. The proposed method of synthesis of a neural network allows us to determine a sufficiently small number of neurons, which are required for the construction of a neural network, as well as their values. The latter is especially important, because allows significantly accelerate the learning process, or rather, replace it with the process of calculating the values of training parameters. An important feature of machine learning models is their behavior at points outside the training sample.

**Keywords:** neural networks, Petri nets, artificial intelligence, transformation, activation function, keras, regularization, training

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-86-94

---

\*Received 20 October 2017.

## REFERENCES

1. Bishop C. *Pattern recognition and machine learning. Information science and statistics*. New York, Springer, 2007. 738 p.
2. Richert W., Coelho L. *Building machine learning systems with Python*. Birmingham, Packt Publ., 2013. 290 p.
3. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. 2<sup>nd</sup> ed. *Springer series in statistics*. New York, Springer, 2013. 745 p.
4. Lantz B. *Machine learning with R*. Birmingham, Packt Publ., 2013. 396 p.
5. Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A. *Foundations of machine learning. Adaptive computation and machine learning series*. Cambridge, MA, MIT Press, 2012. 432 p.
6. Conway D., White J.M. *Machine learning for hackers*. Sebastopol, CA, O'Reilly, 2012. 324 p.
7. *Welcome to the Deep Learning tutorial*. Available at: <http://deeplearning.stanford.edu/tutorial/> (accessed 25.04.2018).
8. Haykin S. *Neural networks: a comprehensive foundation*. New York, MacMillan Publ., 1994. 1104 p.
9. Romannikov D.O. O preobrazovanii seti Petri v neironnuyu set' [On the transformation of Petri nets in neural network]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 98–103.
10. Voevoda A.A., Romannikov D.O. Sintez neironnoi seti dlya resheniya logiko-arifmeticheskikh zadach [Synthesis of neural network for solving logical-arithmetic problems]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS proceedings*, 2017, vol. 54, no. 5, pp. 205–223.
11. Voevoda A.A., Romannikov D.O. A binary array asynchronous sorting algorithm with using Petri nets. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 803, no. 1, p. 012178.
12. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep learning*. Cambridge, MA, MIT Press, 2016.
13. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. *Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems: NIPS 12*, Lake Tahoe, Nevada, 2012, pp. 1097–1105.
14. Graves A., Mohamed A., Hinton G. Speech recognition with deep recurrent neural networks. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013*, Vancouver, Canada, 2013.

15. Deng L., Hinton G.E., Kingsbury B. New types of deep neural network learning for speech recognition and related applications: an overview. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013*, Vancouver, Canada, 2013.

Для цитирования:

Воевода А.А., Романников Д.О. Синтез нейронных сетей с несколькими переменными // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 86–94. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-86-94.

For citation:

Voevoda A.A., Romannikov D.O. Sintez neironnykh setei s neskol'kimi peremennymi [Synthesis of neural networks with several variables]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 86–94. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-86-94.

УДК 519.24

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ\*

Д.О. РОМАННИКОВ

*630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматики.  
E-mail: dmitry.romannikov@gmail.com*

Применение нейронных сетей для решения задач различной направленности приобрело достаточно большую популярность в последнее время. В том числе нейронные сети применяются в задачах обучения с подкреплением в качестве системы управления, в которых обучение происходит за счет взаимодействия со средой. Статья посвящена анализу задачи управления перевернутым маятником, для которой исследуются такие аспекты, как избыточность используемой нейронной сети, т. е. одной из задач является поиск более оптимальной формы нейронной сети, однозначности решения. Кроме того, в статье приводится объяснение и обоснование выбора количества слоев в используемой нейронной сети. Установлено, что в используемой нейронной сети можно удалить до трети настраиваемых коэффициентов (нейронов), при этом сохранив устойчивость системы как свидетельство ее избыточности. Дана интерпретация синтеза нейронной сети, которая ранее не встречалась, а именно: нейронная сеть является классификатором, в котором скрытый слой выделяет признаки для перемещения тележки, а выходной слой является агрегатором, который по полученным признакам выдает управляющий сигнал. Данная интерпретация позволила обоснованно дать объяснение размеру скрытого слоя нейронной сети и в результате сократить количество нейронов с 128 до 16, что может быть критично для встраиваемых систем, а также уменьшить время обучения с 2600 эпох (в среднем) до 1300.

**Ключевые слова:** нейронные сети, сети Петри, искусственный интеллект, преобразование, функция активации, keras, регуляризация, обучение

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-95-103

---

\* Статья получена 27 октября 2017 г.

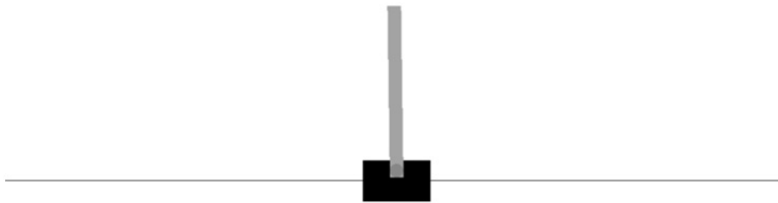


## ВВЕДЕНИЕ

Использование нейронных сетей [1–10] для решения задач разнообразного спектра сегодня находит все большее распространение. Нейронные сети применяются для решения задачи из серии обучения с подкреплением, где одной из базовых задач является задача создания системы управления перевернутым маятником. В статье [1] задача анализируется с точки зрения избыточности используемой нейронной сети, т. е. одной из задач является поиск более оптимальной формы нейронной сети, и однозначности решения.

## 1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Задача обратного маятника (рис. 1) заключается в разработке системы стабилизации системы, состоящей из передвижной тележки (на рисунке изображена черным цветом), на которой располагается маятник (вертикальный стержень). Маятник крепится на шарнире и может вращаться на 360 градусов. На тележку могут действовать две силы (слева и справа), при воздействии которых тележка передвигается горизонтально. Основной задачей является разработка системы, которая удерживает стержень в вертикальном положении.



*Рис. 1.* Иллюстративное представление задачи перевернутого маятника

Один из способов решения данной задачи рассмотрен в работе [1]. Он основан на применении нейронных сетей в качестве системы управления, которая принимает решение о выборе направления воздействия на тележку. Далее в статье будет проанализирован предлагаемый в работе [1] метод.

Данная система управления взаимодействует с внешней средой и в результате такого взаимодействия получает вектор параметров, в котором содержится текущее состояние среды. Полученный вектор является входной информацией для нейронной сети. Выходной слой нейронной сети содержит два нейрона, которые представляют сигналы движения влево и вправо. Далее управляющие сигналы с нейронной сети поступают опять в среду. Моделирование задачи выполняется дискретно, т. е. на одном шаге моделирования выполняется вычисление управляющих сигналов нейронной сети, обработка полученных сигналов средой и получение нового вектора состояния среды.

## 2. АНАЛИЗ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Применяемая в работе [1] нейронная сеть содержит 4 входных нейрона (по числу элементов в векторе состояния среды), 128 нейронов в скрытом слое и 2 нейрона в выходном слое (по числу управляющих сигналов). Обучение вышеприведенной сети выполняется методом стохастической оптимизации (*Adam*).

Исследование избыточности используемой нейронной сети выполнялось следующим образом: 1) нейронная сеть обучалась предлагаемым в [1] методом; 2) на основании посчитанной нормы векторов параметров слоев нейронной сети (для первого слоя норма равняется 19.67, для второго – 5.59) и средних значений элементов (для первого слоя – 0.59, для второго – 0.25) были значения параметров нейронной сети с абсолютным значением менее 0.1. В результате этих действий работа обученной нейронной сети (с измененными параметрами) практически не изменилась, т. е. нейронная сеть продолжала удерживать перевернутый маятник. Количество измененных элементов в нейронной сети составляло 64 и 79 соответственно, или 12.5 % и 30.8 % в процентном соотношении. Результат данного эксперимента явно свидетельствует о значительной избыточности используемой нейронной сети.

В исследуемой задаче параметры нейронной сети инициализировались одинаковыми значениями, и при случайно задаваемых начальных условиях среды нейронная сеть сходилась к одним и тем же значениям параметров.

При использовании различных значений начальных условий нейронная сеть сходится к различным значениям параметров. На основании этого можно сделать вывод о неоднозначности решаемой задачи. Кроме того, была замечена особенность, заключающаяся в том, что при определенных начальных условиях (полученных путем равномерного распределения в диапазоне от 0 до 1) обучение нейронной сети не завершилось. Данный факт можно отне-

сти к существенному недостатку используемого метода решения поставленной задачи.

На рис. 2 и 3 представлены графики состояния среды и управления (нижний). При этом на графике управления значение «-2» соответствует перемещению влево, а значение «-3» – перемещению вправо.

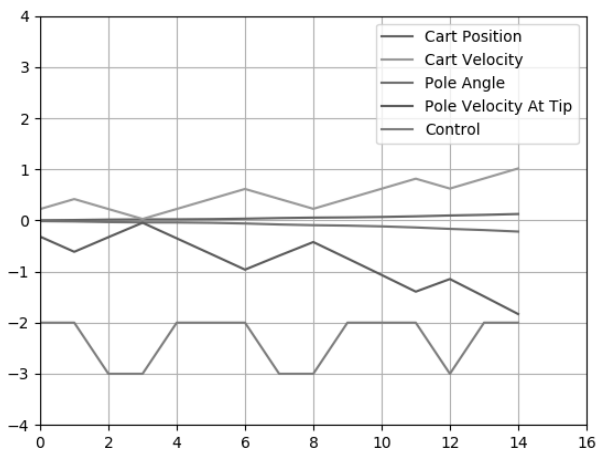


Рис. 2. Графики состояния и управления не обученной нейронной сети

Из графиков видно, что изначально нейронная сеть не в состоянии управлять перевернутым маятником – маятник падает после 16 итераций. При этом видно, что положение тележки и угол наклона маятника расходятся на графике. При обученной нейронной сети маятник удерживается в вертикальном положении, и при этом видно, что управление практически все время чередуется для удержания маятника, а графики положения и угла наклона не расходятся.

По полученным наблюдениям можно сделать вывод, что используемую нейронную сеть можно трактовать как классификатор, который выбирает направление перемещения в зависимости от диапазона входных значений (диапазон входных значений можно условно разделить на несколько поддиапазонов, например, «мало», «среднее», «много»). Таким образом, можно сформировать структуру нейронной сети, в которой каждый из входных параметров поступает на скрытый слой (например, если входной диапазон разделить на три поддиапазона – «малые значения», «средние значения», «высокие значения») для определения признака необходимости движения влево или

вправо. Далее выделенные признаки должны поступить на агрегирующие нейроны выходного слоя. Таким образом, при выделении трех поддиапазонов в скрытом слое нейронной сети необходим 81 ( $3^4$ ) нейрон. Так как в используемой среде выполняется дискретное управление, то вместо трех поддиапазонов можно использовать два, что сокращает количество нейронов в скрытом слое до 16 ( $2^4$ ). При этом скорость обучения нейронной сети возросла практически в два раза (с 2600 до 1300 эпох).

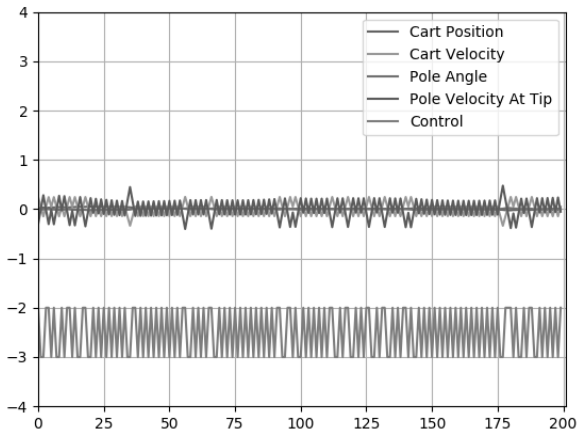


Рис. 3. Графики состояния и управления обученной нейронной сети

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье [1] анализируется задача управления обратным маятником с помощью использования нейронной сети, которая при взаимодействии со внешней средой формирует управляющие сигналы для перемещения тележки влево или право. В ходе анализа было установлено, что используемая нейронная сеть является избыточной: при занулении до трети наименьших по модулю параметров нейронная сеть продолжала удерживать обратный маятник. Также была дана интерпретация синтеза нейронной сети, которая ранее не встречалась, а именно: нейронная сеть является классификатором, где скрытый слой выделяет признаки для перемещения тележки, а выходной слой является агрегатором, который по полученным признакам выдает управляющий сигнал. Данная интерпретация позволила обоснованно дать объяснение размеру скрытого слоя нейронной сети и в результате сократить количество нейронов со

128 до 16, что может быть критично для встраиваемых систем, а также уменьшить время обучения.

Кроме того, было замечено, что объект управления представляет собой динамическую систему, в состав которой входит два интегрирующих звена, а используемая нейронная сеть содержит один скрытый нейронный слой. Таким образом, нейронная сеть может трактоваться как система с двумя интеграторами, где роль первого интегратора выполняет скрытый слой, а второго – выходной слой.

В ходе анализа исследуемой задачи было отмечено, что решение задачи содержит множество экстремумов, к которым сходится нейронная сеть. Также был выявлен существенный недостаток подхода из работы [1], который заключается в том, что существуют начальные условия, при которых нейронная сеть не обучается. Однако разработка решения данного недостатка является темой отдельного исследования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. PyTorch examples [Electronic resource]. – URL: <https://github.com/pytorch/examples> (accessed: 25.04.2018).
2. *Bishop C.* Pattern recognition and machine learning. – New York: Springer, 2007. – 738 p. – (Information science and statistics).
3. *Richert W., Coelho L.* Building machine learning systems with Python. – Birmingham: Packt Publ., 2013. – 290 p.
4. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction. – 2<sup>nd</sup> ed. – New York: Springer, 2013. – 745 p. – (Springer series in statistics).
5. *Lantz B.* Machine learning with R. – Birmingham: Packt Publ., 2013. – 396 p.
6. *Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A.* Foundations of machine learning. – Cambridge, MA: MIT Press, 2012. – 432 p. – (Adaptive computation and machine learning series).
7. *Conway D., White J.M.* Machine learning for hackers. – Sebastopol, CA: O'Reilly, 2012. – 324 p.
8. Welcome to the Deep Learning tutorial [Electronic resource]. – URL: <http://deeplearning.stanford.edu/tutorial/> (accessed: 25.04.2018).
9. *Haykin S.* Neural networks: a comprehensive foundation. – New York: MacMillan Publ., 1994. – 1104 p.
10. Романников Д.О. О преобразовании сети Петри в нейронную сеть // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 98–103.

11. *Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep learning. – Cambridge, MA: MIT Press, 2016.
12. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E.* ImageNet classification with deep convolutional neural networks // Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems: NIPS 12. – Lake Tahoe, Nevada, 2012. – P. 1097–1105.
13. *Graves A., Mohamed A., Hinton G.* Speech recognition with deep recurrent neural networks // Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013. – Vancouver, Canada, 2013.
14. *Deng L., Hinton G.E., Kingsbury B.* New types of deep neural network learning for speech recognition and related applications: an overview // Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013. – Vancouver, Canada, 2013.

**Романиков Дмитрий Олегович**, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – нейронные сети, сети Петри. Имеет более 60 публикаций. E-mail: [dmitry.romannikov@gmail.com](mailto:dmitry.romannikov@gmail.com)

## **Investigation of the work of neural networks on the example of the problem of the control of the back panel \***

**D.O. Romannikov**

*Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, candidate of Technical Sciences, associate professor of the automation department. E-mail: [dmitry.romannikov@gmail.com](mailto:dmitry.romannikov@gmail.com)*

The use of neural networks for solving problems of various orientations has become quite popular recently. Including neural networks are used in learning tasks with reinforcement as a management system, in which learning occurs through interaction with the environment. The article is devoted to the analysis of the control problem of an inverted pendulum, for which such aspects as redundancy of the used neural network are investigated, i.e. one of the tasks is to search for a more optimal form of a neural network; uniqueness of the solution. In addition, the article explains and justifies the choice of the number of layers in the neural network used. In the work it is established that the neural network used can be brought to a third of the least so that the network will continue to hold the reverse pendulum, which indicates its redundancy. There was also the interpretation of synthesizing neural network, which the authors have not previously encountered, namely, the neural network is a classifier, which identifies the

---

\* Received 27 October 2017.

hidden layer characteristics for the peremescheniya trolley, and the output layer is an aggregator, which is featured on the received outputs the control signal. This interpretation allowed to reasonably explain the size of the hidden layer of the neural network and, as a result, to reduce the number of neurons from 128 to 16, which can be critical for embedded systems, and also reduce the learning time from 2600 epochs (on average) to 1300.

**Keywords:** neural networks, Petri nets, artificial intelligence, transformation, activation function, keras, regularization, training

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-95-103

## REFERENCES

1. *PyTorch examples*. Available at: <https://github.com/pytorch/examples> (accessed 25.04.2018).
2. Bishop C. *Pattern recognition and machine learning. Information science and statistics*. New York, Springer, 2007. 738 p.
3. Richert W., Coelho L. *Building machine learning systems with Python*. Birmingham, Packt Publ., 2013. 290 p.
4. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. 2<sup>nd</sup> ed. *Springer series in statistics*. New York, Springer, 2013. 745 p.
5. Lantz B. *Machine learning with R*. Birmingham, Packt Publ., 2013. 396 p.
6. Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A. *Foundations of machine learning. Adaptive computation and machine learning series*. Cambridge, MA, MIT Press, 2012. 432 p.
7. Conway D., White J.M. *Machine learning for hackers*. Sebastopol, CA, O'Reilly, 2012. 324 p.
8. *Welcome to the Deep Learning tutorial*. Available at: <http://deeplearning.stanford.edu/tutorial/> (accessed 25.04.2018).
9. Haykin S. *Neural networks: a comprehensive foundation*. New York, MacMillan Publ., 1994. 1104 p.
10. Romannikov D.O. O preobrazovanii seti Petri v neironnuyu set' [On the transformation of Petri nets in neural network]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 98–103.
11. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep learning*. Cambridge, MA, MIT Press, 2016.
12. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. *Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems: NIPS 12*, Lake Tahoe, Nevada, 2012, pp. 1097–1105.

13. Graves A., Mohamed A., Hinton G. Speech recognition with deep recurrent neural networks. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013*, Vancouver, Canada, 2013.

14. Deng L., Hinton G.E., Kingsbury B. New types of deep neural network learning for speech recognition and related applications: an overview. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013*, Vancouver, Canada, 2013.

Для цитирования:

Романников Д.О. Исследование работы нейронных сетей на примере задачи управления обратным маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 95–103. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-95-103.

For citation:

Romannikov D.O. Issledovanie raboty neironnykh setei na primere zadachi upravleniya obratnym mayatnikom [Investigation of the work of neural networks on the example of the problem of the control of the back panel]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 95–103. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-95-103.



УДК 519.24

## О СИНТЕЗЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ\*

Д.О. РОМАННИКОВ

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизи. E-mail: dmitry.romannikov@gmail.com

Применение нейронных сетей для решения задач различной направленности, к которым можно отнести задачи классификации (в частности, задачи распознавания образов на изображениях), задачи сегментирования, прогнозирования и динамического программирования и другие, приобрело достаточно большую популярность в настоящее время. Но стоит отметить, что предлагаемые решения всех перечисленных задач основываются на применении методов обучения нейронной сети с использованием градиентного спуска или его модификаций, что влечет за собой набор недостатков: неопределенность в задании начальных значений, отсутствие обоснованных рекомендаций по выбору параметров алгоритмов обучения (шага обучения и других) и другие. В статье рассматривается метод построения нейронной сети, основанный на последовательном добавлении нейронов для соединения новых «ближайших» точек из обучаемого множества при помощи функции активации выпрямителя (*relu*), а в нейроне выходного слоя – линейной функции. В статье этот способ применяется на примере аппроксимации функции параболы. В результате получена нейронная сеть, аппроксимирующая функцию параболы. Структура нейронной сети представляет собой однослойный персептрон с множеством нейронов в скрытом слое с одним нейроном во входном и выходном слоях. Предлагаемый в статье метод позволяет аппроксимировать не только функцию параболы, но и любую другую функцию одной переменной с заданной точностью. Приведены графики сравнения оригинальной функции и аппроксимированной с целью демонстрации полученных результатов, также приведена часть структуры полученной нейронной сети.

**Ключевые слова:** нейронные сети, сети Петри, искусственный интеллект, преобразование, функция активации, keras, регуляризация, обучение

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-104-111

---

\* Статья получена 11 декабря 2017 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Методы обучения нейронных сетей [1–9], которые используются для инициализации начальных значений нейронов и непосредственного получения их окончательных значений, на сегодняшний день имеют некоторые общие недостатки, которые если не ограничивают их использование, то приводят к необходимости учета некоторых проблем на практике. К таким проблемам можно отнести отсутствие однозначных и обоснованных рекомендаций по выбору начальных значений нейронов, шагов обучения, времени (или критерия останова) процесса обучения нейронной сети.

В статье исследуется итеративный процесс построения нейронной сети, в котором добавление нового нейрона основывается на соединении ближайшей точки с новой точкой в множестве входных значений.

## 1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Поставленной в работе задачей является разработка метода синтеза нейронной сети для задачи аппроксимации функции параболы (рис. 1).

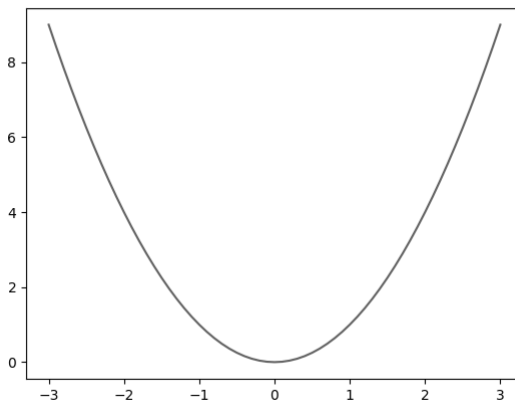


Рис. 1. График аппроксимируемой функции параболы  $f(x) = x^2$

Входными данными для этой задачи является набор данных для обучения со значениями функции в диапазоне от  $[-3, 3]$  с шагом, равным единице.

## 2. РЕШЕНИЕ

Основной идеей предлагаемого решения является итеративное построение нейронной сети с одним скрытым слоем (персептрона) и одним нейроном в выходном слое. Причем нейроны в скрытом слое будут использовать нелинейную функцию выпрямителя (*relu*), график которой приведен на рис. 2, а в нейроне выходного слоя – линейную функцию. Рассмотрим метод предлагаемого решения подробнее на примере аппроксимации параболической функции (см. рис. 1).

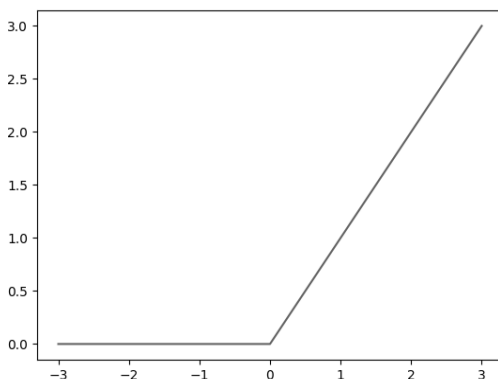


Рис. 2. График нелинейной функции нейронов скрытого слоя  $relu: f(x) = \{0, x \leq 0; x, x > 0\}$

Аппроксимация функции выполняется по шагам. Первым шагом является построение прямой между первой парой входных и выходных данных, для исследуемого примера этими данными будут пары точек  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ :  $(-3, 9)$ ,  $(-2, 4)$ . Построение прямой  $y = ax + b$  между двумя точками выполняется из соотношений:  $a = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2)$ ,  $b = y_1 - (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2) x_1$ . Для рассматриваемых пар точек прямая будет иметь вид  $y = -5x - 6$ . При этом нейронная сеть будет состоять из одного скрытого нейрона и одного нейрона в выходном слое, где нейрон скрытого слоя можно описать функцией  $relu(-5x - 6)$ . Важно отметить, что график вышеприведенной функции имеет ненулевые значения в диапазоне  $(-\infty, -6/5)$ . Второй шаг построения нейронной сети связан с обработкой следующей точки входных данных, которая является ближайшей к точкам  $(-2, 4)$ ,  $(-1, 1)$ . Тогда диапазон  $x \in (-2, -1]$ , можно

разделить на две части:  $x \in (-2, -6/5] \cup (-6/5, -1]$ . Такое разделение необходимо, так как в первой части диапазона для описания результирующей функции необходимо учитывать влияние функции  $relu(-5x - 6)$ , а во второй – нет. Тогда результирующая функция для отрезка  $(-2, -6/5]$  будет иметь вид  $f_2(x) = f_1(x) + ax + b$ , где  $f_1(x)$  – функция, посчитанная на предыдущем шаге, а  $ax + b$  – неизвестная часть, которую следует определить. И стоит заметить, что функция  $f_2(x)$  будет являться комбинацией линейной функций. Параметры  $a, b$  можно определить из вышеприведенных соотношений с поправкой на смещения:  $a = 2, b = 4$ . Далее логика вычислений повторяется: функция  $y = relu(2x + 4)$  имеет ненулевые значения, начиная от точки  $x = -2$ , а вычисление второй части диапазона  $(-6/5, -1]$  выполняется аналогичным образом, где  $f_3(x) = 2x + 4 + ax + b$ , тогда  $a = -5, b = -6$ . Важно отметить, что так как значение функции вычитается от остальных, то необходимо взять эту функцию со знаком минус:  $-relu(5x + 6)$ . Далее процесс определения остальных слагаемых функции выполняется аналогично, и в итоге получается нейронная сеть описываемая выражением  $relu(-5x - 6) + relu(2x + 4) - relu(5x + 6) + + relu(2x + 2) + relu(2x) + relu(2x - 2) + relu(2x - 4)$ , часть структуры которой приведена на рис 3, а на рис. 4 показаны графики оригинальной и аппроксимированной функций.

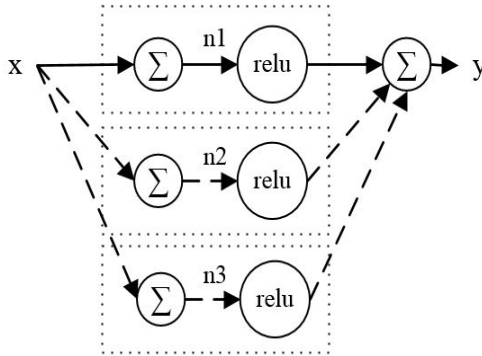


Рис. 3. Часть структуры синтезируемой нейронной сети

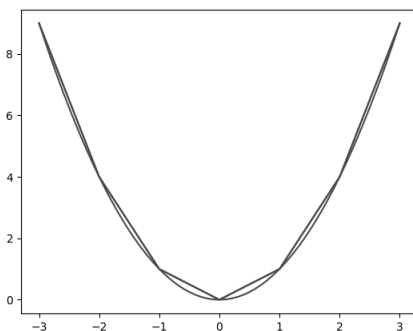


Рис. 4. Графики функции параболы и аппроксимированной по семи точкам функции параболы

Из рис. 4 видно, что выходное значение синтезируемой нейронной сети позволяет достаточно точно повторить график аппроксимированной функции.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследуется процесс аппроксимации функции параболы при помощи нейронной сети. Новизной предлагаемого способа аппроксимации является процесс синтеза нейронной сети, основанный на последовательном дополнении нейронов в структуру однослойного персептрона. В данном процессе использовались различные вариации функции выпрямителя (*relu*), однако могут использоваться и другие функции активации нейрона.

Стоит отметить, что вопрос разработки алгоритма аппроксимации функции нескольких переменных, который соответствует синтезу нейронной сети с несколькими входами, является вопросом дальнейших исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bishop C.* Pattern recognition and machine learning. – New York: Springer, 2007. – 738 p. – (Information science and statistics).
2. *Richert W., Coelho L.* Building machine learning systems with Python. – Birmingham: Packt Publ., 2013. – 290 p.

3. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction. – 2<sup>nd</sup> ed. – New York: Springer, 2013. – 745 p. – (Springer series in statistics).
4. *Lantz B.* Machine learning with R. – Birmingham: Packt Publ., 2013. – 396 p.
5. *Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A.* Foundations of machine learning. – Cambridge, MA: MIT Press, 2012. – 432 p. – (Adaptive computation and machine learning series).
6. *Conway D., White J.M.* Machine learning for hackers. – Sebastopol, CA: O'Reilly, 2012. – 324 p.
7. Welcome to the Deep Learning tutorial [Electronic resource]. – URL: <http://deeplearning.stanford.edu/tutorial/> (accessed: 25.04.2018).
8. *Haykin S.* Neural networks: a comprehensive foundation. – New York: MacMillan Publ., 1994. – 1104 p.
9. *Романников Д.О.* О преобразовании сети Петри в нейронную сеть // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 98–103.
10. *Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep learning. – Cambridge, MA: MIT Press, 2016.
11. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E.* ImageNet classification with deep convolutional neural networks // Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems: NIPS 12. – Lake Tahoe, Nevada, 2012. – P. 1097–1105.
12. *Graves A., Mohamed A., Hinton G.* Speech recognition with deep recurrent neural networks // Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013. – Vancouver, Canada, 2013.
13. *Deng L., Hinton G.E., Kingsbury B.* New types of deep neural network learning for speech recognition and related applications: an overview // Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013. – Vancouver, Canada, 2013.

**Романников Дмитрий Олегович**, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – нейронные сети, сети Петри. Имеет более 60 публикаций. E-mail: [dmitry.romannikov@gmail.com](mailto:dmitry.romannikov@gmail.com)

## About of synthesis of neural networks \*

### D.O. Romannikov

*Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, candidate of Technical Sciences, associate professor of the automation department. E-mail: dmitry.romannikov@gmail.com*

The use of neural networks for solving problems of various orientations, to which classification problems (in particular, image recognition problems on images), tasks of segmentation, forecasting and dynamic programming, etc., have become quite popular at the present time. But, it is worth noting that the proposed solutions to all these problems are based on the use of neural network training methods using gradient descent or its modifications, which entails a set of shortcomings: uncertainty in setting initial values, lack of well-founded recommendations on the choice of parameters of algorithms training (step of training and others) and others. The method of constructing a neural network is based on the successive addition of neurons for the connection of new "nearest" points from the learning set using the function of activating the rectifier (relu), and in the neuron of the output layer it is a linear function. In this paper, this method is applied to the approximation of a parabola function. As a result, a neural network approximating the parabola function is obtained. The structure of a neural network is a single-layer perceptron with a set of neurons in a hidden layer with one neuron in the input and output layers. The method proposed in the article allows us to approximate not only the parabola function, but also any other function of one variable with a given accuracy. The graphs of comparison of the original function and approximated for the purpose of demonstrating the obtained results are given, as well as a part of the structure of the obtained neural network.

**Keywords:** neural networks, Petri nets, artificial intelligence, transformation, activation function, keras, regularization, training

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-104-111

## REFERENCES

1. Bishop C. *Pattern recognition and machine learning. Information science and statistics*. New York, Springer, 2007. 738 p.
2. Richert W., Coelho L. *Building machine learning systems with Python*. Birmingham, Packt Publ., 2013. 290 p.
3. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. 2<sup>nd</sup> ed. *Springer series in statistics*. New York, Springer, 2013. 745 p.

---

\* Received 11 December 2017.

4. Lantz B. *Machine learning with R*. Birmingham, Packt Publ., 2013. 396 p.
5. Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A. *Foundations of machine learning. Adaptive computation and machine learning series*. Cambridge, MA, MIT Press, 2012. 432 p.
6. Conway D., White J.M. *Machine learning for hackers*. Sebastopol, CA, O'Reilly, 2012. 324 p.
7. *Welcome to the Deep Learning tutorial*. Available at: <http://deeplearning.stanford.edu/tutorial/> (accessed 25.04.2018).
8. Haykin S. *Neural networks: a comprehensive foundation*. New York, MacMillan Publ., 1994. 1104 p.
9. Romannikov D.O. O preobrazovanii seti Petri v neironnyuy set' [On the transformation of Petri nets in neural network]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 98–103.
10. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep learning*. Cambridge, MA, MIT Press, 2016.
11. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. *Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems: NIPS 12*, Lake Tahoe, Nevada, 2012, pp. 1097–1105.
12. Graves A., Mohamed A., Hinton G. Speech recognition with deep recurrent neural networks. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013*, Vancouver, Canada, 2013.
13. Deng L., Hinton G.E., Kingsbury B. New types of deep neural network learning for speech recognition and related applications: an overview. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2013*, Vancouver, Canada, 2013.

Для цитирования:

Романников Д.О. О синтезе нейронных сетей // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 104–111. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-104-111.

For citation:

Romannikov D.O. O sinteze neironnykh setei [About of synthesis of neural networks]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 104–111. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-104-111.



## СООБЩЕНИЯ

УДК 001.2

### ОПЫТ ПОЛУЧЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ФОРМИРОВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ\*

Ю.М. КОНОНОВ

*634012, РФ, г. Томск, ул. Елизаровых 4-17, Информационно-консультационный центр «Мастер-Класс Консалт», кандидат технических наук. E-mail: ykton1@gmail.com.*

В статье представлен краткий обзор результатов получения нескольких высших образований и профессий. Даны описания специальностей, представлены графические схемы сформированного направления развития в научной области.

В настоящее время, когда информатизация охватывает все сферы деятельности, особенно стали востребованы специалисты, имеющие целостную картину инженерных знаний, разбирающиеся в нескольких дисциплинах одновременно и оперативно адаптирующиеся к постоянно меняющейся внешней обстановке.

При подготовке специалистов важно сформировать у обучающихся целостную картину всего спектра знаний и умений по осваиваемой профессии. Целесообразно формировать общую картину научных и инженерных знаний путем мультидисциплинарного общего обучения, в процессе которого предметы и науки преподносятся как элементы взаимосвязанных и взаимозависимых дисциплин.

В этой связи особую актуальность представляет исследование влияния опыта получения высшего образования и типов профессий на формирование области научного исследования.

В данной работе рассмотрены конкретные инженерные специальности, такие как «системный анализ, управление и обработка информации», «нефтяной инжиниринг», «разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» и «информационно-измерительная техника». Показаны направления и области научных исследований, которые сформировались в результате получения рассмотренных специальностей, а также предполагаемые направления дальнейших научных исследований.

Статья будет интересна представителям не только инженерных профессий, но и общеобразовательных дисциплин, а также научным работникам, интересующимся темами высшего образования и науки в целом, преподавателям, системным аналитикам, руководителям, менеджерам, представителям бизнеса и широкому кругу читателей.

**Ключевые слова:** образование, высшее образование, профессиональное образование, целостное восприятие, системный анализ, профессия, информационно-измерительная техника, нефтяной инжиниринг, принятие решений, методика, алгоритм, обработка информации, коммуникация, проектирование.

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-112-121

---

\* Статья получена 13 декабря 2017 г.

## **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время часто встречаются случаи неполного, фрагментарного восприятия знаний. В связи с этим вызывает интерес синтез нескольких профессий с целью формирования более полной картины знаний для инженера или научного работника. Изучение нескольких профессий, особенно из разных областей, позволяет приблизиться к сформированию многогранного, целостного восприятия научной картины.

## **1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ**

Для эффективной работы инженера и научного работника целесообразно иметь многогранную картину научных знаний. Часто конкретная специальность дает лишь узкопрофессиональную картину, не позволяющую учитывать действия многих внешних факторов и находить оригинальные решения задач. Следует установить, при каких условиях и каким образом получение нескольких образований позволяет создать систему знаний с более высоким творческим потенциалом. Цель исследования – разработка подходов, методик и механизмов реализации комплексного образования. Для этого необходимо решить следующие задачи:

- провести обзор опыта профессионального образования;
- дать краткое описание изученных дисциплин и полученных профессий;
- схематически представить сформированное направление и область научной деятельности;
- сформулировать условия для получения комплексного образования.

## **2. ОБЗОР ОПЫТА ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Был изучен ряд дисциплин, которые позволили сформировать достаточно целостную картину знаний о науке и взаимодействии ее областей между собой. Ниже приведены изученные дисциплины.

1. Информационно-измерительная техника и технологии.
2. Нефтяной инжиниринг.
3. Системный анализ, управление и обработка информации [1–5].

Динамика получения опыта профессионального образования представлена на рис. 1, на котором показаны области науки и тематики [1–5].

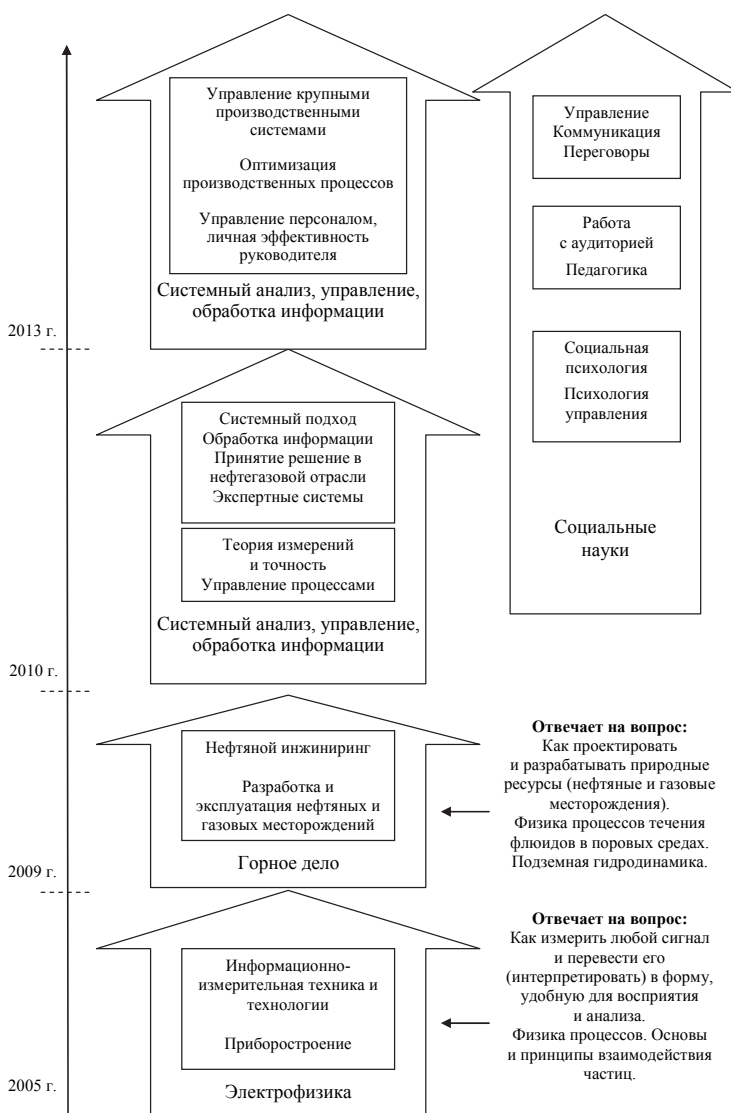


Рис. 1. Схематическое представление этапов и областей получения образования

Рассмотрим приведенные дисциплины и дадим пояснение к их содержанию.

***Информационно-измерительная техника и технологии*** (область электротехники).

В современной технике это основная базовая дисциплина, в настоящее время всё построено на сигналах, электронике и обработке информации. Проектирование, строительство и эксплуатация технических систем в настоящее время невозможно без средств измерительной техники. Уровень информационных технологий определяет возможности по управлению производственными процессами и обеспечивает необходимую точность их рабочих режимов.

Основной предмет данной специальности – «Физические основы получения информации».

Специальность позволяет найти ответ на несколько основных вопросов.

– Как преобразовать любой информационный сигнал в пригодный для измерения вид?

– Как измерять сигналы?

– Как подготовить информацию для измерения, восприятия и анализа?

– Какие бывают приборы для измерения и передачи сигналов?

В рамках специальности рассматриваются источники, излучатели и приемники информации.

Поясняется, как формируются погрешности измерений. Дается понятие о точности измерительных приборов и их калибровке.

Изучаются аналоговые и цифровые сигналы, принципы и методы их преобразования.

***Нефтяной инжиниринг*** (подразделение специальности «Нефтегазовое дело», которое, в свою очередь, входит в более обширную специальность «Горное дело»).

Специальность позволяет найти ответы на следующие основные вопросы.

– Какие бывают природные ресурсы?

– Как оценить объем и качество ресурсов?

– Как добывать (разрабатывать) ресурсы?

– Как добытое сырье подготовить для нужд конечного потребителя?

В рамках специальности изучаются проектирование разработки месторождений, технологический процесс подготовки продукции, экономическая эффективность разработки нефтяных и газовых месторождений.

### ***Системный анализ***

Использует принцип системы, в основе которого лежит представление исследуемого объекта как состоящего из взаимосвязанных и взаимовлияющих элементов [2].

Дается алгоритм, необходимый для решения поставленной проблемы или задачи.

Специальность позволяет понять:

- как элементы системы взаимосвязаны между собой;
- как описать систему;
- как управлять системой;
- как создать модель системы для ее изучения.

Освоение приведенных дисциплин помогло сформировать наиболее полное понимание исследуемой области, системный анализ дал возможность увязать факторы между собой и увеличить количество «граней» исследуемой тематики.

## **3. ФОРМИРОВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ**

Полученные знания формировали специфику деятельности и задавали направления дальнейшим исследованиям, а также вносили новые качества и подходы в применяемые методики исследовательской деятельности. Постепенно это позволило сформировать общие направления и области научной деятельности (области научных интересов), отобразенные на рис. 2.

В ходе научного исследования не удаётся ограничиваться какой-то узкой областью, особенно если речь идет о системном подходе или управлении крупными проектами либо системами, поэтому приходится изучать новые смежные дисциплины, которые соприкасаются с выбранной тематикой. Это позволяет более полно понять исследуемую область и минимизировать однобокость восприятия. Ведь известно, что чем больше факторов мы учитываем при описании какой-либо системы, их взаимодействие и взаимовлияние, тем полнее можем сформировать картину об исследуемом объекте или системе, а значит, тем больше выводов и заключений можем сделать о функционировании этой системы. Смежные специальности связаны и дополняют друг друга, при синтезе знаний появляются новые ответы на поставленные вопросы [1–5].

Проведенный обзор полученных результатов научной деятельности позволил обобщить и схематически представить сформированное направление и область научной деятельности, а также определить смежные (прилегающие) направления исследований.

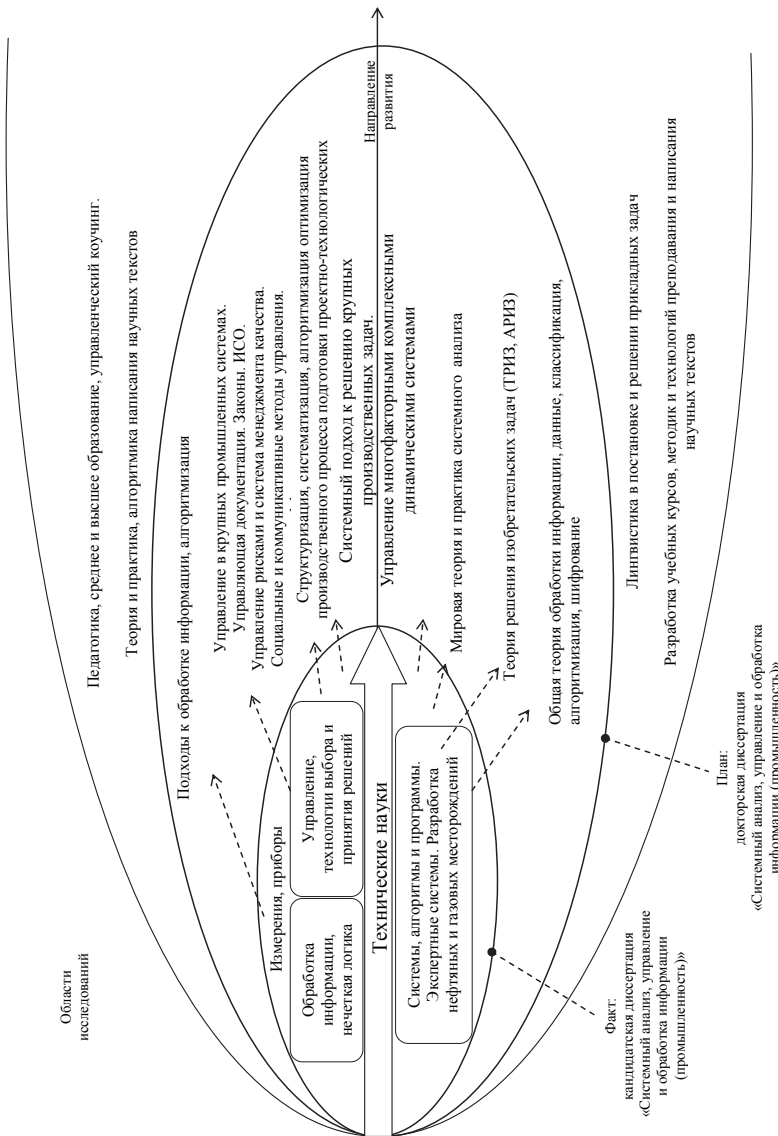


Рис. 2. Схематическое представление направлений и области научной деятельности

## ВЫВОДЫ

Большая научная работа, включающая в себя несколько дисциплин, зачастую выходит за границы этих дисциплин и охватывает не только смежные, но и другие дисциплины. Например, техническая работа может затронуть область гуманитарных дисциплин. Приведено схематическое представление направлений и области научной деятельности.

Целесообразно формировать общую картину научных и инженерных знаний путем мультидисциплинарного общего обучения, в процессе которого предметы и науки преподносятся как элементы взаимосвязанных и взаимозависимых дисциплин. В качестве продолжения исследований в данной области интерес вызывает схематическое представление областей получения профессиональных знаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарасенко Ф.П.* Прикладной системный анализ: учебное пособие. – М.: Кнорус, 2010. – 224 с.
2. *Кононов Ю.М.* Обзор методик и алгоритмов решения задач управления производственным процессом на основе подходов системного анализа // Сборник научных трудов НГТУ. – 2017. – № 1 (87). – С. 72–84.
3. *Кононов Ю.М.* Принципы и подходы к совершенствованию системы управления бизнес-процессами промышленного предприятия // Сборник научных трудов НГТУ. – 2017. – № 1 (87). – С. 85–97.
4. *Кононов Ю.М.* Управление персоналом. Методика постановки эффективных вопросов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2017. – № 2 (88). – С. 82–99.
5. *Кононов Ю.М.* Системный подход к эффективному управлению проектной группой // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. – 2017. – № 7–8. – С. 46–50.
6. *Дульзон А.А.* Управление проектами: учебное пособие / Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – 3-е изд., перераб. и доп. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 334 с.
7. *Гумеров А.В.* Система менеджмента качества в общей системе управления промышленным предприятием // Российское предпринимательство. – 2010. – № 10-1 (168). – С. 68–72.
8. *Ямпольская Д.О., Зонис М.М.* Менеджмент. – М.: Олма-Пресс, 2003. – С. 160.

9. *Абарникова Е.Б.* Разработка и исследование экспертной системы для анализа различных предметных областей в условиях нечеткой информации: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Комсомольск-на-Амуре, 2001. – 163 с.

10. *Шилов Н.Г., Ермолаев В.И.* Методологические основы интеллектуальной поддержки социально-ориентированных решений в гибких транспортных системах // Научный вестник НГТУ. – 2016. – № 3 (64). – С. 59–72.

11. *Волкова В.Н., Денисов А.А.* Теория систем и системный анализ: учебник для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2015. – 616 с. – (Бакалавр. Академический курс).

12. *Волкова В.Н.* Из истории развития системного анализа в нашей стране // Экономическая наука современной России. – 2001. – № 2. – С. 138–152.

13. *Орлов А.И.* Теория принятия решений. – М.: Март, 2004. – 656 с.

**Кононов Юрий Михайлович**, кандидат технических наук. Основное направление исследований – системный анализ, управление и обработка информации. Имеет более 20 публикаций. E-mail: ykton1@gmail.com

## **Experience of higher education. Organisation of direction of scientific research \***

**Y.M. Kononov**

*Information and Consulting Center “Master-Class Consult”, 4-17 Elizarovih, Tomsk, Russian Federation, 634012, candidate of technical science. E-mail: ykton1@gmail.com*

The article provides a brief overview of the results of obtaining several higher educations and professions. The descriptions of the specialties and the main questions to which they answer are given. Graphical schemes of the formed direction of development in the scientific field are presented.

At present, when informatization covers all areas of activity, specialists with a holistic picture of engineering knowledge, who are versed in several disciplines at the same time and adapt quickly to the constantly changing external situation, are especially in demand.

When training specialists it is important to form a complete picture of the entire range of knowledge and skills of the students in the profession being mastered. It is advisable to form an overall picture of scientific and engineering knowledge through multicisciplinary general learning in a process that subjects and sciences are presented as elements of interrelated and interdependent disciplines.

In this connection, the study of the influence of the experience of obtaining higher education, types of professions on the formation of the field of scientific research is of particular relevance.

---

\* Received 13 December 2017.



In this paper, specific engineering professions such as "system analysis of information management and processing", "oil engineering", "development and operation of oil and gas fields" and "information and measuring equipment" are considered. The direction and areas of scientific research that were formed as a result of receiving the examined professions and also the prospective directions for further scientific research are shown.

The article will be of interest not only to the representative of engineering professions of general education disciplines, but also to researchers interested in topics of higher education and science in general, teachers, system analysts, managers, managers, business representatives and a wide range of readers.

**Keywords:** education, higher education, vocational education, holistic perception, system analysis, profession, information and measurement technology, oil engineering, decision-making, methodology, algorithm, information processing, communication, design.

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-112-121

## REFERENCES

1. Tarasenko F.P. *Prikladnoi sistemnyi analiz* [Applied system analysis: a tutorial]. Moscow, Knorus Publ., 2010. 224 p.
2. Kononov Yu.M. Obzor metodik i algoritmov resheniya zadach upravleniya proiz-vodstvennym protsessom na osnove podkhodov sistemnogo analiza [Review of methods and algorithms for solving the problems of production process management based on the approaches of system analysis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 1 (87), pp. 72–84.
3. Kononov Yu.M. Printsipy i podkhody k sovershenstvovaniyu sistemy upravleniya biznes-protsessami promyshlennogo predpriyatiya [Principles and approaches to improve the business process management system of an industrial enterprise]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 1 (87), pp. 85–97.
4. Kononov Yu.M. Upravlenie personalom. Metodika postanovki effektivnykh voprosov [Management of personnel – coaching as a method of effective questions for mentor and manager]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 2 (88), pp. 82–99.
5. Kononov Yu.M. Sistemnyi podkhod k effektivnomu upravleniyu proektnoi gruppoy [System approach to effective project team]. *Sovremennaya nauka: aktual'nye problemy teorii i praktiki – Modern science: actual problems of theory and practice*, 2017, no. 7–8, pp. 46–50.
6. Dul'zon A.A. *Upravlenie proektami* [Project management]. 3rd ed. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2010. 334 p.

7. Gumerov A.V. Sistema menedzhmenta kachestva v obshchei sisteme upravleniya pro-myshlennym predpriyatiem [Quality management system in the general management system of an industrial enterprise]. *Rossiiskoe predprinimatel'stvo – Russian Journal of Entrepreneurship*, 2010, no. 10-1(168), pp. 68–72.

8. Yampol'skaya D.O., Zonis M.M. *Menedzhment* [Management]. Moscow, Olma-Press Publ., 2003, p. 160.

9. Abarnikova E.B. *Razrabotka i issledovanie ekspertnoi sistemy dlya analiza razlichnykh predmetnykh oblastei v usloviyakh nechetkoi informatsii*. Diss. kand. tekhn. nauk [Development and research of the expert system for the analysis of various subject areas in conditions of fuzzy information. PhD eng. sci. diss.]. Komso-molsk-on-Amur, 2001. 163 p.

10. Shilov N.G., Ermolaev V.I. Metodologicheskie osnovy intellektual'noi podderzhki sotsial'no-orientirovannykh reshenii v gibkikh transportnykh sistemakh [Methodological basis of intelligent socio-oriented decision support in flexible transport systems]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (64), pp. 59–72.

11. Volkova V.N., Denisov A.A. *Teoriya sistem i sistemnyi analiz* [Theory of systems and system analysis]. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Yurait Publ., 2015. 616 p.

12. Volkova V.N. Iz istorii razvitiya sistemnogo analiza v nashei strane [From the history of the development of system analysis in our country]. *Ekonomicheskaya nauka sovremennoi Rossii – Economics of Contemporary Russia*, 2001, no. 2, pp. 138–152.

13. Orlov A.I. *Teoriya prinyatiya reshenii* [Decision theory]. Moscow, Mart Publ., 2004. 656 p.

Для цитирования:

Кононов Ю.М. Опыт получения высшего образования и формирование направления научного исследования // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 112–121. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-112-121.

For citation:

Kononov Yu.M. Opyt polucheniya vysshego obrazovaniya i formirovanie napravleniya nauchnogo issledovaniya [Experience of higher education. Organisation of direction of scientific research]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 112–121. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-112-121.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

### УСЛОВИЯ ПРИЕМА СТАТЕЙ

В редакцию **Сборника научных трудов НГТУ** представляются следующие материалы.

1. Статья объемом 8–12 страниц от аспирантов и 16–22 страниц от докторантов, печатная версия – два экземпляра, подписанных авторами (требования к оформлению см. на сайте: <http://sbornik.infoterra.ru>).

2. Контактная информация (телефоны, адреса электронной почты, место работы, должность, ученая степень, ученое звание автора) – печатная версия, два экземпляра.

3. Описание статьи для базы данных «Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)», печатная версия – один экземпляр (<http://sbornik.infoterra.ru>).

4. Электронная версия статьи, контактной информации, описание статьи для базы данных РИНЦ, реферат на англ. языке (в отдельных файлах на CD).

5. Рецензия объемом в одну-две страницы в двух экземплярах.

6. Экспертное заключение о возможности опубликования.

Информацию о сборнике, дополнительную информацию, документацию по оформлению см. на сайте: <http://sbornik.infoterra.ru>  
[journals.nstu.ru/sbornik](http://journals.nstu.ru/sbornik)

### РЕКОМЕНДУЕМЫЕ РАЗДЕЛЫ СБОРНИКА

Автоматическое управление (и идентификация)

Моделирование процессов и устройств

Обработка информации

Современные информационные технологии

Электроэнергетика, электромеханика и электротехнологии

Механика (газодинамика)

Физика (и математика)

Материаловедение

Сообщения и дискуссии

Педагогика

**Авторы, не являющиеся сотрудниками НГТУ, представляют сопроводительное письмо на имя проректора по научной работе НГТУ.**

Все рукописи рецензируются, по результатам рецензирования редколлегия принимает решение о целесообразности опубликования материалов.

Плата за публикацию рукописей не взимается.