
СИСТЕМЫ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

ISSN 2782-2001

№ 4 (96)

2024

УДК 681.51(06)
С 409

Учредитель

ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»

Редакционная коллегия

Главный редактор

Лемешко Борис Юрьевич, д-р техн. наук, проф., НГТУ, г. Новосибирск

Заместители главного редактора

Вострецов Алексей Геннадьевич, д-р техн. наук, проф., НГТУ, г. Новосибирск

Ответственный секретарь

Воевода Александр Александрович, д-р техн. наук, проф., НГТУ, г. Новосибирск

Члены редколлегии

Володин Андрей Игоревич, канд. физ.-мат. наук, доктор философии по статистике Университета Регины, проф., Канада

Воронин Владимир Викторович, д-р техн. наук, доцент, ТОГУ, г. Хабаровск

Гайдук Анатолий Романович, д-р техн. наук, проф., ЮФУ, г. Таганрог

Генералов Владимир Михайлович, д-р техн. наук, ФБУН ГНЦ ВБ «Вектор» Роспотребнадзора, г. Новосибирск

Григорьев Юрий Дмитриевич, д-р техн. наук, проф., СПбГЭТУ «ЛЭТИ», г. Санкт-Петербург

Гриф Михаил Геннадьевич, д-р техн. наук, проф., НГТУ, г. Новосибирск

Дмитриев Александр Капитонович, д-р физ.-мат. наук, НГТУ, г. Новосибирск

Комаров Андрей Константинович, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск

Крюков Андрей Васильевич, д-р техн. наук, проф., ИрГУПС, г. Иркутск

Лисицына Лилия Ивановна, д-р техн. наук, проф., НГТУ, г. Новосибирск

Наумова Елена Николаевна, д-р техн. наук, проф., Университет Тафтса, США

Носек Ярослав, д-р техн. наук, проф., Технический университет Либерец, Чехия

Ронжин Андрей Леонидович, д-р техн. наук, проф., СПб ФИЦ РАН, г. Санкт-Петербург

Рубан Анатолий Иванович, д-р техн. наук, проф., СФУ, г. Красноярск

Сидоров Денис Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт систем энергетики им. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск

Уранчимэг Гудеадагва, д-р техн. наук, проф., Хемницкий технический университет, Германия

Фомин Василий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск

Хабаров Валерий Иванович, д-р техн. наук, проф., СГУПС, г. Новосибирск

Ханова Анна Алексеевна, д-р техн. наук, проф., АГТУ, г. Астрахань

Хлебников Михаил Владимирович, д-р физ.-мат. наук, ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Шандаров Станислав Михайлович, д-р физ.-мат. наук, проф., ТУСУР, г. Томск

Адрес редакции и издателя: 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, корп. 7, комн. 409, 417

Тел. (383) 346-56-88, тел., факс (383) 344-49-98

E-mail: nauchvest@corp.nstu.ru

Web Site: <http://journals.nstu.ru/vestnik/>

16+

Индекс: 82962 («РОСПЕЧАТЬ»)

УДК 681.51(06)

© Коллектив авторов, 2024

© Новосибирский государственный
технический университет, 2024

СИСТЕМЫ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

ISSN 2782-2001

№ 4 (96)

2024

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

- Филюшов В.Ю.** Синтез полиномиального матричного регулятора, учитывающего инерционность исполнительного механизма 7

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

- Зеленчук Н.А., Терехов А.В.** Быстрый алгоритм вычисления матрично-векторных произведений в задаче разложения функций в ряды Фурье на круге 21
- Леонович Д.А.** Исследование влияния проницаемости межскважинного пространства на эффективность парогравитационного дренажа 35

ЭЛЕКТРОНИКА, ФОТОНИКА, ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И СВЯЗЬ

- Гужов В.И., Ильиных С.П., Андрущенко Е.В.** Увеличение пространственного разрешения в системах оптической микроскопии при использовании микрообъективов малой кратности 47
- Дмитриев А.К., Карпик А.П., Толстикова А.С., Головин Н.Н., Савинов К.Н., Болдырев В.С., Гусар Д.Ф., Алексейцев С.А., Томилов А.С., Иваненко А.В.** Измерение гравитационного смещения частоты в водородных часах при передаче сигнала через оптический и радиочастотный каналы связи 59

- Правила для авторов** 78

Корректор *Л.Н. Кинит*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Новосибирский государственный технический университет
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 2000 ОК 005-93 (ОКП)

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации
средства массовой информации ПИ № ФС77-76010 от 03 июля 2019 г.

Периодичность издания – 4 номера в год.

Подписано в печать 25.12.2024. Выход в свет 27.12.2024.

Формат 70 × 108 1/16. Бумага офсетная. Тираж 300 экземпляров.
Уч.-изд. л. 7,0. Печатных листов 5,0. Издательский № 224. Заказ № 26
Цена свободная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

ANALYSIS AND DATA PROCESSING SYSTEMS

ISSN 2782-2001

№ 4 (96)

2024

УДК 681.51(06)
C 409

Journal was established by
Novosibirsk State Technical University
Editorial board

Chief editor

Lemeshko B. Yu., D.Sc. (Eng.), Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF

Deputy chief editor

Vostretsov A. G., D.Sc. (Eng.), Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF

Executive Secretary

Voevoda A. A., D.Sc. (Eng.), Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF

The members of the editorial Board

Volodin A. I., D.Sc. (Phys. & Math.), Doctor of Philosophy in Statistics from the University of Regina, Professor of Statistics
University of Regina, Canada

Voronin V. V., D.Sc. (Eng.), Pacific national University, Khabarovsk, RF

Gaiduk A. R., D.Sc. (Eng.), Southern Federal University, Taganrog, RF

Generalov V. M., D.Sc. (Eng.), FBUN GNTS VB «Vektor» Rospotrebnadzora, Novosibirsk, RF

Grigor'ev Yu. D., D.Sc. (Eng.), Saint-Petersburg Electrotechnical University "LETI", Saint-Petersburg, RF

Grif M. G., D.Sc. (Eng.), Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF

Dmitriev A. K., D.Sc. (Phys. & Math.), Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF

Komarov A. K., D.Sc. (Phys. & Math.), Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, RF

Kryukov A. V., D.Sc. (Eng.), Irkutsk State Transport University, Irkutsk, RF

Lisitcina L. I., D.Sc. (Eng.), Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF

Naumova E. N., PhD. (Math.), Tufts University, USA

Nosek J., D.Sc. (Eng.), Technical University of Liberec, Czech Republic

Ronzhin A. L., D.Sc. (Eng.), Federal Research Center Russian Academy of sciences, Saint-Petersburg, RF

Ruban A. I., D.Sc. (Eng.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, RF

Sidorov D. N., D.Sc. (Phys. & Math.), Melentiev Energy Systems Institute, Irkutsk, RF

Uranchimeg T., D.Sc. (Eng.), Technische Universität Chemnitz, Germany

Fomin V. M., D.Sc. (Phys. & Math.), Khristianovich Institut of theoretical and applied mechanics SB RAS, Novosibirsk, RF

Khabarov V. I., D.Sc. (Eng.), Siberian Transport University, Novosibirsk, RF

Khanova A. A., D.Sc. (Eng.), Astrakhan State Technical University, Astrakhan, RF

Khlebnikov M. V., D.Sc. (Phys. & Math.), Institute of Control Sciences, Moscow, RF

Shandarov S. M., D.Sc. (Phys. & Math.), Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, RF

Editorial Adress: 20 K. Marx Prospekt, building 7, rooms 409 and 417, Novosibirsk, 630073

Tel. (383) 346-56-88, Fax (383) 344-49-98

E-mail: nauchvest@corp.nstu.ru

Web Site: <http://journals.nstu.ru/vestnik/>

УДК 681.51(06)

© Authors, 2024

© Novosibirsk State Technical University, 2024

ANALYSIS AND DATA PROCESSING SYSTEMS

ISSN 2782-2001

№ 4 (96)

2024

CONTENTS

INFORMATION TECHNOLOGIES AND TELECOMMUNICATIONS

- Filiushov V.Yu.** Synthesis of a polynomial matrix controller that takes into account the inertia of the actuator..... 7

COMPUTER SCIENCE AND INFORMATION SCIENCE

- Zelenchuk N.A., Terekhov A.V.** A fast algorithm for computing matrix-vector products in the problem of function decomposition into Fourier series on a circle 21
- Leonovich D.A.** Study of the effect of the permeability of the interwell space on the efficiency of steam gravity drainage 35

ELECTRONICS, PHOTONICS, INSTRUMENT MAKING AND COMMUNICATIONS

- Guzhov V.I., Ilinykh S.P., Andryushchenko E.V.** Increasing spatial resolution in optical microscopy systems using low-magnification micro lenses..... 47
- Dmitriev A.K., Karpik A.P., Tolstikov A.S., Golovin N.N., Savinov K.N., Boldyrev V.S., Gusar D.F., Alekseitsev S.A., Tomilov A.S., Ivanenko A.V.** Measuring the gravitational frequency shift in a hydrogen clock when transmitting a signal via optical and radio frequency communication channels 59
- Rules for authors** 78

Editor *L.N. Kinsht*
Computer imposition *S.I. Tkacheva*

Novosibirsk State Technical University
20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

The journal is registered in the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology,
and Mass Media. The certificate of registration of mass media ПИ № ФС77-76010 dated July 03, 2019.

Publication frequency – 4 numbers a year.

Signed in print December 25, 2024.

Date of publication December 27, 2024. Format 70 × 108 1/16

Offset Paper. Circulation is 300 copies. Educational-ed. liter. 7,0. Printed pages 5,0.

Publishing number 224. Order number 26

It is printed in printing house of Novosibirsk State Technical University
20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073

УДК 621.865.8+62-503.53

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-7-20

Синтез полиномиального матричного регулятора, учитывающего инерционность исполнительного механизма*

В.Ю. ФИЛЮШОВ

630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский государственный техни-
ческий университет

filiushov.vladislav@gmail.com

В настоящей работе рассмотрен синтез системы управления ориентацией квадрокоптера при малом изменении углов поворота (near hovering), учитывающей инерционность винтомоторных групп. Показана линеаризация обратной связи подсистемы ориентации с учетом инерционности винтомоторных групп. Регулятор рассчитан полиномиальным матричным методом синтеза, обеспечивающим заданное расположение полюсов замкнутой системы. Для оценки результатов выполнено сравнение с регулятором, не учитывающим инерционность винтомоторных групп.

Управление ориентацией и позиционированием беспилотного летательного аппарата (БПЛА) вертикального взлета и посадки мультироторного типа в пространстве неразрывно связано с формированием вектора управления движением, состоящего из комбинации тяг и аэродинамических моментов, создаваемых каждой винтомоторной группой. Точность и скорость формирования вектора управления движением в значительной степени влияет на ошибки позиционирования и ориентации БПЛА. В большинстве работ, посвященных синтезу систем управления БПЛА, используется вектор управления движением без учета динамики винтомоторных групп, что в некоторых случаях вынуждает снижать быстродействие системы управления. Показано, что увеличение быстродействия системы управления может быть ограничено инерционностью, так как возникает колебательность, а при дальнейших попытках увеличить быстродействие за счет смещения желаемых полюсов характеристического полинома дальше в отрицательную область система управления становится неустойчива. Для решения этой проблемы предложено учитывать инерционность винтомоторной группы. Показано, что за счет этого можно повысить быстродействие системы управления. Также показано, что линеаризация обратной связи подсистемы ориентации квадрокоптера также подвержена влиянию инерционности винтомоторной группы, поэтому предложено выполнять линеаризацию обратной связи с учетом инерционности.

Ключевые слова: полиномиальный метод синтеза, полиномиальное матричное разложение, синтез, многоканальный регулятор, электромеханическая система, винтомоторная группа, мультиротор, линеаризация обратной связи

* Статья получена 13 февраля 2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Беспилотные летательные аппараты находят всё новые применения для аэрологистики, сельского хозяйства, мониторинга и других сфер деятельности. В настоящей работе рассмотрены беспилотные летательные аппараты с вертикальным взлетом и посадкой – мультикоптеры (*multicopter, multicopter*) – летательные аппараты с несколькими несущими винтами, к ним относятся трикоптеры, квадрокоптеры и т. д.

Существуют мультироторы с фиксированными и поворотными роторами, что необходимо для увеличения степеней свободы движения летательного аппарата [1–3]. Для повышения эффективности различных режимов полета применяются винты изменяемого шага (*variable pitch propellers*) [4]. Широкое применение находят системы управления с компенсацией внешних воздействий [5–8], в которых возмущение ветром рассматривается как гармонический сигнал, компенсация которого возможна с помощью адаптивного управления. Системы управления могут строиться при различных математических описаниях модели объекта. В работе [8] рассмотрена система управления при кватернионном представлении вращений квадрокоптера. Другим важным направлением является управление группой беспилотных летательных аппаратов, пример такой системы рассмотрен в работе [9].

Во многих работах инерционность винтомоторной группы не учитывают [10–12]. Предполагается, что она значительно выше динамики подсистем ориентации и перемещения. Такое допущение не всегда верно, что вынуждает разрабатывать системы управления ориентацией и позиционированием менее быстродействующими для работоспособности используемых алгоритмов. Поэтому для построения систем управления позиционированием и ориентацией в первую очередь необходимо построить быстродействующую систему управления электромеханического преобразования [13].

В качестве двигателя винтомоторной группы наибольшее распространение получили синхронные двигатели с постоянными магнитами, управляемые посредством контроллеров скорости (*electric speed controller, ESC*). Одним из способов управления синхронными двигателями является векторное управление с подчиненным регулированием [14]. В работах [15, 16] разрабатывается система управления для явнополюсного (*salient pole, interior mounted magnets*) и неявнополюсного (*surface mounted magnets, non-salient pole*) синхронных двигателей с постоянными магнитами при управлении током по поперечной оси ($i_d = 0$) с использованием принципа плоского регулирования (*flatness based control*).

В указанных работах показана особенность линеаризации обратной связью [17–22] подсистемы ориентации квадрокоптера при инерционности исполнительного механизма – винтомоторной группы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель работы – построить систему управления ориентации мультикоптера с учетом инерционности винтомоторной группы, что позволит повысить быстродействие системы управления.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В настоящей работе предположим, что электромеханическое преобразование энергии в винтомоторной группе (ВМГ) описывается инерционным звеном с некоторой постоянной времени. На вход инерционного звена подается желаемая тяга ВМГ, а на выходе получается тяга. Полученные тяги ВМГ используются для создания моментов вращения мультикоптера и общей тяги. Рассмотрен частный случай мультикоптера с четырьмя ВМГ – квадрокоптер, структурная схема которого представлена на рис. 1.

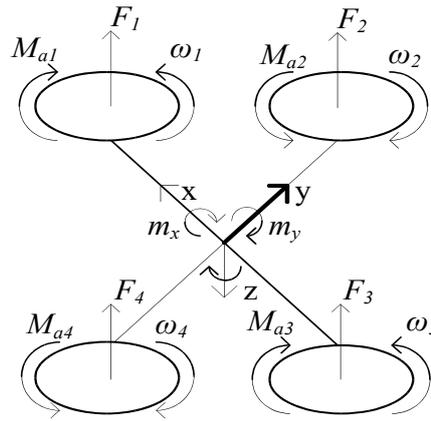


Рис. 1. Структурная схема квадрокоптера

Fig. 1. The block diagram of the quadcopter

На рис. 1 аэродинамические моменты M_{ai} и силы тяги F_i каждой ВМГ описываются следующими выражениями [23, 24]:

$$F_i = k_{F_i} \omega_i^2, \quad M_{ai} = k_{M_{ai}} \omega_i^2,$$

где k_{F_i} и $k_{M_{ai}}$ – аэродинамические константы i -го винта; ω_i – скорость вращения i -й ВМГ; i – порядковый номер ВМГ. Предполагается, что зависимость между заданием на тягу и самой тягой описывается аperiodическим звеном:

$$F_i = \frac{k_f}{T_f p + 1} F_i^d,$$

где p – оператор дифференцирования $p \sim \frac{d}{dt}$; T_f – постоянная времени формирования тяги, одинаковая для всех ВМГ; F_i^d – желаемая тяга i -й ВМГ, формируемая системой управления.

Поворот квадрокоптера осуществляется путем комбинации тяг и аэродинамических моментов в соответствии с рис. 1 следующим образом:

$$m_x = b(F_4 - F_2), \quad m_y = b(F_1 - F_3), \quad m_z = M_{a1} + M_{a3} - M_{a2} - M_{a4},$$

где b – расстояние от ВМГ до оси поворота, одинаковое для каждой ВМГ. Суммарная тяга двигателей $F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ обеспечивает изменение высоты квадрокоптера и его перемещение вдоль осей x, y, z . Предположим, что константы силы тяги $k_{F_i} = k_F$ и аэродинамического момента $k_{M_i} = k_M$ одинаковы для каждого винта, тогда моменты m_x, m_y, m_z и тягу двигателей F_Σ можно выразить через желаемые тяги каждой ВМГ следующим образом:

$$\mathbf{u}_d = \frac{1}{T_f p + 1} \bar{\mathbf{u}}_d = \frac{1}{T_f p + 1} \begin{pmatrix} k_f & k_f & k_f & k_f \\ 0 & -bk_f & 0 & bk_f \\ bk_f & 0 & -bk_f & 0 \\ k_M & -k_M & k_M & -k_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1^d \\ F_2^d \\ F_3^d \\ F_4^d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{f}^d = (F_1^d \ F_2^d \ F_3^d \ F_4^d)^T$ – вектор входных величин объекта управления; $\mathbf{u}_d = (f_\Sigma \ m_x \ m_y \ m_z)^T$ – вектор управления подсистемой движения,

$$P = \begin{pmatrix} k_f & k_f & k_f & k_f \\ 0 & -bk_f & 0 & bk_f \\ bk_f & 0 & -bk_f & 0 \\ k_M & -k_M & k_M & -k_M \end{pmatrix}.$$

Подсистема ориентации квадрокоптера описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J\dot{\boldsymbol{\omega}}^B &= -\boldsymbol{\omega}^B \times J\boldsymbol{\omega}^B + \boldsymbol{\tau}^B, \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^B &= \boldsymbol{\omega}^B, \end{aligned} \quad (2)$$

где $J = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}$ – матрица моментов инерции по осям x, y, z ;

$\boldsymbol{\omega}^B = (\omega_x^B \ \omega_y^B \ \omega_z^B)^T$ – вектор угловых скоростей в собственных координатах квадрокоптера; $\boldsymbol{\tau}^B = (m_x \ m_y \ m_z)^T$ – вектор момента вращения в собственных координатах. В настоящей работе рассмотрим случай управления квадрокоптером при небольших углах наклона (*near hovering*), а за регулируемую величину возьмем угол наклона в собственных координатах $\boldsymbol{\theta}^B$. Объект управления (1) и (2) представлен на рис. 2.

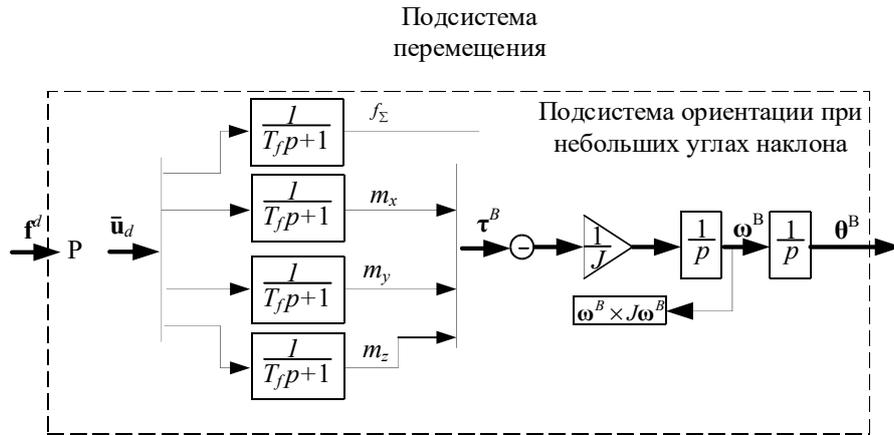


Рис. 2. Структурная схема объекта управления

Fig. 2. Block diagram of the control object

На рис. 2 показана структурная схема объекта управления при одинаковых винтомоторных группах без учета гироскопического эффекта винтов и при равномерной плотности воздуха без учета сопротивления воздуха.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МОДЕЛИ

Обычно не учитывается инерционность ВМГ, а линеаризация подсистемы ориентации выполняется следующей заменой в уравнении (2): $\tau^B = \omega^B \times J\omega^B + J\mathbf{u}$, которая приводит систему к виду двух интеграторов. Но такая линеаризация работает недостаточно точно при ощутимой инерционности ВМГ. В настоящей работе линеаризацию подсистемы ориентации выберем следующим образом:

$$J\dot{\omega}^B = \bar{\mathbf{u}}_d \frac{1}{T_f p + 1} - \omega^B \times J\omega^B,$$

откуда

$$\bar{\mathbf{u}}_d = \omega^B \times J\omega^B + T_f \frac{d(\omega^B \times J\omega^B)}{dx} + J\dot{\omega}^B.$$

Выбрав управляющий сигнал в виде

$$\bar{\mathbf{u}}_d = \omega^B \times J\omega^B + T_f \frac{d(\omega^B \times J\omega^B)}{dx} + J\dot{\omega}^B, \quad (3)$$

получим систему вида «два интегратора». Таким образом, при $\mathbf{f}_d = P^{-1}\bar{\mathbf{u}}_d$ и $\bar{\mathbf{u}}_d$ из уравнения (3) получим систему вида «два интегратора» с аperiodическим звеном, как показано на рис. 3.

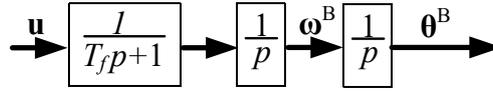


Рис. 3. Структурная схема линейризованного объекта управления

Fig. 3. Block diagram of the linearized plant

В работе строится регулятор для системы на рис. 3.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕГУЛЯТОРА

Регуляторы рассчитаем полиномиальным матричным методом, решив задачу требуемого расположения полюсов замкнутой системы. Первый вариант регулятора имеет второй порядок и учитывает инерционность ВМГ. Второй вариант регулятора также имеет второй порядок, а также, в отличие от первого варианта, имеет астатизм, но не учитывает инерционность ВМГ.

В объекте управления на рис. 3 рассмотрим только вращение по одной оси, так как все три оси друг от друга не зависят, тем самым для простоты заменим векторное обозначение скалярным: вместо \mathbf{u} , ω^B , θ^B пишем u , ω , θ . У объекта один вход u и два выхода ω и θ , поэтому выберем правое полиномиальное матричное разложение объекта и левое для регулятора. Тогда решение задачи расположения полюсов замкнутой системы заключается в решении матричного полиномиального уравнения

$$C(p) = \tilde{Y}(p)D(p) + \tilde{X}(p)N(p), \quad (4)$$

где $p = 2$ – количество выходов объекта; $m = 1$ – количество входов; $D(p) \in R[p]^{m \times m}$ – «знаменатель» правого полиномиального описания объекта; $N(p) \in R[p]^{p \times m}$ – «числитель»; $\tilde{Y}(p) \in R[p]^{m \times m}$ – «знаменатель» левого полиномиального описания регулятора; $\tilde{X}(p) \in R[p]^{m \times p}$ – «числитель»; $R[p]^{m \times p}$ – множество матриц размером $m \times p$, элементы которых – полиномы от p с вещественными коэффициентами. Полиномиальная матрица является полиномом с матричными коэффициентами. Например, дана некоторая полиномиальная матрица $M(s) \in R[s]^{q \times d}$, тогда ее можно записать в виде $M(s) = \sum_{i=1}^k M_i s^i$, где k – старшая степень при s у элементов $M_i \in R^{q \times d}$ полиномиальной матрицы $M(s)$.

Одним из способов решения уравнения (4) является переход к системе линейных алгебраических уравнений, где матрицей системы является матрица Сильвестра \mathfrak{S} [25, 26]:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{S} = \mathfrak{K}, \quad (5)$$

$$\text{где } \mathfrak{S} = \text{diag}(G, G, \dots, G); \quad G = \begin{pmatrix} D_k & D_{k-1} & \dots & D_1 & D_0 \\ N_k & N_{k-1} & \dots & N_1 & N_0 \end{pmatrix};$$

$\mathfrak{K} = (C_{k+q} \ C_{k+q-1} \ \dots \ C_0)$; $\mathfrak{X} = (Y_q \ X_q \ Y_{q-1} \ X_{q-1} \ \dots \ Y_0 \ X_0)$; k – старшая степень полиномиальной матрицы «знаменателя» взаимно простого полиномиального матричного описания (ПМО) объекта; q – старшая степень полиномиальной матрицы «знаменателя» взаимно простого ПМО регулятора (порядок полиномиального регулятора). Система линейных алгебраических уравнений (6) может не иметь решений, иметь одно решение или иметь бесконечно много решений. В первом случае не удастся задать точное расположение полюсов в замкнутой системе, во втором случае их можно задать единственным образом, а в третьем случае появляется свобода в выборе параметров регулятора, что позволяет добиться астатизма или других полезных качеств замкнутой системы. В третьем случае необходимо выбрать один из базисных миноров (минор, определяющий ранг матрицы) матрицы Сильвестра \mathfrak{S}_1 , составить матрицу основных параметров регулятора \mathfrak{X}_1 , тогда система уравнений (5) преобразуется к $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{S}_1 + \bar{\mathfrak{X}} \bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{K}$, где $\bar{\mathfrak{X}}$ – матрица свободных параметров регулятора; $\bar{\mathfrak{S}}$ – столбцы матрицы Сильвестра, не вошедшие в базисный минор. Следовательно, систему уравнений (5) можно переписать в виде $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{K}_1$, где $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} - \bar{\mathfrak{X}} \bar{\mathfrak{S}}$, тогда получим общее решение:

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{K}_1 \mathfrak{S}_1^{-1}. \quad (6)$$

В общем решении основные параметры регулятора зависят от свободных параметров, причем при изменении свободных параметров характеристический полином не изменяется.

Регулятор с учетом инерционности. Запишем правое полиномиальное матричное описание объекта:

$$N(p) = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D(p) = (T_f p + 1)p^2.$$

В данном случае минимальный порядок регулятора – первый:

$$\tilde{X}(p) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,1}p + \tilde{x}_{1,0} \\ \tilde{x}_{2,1}p + \tilde{x}_{2,0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y}(p) = \tilde{y}_1 p + \tilde{y}_0.$$

Запишем матрицу Сильвестра:

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} T_f & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & T_f & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве свободного параметра можно взять $\tilde{x}_{1,0}$, соответствующий третьей строке \mathfrak{S} . Тогда, выбрав все полюса кратными $\mathfrak{K} = (1 \ 4q \ 6q^2 \ 4q^3 \ q^4)$, где q – полюс, применив (6), получим следующий регулятор:

$$W_{r1}(p) = \tilde{Y}^{-1}(p)\tilde{X}(p) = \\ = (T_f s + 4T_f q - 1)^{-1} \begin{pmatrix} (6T_f^2 q^2 - 4T_f q + 1)s - T_f^2 \tilde{x}_{1,0} + 4T_f^2 q^3 \\ \tilde{x}_{1,0} T_f^2 s + T_f^2 q^4 \end{pmatrix}^T.$$

Свободный параметр $\tilde{x}_{1,0} = 0$ приравняем к нулю.

Регулятор без учета инерционности. В этом случае модель объекта имеет второй порядок и описывается двумя интеграторами:

$$N(p) = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D(p) = p^2.$$

Несмотря на то что объект меньшего порядка, регулятор оставим также второго порядка, но за счет свободных параметров добавим ему астатизм. Процедура синтеза аналогична процедуре синтеза регулятора с учетом инерционности, полюса также кратные, но на один порядок кратности меньше за счет снижения порядка модели объекта. В качестве свободного параметра взят дополнительно свободный член знаменателя \tilde{y}_0 :

$$W_{r2}(p) = (p + \tilde{y}_0)^{-1} \begin{pmatrix} (3q - \tilde{y}_0)p + 3q^2 - \tilde{x}_{1,0} \\ \tilde{x}_{1,0} p + q^3 \end{pmatrix}^T.$$

Данный регулятор зависит от двух свободных параметров, которые приравняем к нулю: $\tilde{y}_0 = 0$, $\tilde{x}_{1,0} = 0$.

6. Моделирование. Сравнение двух подходов выполнено при различных T_f и q . На рис. 4 представлены графики переходных процессов при различной постоянной времени ВМГ.

Как видно из рис. 4, при $q = 2$ и $T_{fo} = 0,1$ инерционность достаточно мала, чтобы ею можно было пренебречь, и регулятор без учета инерционности имеет более высокое быстродействие. При $T_{fo} = 0,5$ начинается колебательность, а при $T_{fo} = 1$ система становится неустойчивой. Увеличим быстродействие системы, рассмотрим переходные процессы при $q = 10$, которые показаны на рис. 5.

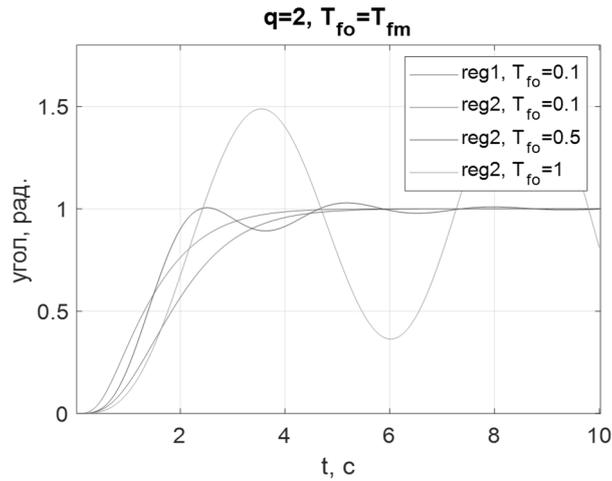


Рис. 4. Графики переходных процессов при точном совпадении постоянной времени ВМГ объекта и модели $T_{fo} = T_{fm}$ и различных их величинах:
reg1 – регулятор с учетом инерционности, reg2 – без учета инерционности

Fig. 4. Graphs of transients with exact coincidence of the time constant of the propeller-motor group of the object and the model $T_{fo} = T_{fm}$ and their various values:
reg1 is a regulator taking into account inertia, reg2 is a regulator without taking it into account

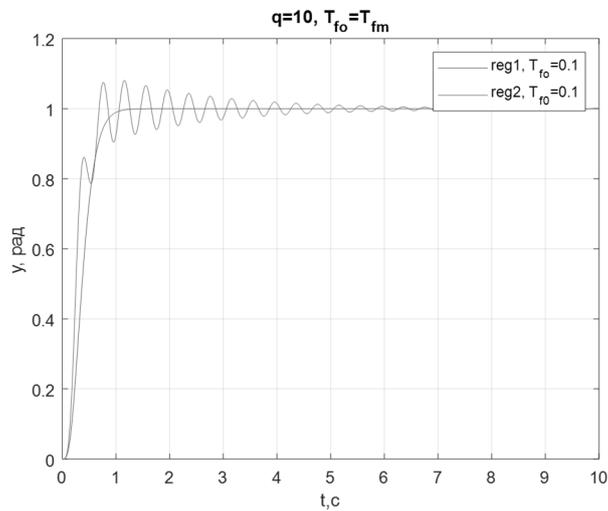


Рис. 5. Графики переходных процессов при точном совпадении постоянной времени ВМГ объекта и модели $T_{fo} = T_{fm} = 0,1$ и $q = 10$

Fig. 5. Graphs of transient processes with exact coincidence of the time constant of the propeller-motor group of the object and the model $T_{fo} = T_{fm} = 0,1$ and $q = 10$

Как видно на рис. 5, при увеличении быстродействия даже малая постоянная времени начинает вносить колебательность в систему, а при $T_{fo} = 0,2$ система становится неустойчивой. Исследуем переходные процессы разработанной системы управления с учетом инерционности объекта при несоответствии постоянной времени объекта и модели. Переходные процессы системы с учетом инерционности показаны на рис. 6.

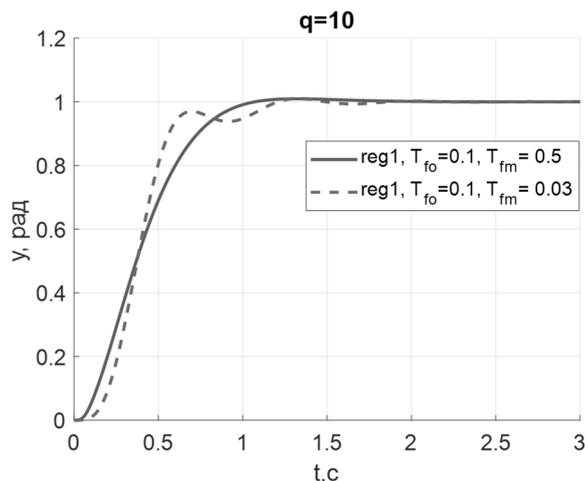


Рис. 6. Графики переходных процессов при разных постоянных времени ВМГ объекта и модели

Fig. 6. Graphs of transient processes at different time constants of the propeller-motor group of the object and the model

Как видно из рис. 6, даже значительное увеличение постоянной времени модели, по сравнению с постоянной времени объекта, не приводит к сильному изменению вида переходного процесса, но при постоянной времени модели меньше, чем у объекта, появляется колебательность, которая может привести к неустойчивости при сильной разнице этого параметра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что для достижения высокого быстродействия системы управления необходимо учитывать в регуляторе инерционность исполнительного механизма объекта. С другой стороны, для учета инерционности и сохранения других качеств системы управления необходимо увеличить порядок регулятора, что приведет к увеличению шумов сигнала управления, поэтому применение данного подхода оправдано при ограничении быстродействия именно инерционностью винтомоторной группы, а не шумовой составляющей измеренного сигнала с датчиков. На рис. 6 показаны графики переходных процессов при несовпадении постоянной времени модели и объекта, откуда можно сделать вывод, что система управления сохраняет свою работоспособность при значительной разности между реальным параметром и заданным в модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yao J., Xin M. Finite-time suboptimal control design for aerobatic maneuver of variable-pitch quadrotor // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 2023. – Vol. 59 (4). – P. 3736–3749. – DOI: 10.1109/TAES.2022.3231241.
2. Шавин М.Ю. Управляемая динамика квадрокоптера с поворотными роторами // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – № 4. – С. 1–16. – 10.18698/2308-6033-2018-4-1755.
3. Шавин М.Ю., Притыкин Д.А. Синтез системы управления квадрокоптером с поворотными роторами и наблюдение за подвижной целью // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 10. – С. 629–639. – DOI: 10.17587/mau.20.629-639.
4. Cutler M., How J.P. Analysis and control of a variable-pitch quadrotor for agile flight // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2015. – Vol. 137 (10). – DOI: 10.1115/1.4030676.
5. Output controller for quadcopters with wind disturbance cancellation / A.A. Pyrkin, A.A. Bobtsov, S.A. Kolyubin, O.I. Borisov, V.S. Gromov, S.V. Aranovskiy // 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA). – IEEE, 2014. – P. 166–170. – DOI: 10.1109/CCA.2014.6981346.
6. Demircioglu H., Basturk H. Adaptive attitude and altitude control of a quadrotor despite unknown wind disturbances // 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC), Melbourne, VIC, Australia. – IEEE, 2017. – P. 274–279. DOI: 10.1109/CDC.2017.8263678.
7. Andrievsky B.R., Furtat I.B. Disturbance observers: methods and applications. II. Applications // Automation and Remote Control. – 2020. – Vol. 81 (10). – P. 1775–1818. – DOI: 10.1134/S0005117920100021.
8. Kusaka T., Tanaka R. Stateful rotor for continuity of quaternion and fast sensor fusion algorithm using 9-axis sensors // Sensors. – 2022. – Vol. 22. – P. 7989. – DOI: 10.3390/s22207989.
9. Пшихонов В.Х., Медведев М.Ю. Групповое управление движением мобильных роботов в неопределенной среде с использованием неустойчивых режимов // Труды СПИИРАН. – 2018. – Вып. 5 (60). – С. 39–63. – DOI: 10.15622/sp.60.2.
10. Zulu A., John S. A review of control algorithms for autonomous quadrotors // Open Journal of Applied Sciences. – 2014. – Vol. 4 (14). – P. 547–556. – DOI: 10.4236/ojapps.2014.414053.
11. On the control of quadcopters based on the feedback linearization method / O.N. Gasparyan, H.G. Darbinyan, A.A. Asatryan, T.A. Simonyan // Proceedings of National Polytechnic University of Armenia. Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. – 2020. – N 2. – P. 44–54.
12. Itaketo U.T., Inyang H. Dynamic modeling and performance analysis of an autonomous quadrotor using linear and nonlinear control techniques // International Journal of Advances in Engineering and Management. – 2021. – Vol. 3 (12). – P. 1629–1641.
13. Воевода А.А., Филушов Ю.П., Филушов В.Ю. Разработка линейной системы управления тягой винтомоторной группы для БПЛА // Информатика и автоматизация. – 2024. – Т. 23, № 5. – С. 1454–1484. – DOI: 10.15622/ia.23.5.7.
14. Шрейнер Р.Т. Системы подчиненного регулирования электроприводов. Ч. 1. Электроприводы постоянного тока с подчиненным регулированием координат. – Екатеринбург: Изд-во УГППУ, 1997. – 277 с.
15. Speed sensorless flatness-based control of PMSM using a second order sliding mode observer / A. Fezzani, S. Drid, A. Makouf, L. Chrifi // 2013 Eighth International Conference and Exhibition on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER), Monte Carlo. Monaco. – IEEE, 2013. – P. 1–9. – DOI: 10.1109/EVER.2013.6521553.
16. Kopečný L., Hnídko J., Bajer J. Drone motor control using fractional-order PID controller // 2023 International Conference on Military Technologies, Brno, Czech Republic. – IEEE, 2023. – P. 1–5. – DOI: 10.1109/ICMT58149.2023.10171276.
17. Development of a dynamic electronic speed controller for multicopters / L. Herrmann, T. Bruckmann, M. Bröcker, D. Schramm // 2019 18th European Control Conference (ECC). – Naples, Italy, 2019. – P. 4010–4015. – DOI: 10.23919/ECC.2019.8795711.
18. Krener A.J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers // Systems & Control Letters. – 1983. – Vol. 3. – P. 47–52.
19. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 258, № 4. – С. 805–809.
20. Fetisov D.A. Linearization of affine systems based on control-dependent changes of independent variable // Differential Equations. – 2017. – Vol. 53 (11). – P. 1483–1494. – DOI: 10.1134/S0012266117110106.
21. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Ратнопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. – М.: Ленанд, 2019. – 500 с.

22. Филушов В.Ю. Линеаризация нелинейного трехканального динамического объекта обратной связью // Научный вестник НГТУ. – 2017. – № 1 (66). – С. 74–85.

23. Арзамасцев А.А., Крючков А.А. Математические модели для инженерных расчетов летательных аппаратов мультироторного типа (часть 1) // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – Т. 19, № 6. – С. 1821–1828.

24. Performance evaluation of a gain-scheduled propeller thrust controller using wind velocity and rotor angular velocity under fluctuating wind / Y. Kato, D. Yashiro, K. Yubai, S. Komada // International Conference on Advanced Motion Control. – Padova, Italy, 2022. – P. 12–17. – DOI: 10.1109/AMC51637.2022.9729317.

25. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.

26. Филушов В.Ю. Полиномиальный матричный метод синтеза для многоканальных объектов с неквадратной матричной передаточной функцией: дис. ... канд. техн. наук: 2.3.1. – СПб., 2022. – 177 с.

Филушов Владислав Юрьевич, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры автоматизации Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – синтез многоканальных систем. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Filiushov Vladislav Yu., PhD, senior lecturer, Novosibirsk State Technical University. His research interests include multi channel system synthesis. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-7-20

Synthesis of a polynomial matrix controller that takes into account the inertia of the actuator*

V.YU. FILIUSHOV

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

filiushov.vladislav@gmail.com

Abstract

In this paper, we consider the synthesis of a quadcopter orientation control system with a small change in rotation angles (near hovering), taking into account the inertia of the propeller-motor groups. The feedback linearization of the orientation subsystem is shown, taking into account the inertia of the propeller groups. The controller is designed using a polynomial matrix synthesis method that provides a given location of the poles of the closed system. To evaluate the results, a comparison with a controller that does not take into account the inertia of the propeller-motor groups is made.

Orientation and positioning control of a multirotor vertical takeoff and landing unmanned aerial vehicle (UAV) in space is inextricably linked with the formation of a motion control vector consisting of a combination of thrusts and aerodynamic moments created by each propeller-motor group. The accuracy and speed of formation of the motion control vector significantly affects the positioning and orientation errors of the UAV. In most studies devoted to the synthesis of UAV control systems, a motion control vector is used without taking into account the dynamics of the propeller-motor groups, which in some cases forces us to reduce the speed of the control system. It is shown that the increase in the control system performance can be limited by inertia, since

* Received 13 February 2024.

oscillation occurs, and with further attempts to increase the performance by shifting the desired poles of the characteristic polynomial further into the negative region, the control system becomes unstable. To solve this problem, it is proposed to take into account the inertia of the propeller-motor group. It is shown that due to this, it is possible to increase the performance of the control system. It is also shown that the feedback linearization of the quadcopter orientation subsystem is also affected by the inertia of the propeller-motor group, so it is proposed to perform feedback linearization taking into account the inertia.

Keywords: polynomial synthesis method, polynomial matrix decomposition, synthesis, multichannel controller, electromechanical system, multirotor, propeller-motor group, feedback linearization

REFERENCES

1. Yao J., Xin M. Finite-time suboptimal control design for aerobatic maneuver of variable-pitch quadrotor. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, vol. 59 (4), pp. 3736–3749. DOI: 10.1109/TAES.2022.3231241.
2. Shavin M.Yu. Upravlyayemaya dinamika kvadroptera s povorotnymi rotorami [Dynamics and control of a tilt-motor quadrotor]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, no. 4, pp. 1–16. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1755.
3. Shavin M.Yu., Pritykin D.A. Sintez sistemy upravleniya kvadropterom s povorotnymi rotorami i nablyudenie za podvizhnoi tsel'yu [Tilt-rotor quadrotor control system design and mobile object tracking]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie = Mechatronics, Automation, Control*, 2019, vol. 20, no. 10, pp. 629–639. DOI: 10.17587/mau.20.629-639.
4. Cutler M., How J.P. Analysis and control of a variable-pitch quadrotor for agile flight. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2015, vol. 137 (10). DOI: 10.1115/1.4030676.
5. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Borisov O.I., Gromov V.S., Aranovskiy S.V. Output controller for quadcopters with wind disturbance cancellation. *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 2014, pp. 166–170. DOI: 10.1109/CCA.2014.6981346.
6. Demircioglu H., Basturk H. Adaptive attitude and altitude control of a quadrotor despite unknown wind disturbances. *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, Melbourne, VIC, Australia, 2017, pp. 274–279. DOI: 10.1109/CDC.2017.8263678.
7. Andrievsky B.R., Furtat I.B. Disturbance observers: methods and applications. II. Applications. *Automation and Remote Control*, 2020, vol. 81 (10), pp. 1775–1818. DOI: 10.1134/S0005117920100021.
8. Kusaka T., Tanaka R. Stateful rotor for continuity of quaternion and fast sensor fusion algorithm using 9-axis sensors. *Sensors*, 2022, vol. 22, p. 7989. DOI: 10.3390/s22207989.
9. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu. Gruppovoe upravlenie dvizheniem mobil'nykh robotov v neopredelennoi srede s ispol'zovaniem neustoiichivyykh rezhimov [Group control of autonomous robots motion in uncertain environment via unstable modes]. *Trudy SPIIRAN = SPIIRAS Proceedings*, 2018, iss. 5 (60), pp. 39–63. DOI: 10.15622/sp.60.2.
10. Zulu A., John S. A review of control algorithms for autonomous quadrotors. *Open Journal of Applied Sciences*, 2014, vol. 4 (14), pp. 547–556. DOI: 10.4236/ojapps.2014.414053.
11. Gasparyan O.N., Darbinyan H.G., Asatryan A.A., Simonyan T.A. On the control of quadcopters based on the feedback linearization method. *Proceedings of National Polytechnic University of Armenia. Information Technologies. Electronics, Radio Engineering*, 2020, no. 2, pp. 44–54.
12. Itaketo U.T., Inyang H. Dynamic modeling and performance analysis of an autonomous quadrotor using linear and nonlinear control techniques. *International Journal of Advances in Engineering and Management*, 2021, vol. 3 (12), pp. 1629–1641.
13. Voevoda A., Filiushov Y., Filiushov V. Razrabotka lineinoi sistemy upravleniya tyagoi vintomotornoi gruppy dlya BPLA [Development of a Linear Control System for a Throttle of a UAV Propeller-Motor Group]. *Informatika i avtomatizatsiya = Informatics and Automation*, 2024, vol. 23, no. 5, pp. 1454–1484. DOI: 10.15622/ia.23.5.7.
14. Shreiner R.T. *Sistemy podchinennogo regulirovaniya elektroprivodov*. Ch. 1. *Elektroprivody postoyannogo toka s podchinennym regulirovaniem koordinat* [Systems of subordinate control of electric drives. Pt. 1. DC electric drives with subordinate coordinate control]. Ekaterinburg, UGPPU Publ., 1997. 277 p.

15. Fezzani A., Drid S., Makouf A., Chrifi L. Speed sensorless flatness-based control of PMSM using a second order sliding mode observer. 2013 Eight International Conference and Exhibition on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER), Monte Carlo, Monaco, 2013, pp. 1–9. DOI: 10.1109/EVER.2013.6521553.
16. Kopečný L., Hnidka J., Bajer J. Drone motor control using fractional-order PID controller. 2023 International Conference on Military Technologies, Brno, Czech Republic, 2023, pp. 1–5. DOI: 10.1109/ICMT58149.2023.10171276.
17. Herrmann L., Bruckmann T., Bröcker M., Schramm D. Development of a dynamic electronic speed controller for multicopters. 2019 18th European Control Conference (ECC), Naples, Italy, 2019, pp. 4010–4015. DOI: 10.23919/ECC.2019.8795711.
18. Krener A.J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 1983, vol. 3, pp. 47–52.
19. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Upravlyaemost' nelineinykh sistem i sintez algoritmov upravleniya [Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805–809. (In Russian).
20. Fetisov D.A. Linearization of affine systems based on control-dependent changes of independent variable. *Differential Equations*, 2017, vol. 53 (11), pp. 1483–1494. DOI: 10.1134/S0012266117110106.
21. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Rapoport L.B. *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Mathematical theory of automatic control], Moscow, Lenand Publ., 2019. 500 p.
22. Filyushov V.Yu. Linearizatsiya nelineinogo trekhkanal'nogo dinamicheskogo ob'ekta obratnoi svyaz'yu [Linearization of multichannel object by output injectio]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 1 (66), pp. 74–85.
23. Arzamastsev A.A., Kryuchkov A.A. Matematicheskie modeli dlya inzhenernykh raschetov letatel'nykh apparatov mul'tirotnogo tipa (chast' 1) [Mathematical models for engineering calculations of aircrafts of multi-rotor type (Part 1)]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 1821–1828.
24. Kato Y., Yashiro D., Yubai K., Komada S. Performance evaluation of a gain-scheduled propeller thrust controller using wind velocity and rotor angular velocity under fluctuating wind. *International Conference on Advanced Motion Control*, Padova, Italy, 2022, pp. 12–17. DOI: 10.1109/AMC51637.2022.9729317.
25. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [The theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.
26. Filiushov V.Yu. *Polinomial'nyi matrichnyi metod sinteza dlya mnogokanal'nykh ob'ektov s nekvadratnoi matrichnoi peredatochnoi funktsiei*. Diss. kand. tekhn. nauk [Polynomial matrix synthesis method for multichannel objects with non-square matrix transfer function. PhD eng. sci. diss.]. St. Petersburg, 2022. 177 p.

Для цитирования:

Филюшов В.Ю. Синтез полиномиального матричного регулятора, учитывающего инерционность исполнительного механизма // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 4 (96). – С. 7–20. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-7-20.

For citation:

Filiushov V.Yu. Sintez polinomial'nogo matrichnogo regul'yatora uchityvayushchego inertsiyosnost' ispolnitel'nogo mekhanizma [Synthesis of a polynomial matrix controller that takes into account the inertia of the actuator]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 4 (96), pp. 7–20. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-7-20.

Быстрый алгоритм вычисления матрично-векторных произведений в задаче разложения функций в ряды Фурье на круге^{*}

Н.А. ЗЕЛЕНЧУК^а, А.В. ТЕРЕХОВ^б

630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

^а n.zelenchuk@corp.nstu.ru ^б a.terexov@corp.nstu.ru

Значительный интерес состоит в разработке и исследовании возможностей применения быстрых алгоритмов для вычисления матрично-векторных произведений в контексте преобразования на круге, что позволит существенно улучшить эффективность вычисления моментов Цернике. В статье рассмотрен эффективный способ сжатия матриц преобразования для функций Цернике на основе алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ) и метода экстракомпонент. Высокая производительность алгоритма достигается за счет перехода от исходной матрицы к матрице с разреженным портретом посредством специальной процедуры, реализованной на основе дискретного преобразования Фурье. Предполагается, что сжатие матрицы выполняется однократно на подготовительном этапе, тогда как количество преобразуемых векторов таково, что вычислительными затратами подготовительного этапа можно пренебречь. Такой подход сокращает время счета матрично-векторного произведения на вычислительном этапе вследствие исключения близких по модулю к нулю элементов сжатой матрицы. Разработанный алгоритм позволяет экономично умножать исходную матрицу преобразования на вектор с использованием БДПФ, что снижает оценку вычислительной трудоемкости метода в целом.

Подготовительный этап потребует выполнения порядка $O(N^2 \log N)$ операций, в то время как на вычислительном этапе необходимо выполнить $O(N \log N)$ арифметических действий, что значительно меньше оценки $O(N^2)$ для прямого способа расчета матрично-векторного произведения. Результаты вычислительных экспериментов показали устойчивость, корректность и быстроедействие процедур, что позволяет сократить время вычислений на несколько порядков по сравнению с прямым умножением матрицы преобразования на вектор для решения задачи разложения функций в ряды по базису Цернике.

Ключевые слова: интегральные преобразования, дискретные преобразования, матрицы преобразования, быстрые алгоритмы, сжатие матрицы, ортогональные многочлены, ряды Фурье, многочлены Цернике

^{*} Статья получена 28 февраля 2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Дискретное преобразование Фурье является одним из основных методов численного анализа, поскольку существует быстрый алгоритм, позволяющий значительно сократить вычислительные затраты с $O(N^4)$ до $O(N^2 \log N)$ в двумерном случае в задачах расчета матрично-векторного произведения вида

$$y = \mathcal{F}x, \quad \mathcal{F} \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad y, x \in \mathbb{C}^N,$$

где \mathcal{F} – эрмитова матрица преобразования Фурье [1]. Несмотря на экономичность алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), представляет интерес разработка быстрых методов для разложения функции в ряд по ортогональным многочленам, в том числе по многочленам Цернике.

В настоящее время функции Цернике широко применяются в различных научно-технических областях, включая прямые и обратные задачи оптики, аэрокосмическую инженерию, аэродинамику и анализ изображений [2, 3, 5–7]. Следовательно, для решения этих задач методами математического моделирования и численного анализа актуальной является разработка быстрого метода разложения функции в ряд по многочленам Цернике.

Вычисление моментов Цернике является вычислительно затратным процессом, например, по сравнению с разложением функции в ряд по многочленам Чебышева. Это обусловлено необходимостью многократного вычисления факториалов высоких порядков при определении радиальной составляющей многочленов. Также следует учитывать, что использование трехчленных рекуррентных соотношений, как правило, приводит к неустойчивости расчетов. В процессе нахождения значений многочленов Цернике требуются многократные вычисления тригонометрических функций и произведения векторов на плотные матрицы преобразования, что приводит к снижению производительности как прямого, так и обратного преобразований. Задачи реализации таких преобразований по вычислительной сложности эквивалентны в оценке числа арифметических операций и имеют вид $O(N^4 M^2)$. С целью решения этих проблем было предложено множество алгоритмов быстрого вычисления моментов Цернике [8–12]. Все существующие к данному моменту алгоритмы быстрого преобразования Цернике имеют существенно большую вычислительную сложность в сравнении с преобразованием Фурье [1]. Рассматриваемая задача становится критичной в областях, где требуются высокая точность и производительность алгоритмов, например обработка изображений для распознавания образов. Значительный интерес состоит в разработке и исследовании возможности применения быстрых алгоритмов для вычисления специальных матрично-векторных произведений в контексте преобразования Цернике, что позволит существенно улучшить эффективность вычисления коэффициентов разложения Цернике. Недавно разработанный метод экстракомпонент для быстрого вычисления матрично-векторных произведений специального вида [4] обладает высокой производительностью и общностью, что позволяет успешно применить его к решению поставленной задачи.

1. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЦЕРНИКЕ

Рассмотрим прямую и обратную задачи разложения функции в ряд по многочленам Цернике, которые могут быть сформулированы в следующем виде:

$$F(\rho, \varphi) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^N \left[A_n^m \widehat{U}_n^m(\rho, \varphi) + B_n^m \check{U}_n^m(\rho, \varphi) \right],$$

$$\begin{aligned} A_n^m &= \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \widehat{U}_n^m(\rho, \varphi) \rho d\varphi d\rho, \\ B_n^m &= \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \check{U}_n^m(\rho, \varphi) \rho d\varphi d\rho. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $F(\rho, \varphi)$ – функция, заданная на единичной окружности $(\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi)$; ϵ_m – нормирующий множитель ($\epsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\epsilon_m = 2$ в противном случае); A_n^m и B_n^m – коэффициенты разложения, $\widehat{U}_n^m(\rho, \varphi)$ – базисные функции Цернике:

$$\begin{aligned} \widehat{U}_n^m(\rho, \varphi) &= R_n^m(\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi}, \\ \check{U}_n^m(\rho, \varphi) &= R_n^m(\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi}, \\ R_n^m(\rho) &= \sum_{l=0}^{(n-m)/2} (-1)^l \frac{(n-l)!}{l! \left(\frac{n+m-l}{2}\right)! \left(\frac{n-m-l}{2}\right)!} \rho^{n-2l}, \end{aligned}$$

где $R_n^m(\rho)$ – радиальные многочлены Цернике.

Расчет значений интеграла (1) производится в два этапа

$$\begin{aligned} A_n^m &= \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \widehat{G}(\rho) R_n^m(\rho) \rho d\rho, \\ B_n^m &= \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \int_0^1 \check{G}(\rho) R_n^m(\rho) \rho d\rho, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\rho) &= \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} d\varphi, \\ \check{G}(\rho) &= \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь наиболее вычислительно затратной операцией является расчет интеграла (2), тогда как значения функций (3) могут быть приближенно определены посредством БПФ алгоритма. С ростом значений n и m число нулей как для функций $R_n^m(\rho)$, так и для функций $e^{im\varphi}$ возрастает. Однако нули функций $R_n^m(\rho)$ расположены на интервале $(0, 1)$ с неравномерным шагом таким, что минимальное расстояние между любыми соседними нулями уменьшается с ростом n . Расчет интегралов от быстро осциллирующих функций

методом Ньютона–Котеса требует высоких вычислительных затрат [13]. Выбор метода Гаусса для интегрирования с неравномерным расположением узлов и весов является наиболее подходящим для данного случая, при этом квадратурная формула представляется в виде

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) \rho d\rho \approx \sum_{k=0}^K \omega_k R_n^m(\rho_k), \quad (4)$$

где $K = (n - m) / 2$ – фиксированное количество узлов ρ_k ($k = 0, 1, \dots, K$) и весов ω_k . С целью обеспечения ортогональности матриц преобразования необходимо удвоить количество узлов сетки. При численном интегрировании быстроосциллирующих функций требуется достичь высокой точности вычислений для сохранения ортогональности функций в их скалярном произведении [15]. Для базисных функций $R_n^m(\rho)$ это означает, что интеграл их произведения должен удовлетворять следующему условию ортогональности:

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) R_{n'}^m(\rho) \omega(\rho) d\rho = \frac{\delta_{nn'}}{2(n+1)},$$

где $\delta_{nn'}$ – символ Кронекера. Недостаточная точность расчета интегралов (4) может привести к потере ортогональности и, как следствие, эрмитовости матриц. В результате становится невозможным устойчивое обращение преобразования Цернике.

2. АЛГОРИТМ СЖАТИЯ МАТРИЦ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЦЕРНИКЕ МЕТОДОМ ЭКСТРАКОМПОНЕНТ

Рассмотрим реализацию метода экстракомпонент [4] при построения быстрого алгоритма для преобразования Цернике. Считая, что значения функции $G(\rho)$ заранее вычислены, исследуем проблему вычисления сумм:

$$\begin{matrix} A_n^m \\ B_n^m \end{matrix} \approx \frac{\epsilon_m(n+1)}{\pi} \sum_{k=0}^K \omega_k \begin{matrix} \widehat{G}(\rho_k) \\ \check{G}(\rho_k) \end{matrix} R_n^m(\rho_k),$$

которые запишем в виде матрично-векторного произведения $F = V\tilde{F}$, где

$$V := \left(R_n^m(\rho_k) \right)_{k,n=0}^{K,N} \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (N+1)}, \quad (5)$$

$$F = \begin{pmatrix} A_n^m \\ B_n^m \end{pmatrix}_{n=0}^N, \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} \widehat{G}(\rho_k) \\ \check{G}(\rho_k) \end{pmatrix}_{k=0}^K.$$

Первую строку матрицы V для $m = 0$ определим как

$$V_{1\bullet} = [1, R_2^0(\rho_0), R_4^0(\rho_0), \dots, R_N^0(\rho_0)], \quad (6)$$

где ρ_k – это нули многочлена $R_{2N}^0(\rho)$. Элементы вектора $V_{1\bullet}$ приведены на рис. 1, *a*; модули соответствующих фурье-компонент $\mathcal{F}V_{1\bullet}^T$ представлены на рис. 1, *б*.

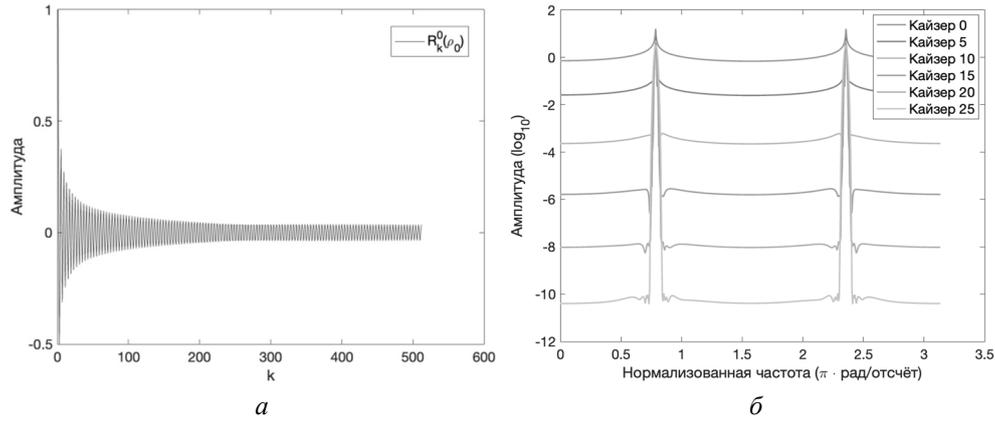


Рис. 1. График элементов строки $V_{1\bullet}$, где значения многочленов в точке $\rho_0 = 0,706$ соединены линиями (*a*); абсолютные значения коэффициентов соответствующего ряда Фурье для различных весовых функций (*б*)

Fig. 1. Plot of row elements $V_{1\bullet}$, where individual values of the polynomial at the point $\rho_0 = 0,706$ are connected by lines (*a*); absolute values of the coefficients of the corresponding Fourier series for different weight functions (*b*)

В окрестности $k = 0$ наблюдается осциляция функции $R_k^0(\rho_0)$ (рис. 1, *a*). Из-за невыполнения условия периодичности границ в точке ρ_0 спектр функции будет неограниченным, т.е. возникает явление Гиббса (рис. 1, *б* (Кайзер 0)). Устранение (или ослабление) явления Гиббса достигается применением оконных функций к спектру исходного сигнала [14]. Для этого может быть использована оконная функция Кайзера

$$\omega_n^{\zeta, N} = \frac{I_0 \left[\zeta \sqrt{1 - \left(\frac{2n-1}{N} \right)^2} \right]}{I_0(\zeta)}, \quad 0 \leq n \leq N,$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $\zeta \geq 0$ – коэффициент, определяющий долю энергии, сосредоточенной в главном лепестке спектра оконной функции.

Рассмотрим для строки (6) преобразование $\ddot{V}_{1\bullet} = \mathcal{F}W_N V_{1\bullet}^T$, где диагональная матрица W_N задана как

$$W_N = \text{diag}\{\omega_0^{\zeta,N}, \omega_1^{\zeta,N}, \dots, \omega_N^{\zeta,N}\} \in \mathbb{R}^{N+1, N+1}.$$

Абсолютные значения для компонент спектра в логарифмическом масштабе представлены на рис. 1, б, откуда видно, что с ростом параметра ζ спектр для (6) локализован в области главного лепестка и для некоторого $\varepsilon > 0$ элементы матрицы, удовлетворяющие условию $|\tilde{v}_{1j}| < \varepsilon \max_j |\tilde{v}_{1j}|$, можно полагать равными нулю [4]. Поступая аналогичным образом для всех строк матрицы V , получаем итоговую сжатую матрицу преобразования

$$\ddot{V} = V W_N \mathcal{F}^*,$$

для которой большинство элементов могут быть исключены из расчета в силу их относительной малости.

Принимая во внимание свойство эрмитовости $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = E$, где E – единичная матрица, запишем произведение $F = V\tilde{F}$ как

$$F = V \underbrace{W_N \mathcal{F}^* \mathcal{F} W_N^{-1}}_E \tilde{F} = \ddot{V} \mathcal{F} W_N^{-1} \tilde{F}, \quad (7)$$

а произведение $\tilde{F} = V^T F$ как

$$\tilde{F} = \underbrace{W_N^{-1} \mathcal{F}^* \mathcal{F} W_N}_E V^T F = W_N^{-1} \mathcal{F} \ddot{V}^T F. \quad (8)$$

Таким образом, предварительно вычислив матрицы \ddot{V} и \ddot{V}^T , обладающие компактным портретом, можно экономично рассчитать искомые матрично-векторные произведения. Одно фурье-преобразование и одно умножение на сжатую матрицу \ddot{V} или \ddot{V}^T потребуется выполнить для каждого умножаемого вектора. Умножение на матрицу W_N незначительно увеличивает общий объем вычислений.

Элементы матрицы W_N^{-1} могут принимать большие значения, поэтому произведения с этой матрицей будут увеличивать вычислительные погрешности, возникающие при реализации формул (7) и (8) вследствие исключения относительно малых элементов матриц \ddot{V} и \ddot{V}^T . Необходимо модифицировать расчетные формулы с целью ограничения роста погрешностей. В методе экстракомпонент предлагается определять расширенную матрицу V_e , полученную из матрицы V путем добавления новых столбцов [4]. Добавить слева экстрастолбцы для расширенной матрицы V_e не представляется возможным, поскольку порядок n не может принимать отрицательные значения, поэтому

добавляются экстрастолбцы справа. Предполагается, что первые s столбцов матрицы V являются экстрастолбцами матрицы V_e . Следовательно,

$$F = V_e \tilde{F}_e = \left(R_n^m(\rho_k) \right)_{k,n=0}^{K,N+s} \tilde{F}_e,$$

где

$$\tilde{F}_e = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{экстра}}, \underbrace{\tilde{f}_{s+1}, \tilde{f}_{s+2}, \dots, \tilde{f}_N}_{\tilde{F}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{экстра}} \right)^T,$$

а $s \geq 0$ – параметр, задающий число добавленных справа столбцов. Результат вычисления $V_e \tilde{F}_e$ не будет содержать слагаемых, соответствующих произведению первых s компонент вектора \tilde{F} и первых столбцов матрицы V . Эти слагаемые вычисляются на следующих шагах метода экстракомпонент, для чего формируется подматрица, состоящая из первых s столбцов матрицы V . Далее процесс умножения повторяется аналогичным образом (рис. 2). На заключительном шаге умножение матрицы на вектор экономичнее выполнять посредством прямого метода, так как порядок матрицы на последнем шаге будет незначителен.

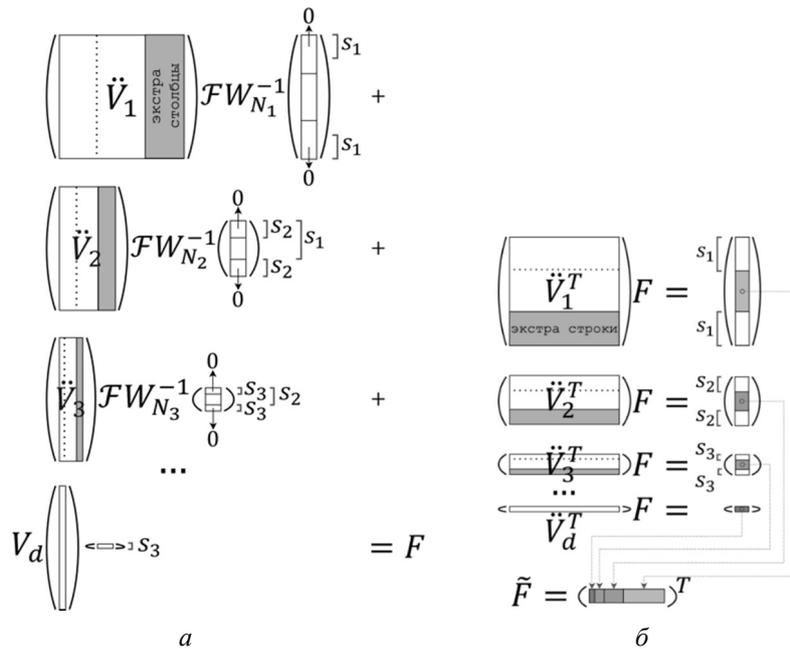


Рис. 2. Многошаговый вариант метода экстракомпонент для расчета произведения:

a) $F = V\tilde{F}$; б) $\tilde{F} = V^T F$

Fig. 2. Multi-step variant of the extra-component method for computing the product

a) $F = V\tilde{F}$; b) $\tilde{F} = V^T F$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Рассмотрим вопрос оценки эффективности предлагаемых алгоритмов для умножения вектора на матрицу вида (5) при вычислении значений ряда Цернике в точках $\rho_k \in (0, 1)$. Размерность матрицы преобразования (рис. 3, *a*) $2N \times N$, а коэффициенты разложения рассчитываются в нулях многочлена $R_{4N}^0(\rho)$.

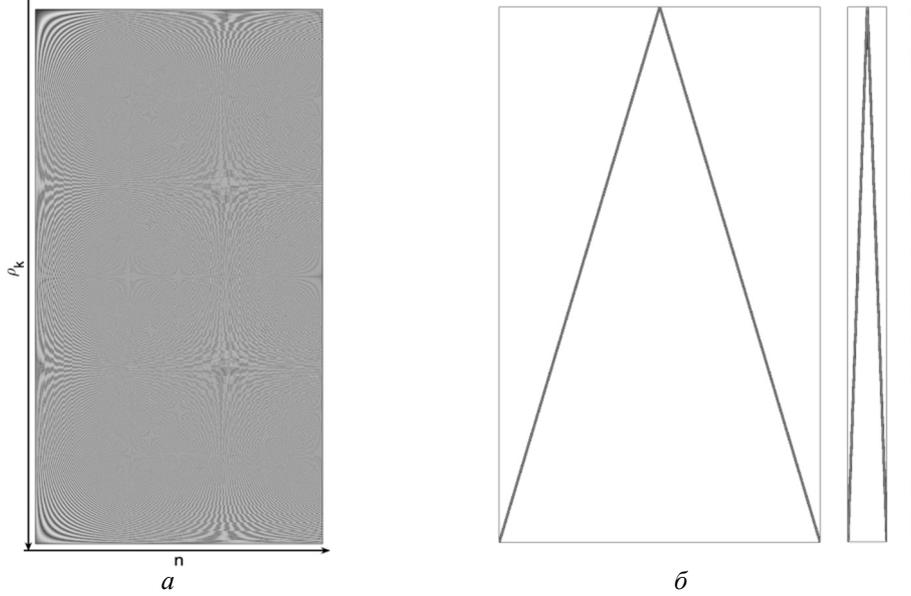


Рис. 3. Декомпозиция матрицы преобразования $V \in \mathbb{R}^{1024 \times 512}$ (*a*) на сжатые матрицы $V_1 W_{614} \mathcal{F}^* \in \mathbb{C}^{1024 \times 614}$, $V_2 W_{124} \mathcal{F}^* \in \mathbb{C}^{1024 \times 124}$ и матрицу $V_3 \in \mathbb{R}^{1024 \times 22}$ (*b*)

Fig. 3. Decomposition of transform matrix $V \in \mathbb{R}^{1024 \times 512}$ (*a*) into compressed matrices $V_1 W_{614} \mathcal{F}^* \in \mathbb{C}^{1024 \times 614}$, $V_2 W_{124} \mathcal{F}^* \in \mathbb{C}^{1024 \times 124}$, and matrix $V_3 \in \mathbb{R}^{1024 \times 22}$ (*b*)

Вычислительные процедуры были реализованы в виде программ на языке MATLAB с использованием библиотек Apple Accelerate BLAS (ILP64) для ускорения расчетов матрично-векторных произведений и FFTW для эффективного выполнения быстрого преобразования Фурье. Расчеты проводились на процессоре Apple M2 Pro с тактовой частотой 3500 МГц и 16 ГБ оперативной памяти.

Так как элементы матрицы (5) вещественные, то коэффициенты ряда Фурье будут симметрично сопряженными относительно нулевой частоты, и, следовательно, на подготовительном шаге достаточно вычислить только половину сжатой матрицы \check{V} . На рис. 3 представлена исходная матрица преобразования V , а также сжатые матрицы $\check{V}_1 \in \mathbb{C}^{1024 \times 614}$, $\check{V}_2 \in \mathbb{C}^{1024 \times 124}$ и матрица $V_3 \in \mathbb{R}^{1024 \times 22}$, полученная на последнем шаге метода экстракомпонент, для которой сжатие нецелесообразно. В отличие от прямого умножения вектора на матрицу V предложенный подход требует последовательного умножения на три матрицы, представленные на рис. 3, *b*. В отсутствие необходимости деления на весовую функцию Кайзера итоговый результат можно было бы получить, умножив только первую сжатую матрицу на вектор. Однако для

предотвращения деления на близкие к нулю элементы матрицы W_N требуется дополнительное умножение на две матрицы различных порядков. Благодаря разреженной структуре и компактности портретов сжатых матриц их умножение на вектор может быть выполнено с высокой эффективностью.

Результаты численных расчетов представлены в табл. 2. Предложенный метод, несмотря на высокую оптимизацию фреймворка Accelerate, позволяет значительно сократить время вычислений коэффициентов Цернике в широком диапазоне значений N благодаря компактной структуре сжатой матрицы преобразования (рис. 4, табл. 1). С целью достижения точности порядка 10^{-6} число экстрастолбцов задавалось $s \approx N / 8$.

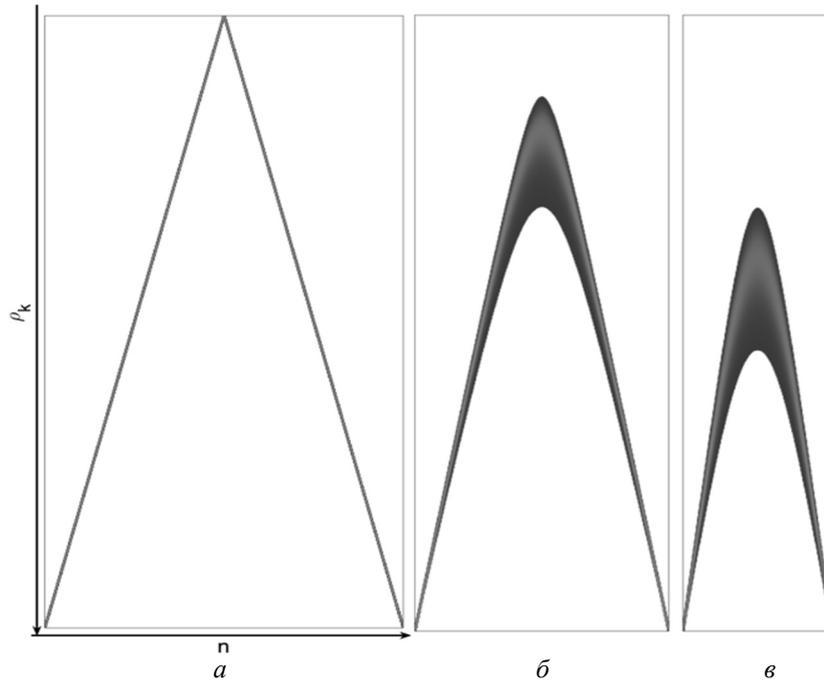


Рис. 4. Амплитуда элементов сжатой матрицы $VW_N \mathcal{F}^*$

для функций $R_n^m(\rho_k)$, где $\rho_k \in (0, 1)$, $m \leq n \leq 1024$:

a) $m = 1$; б) $m = 300$; в) $m = 600$

Fig. 4. The amplitude of the elements of the compressed matrix $VW_N \mathcal{F}^*$

for functions $R_n^m(\rho_k)$, where $\rho_k \in (0, 1)$, $m \leq n \leq 1024$:

a) $m = 1$; b) $m = 300$; c) $m = 600$

При разработке экономичных процедур умножения векторов на матрицы для преобразования Цернике следует учитывать, что с ростом m степень сжатия матрицы преобразования сокращается. Это снижает эффективность алгоритмов, основанных на методе экстракомпонент. Исключение составляют случаи, когда значения азимутального порядка m близки к N (рис. 4 и 5), при которых порядок умножаемой матрицы становится незначительным. Решение этой проблемы будет рассмотрено в следующих работах.

Таблица 1

Table 1

Размеры подматриц $2N \times N_i$ на i -м шаге многоуровневого алгоритма умножения сжатой матрицы по строкам на вектор. На заключительном шаге размерность матрицы составляет $2N \times N_d$ элементов

The dimensions of the submatrices $2N \times N_i$ at the i -th step of the multi-level algorithm for multiplying the compressed matrix row-wise by a vector. At the final step, the dimension of the matrix is $2N \times N_d$ elements

N	N_1	N_2	N_3	N_d
64	73	–	–	9
128	145	–	–	17
256	288	–	–	32
512	575	72	–	9
1024	1149	142	–	17
2048	2296	280	–	32
4096	4590	555	70	9
8192	9178	1106	136	16

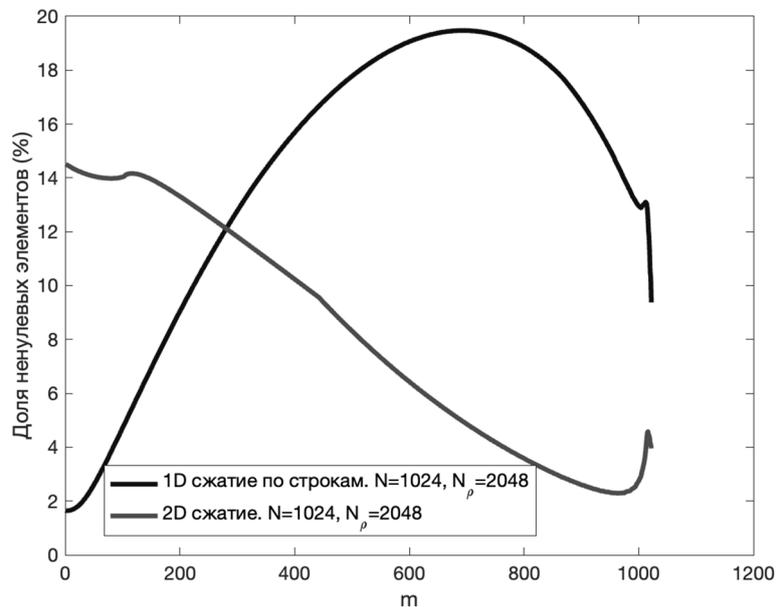


Рис. 5. Сравнение качества 1D- и 2D-алгоритмов сжатия матрицы для многочленов $R_n^m(\rho_k)$ от m при $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Fig. 5. Comparison of the performance of 1D- and 2D-matrix compression algorithms for polynomials $R_n^m(\rho_k)$ of m when $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Таблица 2

Table 2

Зависимости времени счета (T , секунды) и точности вычислений для прямого и быстрого алгоритмов умножения вектора на матрицу вида (5) от порядка матрицы N (для достижения точности расчета 10^{-6} количество экстрастолбцов было задано $N/8$ на основе вычисления параметров $\zeta(\epsilon_1)$ и $s(\epsilon_2, \zeta)$)

Dependencies of computation time (T in seconds) and calculation accuracy for the direct and fast algorithms for vector-matrix multiplication of the form (5) as a function of the matrix order N (to achieve a calculation accuracy of 10^{-6} the number of extra columns was set to $N/8$, based on the computation of the parameters $\zeta(\epsilon_1)$ and $s(\epsilon_2, \zeta)$)

N	AF_BLAS	$\epsilon_1 = 10^{-9}, \epsilon_2 = 10^{-4}$		
	T_1	T_2	$\frac{T_1}{T_2}$	$\frac{\ Vx - \dot{V}FW_N^{-1}x\ _2}{\ Vx\ _2}$
64	3,19E-05	3,58E-05	0,89	2,17E-06
128	6,13E-05	5,18E-05	1,18	4,85E-06
256	1,99E-04	7,12E-05	2,80	3,96E-06
512	7,19E-04	1,34E-04	5,36	4,99E-06
1024	2,74E-03	2,32E-04	11,79	4,83E-06
2048	1,61E-02	6,21E-04	25,87	5,26E-06
4096	4,86E-02	1,09E-03	44,48	5,69E-06
8192	0,16	2,58E-03	63,55	5,65E-06

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен общий подход к построению быстрых алгоритмов для расчета интегрального преобразования Цернике. Вычислительные эксперименты показали, что предлагаемый способ на основе метода экстракомпонент может быть эффективно применен для решения поставленной задачи. Высокая производительность алгоритма достигается за счет перехода от исходной матрицы к матрице с разреженным портретом посредством специальной процедуры на основе дискретного преобразования Фурье. Предполагается, что сжатие матрицы выполняется однократно на подготовительном этапе, тогда как количество преобразуемых векторов таково, что вычислительными затратами подготовительного этапа можно пренебречь. Такой подход сокращает время счета матрично-векторного произведения на вычислительном этапе вследствие исключения близких по модулю к нулю элементов сжатой матрицы. Высокая производительность метода в целом обеспечивается благодаря широкому использованию векторизованных инструкций современных микропроцессоров.

Дальнейшее направление исследований заключается в разработке новых методов и подходов, направленных на повышение эффективности сжатия матриц преобразования Цернике при высоких азимутальных порядках m . Это значительно улучшит точность и производительность алгоритмов решения задач в областях, таких как обработка изображений, моделирование сложных поверхностей, лазерные технологии и аэрокосмическая инженерия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Coolley J., Tukey J.* An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // *Mathematics of Computation.* – 1965. – Vol. 19 (90). – P. 297–301.
2. *Zernike F., Stratton F.J.M.* Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* – 1934. – Vol. 94 (5). – P. 377–384.
3. *Noll R.J.* Zernike polynomials and atmospheric turbulence // *Journal of the Optical Society of America.* – 1976. – Vol. 66 (3). – P. 207–211.
4. *Terekhov A.V.* An extra-component method for evaluating fast matrix-vector multiplication with special functions // *Numerical Algorithms.* – 2022. – Vol. 92. – P. 2189–2217.
5. *Born M., Wolf E.* Principles of optics. – New York: Pergamon Press, 1983. – 854 p.
6. *Bezdidko S.N.* The use of Zernike polynomials in optics // *Soviet Journal of Optical Technology.* – 1974. – Vol. 41. – P. 425–429.
7. *Niu K., Tian C.* Zernike polynomials and their applications // *Journal of Optics.* – 2022. – Vol. 24 (12). – P. 123001. – DOI: 10.1088/2040-8986/ac9e08.
8. A theoretical comparison among recursive algorithms for fast computation of Zernike moments using the concept of time complexity / N. Bastani, A. Vard, M. Jabalameli, V. Bastani // *American Journal of Computational Mathematics.* – 2021. – Vol. 11. – P. 304–326.
9. *Kintner E.C.* A recurrence relation for calculating the Zernike polynomials // *Optica Acta: International Journal of Optics.* – 1976. – Vol. 23 (6). – P. 499–500. DOI: 10.1080/713819279.
10. *Deng A., Wei C., Gwo C.-Y.* Stable, fast computation of high-order Zernike moments using a recursive method // *Pattern Recognition.* – 2016. – Vol. 56. – P. 16–25. – DOI: 10.1016/j.patcog.2016.02.014.
11. *Prata A., Rusch W.V.T.* Algorithm for computation of Zernike polynomials expansion coefficients // *Applied Optics.* – 1989. – Vol. 28 (4). – P. 749–754. DOI: 10.1364/AO.28.000749.
12. *Chong C.-W., Paramesran R., Mukundan R.* A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments // *Pattern Recognition.* – 2003. – Vol. 36. – P. 731–742.
13. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. – М.: Физматгиз, 1959. – 328 с.
14. *Анго А.* Математика для электро- и радионинженеров / с предисл. Л. Де Бройля. – М.: Наука, 1965. – 780 с.
15. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1979. – 416 с.

Зеленчук Никита Андреевич, аспирант, ассистент кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Автор 9 научных работ, в том числе обладатель одного свидетельства о регистрации программы для ЭВМ. Область научных интересов: вычислительная математика, численные методы, интеллектуальный анализ данных и машинное обучение. E-mail: n.zelenchuk@corp.nstu.ru

Терехов Андрей Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Автор более 30 научных работ, в том числе обладатель двух свидетельств о регистрации программ для ЭВМ. Область научных интересов: вычислительная математика, численные методы, математическое моделирование. E-mail: a.terexov@corp.nstu.ru

Zelenchuk Nikita A., post graduate student and assistant lecturer at the Department of Computer Engineering, Novosibirsk State Technical University. He is the author of 9 scientific papers, including one registration certificate for a computer program. His research interests include

computational mathematics, numerical methods, data mining, and machine learning. E-mail: n.zelenchuk@corp.nstu.ru

Terekhov Andrew V., Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor at the Department of Computer Engineering, Novosibirsk State Technical University. He is the author of more than 30 scientific papers, including two registration certificates for computer programs. His research interests cover computational mathematics, numerical methods, and mathematical modeling. E-mail: a.terexov@corp.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-21-34

A fast algorithm for computing matrix-vector products in the problem of function decomposition into Fourier series on a circle*

N.A. ZELENCHUK^a, A.V. TEREKHOV^b

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

^a *n.zelenchuk@corp.nstu.ru* ^b *a.terexov@corp.nstu.ru*

Abstract

A significant interest lies in the development and exploration of the potential application of fast algorithms for computing matrix-vector products in the context of transforms on the circle, which will substantially improve the efficiency of calculating Zernike moments. This paper presents an efficient method for compressing transform matrices for Zernike functions based on the Fast Discrete Fourier Transform (FDFT) algorithm and the extra-component method. The proposed approach enables efficient multiplication of the initial transform matrix by a vector using FDFT, significantly reducing the computational complexity of the overall method. It is assumed that matrix compression is performed only once during the preparatory stage, while the number of vectors to be transformed is sufficiently large for the computational costs of this stage to be negligible. This approach reduces the computation time of the matrix-vector product during the processing stage by eliminating matrix elements with magnitudes close to zero. The preparatory stage will require performing of the order of $O(N^2 \log N)$ operations, while the computational stage will involve performing $O(N \log N)$ arithmetic operations, which is significantly less than the estimate $O(N^2)$ for the direct method of calculating the matrix-vector product. Computational experiments demonstrate the stability, accuracy, and efficiency of the procedures, which makes it possible to substantially reduce the computation time by several orders of magnitude compared to direct matrix-vector multiplication for the current problem of decomposing functions into series according to the Zernike basis.

Keywords: integral transforms, discrete transforms, transform matrices, fast algorithms, matrix compression, orthogonal polynomials, Fourier series, Zernike polynomials

REFERENCES

1. Cooley J., Tukey J. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 1965, vol. 19 (90), pp. 297–301.
2. Zernike F., Stratton F.J.M. Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1934, vol. 94 (5), pp. 377–384.
3. Noll R.J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America*, 1976, vol. 66 (3), pp. 207–211.
4. Terekhov A.V. An extra-component method for evaluating fast matrix-vector multiplication with special functions. *Numerical Algorithms*, 2022, vol. 92, pp. 2189–2217.

* Received 28 February 2024.

5. Born M., Wolf E. *Principles of optics*. New York, Pergamon Press, 1983. 854 p.
6. Bezdídko S.N. The use of Zernike polynomials in optics. *Soviet Journal of Optical Technology*, 1974, vol. 41, pp. 425–429.
7. Niu K., Tian C. Zernike polynomials and their applications. *Journal of Optics*, 2022, vol. 24 (12), p. 123001. DOI: 10.1088/2040-8986/ac9e08.
8. Bastani N., Vard A., Jabalameli M., Bastani V. A theoretical comparison among recursive algorithms for fast computation of Zernike moments using the concept of time complexity. *American Journal of Computational Mathematics*, 2021, vol. 11, pp. 304–326.
9. Kintner E.C. A recurrence relation for calculating the Zernike polynomials. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 1976, vol. 23 (6), pp. 499–500. DOI: 10.1080/713819279.
10. Deng A., Wei C., Gwo C.-Y. Stable, fast computation of high-order Zernike moments using a recursive method. *Pattern Recognition*, 2016, vol. 56, pp. 16–25. DOI: 10.1016/j.patog.2016.02.014.
11. Prata A., Rusch W.V.T. Algorithm for computation of Zernike polynomials expansion coefficients. *Applied Optics*, 1989, vol. 28 (4), pp. 749–754. DOI: 10.1364/AO.28.000749.
12. Chong C.-W., Paramesran R., Mukundan R. A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments. *Pattern Recognition*, 2003, vol. 36, pp. 731–742.
13. Krylov V.I. *Priblizhennoe vychislenie integralov* [Approximate calculation of integrals]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 328 p.
14. Angot A. *Matematika dlya elektro- i radioinzhenerov* [Mathematics for electrical and radio engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 780 p. (In Russian).
15. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. 2nd ed., rev. Moscow, Nauka Publ., 1979. 416 p.

Для цитирования:

Зеленчук Н.А., Терехов А.В. Быстрый алгоритм вычисления матрично-векторных произведений в задаче разложения функций в ряды Фурье на круге // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 4 (96). – С. 21–34. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-21-34.

For citation:

Zelenchuk N.A., Terekhov A.V. Bystryi algoritm vychisleniya matrichno-vektornykh proizvedenii v zadache razlozheniya funktsii v ryady Fur'e na kruge [A fast algorithm for computing matrix-vector products in the problem of function decomposition into Fourier series on a circle]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 4 (96), pp. 21–34. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-21-34.

Исследование влияния проницаемости межскважинного пространства на эффективность парогравитационного дренажа*

Д.А. ЛЕОНОВИЧ

*630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный
технический университет*

leonovich.2018@stud.nstu.ru

В работе на основе численного моделирования представлено исследование влияния проницаемости межскважинного пространства на эффективность парогравитационного дренажа при разных режимах работы нагнетательной скважины. Исследование проведено на модели коллектора, содержащего высоковязкую нефть, динамическая вязкость которой при пластовой температуре 8 градусов Цельсия составляет около 25 Па · с.

Моделирование процессов неизотермической многофазной фильтрации выполнено с использованием подхода, основанного на неявном расчете давления методом конечных элементов и пересчете насыщенностей фаз после их переноса в соответствии со значениями потоков, полученных по рассчитанным градиентам давления. Температурное поле рассчитывается в два этапа: конвективный перенос тепла учитывается при перетоках фаз, а распространение тепла за счет теплопроводности среды – путем решения краевой задачи для уравнения теплопроводности. Метод моделирования учитывает зависимости вязкостей фаз от температуры и их плотностей от температуры и давления, выделение или поглощение энергии при парообразовании и конденсации, а также неоднородность геологической модели.

Численные эксперименты по исследованию влияния проницаемости межскважинного пространства на эффективность парогравитационного дренажа проведены для неоднородного коллектора, в котором между горизонтальными скважинами расположен слой с отличающейся от остальной части коллектора проницаемостью. Результаты продемонстрировали разницу в добыче нефти и изменение формы паровой камеры в зависимости от контраста проницаемости в слое и в остальной части коллектора. При одинаковом режиме работы скважин модель со слоем проницаемостью в двадцать раз ниже, чем в остальном коллекторе, показала наибольший объем накопленной добытой нефти. Исследована возможность прорыва пара или уже сконденсировавшейся воды к добывающей скважине. При вариации объемов закачки пара получены ситуации, когда увеличение закачки пара приводит к снижению доли нефти в отбираемой смеси. Показано, что для эффективного применения паровых методов увеличения нефтеотдачи важен

* Стаття получена 10 сентября 2024 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда № 24-11-00204, <https://rscf.ru/project/24-11-00204/>.

предварительный анализ коллектора и моделирование предполагаемых режимов работы скважин.

Ключевые слова: гидродинамическое моделирование в паровых средах, неизотермическая многофазная фильтрация, численное моделирование, разработка нефтяных месторождений, сверхвязкая нефть, моделирование паровых методов, парогравитационный дренаж, тепловые методы увеличения нефтедобычи

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время многие крупные месторождения нефти в значительной степени выработаны. В этой связи всё больше внимания уделяется освоению месторождений с трудноизвлекаемыми запасами нефти. По приведенным в работе [1] данным, в 2019 г. доля трудноизвлекаемой нефти в общем объеме добытой нефти в России составила более 60 %. В качестве примера можно привести такие западносибирские месторождения, как Северо-Комсомольское, Тазовское, Айтимское, Ваньеганское. Однако для их разработки необходимо применять специальные методы увеличения нефтеотдачи пласта: химические, тепловые или другие третичные методы [2, 3]. При использовании таких методов для планирования эффективных режимов работы скважин важную роль играет численное моделирование [4, 5].

Вязкость нефти в битуминозных песках может достигать сотен паскалей в секунду ($\text{Па} \cdot \text{с}$). И при разработке известных битумных залежей в провинции Альберта (Канада) весьма эффективно показали себя тепловые методы, например парогравитационный дренаж (SAGD) и циклическая закачка пара (CSS) [6, 7]. Полевые испытания паровых методов продемонстрировали экономическую выгоду и вызвали интерес к этим методам добычи нефти, в том числе из битумных залежей, что вызвало интерес к развитию методов моделирования гидро- и термодинамических процессов при использовании таких технологий [8–10].

Парогравитационный дренаж как способ повышения нефтеотдачи начал развиваться в 1980-х годах. Идея метода состоит в том, что пара горизонтальных, расположенных друг под другом скважин сначала месяц-два прогревает среду благодаря нагнетанию пара. Это позволяет снизить вязкость тяжелой нефти. После прогрева околоскважинного пространства нижняя из пары скважина переходит в режим добычи, а верхняя продолжает нагнетать пар, который под действием гравитационных сил поднимается вверх по коллектору, образуя паровую камеру. По фронту распространения пара высоковязкая нефть прогревается, становится более подвижной и спускается под давлением поднимающегося пара к добывающей скважине [11].

В 1980-х годах Р. Батлер одним из первых начал рассматривать способы моделирования парогравитационного дренажа и проводить лабораторные эксперименты по демонстрации процесса на уменьшенной модели пласта. В его работах был представлен подход к моделированию из предположения, что форма паровой камеры представляет собой треугольник, и его размеры в высоту и ширину зависят от размера коллектора и нагнетаемого объема пара, а движение нефти происходит по сторонам этого треугольника [12].

Применяемые в последние годы математические модели основаны на использовании аналитических формул для определения размеров паровой

камеры и задания механизма стекания нефти в добывающую скважину. Исследования в данной области связаны, как правило, с уточнением формы паровой камеры, модификацией формул на разных этапах разработки и усложнением моделей тепловых процессов на стенке паровой камеры [13, 14].

В представленной работе используется подход, в котором паровая камера формируется в процессе численного моделирования прогрева смеси и ее фильтрации. Этот подход позволяет получать форму паровой камеры в процессе моделирования, в том числе и при неоднородности коллектора.

Основной целью работы является исследование на основе численного моделирования влияния значений абсолютной проницаемости в неоднородном коллекторе и интенсивности закачки пара на добычу нефти.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Моделируемый коллектор является пористой средой и характеризуется пористостью породы Φ и тензором абсолютной проницаемости \mathbf{K} . Фильтруемая смесь состоит из фаз, обладающих индивидуальными фильтрационными свойствами. К таким свойствам относятся динамическая вязкость η_{ph} (Па · с), плотность ρ_{ph} (кг/м³), фазовая проницаемость κ_{ph} (безразмерная величина) в виде множителя к абсолютной проницаемости, которая зависит от насыщенности фазы в среде, а также коэффициенты теплоемкости c_{ph} (Дж / (кг · °С)) и теплопроводности λ_{ph} (Вт / (кг · °С)). Насыщенностью фазы S_{ph} в среде называют ее долю в смеси, распределенной по расчетной области. Процесс фильтрации в пористых средах базируется на использовании закона Дарси, согласно которому скорость фильтрации фазы \vec{u}_{ph} определяется соотношением

$$\vec{u}_{ph} = -\frac{\kappa_{ph}(S_{ph}(P, T))}{\eta_{ph}(T)} \mathbf{K} \left(\text{grad } P + (0, 0, \rho_{ph}(P, T)g)^T \right), \quad (1)$$

где P – давление; g – ускорение свободного падения; T – температура.

На каждом временном интервале поле давления в среде рассчитывается по состоянию коллектора (распределению насыщенностей фаз) путем решения краевой задачи:

$$-\text{div} \left(\sum_{ph=1}^{NP} \frac{\kappa_{ph}(S_{ph}(P, T))}{\eta_{ph}(T)} \mathbf{K} \left(\text{grad } P + (0, 0, \rho_{ph}(P, T)g)^T \right) \right) = f^{\Omega}(P, T),$$

$$P|_{\Gamma^1} = P^{\Gamma^1},$$

$$\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa_{ph}}{\eta_{ph}} \mathbf{K} \left(\text{grad } P + (0, 0, \rho_{ph}g)^T \right) \Big|_{\Gamma^2} \cdot \vec{n} = f^{\Gamma^2}, \quad (2)$$

где NP – количество фаз; f^{Ω} – функция, определяющая распределенный по пространству дефицит или профицит объема смеси, возникающий из-за зави-

симости плотности породы и фаз от давления или в результате фазового перехода, условия которого определяются давлением и температурой; Γ^1 и Γ^2 – границы расчетной области (включая зоны перфорации), на которых задано давление P^{Γ^1} или поток смеси f^{Γ^2} .

Краевая задача (2) решается методом конечных элементов. Расчетная область разбивается на конечные элементы, искомая функция распределения давления представляется в виде линейной комбинации базисных функций с неизвестными (искомыми) весами в узлах сетки [15]. При этом учитывается сильная нелинейность правой части дифференциального уравнения (из-за ее зависимости от искомого давления), а также зависимость f^{Ω} от температуры, для расчета которой применяется специальный метод с отдельным учетом конвективного теплопереноса и перетоков тепла за счет теплопроводности [16].

По полученному полю давления вычисляются объемы смеси и каждой фазы в отдельности, перетекающие через грани ячеек сетки, и рассчитываются новые объемы каждой фазы на элементах. Далее вычисляются новые насыщенности и температуры фаз (учитывается изменение температуры за счет конвективного теплопереноса).

После пересчета состояния ячеек на них вычисляются фазовые проницаемости и вязкости фаз согласно заданным зависимостям K_{ph} от насыщенности фазы и η_{ph} от температуры смеси. Затем решается тепловая задача, определяющая изменение температуры за счет теплопроводности.

Все описанные процедуры выполняются в цикле по временным шагам с использованием в процессе моделирования перетоков фаз метода локального дробления шага по времени для различных групп ячеек [17, 18].

2. ВЛИЯНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ МЕЖСКВАЖИННОГО ПРОСТРАНСТВА НА ДОБЫЧУ НЕФТИ ПРИ ПАРОГРАВИТАЦИОННОМ ДРЕНАЖЕ

Для исследования эффективности применения парогравитационного дренажа был проведен ряд вычислительных экспериментов. Были рассмотрены неоднородные коллекторы с разной проницаемостью слоя между добывающей и нагнетательной горизонтальными скважинами.

На рис. 1 слева представлен вид модели в плоскости YZ (горизонтальные скважины направлены вдоль оси X). Пористость в коллекторе равна 0,2, а доля объема пор, занимаемого свободной водой, – 20 %. Коллектор имеет толщину 50 м. От 25 до 45 м область в основном имеет проницаемость 2000 мД. В ней между скважинами на глубине от 33 до 35 м расположен исследуемый слой, в котором проницаемость была выбрана 10 мД, 100 мД, 1000 мД или 2000 мД. Выше и ниже проницаемой области расположены низкопроницаемые слои, в которых K равно 100 мД. Теплоемкость пласта принята 1000 Дж / (кг · °С), плотность 2300 кг/м³, теплопроводность 3 Вт / (м · °С). Вязкость воды и нефти в паскалях в секунду (Па · с) в зависимости от температуры представлена в таблице.

Вязкость воды и нефти**Viscosity of water and oil**

$T, ^\circ\text{C}$	8	25	35	65	95	120	150	175	260
$\eta^{\text{нефть}}$	24,8	5,8	1,4	0,2	0,05	0,02	0,008	0,005	0,0025
$\eta^{\text{вода}}$	0,0013	0,0009	0,0007	0,0004	0,0003	0,00023	0,00018	0,00015	0,0001

Расстояние между горизонтальными скважинами составляет 5 м. Длина зон перфорации скважин – по 600 м, но среда считается не меняющейся вдоль скважин, поэтому задача может рассматриваться как двумерная (все мощности и объемы здесь и далее приведены для полной длины зон перфорации). В нижнюю скважину сначала закачивается пар для прогрева пласта, после чего она работает только в режиме добычи. В верхнюю скважину нагнетается пар на протяжении всего времени моделирования. Мощность закачки пара сначала постепенно нарастает, а к концу времени моделирования снижается, чтобы после формирования паровой камеры снизить долю воды в отборе. В среднем мощность закачки пара составляет 75 000 кг/сут. Количество жидкости в отбираемой смеси также постепенно растет по мере прогрева пласта и в среднем составляет 85 м³/сут.

Начальная температура пласта задана 8 °С, пластовое давление – 1,5 атм. Температура закачиваемого пара 180 °С. Зависимости температуры кипения воды от давления и количества тепла в процессе фазового перехода «вода – пар» были взяты из справочника [19].

Для описания фазовых проницаемостей использовались кривые $k^{ph} = k^{ph} (S^{ph})^{\alpha^{ph}}$, параметры k^{ph} и α^{ph} были взяты следующими: $k^{\text{нефть}} = 0,425$; $\alpha^{\text{нефть}} = 1,5$; $k^{\text{вода}} = 0,01$; $\alpha^{\text{вода}} = 1,1$; $k^{\text{пар}} = 0,2$; $\alpha^{\text{пар}} = 1,5$.

На рис. 1 представлен график накопленной добычи нефти, полученный в результате моделирования. Менялась только проницаемость слоя в межскважинном пространстве, режим работы скважин одинаковый для всех вариантов, поэтому график отражает изменение доли нефти в отбираемой смеси в зависимости от фильтрационных свойств коллектора. Слишком низкопроницаемая среда затрудняет спуск нефти к добывающей скважине, что выражается в более медленном росте графика накопленной нефти. Однородная среда рядом со скважинами (проницаемость слоя в межскважинном пространстве 2000 мД совпадает с проницаемостью высокопроницаемой области коллектора) не затрудняет спуск воды и конденсирующегося пара к добывающей скважине, поэтому примерно до 900 суток добыча нефти ниже, чем в остальных вариантах. Через некоторое время рост графика накопленной нефти увеличивается, то есть доля нефти в отборе повышается, потому что большая часть пластовой воды уже сместилась и в прогретой смеси, спускающейся к добывающей скважине, доля нефти растет. В варианте с проницаемостью 1000 мД в период от 1000 до 1200 суток накопленная нефть увеличивается медленнее, а значит, в этот период, в отличие от варианта с проницаемостью 100 мД, больше воды подойдет к добывающей скважине.

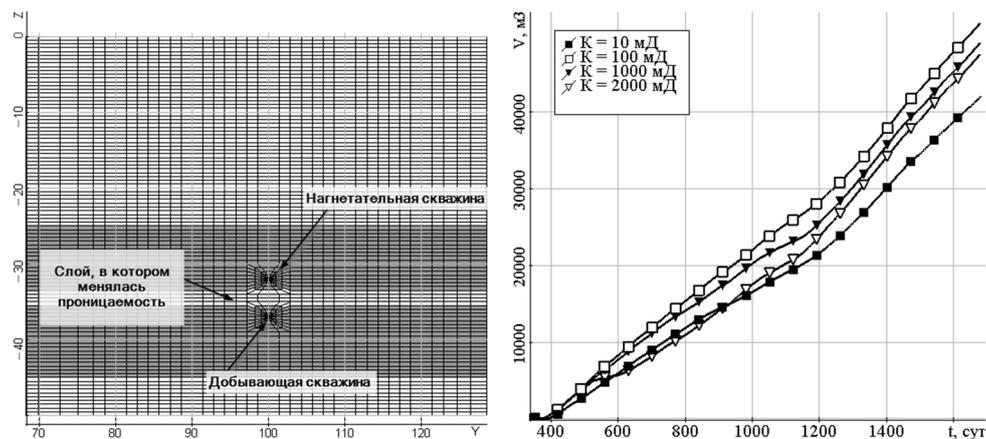


Рис. 1. Вид модели в плоскости YZ (слева) и объем накопленной нефти в процессе моделирования для разной абсолютной проницаемости K слоя в межскважинном пространстве (справа)

Fig. 1. The view of the model in the YZ plane (left) and the volume of accumulated oil in the modeling process for different absolute permeability K of the layer in the interwell space (right)

3. ВЛИЯНИЕ МОЩНОСТИ ЗАКАЧКИ ПАРА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ НЕФТЕОТДАЧИ ПЛАСТА

Процесс формирования паровой камеры значительно влияет на объем добычи нефти. Поэтому для коллекторов с разными проницаемостями слоя в межскважинном пространстве было проведено исследование по влиянию мощности закачки пара на отбор нефти и распределение нефтенасыщенности в пласте.

Модель для исследований была взята такой же, что и описанная в предыдущем пункте. В качестве базового режима закачки был выбран план работы скважин из предыдущего пункта. Для исследований в данном пункте мощность нагнетательной скважины увеличивалась в 2,5, 5 и 10 раз. Также был рассмотрен вариант снижения мощности закачки пара на 30%. Отбор не менялся во всех вариантах плана работы скважин.

Полученные графики накопленной нефти представлены на рис. 2. Увеличение мощности закачки в 5 и 10 раз приводит к резкому снижению объема добытой нефти из-за прорыва воды и пара. Увеличение мощности закачки в 2,5 раза на начальных этапах может привести к повышению доли нефти в отбираемой смеси, но потом всё равно приводит к прорыву пара и существенному снижению доли нефти. Уменьшение объема закачки на 30% не приводит к увеличению доли нефти в отборе. Отметим, что в этом режиме объем воды (в эквиваленте по массе к нагнетаемому пару) закачивается в среду меньше, чем объем жидкости в добываемой смеси, и такой режим может стать нереализуемым из-за ухода значений давления на добывающей скважине за заданный нижний порог.

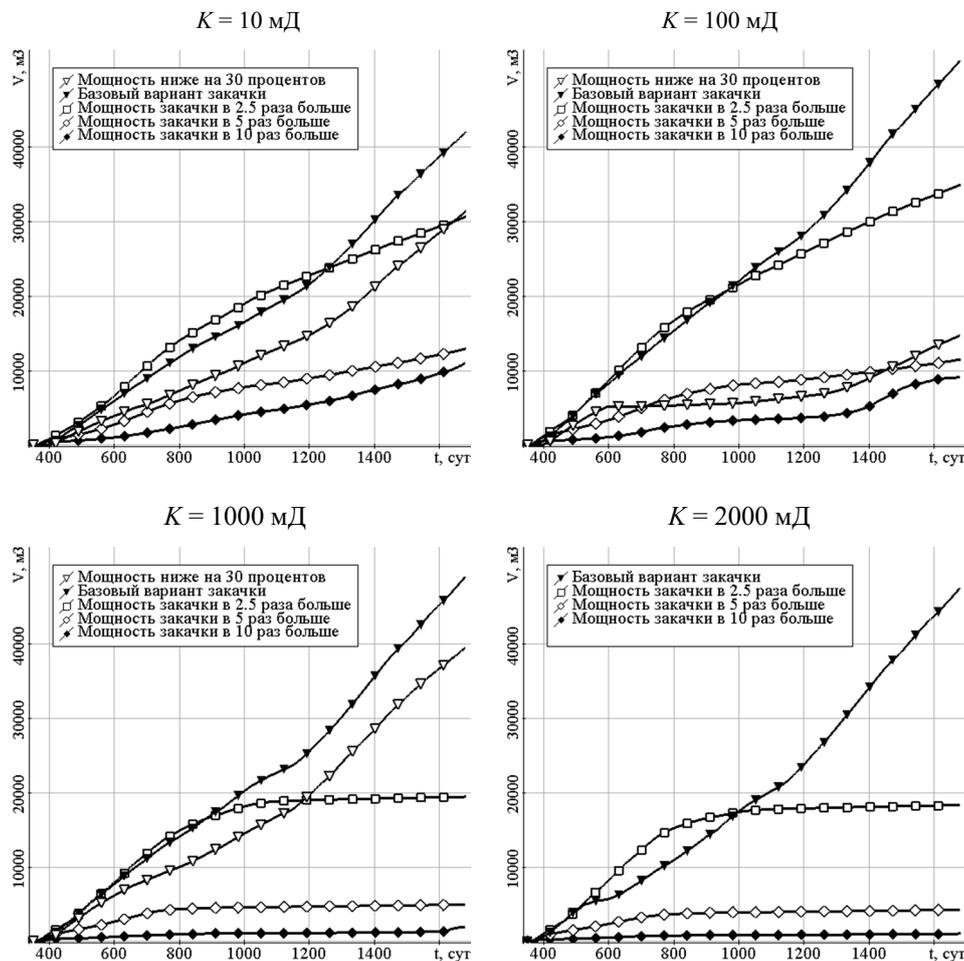


Рис. 2. Накопленная добыча нефти в зависимости от мощности закачки для разных проницаемостей слоя в межскважинном пространстве

Fig. 2. Accumulated oil production depending on the injection capacity for different permeabilities of the layer in the interwell space

В большинстве исследуемых вариантов после 1000 суток график накопленной нефти почти не растет (а значит, резко снижается доля нефти в отборе). На рис. 3 для этого времени приведены распределения насыщенности нефти для разных проницаемостей межскважинного пространства при мощности закачки в 2,5 раза больше базовой. Жирными линиями показаны границы слоя, где менялась проницаемость. Стрелки указывают на наиболее интересные области, где еще осталась значимая насыщенность нефти. Для низкопроницаемого слоя в межскважинном пространстве (10 и 100 мД) эти области находятся ниже этого слоя. Для высокопроницаемого слоя в межскважинном пространстве (1000 и 2000 мД) такой области к 1000 суток уже практически нет, и поэтому рост накопленной добычи нефти почти прекращается.

В случае проницаемости слоя 10 мД по распределению нефтенасыщенности видно, что остальные фазы пластовой смеси (вода и пар) заполняют область вокруг нагнетательной скважины и к 1000 суток эта смесь с низкой насыщенностью нефти подходит к добывающей скважине. Для слоя с прони-

цаемостью 100 мД в области добывающей скважины нефти чуть больше. В случае проницаемости 1000 и 2000 мД к рассматриваемому моменту времени вокруг добывающей скважины нефти практически не осталось.

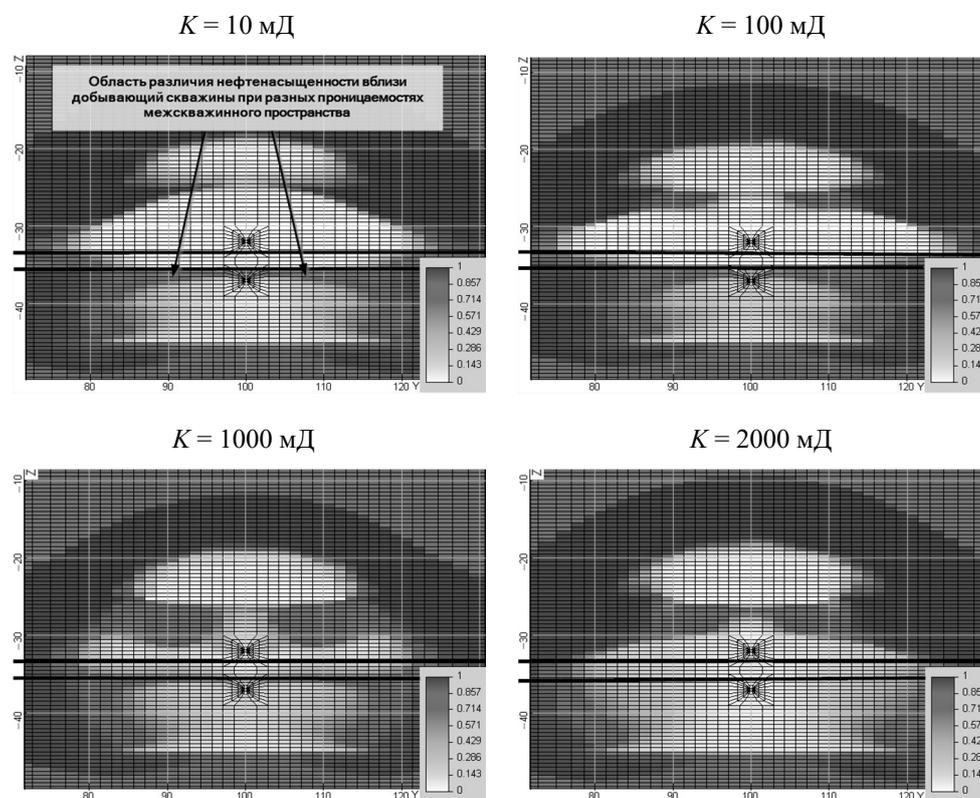


Рис. 3. Распределения насыщенности нефти в момент времени 1000 суток для мощности закачки в 2,5 раза выше базовой при разной абсолютной проницаемости слоя в межскважинном пространстве

Fig. 3. Distributions of oil saturation at the time of 1000 days for an injection rate 2,5 times higher than the base one with different absolute permeability of the layer in the interwell space

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования показано влияние проницаемости слоя в межскважинном пространстве на добычу нефти при применении парогравитационного дренажа. Наибольшую эффективность исследуемый метод может показать в коллекторе с небольшой проницаемостью слоя в межскважинном пространстве, которая немного затрудняет перемещение смеси в область добывающей скважины. Показано, что увеличение мощности закачки пара может значительно снизить объемы добычи нефти. Хотя для всех рассмотренных вариантов среды базовый режим работы скважин оказался оптимальным, снижение объема закачки пара в моделях с более низкой проницаемостью межскважинного пространства дало результат лучше, чем при увеличении мощности закачки, особенно в 5 и 10 раз. Увеличение мощности в 2,5 раза увеличило

объем добытой нефти в начале моделируемого промежутка времени, но результат на всем исследуемом промежутке времени оказался заметно хуже базового режима работы скважин. Всё вышеперечисленное демонстрирует сложность эмпирического выбора режимов добычи при применении парового метода и необходимость проведения предварительного анализа на основе моделирования, максимально точно учитывающего все особенности протекающих в среде процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мишенин М.В. Динамика добычи нефти из трудноизвлекаемых запасов в России // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2021. – Т. 2, № 4. – С. 294–301.
2. Jamaloei B.Y., Singh A.R. Hot water flooding and cold water flooding in heavy oil reservoirs // Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization and Environmental Effects. – 2016. – Vol. 38 (14). – P. 2009–2017.
3. A comprehensive review of thermal enhanced oil recovery: techniques evaluation / E.M.A. Mokheimer, M. Hamdy, Z. Abubakar, M.R. Shakeel, M.A. Habib, M. Mahmoud // Journal of Energy Resources Technology. – 2019. – Vol. 141 (3). – P. 030801. – DOI: 10.1115/1.4041096.
4. Оптимизация разработки нефтяных месторождений на основе 3D-модели пласта, полученной в результате автоадаптации / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, И.И. Патрушев, А.В. Насыбуллин, Г.Ж. Алтынбекова, Д.А. Леонович // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2023. – Т. 23, вып. 4. – С. 544–558. – DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-4-544-558. – EDN: XGVLMB.
5. Mir H., Stavashi M. Whole-time scenario optimization of steam-assisted gravity drainage (SAGD) with temperature, pressure, and rate control using an efficient hybrid optimization technique // Energy. – 2022. – Vol. 239, pt. C. – DOI: 10.1016/j.energy.2021.122149.
6. Lawal K.A., Olamigoke O. On the optimum operating temperature for steam floods // SN Applied Sciences. – 2021. – Vol. 3. – P. 9. – DOI: 10.1007/s42452-020-04082-2.
7. Яраханова Д.Г. О перспективах процессов освоения сверхвязких нефтей и природных битумов горизонтальными скважинами // Георесурсы. – 2015. – № 3 (62). – С. 53–56. – DOI: 10.18599/grs.62.3.10.
8. Моделирование месторождений и залежей нефти и газа для решения задач разведки и разработки / В.Ю. Керимов, Р.Н. Бахтизин, К.И. Данцова, И.М. Салихова // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. – 2018. – № 3. – С. 52–56. – DOI: 10.24411/0131-4270-2018-10307.
9. Experimental and numerical investigation on extra-heavy oil recovery by steam injection using vertical injector -horizontal producer / P. Liu, Y. Zhang, P.-ch. Liu, Y. Zhou, Z. Qi, L. Shi, Ch. Xi, Zh. Zhang, Ch. Wang, D. Hua // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2021. – Vol. 205 (3). – DOI: 10.1016/j.petrol.2021.108945.
10. Numerical modeling of steam injection in heavy oil reservoirs / S. Mozaffari, M. Nikookar, M.R. Ehsani, L. Sahranavard, E. Roayaie, A.H. Mohammadi // Fuel. – 2013. – Vol. 112. – P. 185–192. – DOI: 10.1016/j.fuel.2013.04.084.
11. On the evaluation of steam assisted gravity drainage in naturally fractured oil reservoirs / S.M.T. Hosseini, Sh. Esfahani, M.H. Doulatabadi, A.H. Sarapardeh, A.H. Mohammadi // Petroleum. – 2017. – Vol. 3 (2). – P. 273–279. DOI: 10.1016/j.petlm.2016.01.003.
12. Chung K.H., Butler R.M. Geometrical effect of steam injection on the formation of emulsions in the steam-assisted gravity drainage process // Annual Technical Meeting. – Calgary, Alberta, 1987. – DOI: 10.2118/87-38-22.
13. A new SAGD comprehensive multi-stage model for oil production using a concave parabola geometry / Y. Guo, H. Liu, Y. Feng, X. Dong, W. Zheng // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2022. – Vol. 208, pt. A. – P. 109321. – DOI: 10.1016/j.petrol.2021.109321.
14. Особенности построения геологической модели залежи сверхвязкой нефти при планировании системы разработки методом парогравитационного дренажа / С.П. Новикова, Д.К. Нургалиев, В.А. Судаков, А.Н. Делев, Н.Г. Нургалиева // Георесурсы. – 2017. – Т. 19, № 4, ч. 1. – С. 331–340. – DOI: 10.18599/grs.19.4.5.
15. A method of FE modeling multiphase compressible flow in hydrocarbon reservoirs / Y.G. Soloveichik, M.G. Persova, A.M. Grif, A.S. Ovchinnikova, I.I. Patrushev, D.V. Vagin,

D.S. Kiselev // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2022. – Vol. 390. – P. 114468. – DOI: 10.1016/j.cma.2021.114468.

16. Forecasting the efficiency of waterflooding, thermal and chemical Enhanced oil recovery methods in bobrikovian reservoirs / A.V. Nasybullin, M.G. Persova, A.A. Lutfullin, Yu.G. Soloveichik, E.V. Orekhov, L.R. Shaikhrazieva, L.G. Orekhova, D.A. Leonovich, A.P. Sivenkova // *SOCAR Proceedings*. – 2024. – N 2. – P. 30–40. – DOI: 10.5510/OGP20240200963.

17. Применение процедуры группирования конечных элементов для повышения эффективности моделирования нестационарного многофазного потока в высоконеоднородных трехмерных пористых средах / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, И.И. Патрушев, А.С. Овчинникова // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2021. – Т. 57. – С. 34–44.

18. The design of high-viscosity oil reservoir model based on the inverse problem solution / M.G. Persova, Y.G. Soloveichik, D.V. Vagin, A.M. Grif, D.S. Kiselev, I.I. Patrushev, A.V. Nasybullin, B.G. Ganiev // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2021. – Vol. 199. – P. 108245. – DOI: 10.1016/j.petrol.2020.108245.

19. Ривкин С.Л., Александров А.А. Термодинамические свойства воды и водяного пара: справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 80 с.

Леонovich Дарьяна Александровна, младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории моделирования и обработки данных наукоемких технологий Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование процессов неизотермической многофазной фильтрации. Является автором четырех научных публикаций. E-mail: leonovich.D.A@yandex.ru

Leonovich Daryana A., junior researcher at the Scientific Research Laboratory of Modeling and Data Processing of High-tech Technologies, Novosibirsk State Technical University. The main area of scientific research is mathematical modeling of non-isothermal multiphase filtration processes. She is the author of four scientific publications. E-mail: leonovich.2018@stud.nstu.ru

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-35-46

Study of the effect of the permeability of the interwell space on the efficiency of steam gravity drainage*

D.A. LEONOVICH

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

leonjvich.2018@stud.nstu.ru

Abstract

The paper presents a study of the influence of permeability of interwell space on the efficiency of vapour-gravity drainage under different modes of injection well operation on the basis of numerical modeling. The study was carried out on the model of a reservoir containing highly viscous oil, the dynamic viscosity of which at a reservoir temperature of 8 degrees Celsius is about 25 Pa · s.

Modeling of non-isothermal multiphase filtration processes is performed using an approach based on implicit pressure calculation by the finite element method and recalculation

* Received 10 September 2024.

The reported study was financially supported by the Russian Science Foundation under grant 24-11-00204, <https://rscf.ru/project/24-11-00204/>

of saturations of phases after their transfer in accordance with the flow values obtained from the calculated pressure gradients. The temperature field is calculated in two stages: a convective heat transfer is taken into account during phase transfers, and heat propagation due to thermal conductivity of the medium is calculated by solving the boundary value problem for the heat conduction equation. The modeling method takes into account the dependences of phase viscosities on temperature and their densities on temperature and pressure, energy release or absorption during vaporization and condensation, as well as the inhomogeneity of the geological model.

Numerical experiments to investigate the influence of permeability of interwell space on the efficiency of steam-gravity drainage were carried out for a heterogeneous reservoir in which a layer with different permeability from the rest of the reservoir is located between horizontal wells. The results demonstrated the difference in oil production and change in steam chamber shape depending on the permeability contrast between the layer and the rest of the reservoir. The model with a permeability layer twenty times lower than the rest of the reservoir showed the highest volume of accumulated produced oil when the wells were operated in the same mode. The possibility of steam or condensed water breaking through to the production well was investigated. At variation of volumes of steam injection, the situations when an increase in steam injection leads to a decrease in the oil share in the withdrawn mixture were obtained. It is shown that for effective application of steam methods of oil recovery enhancement it is important to perform a preliminary reservoir analysis and modelling of expected well operation modes.

Keywords: hydrodynamic modeling in pore media, non-isothermal multiphase filtration, numerical modeling, oil field development, ultra-viscous oil, modeling of steam methods, steam gravity drainage, thermal methods of increasing oil production

REFERENCES

1. Mishenin M.V. Dinamika dobychi nefi iz trudnoizvlekaemykh zapasov v Rossii [Dynamics of oil production from hard reserves in Russia]. *Intereks-po Geo-Sibir' = Interexpo Geo-Siberia*, 2021, vol. 2, no. 4, pp. 294–301.
2. Jamaloei B.Y., Singh A.R. Hot water flooding and cold water flooding in heavy oil reservoirs. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization and Environmental Effects*, 2016, vol. 38 (14), pp. 2009–2017.
3. Mokheimer E.M.A., Hamdy M., Abubakar Z., Shakeel M.R., Habib M.A., Mahmoud M. A comprehensive review of thermal enhanced oil recovery: techniques evaluation. *Journal of Energy Resources Technology*, 2019, vol. 141 (3), p. 030801. DOI: 10.1115/1.4041096.
4. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Patrushev I.I., Nasybullin A.V., Altyzbekova G.Z., Leonovich D.A. Optimizatsiya razrabotki nefyanykh mestorozhdenii na osnove 3D-modeli plasta, poluchennoi v rezul'tate avtoadaptatsii [Optimization of oil field development based on a 3D reservoir model obtained as a result of history matching]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 544–558. DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-4-544-558.
5. Mir H., Siavashi M. Whole-time scenario optimization of steam-assisted gravity drainage (SAGD) with temperature, pressure, and rate control using an efficient hybrid optimization technique. *Energy*, 2022, vol. 239, pt. C. DOI: 10.1016/j.energy.2021.122149.
6. Lawal K.A., Olamigoke O. On the optimum operating temperature for steam floods. *SN Applied Sciences*, 2021, vol. 3, p. 9. DOI: 10.1007/s42452-020-04082-2.
7. Yarakhanova D.G. O perspektivakh protsessov osvoeniya sverkhvyazkikh neftei i prirodnykh bitumov gorizontaln'nyimi skvazhinami [Prospects for the development of heavy oil and natural bitumen by horizontal wells]. *Georesursy = Georesources*, 2015, no. 3 (62), pp. 53–56. DOI: 10.18599/grs.62.3.10.
8. Kerimov V.Yu., Bakhtizin R.N., Dantsova K.I., Salikhova I.M. Modelirovanie mestorozhdenii i zalezhei nefi i gaza dlya resheniya zadach razvedki i razrabotki [Modeling of oil and gas deposits for solving the problems of exploration and development]. *Transport i khranenie nefteproduktov i uglevodородного syr'ya = Transport and storage of oil products and hydrocarbons*, 2018, no. 3, pp. 52–56. DOI: 10.24411/0131-4270-2018-10307.

9. Liu P., Zhang Y., Liu P.-ch., Zhou Y., Qi Z., Shi L., Xi Ch., Zhang Zh., Wang Ch., Hua D. Experimental and numerical investigation on extra-heavy oil recovery by steam injection using vertical injector -horizontal producer. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2021, vol. 205 (3). DOI: 10.1016/j.petrol.2021.108945.
10. Mozaffari S., Nikookar M., Ehsani M.R., Sahranavard L., Roayaie E., Mohammadi A.H. Numerical modeling of steam injection in heavy oil reservoirs. *Fuel*, 2013, vol. 112, pp. 185–192. DOI: 10.1016/j.fuel.2013.04.084.
11. Hosseini S.M.T., Esfahani Sh., Doulatabadi M.H., Sarapardeh A.H., Mohammadi A.H. On the evaluation of steam assisted gravity drainage in naturally fractured oil reservoirs. *Petroleum*, 2017, vol. 3 (2), pp. 273–279. DOI: 10.1016/j.petlm.2016.01.003.
12. Chung K.H., Butler R.M. Geometrical effect of steam injection on the formation of emulsions in the steam-assisted gravity drainage process. *Annual Technical Meeting*, Calgary, Alberta, 1987. DOI: 10.2118/87-38-22.
13. Guo Y., Liu H., Feng Y., Dong X., Zheng W. A new SAGD comprehensive multi-stage model for oil production using aconcave parabola geometry. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2022, vol. 208, pt. A, p. 109321. DOI: 10.1016/j.petrol.2021.109321.
14. Novikova S.P., Nurgaliev D.K., Sudakov V.A., Delev A.N., Nurgalieva N.G., Lya-bipov M.R., Akhmadullin R.R. The main features of the geological modeling process of a shallow deposit of super-viscous oil in aspect of development strategy planning with the use of steam-assisted gravity drainage method. *Georesursy = Georesources*, 2017, vol. 19, no. 4, pt. 1, pp. 331–340. DOI: 10.18599/grs.19.4.5.
15. Soloveichik Y.G., Persova M.G., Grif A.M., Ovchinnikova A.S., Patrushev I.I., Vagin D.V., Kiselev D.S. A method of FE modeling multiphase compressible flow in hydrocarbon reservoirs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, vol. 390, p. 114468. DOI: 10.1016/j.cma.2021.114468.
16. Nasybullin A.V., Persova M.G., Lutfullin A.A., Soloveichik Yu.G., Orekhov E.V., Shaikhra-zieva L.R., Orekhova L.G., Leonovich D.A., Sivenkova A.P. Forecasting the efficiency of waterflooding, thermal and chemical Enhanced oil recovery methods in bobrikovian reservoirs. *SOCAR Proceedings*, 2024, no. 2, pp. 30–40. DOI: 10.5510/OGP20240200963.
17. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Patrushev I.I., Ovchinnikova A.S. Primenenie protsedury gruppirovaniya konechnykh elementov dlya povysheniya effektivnosti modelirovaniya nestatsionarnogo mnogofaznogo potoka v vysokoneodnorodnykh trekhmernykh poristykh sredakh [Application of the finite element grouping procedure to improve the efficiency of unsteady multiphase flow simulation in high-heterogeneous 3D porous media]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2021, vol. 57, pp. 34–44 DOI: 10.17223/19988605/57/4.
18. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Vagin D.V., Grif A.M., Kiselev D.S., Patrushev I.I., Nasybullin A.V., Ganiev B.G. The design of high-viscosity oil reservoir model based on the inverse problem solution. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2021, vol. 199, p. 108245. DOI: 10.1016/j.petrol.2020.108245.
19. Rivkin S.L., Aleksandrov A.A. *Termodinamicheskie svoistva vody i vodyanogo para: spravochnik* [Thermodynamic properties of water and water vapor: reference book]. 2nd ed., rev. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 80 p.

Для цитирования:

Леонович Д.А. Исследование влияния проницаемости межскважинного пространства на эффективность парогравитационного дренажа // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 4 (96). – С. 35–46. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-35-46.

For citation:

Leonovich D.A. Issledovanie vliyaniya pronitsaemosti mezhskvazhinnogo prostranstva na effektivnost' parogravitatsionnogo drenazha [Study of the effect of the permeability of the interwell space on the efficiency of steam gravity drainage]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 4 (96), pp. 35–46. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-35-46.

ЭЛЕКТРОНИКА, ФОТОНИКА,
ПРИБОРОСТРОЕНИЕ
И СВЯЗЬ

ELECTRONICS, PHOTONICS,
INSTRUMENT MAKING
AND COMMUNICATIONS

УДК 535.411.854

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-47-58

Увеличение пространственного разрешения в системах оптической микроскопии при использовании микрообъективов малой кратности*

В.И. ГУЖОВ^a, С.П. ИЛЬИНЫХ^b, Е.В. АНДРЮЩЕНКО^c

*630073, Новосибирская область, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский
государственный технический университет (НГТУ-НЭТИ)*

^a vigguzhov@gmail ^b isp51@yandex.ru ^c andrushenkov@gmail.com

Системы оптической микроскопии являются важным методом исследования во многих медицинских и промышленных приложениях. Пространственное разрешение зависит от конструкции объектива, и поле зрения сужается по мере увеличения кратности. Максимальное поле зрения достигается при использовании объективов с малым значением кратности увеличения и соответственно с низким пространственным разрешением. Объективы с низким разрешением конструктивно просты в изготовлении и поэтому недороги. Использование таких объективов для повышения пространственного разрешения является перспективным направлением.

Целью настоящей работы является исследование возможности увеличения пространственного разрешения систем оптической микроскопии, использующих их микрообъективы с малым значением кратности увеличения с сохранением присущего им широкого поля зрения. Улучшение пространственного разрешения осуществляется с помощью предлагаемого в статье подхода, основанного на технологии субпиксельного сканирования и введения апертурной функции, не зависящей от свойств изображения. В этом случае спектр изображения, синтезированного с помощью технологии субпиксельного сканирования, компенсируется множителем предлагаемой апертурной функции, вид которой зависит только от типа апертуры объектива и не зависит от свойств исследуемого объекта. Для реализации субпиксельного сканирования сдвигов была проведена модификация предметного столика металлографического агрегатного микроскопа METAM-P1. Под управлением ЭВМ двухкоординатный столик может позиционироваться с высокой точностью. Полученные экспериментальные результаты показывают реализуемость предлагаемого подхода.

Недостатком предложенного подхода является необходимость использования дополнительной системы субпиксельного сдвига. Однако во многих случаях использование субпиксельных сдвигов оказывается более предпочтительным, чем применение сложных объективов с большим разрешением и небольшим полем зрения.

* *Статья получена 22 ноября 2024 г.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 24-29-00006.

Ключевые слова: микроскопия, преобразование Фурье, фурье-образ, спектр, сверх-разрешение, субпиксельное сканирование, микрообъектив, поле зрения, кратность увеличения, фотоматрицы, пиксел

ВВЕДЕНИЕ

В оптических микроскопах пространственное разрешение формируемого ими изображения определяется способностью различения двух соседних точечных объектов. В этом случае пространственное разрешение определяется расстоянием между образуемыми этими объектами дифракционными кольцами Эйри. Это расстояние зависит от числовой апертуры (NA^{obj}) микрообъектива микроскопа и длины волны источника освещения (λ) и оценивается критерием Рэлея [1, 2]:

$$R = 1,22 \frac{\lambda}{2NA^{obj}}. \quad (1)$$

На практике для длин волн видимого оптического диапазона пространственное разрешение оптических микроскопов оценивается величиной 200...250 нм [1, 2]. На объективе всегда указывается кратность увеличения (Nx) и числовая апертура (рис. 1).



Рис. 1. Маркировка отечественных микрообъективов ЛОМО

Fig. 1. Labeling of domestic LOMO micro lenses

В табл. 1 показано разрешение объективов при длине волны источника освещения $\lambda = 0,6$ мкм.

Таблица 1

Table 1

Разрешение при использовании объективов ЛОМО

Resolution when using LOMO lenses

Увеличение объектива	Числовая апертура NA^{obj}	Resolution when using LOMO lenses
8x	0,2	1,830 мкм
10x	0,3	1,22 мкм
20x	0,4	0,915 мкм
40x	0,65	0,563 мкм

Увеличение пространственного разрешения в оптической микроскопии является давно и широко обсуждаемой проблемой [3–14].

В статье предлагается новый подход к увеличению пространственного разрешения микрообъективов с помощью субпиксельного сканирования формируемого им оптического изображения. Шаг сканирования выбирается в зависимости от требуемого увеличения пространственного разрешения и составляет величину меньшую, чем один элемент разрешения фотоматрицы, регистрирующей оптическое изображение.

В [3–5] рассмотрена реализация субпиксельного сканирования одномерного сигнала. На рис. 2 показана схема субпиксельного сканирования одномерного сигнала.

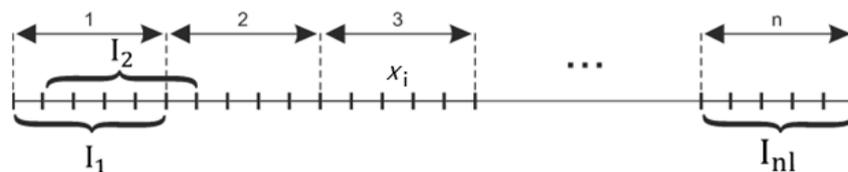


Рис. 2. Схема субпиксельного сканирования одномерного сигнала

Fig. 2. Scheme of subpixel scanning of one-dimensional signal

На рис. 2 n – количество элементов в строке фотоматрицы; l – число шагов субпиксельного сканирования, приходящихся на один элемент фотоматрицы; I_1 и I_2 – отдельный элемент фотоматрицы (интегрирующая апертура) до и после субпиксельного сдвига соответственно; $I_i, i = 0 \dots n, nl$ – количество элементов x_i , содержащихся в формируемом изображении с высоким разрешением. В [7–10] показан процесс двумерного субпиксельного сканирования. На рис. 3 выделенные более темным фоном элементы $A(x, y)$ исходного изображения с низким разрешением дополняются элементами изображения $Ax(x, y)$ и $Ay(x, y)$ после субпиксельных сдвигов на величины, кратные сдвигам dx и dy соответственно.

$A(x_0, y_0)$	$AXY(x_0+dx, y_0)$	$AXY(x_0+2dx, y_0)$	$A(x_1, y_0)$..
$AXY(x_0, y_0+dy)$	$AXY(x_0+dx, y_0+dy)$	$AXY(x_0+2dx, y_0+dy)$	$AXY(x_1, y_0+dy)$..
$AXY(x_0, y_0+2dy)$	$AXY(x_0+dx, y_0+2dy)$	$AXY(x_0+2dx, y_0+2dy)$	$AXY(x_1, y_0+2dy)$..
$A(x_0, y_1)$	$AX(x_0+dx, y_1)$	$AX(x_0+2dy, y_1)$	$A(x_1, y_1)$..
...

Рис. 3. Формирование изображения с высоким разрешением

Fig. 3. High-resolution imaging

Совокупность элементов изображения с высоким разрешением x_i и интегрирующие их элементы I_i с низким разрешением образуют систему линейных алгебраических уравнений [6, 7]:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + \dots x_i &= I_1, \\
 x_2 + x_3 + \dots x_{i+1} &= I_2, \\
 &\dots \\
 x_{(n-1)l+1} + x_{(n-1)l+2} + \dots x_{nl} &= I_{nl}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, решая систему уравнений (2), можно синтезировать изображение в более высоком разрешении.

Дискретный спектр синтезированного таким образом изображения можно представить как

$$F_{\tau, \Delta x}(\omega) = \left(\left[\mathfrak{F}(f(x)) \otimes \text{sinc}\left(\frac{\omega N}{2}\right) \right] \cdot \mathfrak{F}(\text{rect}_{\tau}(x)) \right), \tag{3}$$

где $\left[\mathfrak{F}(f(x)) \otimes \text{sinc}\left(\frac{\omega N}{2}\right) \right]$ – фурье-образ синтезированного изображения;

$\mathfrak{F}(\text{rect}_{\tau}(x))$ – фурье-образ апертуры (апертурная функция).

Из выражения (2) следует, что поэлементным делением фурье-образа синтезированного изображения на фурье-образ $\mathfrak{F}(\text{rect}_{\tau}(x))$ можно получить фурье-образ изображения с высоким разрешением. Обратное фурье-преобразование восстанавливает изображение $f(x)$, имеющее высокое разрешение [7].

Целью статьи является исследование возможности практической реализации предлагаемого подхода.

1. МОДИФИКАЦИЯ ОПТИЧЕСКОГО МИКРОСКОПА

Для реализации субпиксельных сдвигов была проведена модификация металлографического агрегатного микроскопа МЕТАМ-Р1 [15]. В качестве предметного столика использован плоскопараллельный сканирующий пьезо-стол Ratis XYZ_(H) [16]. Использование этого столика позволило обеспечить диапазон перемещения в области XY – 100 мм с минимальным шагом перемещения 1 нм. Для дискретизации изображений использовалась серийная цифровая беззеркальная камера Canon EOS M50 с CMOS-матрицей APS-C разрешением 24,1 мегапикселя (6000×4000 пикселей / $3,7 \times 3,7$ мкм). Матрица имеет размер $22,3 \times 14,9$ мм. Связь микроскопа с ЭВМ осуществляется через USB-порт.

Внешний вид модифицированного оптического микроскопа показан на рис. 4.

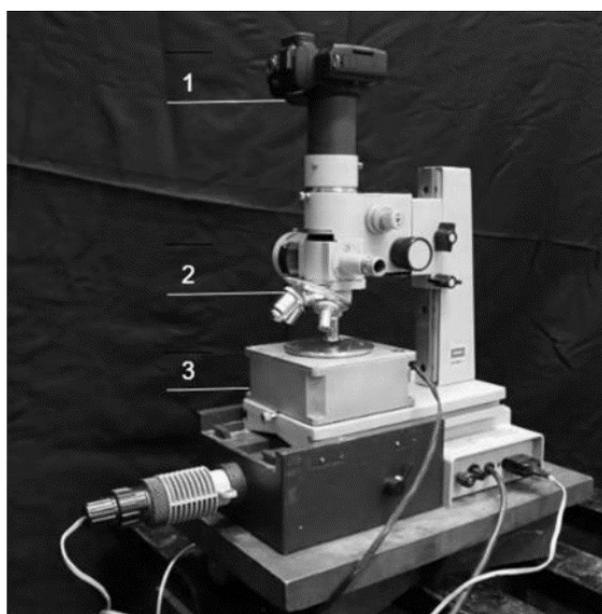


Рис. 4. Модифицированный оптический микроскоп:
1 – цифровой фотоаппарат; 2 – оптический микроскоп
МЕТАМ-Р1; 3 – управляемый предметный столик

Fig. 4. Modified optical microscope:
1 is a digital camera; 2 is the METAM-R1 optical microscope;
3 is a controlled position table)

Для увеличения разрешения в два раза использовалась схема движения предметного столика, показанная на рис. 5. Необходимо сделать всего три шага: два по горизонтали и один по вертикали. При этом регистрируется четыре изображения исследуемого объекта: одно – для неподвижного положения предметного столика и три – в сдвинутых положениях соответственно.

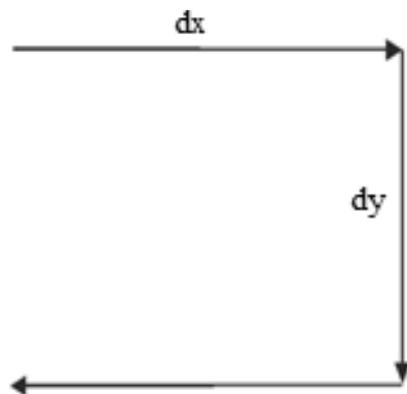


Рис. 5. Траектория субпиксельного сканирования

Fig. 5. Subpixel scanning trajectory

2. СИНТЕЗ ИЗОБРАЖЕНИЯ МЕТОДОМ СУБПИКСЕЛЬНОГО СКАНИРОВАНИЯ

Числовая апертура микробъектива определяет его поле зрения. В табл. 2 показано максимальное поле зрения в модифицированном микроскопе.

Таблица 2

Table 2

Поле зрения при использовании различных микробъективов

Field of view with different micro lenses

Увеличение объектива	Числовая апертура NA^{obj}	Поле зрения (мм)
8x	0,2	2,417
0x	0,3	2,019
20x	0,4	1,075
40x	0,65	0,541

На рис. 6 показано сравнение поля зрения для двух микробъективов 8x и 20x.

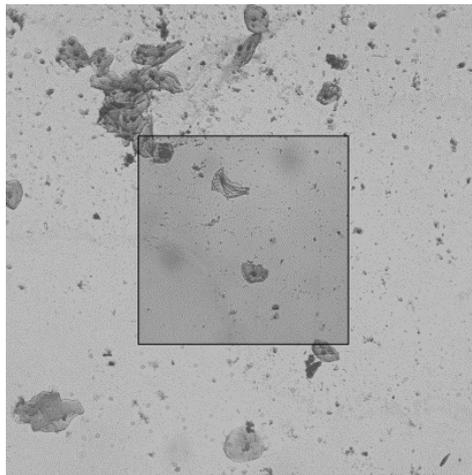


Рис. 6. Поле зрения объектива 8x и 20x

Fig. 6. Lens field of the view 8x and 20x

Из табл. 2 видно, что разрешение для микрообъектива кратностью 8x составило 1,830 мкм, а для микрообъектива кратностью 20x – 915 нм.

С объективом 8x сканировалось 4 изображения объекта с субпиксельным сдвигом 915 нм, они объединялись по схеме, показанной на рис. 7. То есть один пиксель результирующего изображения формируется из четырех пикселей с низким разрешением. Размер области изображения выбирался так, чтобы он совпадал с полем зрения объектива кратностью 20x и составил 1024 пикселя.

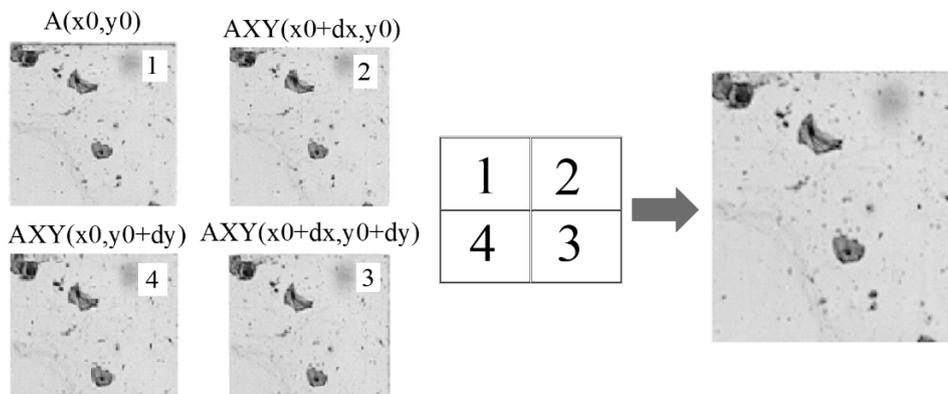


Рис. 7. Синтез изображения с высоким разрешением

Fig. 7. High resolution image synthesis

Таким образом, из четырех изображений размером 1024×1024 пикселя сформировано изображение размером 2048×2048 пикселей. Для сравнения полученного изображения с изображением, полученным с микрообъективом кратностью 20x, сканировалось это же изображение с таким же количеством пикселей (2048×2048). После этого в соответствии с выражением (3) были определены фурье-образы апертурной функции $\mathfrak{F}(rect_{\tau}(x))$ и изображений с высоким и низким разрешением [7, 8]. Затем фурье-образ изображения,

синтезированного из четырех изображений, полученных с микрообъективом кратностью 8х, делился поточечно на фурье-образ изображения, сканированного объективом с кратностью 20х. На рис. 8 показан вид апертурной функции объектива 20х (2048 × 2048 точек).

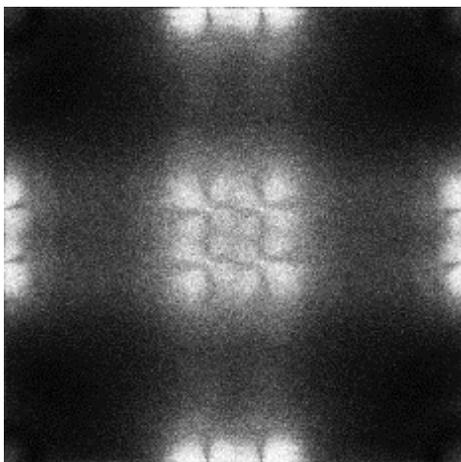


Рис. 8. Апертурная функция, соответствующая объективу 20х (2048 × 2048 точек)

Fig. 8. Aperture function corresponding to 20x lenses (2048 × 2048 pixels)

Вычисление апертурной функции проводилось для других участков образца и для других образцов. Установлено, что вид апертурной функции зависит только от используемых микрообъективов. На рис. 9 показаны различные участки изображения, полученные с микрообъективами кратностью 8х и 20х (слева и справа соответственно).

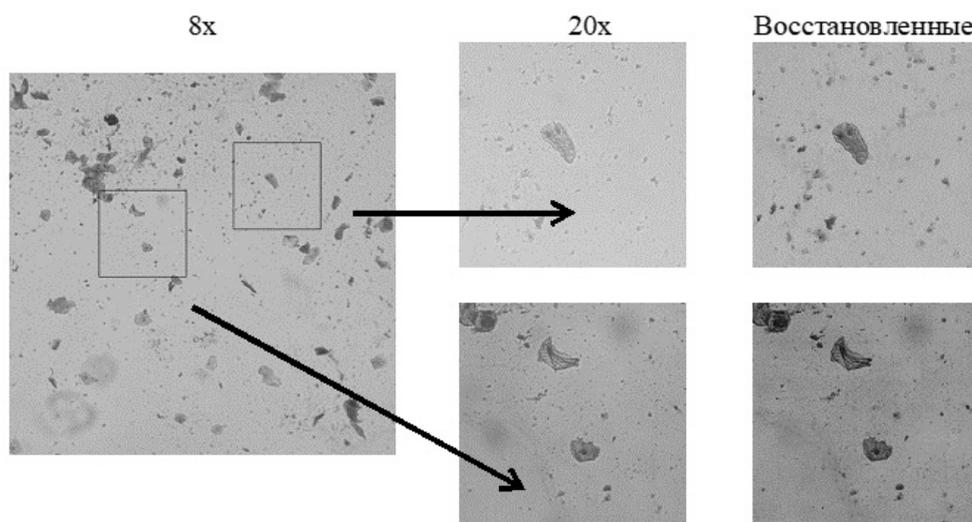


Рис. 9. Изображения, полученные микрообъективами различной кратности

Fig. 9. Images obtained with micro lenses of various magnifications

Сравнение участков поля зрения восстановленного изображения из серии изображений с объективом 10х показало полную идентичность с изображением тех же участков, полученным с объективом 20х.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье экспериментально показана возможность синтеза изображения с высоким разрешением с помощью субпиксельного сканирования. Отличительной способностью реализованного подхода является введение апертурной функции микрообъектива по серии из четырех изображений, полученных при перемещении объектного столика на 915 нм с объективом 8х. Таким образом, если определена апертурная функция для серии объективов с малым пространственным разрешением, то использовать объективы с большим разрешением необязательно. И хотя для простоты реализации использовались 8- и 20-кратные объективы, предлагаемый подход может быть использован для объективов с другой кратностью увеличения, в том числе и иммерсионных. Отметим, что такой подход позволяет для низократных микрообъективов получить такое же пространственное разрешение, как и у микрообъективов с высоким разрешением, сохраняя при этом широкое поле зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградова Г.Н., Захаров В.В.* Основы микроскопии. Ч. 1. – СПб.: Университет ИТМО, 2018. – 133 с.
2. *Виноградова Г.Н., Захаров В.В.* Основы микроскопии. Ч. 2. – СПб.: Университет ИТМО, 2020. – 248 с.
3. *Васьков С.Т., Ефимов В.М., Резник А.Л.* Быстрая цифровая реконструкция сигналов и изображений по критерию минимума энергии // *Автоматрия*. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 13–20.
4. *Белов А.М., Денисова А.Ю.* Спектральное и пространственное сверхразрешение при комплексировании данных ДЗЗ различных источников // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 855–863. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-855-863.
5. Оценка ошибок синтеза изображений с суперразрешением на основе использования нескольких кадров / *А.В. Кокошкин, В.А. Коротков, К.В. Коротков, Е.П. Новичихин* // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41, № 5. – С. 701–711. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-701-711.
6. *Королев А.Н.* Повышение разрешающей способности оптических систем путем эффективного использования степеней свободы волнового поля объекта // *Успехи физических наук*. – 1968. – Т. 96, № 2. – С. 261–289.
7. *Гужов В.И., Марченко И.О., Трубилина Е.Е.* Повышение пространственного разрешения сигналов в оптических системах // *Компьютерная оптика*. – 2022. – Т. 46, № 1. – С. 65–70. – DOI: 10.18287/2412-6179-СО-924.
8. *Гужов В.И., Трубилина Е.Е., Марченко И.О.* Восстановление сигналов по дискретным значениям с ограниченным числом идеальных отсчетов // *Научный вестник НГТУ*. – 2020. – № 1 (78). – С. 147–156. – DOI: 10.17212/1814-1196-2020-1-147-156.
9. *Попов М.А., Станкувич С.А., Шкляр С.В.* Алгоритм повышения разрешения субпиксельно смещенных изображений // *Математичні машини і системи*. – 2015. – № 1. – С. 29–36.
10. *Гужов В.И., Ильиных С.П., Марченко И.О.* Метод повышения пространственного разрешения в цифровой голографической микроскопии // *Автоматрия*. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 104–110. – DOI: 10.15372/AUT20180313.

11. Superresolved imaging based on wavelength multiplexing of projected unknown speckle patterns / O. Wagner, A. Schwarz, A. Shemer, C. Ferreira, J. Garcia, Z. Zalevsky // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54 (13). – P. D51–D60.

12. Турухано Б.Г., Турухано И.А., Турухано Н. Высокоразрешающий цифровой голографический микроскоп для отражающих объектов // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. – 2021. – № 3. – С. 10–15. – DOI: 10.25791/pribor.3.2021.1244.

13. Блажевич С.В., Селютина Е.С. Повышение разрешения цифрового изображения с использованием субпиксельного сканирования // *Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика*. – 2014. – № 5 (176). – С. 186–190.

14. Исследование фокусировки в близкорасположенные световые пятна при освещении дифракционных оптических элементов коротким импульсным лазерным пучком / С.Н. Хонина, С.А. Дегтярев, А.П. Порфирьев, О.Ю. Моисеев, С.Д. Полетаев, А.С. Ларькин, А.Б. Савельев-Трофимов // *Компьютерная оптика*. – 2015. – Т. 39, № 2. – С. 187–196.

15. Микроскоп металлографический агрегатный МЕТАМ-Р1. – URL: <https://scopica.ru/proj/mikroskop-metallograficheskiy-agregatnyiy-metam-r1> (дата обращения: 28.11.2024).

16. Ratis XYZ_H – трехкоординатный плоскопараллельный сканер. – URL: <http://www.nanoscantech.com/ru/products/stage/stage-100.html> (дата обращения: 28.11.2024).

Гужов Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры систем сбора и обработки данных Новосибирского государственного технического университета. Автор 290 научных работ, в том числе обладатель четырех патентов. Область научных интересов: информационно-измерительные системы, высокоточные измерения, программная инженерия. E-mail: viguzhov@gmail.com

Ильиных Сергей Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Автор более 180 научных работ, в том числе учебника НГТУ и четырех патентов. Область научных интересов – разработка алгоритмов анализа изображений в оптических измерительных системах. E-mail: isp51@yandex.ru

Андрющенко Екатерина Вадимовна, аспирант Новосибирского государственного технического университета. Специальность 2.2.12. «Приборы, системы и изделия медицинского назначения». Область научных интересов – повышение разрешения оптических систем. E-mail: andrushenkov@gmail.com

Guzhov Vladimir I., professor at the Department of Data Acquisition and Processing Systems, Novosibirsk State Technical University, D.Sc./ (Eng.). He is the author of 290 scientific works, including 4 patents. His research interests include information-measuring systems, high-precision measurements, and software engineering. E-mail: viguzhov@gmail.com

Iliinykh Sergey P., professor at the Department of Computer Science, Novosibirsk State Technical University, D.Sc. (Eng.). He is the author of more than 180 scientific works, including the textbook of NSTU and 4 patents. His research interests cover development of algorithms for image analysis in optical measurement systems. E-mail: isp51@yandex.ru

Andryushchenko Ekaterina V., post-graduate student in Novosibirsk State Technical University. She specializes in the field "Devices, systems and medical devices". Her research interests include increasing the resolution of optical microscopy based on spatial subpixel shifts. E-mail: andrushenkov@gmail.com

Increasing spatial resolution in optical microscopy systems using low-magnification micro lenses*

V.I. GUZHOV^a, S.P. ILINYKH^b, E.V. ANDRYUSHCHENKO^c

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

^a vigguzhov@gmail ^b isp51@yandex.ru ^c andrushenkov@gmail.com

Abstract

Optical microscopy systems are an important research method in many medical and industrial applications. Spatial resolution depends on the design of the objective lens and the field of view narrows as magnification increases. As the resolution increases, the field of view narrows. The maximum field of view is achieved with lenses with low magnification ratio and correspondingly low spatial resolution. Lenses with low resolution are structurally simple to manufacture and therefore inexpensive. Therefore, the use of such lenses to increase spatial resolution is a promising direction.

The purpose of this work is to investigate the possibility of increasing the spatial resolution of optical microscopy systems using micro-lenses with a low magnification ratio while maintaining their inherent wide field of view. Improvement of spatial resolution is realized with the help of the approach proposed in the paper based on the technology of subpixel scanning and introduction of aperture function independent of the image properties. In this case, the spectrum of the image synthesized with the help of subpixel scanning technology is compensated by the multiplier of the proposed aperture function, the type of which depends only on the type of lens aperture and does not depend on the properties of the object under study. For realization of subpixel shift scanning the modification of the slide of metallographic aggregate microscope METAM-R1 was carried out. The two-coordinate stage can be positioned with high accuracy under computer control. The obtained experimental results show the realizability of the proposed approach.

The disadvantage of the proposed approach is the necessity to use an additional subpixel shift system. However, in many cases the use of subpixel shifts is more preferable than the use of complex lenses with high resolution and small field of view.

Keywords: microscopy, Fourier transform, Fourier image, spectrum, super-resolution, sub-pixel scanning, micro lens, field of view, magnification ratio, photomatrix, pixel

REFERENCES

1. Vinogradova G.N., Zakharov V.V. *Osnovy mikroskopii*. Ch. 1 [Fundamentals of Microscopy. Pt. 1]. St. Petersburg, ITMO University Publ., 2018. 133 p.
2. Vinogradova G.N., Zakharov V.V. *Osnovy mikroskopii*. Ch. 2 [Fundamentals of Microscopy. Pt. 2]. St. Petersburg, ITMO University Publ., 2020. 248 p.
3. Vas'kov S.T., Efimov V.M., Reznik A.L. Fast digital image and signal reconstruction by the minimum energy criterion. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2003, iss. 4, pp. 11–17. Translated from *Avtometriya*, 2003, vol. 39, no. 4, pp. 13–20.
4. Belov A.M., Denisova A.Y. Spektral'noe i prostranstvennoe sverkhrazreshenie pri kompleksirovani dannykh DZZ razlichnykh istochnikov [Spectral and spatial super-resolution method for Earth remote sensing image fusion]. *Komp'yuternaya optika = Computer Optics*, 2018, vol. 42, no. 5, pp. 855–863. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-855-863.
5. Kokoshkin A.V., Korotkov V.A., Korotkov K.V., Novichikhin E.P. Otsenka oshibok sinteza izobrazhenii s superrazresheniem na osnove ispol'zovaniya neskol'kikh kadrov [Estimation of super-resolution imaging errors based on the use of multiple frames]. *Komp'yuternaya optika = Computer Optics*, 2017, vol. 41, no. 5, pp. 701–711. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-701-711.
6. Korolev A.N. Increase of resolution of optical systems by effective use of the degrees of freedom on the object wave field. *Soviet Physics Uspekhi*, 1969, vol. 11 (5), pp. 712–726. DOI: 10.1070/PU1969v01n05ABEH003743. Translated from *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1968, vol. 96, no. 2, pp. 261–289.

* Received 22 November 2024.

The work was carried out with the financial support of the RSF grant 24-29-00006.

7. Guzhov V.I., Marchenko I.O., Trubilina E.E. Povyshenie prostranstvennogo razresheniya signalov v opticheskikh sistemakh [Increasing the spatial resolution of signals in optical systems]. *Komp'yuternaya optika = Computer Optics*, 2022, vol. 46, no. 1, pp. 65–70. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-924.

8. Guzhov V.I., Trubilina E.E., Marchenko I.O. Vosstanovlenie signalov po diskretnym znacheniyam s ogranichennym chislom ideal'nykh otschetov [Signal recovery with a limited number of ideal discrete samples]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2020, no. 1 (78), pp. 147–156. DOI: 10.17212/1814-1196-2020-1-147-156.

9. Popov M.A., Stankuvich S.A., Shklyar S.V. Algoritm povysheniya razresheniya subpiksel'nogo smeshchennykh izobrazhenii [Algorithm for increasing the resolution of subpixel-shifted images] // *Matematichni mashini i sistemi = Mathematical Machines and Systems*, 2015, no. 1, pp. 29–36.

10. Guzhov V.I., Il'nykh S.P., Marchenko I.O. Method of increasing the spatial resolution in digital holographic microscopy. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2018, vol. 54 (3), pp. 301–306. DOI: 10.3103/S8756699018030135. Translated from *Avtometriya*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 104–110. DOI: 10.15372/AUT20180313.

11. Wagner O., Schwarz A., Shemer A., Ferreira C., Garcia J., Zalevsky Z. Superresolved imaging based on wavelength multiplexing of projected unknown speckle patterns. *Applied Optics*, 2015, vol. 54 (13), pp. D51–D60.

12. Turukhano B.G., Turukhano I.A., Turukhano N. Vysokorazreshayushchii tsifrovoy golograficheskii mikroskop dlya otrazhayushchikh ob"ektov [High resolution digital holographic microscope for reflective objects]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika = Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*, 2021, no. 3, pp. 10–15. DOI: 10.25791/pribor.3.2021.1244.

13. Blazhevich S.V., Selyutina E.S. Povyshenie razresheniya tsifrovogo izobrazheniya s ispol'zovaniem subpiksel'nogo skanirovaniya [Sub-pixel scanning to produce super-resolution digital images]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika = Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics. Physics*, 2014, no. 5 (176), pp. 186–190.

14. Khonina S.N., Degtyarev S.A., Porfirev A.P., Moiseev O.Yu., Poletaev S.D., Larkin A.S., Savelyev-Trofimov A.B. Issledovanie fokusirovki v blizkoraspolozhennye svetovye pyatna pri osveshchenii difraktsionnykh opticheskikh elementov korotkim impul'snym lazernym puchkom [Study of focusing into closely spaced spots at illuminating diffractive optical element by short pulse laser beam]. *Komp'yuternaya optika = Computer Optics*, 2015, vol. 39, no. 2, pp. 187–196.

15. *Mikroskop metallograficheskii agregatnyi METAM-R1* [Metallographic aggregate microscope METAM-R1]. Available at: <https://scopica.ru/proj/mikroskop-metallograficheskii-agregatnyi-metam-r1> (accessed 28.11.2024).

16. *Ratis XYZ_H – trekhkoordinatnyi ploskoparallel'nyi skaner* [Ratis XYZ_H – 3D plane-parallel nano piezo scanning stage with central hole for optical applications]. Available at: <http://www.nanoscantech.com/ru/products/stage/stage-100.html> (accessed 28.11.2024).

Для цитирования:

Гужов В.И., Ильиных С.П., Андрющенко Е.В. Увеличение пространственного разрешения в системах оптической микроскопии при использовании микрообъективов малой кратности // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 4 (96). – С. 47–58. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-47-58.

For citation:

Guzhov V.I., Il'nykh S.P., Andryushchenko E.V. Uvelichenie prostranstvennogo razresheniya v sistemakh opticheskoi mikroskopii pri ispol'zovanii mikroob"ektivov maloi kratnosti [Increased spatial resolution in optical microscopy systems using low-magnification micro lenses, pixel]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 4 (96), pp. 47–58. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-47-58.

ЭЛЕКТРОНИКА, ФОТОНИКА,
ПРИБОРОСТРОЕНИЕ
И СВЯЗЬ

ELECTRONICS, PHOTONICS,
INSTRUMENT MAKING
AND COMMUNICATIONS

УДК 621.317.361

DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-59-77

Измерение гравитационного смещения частоты в водородных часах при передаче сигнала через оптический и радиочастотный каналы связи*

А.К. ДМИТРИЕВ^{1,2,a}, А.П. КАРПИК^{1,b}, А.С. ТОЛСТИКОВ^{1,2,3,c},
Н.Н. ГОЛОВИН^{1,2,d}, К.Н. САВИНОВ^{1,2,e}, В.С. БОЛДЫРЕВ^{1,f}, Д.Ф. ГУСАР³,
С.А. АЛЕКСЕЙЦЕВ^{1,3,g}, А.С. ТОМИЛОВ^{3,h}, А.В. ИВАНЕНКО^{4,i}

¹ 630108, г. Новосибирск, ул. Плеханова, 10, Сибирский государственный университет геосистем и технологий

² 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет

³ 630004, г. Новосибирск, пр. Димитрова, 4, Западно-Сибирский филиал ФГУП «ВНИИФТРИ»

⁴ 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский государственный университет

^a dmitriev@corp.nstu.ru

^b rector@ssga.ru

^c tolstikov@sniim.ru

^d n.golovin@corp.nstu.ru

^e k.n.savinov@yandex.ru

^f simplemail2019@mail.ru

^g aleksejtsev.94@mail.ru

^h tomber1@yandex.ru

ⁱ ivanenko.aleksey@gmail.com

Реализована схема измерения гравитационного смещения частоты водородных часов при их перемещении между двумя точками, расположенными на разных ортометрических высотах с одновременной передачей сигнала через радио- и оптоволоконную линии связи.

Практический интерес к исследованиям гравитационного смещения частоты квантовых стандартов связан с необходимостью его учета для повышения точности в навигационных спутниковых системах. Такие измерения выполнялись с помощью космического канала синхронизации по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем. Особенно это стало актуальным при повышении метрологических характеристик квантовых стандартов частоты и времени, в частности, с использованием транспортируемых часов на основе оптических решеток при передаче сигнала через волоконно-оптические линии связи. С другой стороны, с использованием квантовых часов выполняются измерения разности ортометрических высот с использованием метода релятивистской синхронизации и одновременного использования эффекта крас-

* Статья получена 29 августа 2024 г.

Работа выполнена в рамках проекта «Разработка и исследование прорывных технологий в области физической и релятивистской геодезии в интересах развития фундаментального обеспечения системы ГЛОНАСС» (НИР «ГЕОТЕХ-Квант»).

ного смещения стандарта частоты вследствие замедления времени в гравитационном поле и эффекта красного смещения фотонов, преодолевающих гравитационное поле.

В настоящей работе представлены результаты измерения гравитационного смещения частоты водородных часов при их перемещении между двумя точками, расположенными на разных ортометрических высотах с передачей сигнала через оптоволоконную линию связи и по радиоканалу. В первом случае по оптоволоконной линии связи передавалось излучение диодного лазера на длине волны 1,5 мкм, амплитудно-модулированное сигналом от транспортируемых водородных часов на частоте 10 МГц, когда в качестве репера использовались стационарные водородные часы. Передача по радиоканалу осуществлялась по коаксиальному радиочастотному кабелю. Измерения проводились на территории Западно-Сибирского филиала ФГУП «ВНИИФТРИ».

Ключевые слова: волоконно-оптические линии связи, атомные часы, водородный стандарт частоты, ортометрическая высота, гравитационное смещение частоты, относительная разность частот, передача частоты, фазовое компарирование

ВВЕДЕНИЕ

Первые измерения гравитационного смещения частоты были выполнены в серии экспериментов Паунда, Ребки и Шнайдера (Pound – Rebka – Snider) в начале 1960-х годов с использованием эффекта Мессбауэра [1–3].

В настоящей работе были проведены измерения гравитационного смещения частоты водородных часов при их перемещении между двумя точками, расположенными на разных ортометрических высотах. Исходя из полученных значений средней относительной разности частоты был проведен расчет разности ортометрических высот в зависимости от положений перевозимых квантовых часов. Измерения проводились при одновременной передаче сигнала по радиочастотному кабельному и по волоконно-оптическому каналам. При этом измерения, проводимые по оптическому каналу, имеют большую погрешность. Это было связано с тем, что выходной сигнал модулятора сильно искажался с течением времени вследствие нестабильности его рабочей характеристики.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В общем случае с учетом поправочного коэффициента α к общей теории относительности Эйнштейна разность частоты часов $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$ при помещении их в двух различных гравитационных потенциалах Φ_1 и Φ_2 вычисляется по формуле

$$\Delta\nu = \nu_0(1 + \alpha) \frac{\Delta\Phi}{c^2}. \quad (1)$$

Здесь ν_0 – частота генератора в отсутствие гравитационного поля, а $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. В серии различных экспериментов с использованием транспортируемых часов на основе оптических решеток значение α с точностью до погрешности измерений не превышало величину 10^{-4} [13]. В связи с этим

в настоящей работе будем рассматривать задачу в рамках общей теории относительности, когда $\alpha = 0$. Отметим, что частота часов с увеличением гравитационного потенциала будет уменьшаться, поскольку величина Φ является отрицательной величиной. «Покраснение» частоты часов можно упрощенно интерпретировать как наличие дополнительного «трения», которое испытывают квантовые осцилляторы, помещенные в гравитационное поле. С ростом высоты влияние гравитационного поля будет падать, а частота квантовых часов будет возрастать и стремиться к невозмущенному значению ν_0 .

Для измерения разности гравитационных потенциалов необходимо выполнить измерения разности частот часов как в одной и той же точке, так и при перемещении одного из стандартов в другую точку.

Примем, что стационарные часы будут располагаться только в одной точке 1, где частота

$$\nu_{s1} = \nu_{s0} \left(1 + \frac{\Phi_1}{c^2} \right), \quad (2)$$

а вторые транспортируемые часы могут располагаться как в точке 1, так и в точке 2. При этом их частоты будут равны:

$$\nu_{t1} = \nu_{t0} \left(1 + \frac{\Phi_1}{c^2} \right); \quad (3)$$

$$\nu_{t2} = \nu_{t0} \left(1 + \frac{\Phi_2}{c^2} \right). \quad (4)$$

Здесь ν_{s0} и ν_{t0} – виртуальные частоты стационарных и транспортируемых часов в отсутствие гравитационного поля. Введем обозначение:

$$\nu_{t0} = \nu_{s0}(1-x). \quad (5)$$

После простых преобразований, вводя обозначение разности частот часов, помещенных в первую точку $\Omega_{11} = \nu_{s1} - \nu_{t1}$, получим

$$\Omega_{11} = \nu_{s0}x \left(1 + \frac{\Phi_1}{c^2} \right). \quad (6)$$

При перемещении транспортируемых часов во вторую точку их частота будет равна

$$\nu_{t2} = \nu_{s0}(1-x) \left(1 + \frac{\Phi_2}{c^2} \right). \quad (7)$$

Вместе с тем для измерения разности частот квантовых часов, расположенных в двух различных точках, необходимо передать сигнал одних часов в точку расположения других. Обычно для этого учитывается фазовый набег электромагнитной волны, распространяющейся в направлении от центра Земли через заданные точки 1 и 2 [1–3].

Здесь рассмотрим это явление с несколько другой стороны. Как известно, масса фотона пропорциональна его частоте:

$$E = h\nu = mc^2. \quad (8)$$

Над поверхностью Земли сила воздействия гравитационного поля на фотон будет направлена к центру Земли и равна

$$F = -gm = -\frac{GM_E}{r^2} m. \quad (9)$$

Тогда изменение энергии фотона dE будет определяться совершаемой работой в гравитационном поле:

$$dE = -\frac{GM_E}{r^2} mdr. \quad (10)$$

Поскольку энергия фотона связана с его частотой, то при перемещении фотона из точки 2 в точку 1 в предположении $\nu_{12}^1 \approx \nu_{12}^2 = \nu$ можно записать следующее равенство:

$$\frac{\nu_{12}^1 - \nu_{12}^2}{\nu} = \frac{E_1 - E_2}{h\nu}. \quad (11)$$

Интегрируя (10), получим

$$\frac{\nu_{12}^1 - \nu_{12}^2}{\nu} = \frac{\mu}{c^2} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right). \quad (12)$$

Здесь ν_{12}^1 – значение частоты транспортируемых часов, переданной из точки 2 в точку 1. Из представленного выражения следует, что при движении фотонов от центра планеты будет происходить их «покраснение», а при направлении излучения к центру Земли частота фотонов будет возрастать.

Эффективный гравитационный потенциал Φ во вращающейся системе координат включает статический гравитационный потенциал V и центробежный потенциальный член, который определяется угловой скоростью вращения Земли $\omega_E = 7,2921151467 \cdot 10^{-5}$ рад \cdot с $^{-1}$, радиусом до центра Земли r

и полярным углом θ , измеренным вниз от оси вращательной симметрии. В первом порядке по малости V/c^2 справедливо соотношение [5]

$$\frac{\Phi}{c^2} = \frac{V}{c^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_E r \sin \Theta}{c} \right)^2. \quad (13)$$

Центростремительный потенциальный член будет иметь нулевые значения на полюсах и максимальные на экваторе, где вблизи поверхности Земли ($r \approx a$) его значение не будет превышать величины 10^{-11} .

В случае, когда часы расположены над поверхностью Земли ($r > a$), статический потенциал определяется выражением [5]

$$V = -\frac{\mu}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \Theta) \right]. \quad (14)$$

Тогда гравитационный потенциал в заданной точке

$$\Phi = -\frac{\mu}{r^2} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \Theta) \right] - \frac{1}{2} (\omega_E r \sin \Theta)^2, \quad (15)$$

а разность потенциалов будет равна

$$\begin{aligned} \Phi_1 - \Phi_2 = & -\frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \Theta_2) - \\ & - \frac{\mu}{r_1} J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \Theta_1) - \frac{\omega_E^2}{2} \left[(r_2 \sin \Theta_2)^2 - (r_1 \sin \Theta_1)^2 \right]. \end{aligned}$$

Геоцентрическая гравитационная постоянная $\mu = GM_E$, значение которой равно $3,986004418 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ (G – гравитационная постоянная Ньютона, M_E – масса Земли), коэффициент квадрупольного момента Земли $J_2 = 1,0826300 \cdot 10^{-3}$, экваториальный радиус Земли $a = 6,3781370 \cdot 10^6 \text{ м}$, полином Лежандра второй степени $P_2(\cos \theta) = [3 \cos^2 \theta - 1] / 2$, значение которого может меняться от $-1/2$ на Южном полюсе до 1 на Северном полюсе и равно нулю в «особых» точках при $\theta = \arccos 3^{-1/2}$, когда $\theta_1 = 54,73550$ и $\theta_2 = \pi - 54,73550$ (а соответствующие широты равны $\pm 35,2645^\circ$).

Найдем изменение гравитационного потенциала $\Delta\Phi$ при $\Delta r / r$, $\Delta\theta \ll 1$:

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta r}{r} \frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{3J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 (3\cos^2\Theta - 1)}{2} - \frac{\omega_E^2 r^3 \sin^2\Theta}{\mu} \right] - \Delta\theta \left[\frac{3\mu}{2r} J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin 2\Theta - \frac{\omega_E^2}{2} (r^2 \sin 2\Theta) \right].$$

В общем случае для любых θ как второй, так и третий слагаемые в первой квадратной скобке не превышают величины доли процента, а членом с множителем $\Delta\theta$ при $\Delta\theta < \Delta r / r$ с такой же погрешностью можно пренебречь. В результате в первом приближении разность гравитационных потенциалов будет пропорциональна разности ортометрических высот:

$$\Delta\Phi = \frac{\mu\Delta r}{r^2}. \quad (16)$$

После подстановки выражения (9) в (15), оставляя члены первого порядка малости, получим

$$v_{t2}^1 = v_{s0} \left[1 - x + \frac{\Phi_2}{c^2} - \frac{\mu}{c^2} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) \right]. \quad (17)$$

В этом случае разность частот между стационарными часами и излучением транспортируемых часов будет равна

$$\Omega_{12} = v_{s0} \left[x + 2 \frac{\mu}{c^2} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) \right]. \quad (18)$$

Здесь введено обозначение $\Omega_{12} = v_{s1} - v_{t2}^1$.

Если из выражения (9) вычесть равенство (16), то можно получить

$$\Omega_{11} - \Omega_{12} = -v_{s0} \left[x + 2 \frac{\mu}{c^2} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) \right]. \quad (19)$$

Из представленного выражения следует, что разность ортометрических высот пропорциональна разности измеренных значений биений частот стационарных и транспортируемых часов $\Omega_{11} - \Omega_{12}$, когда стационарные часы установлены в точке 1, а транспортируемые – в точках 1 и 2, причем это значение складывается из двух равных величин, связанных с влиянием гравитационного поля как на частоту часов, так и на частоту фотонов.

2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО СМЕЩЕНИЯ ЧАСТОТЫ ПО РАДИОКАНАЛУ

Измерения проводились на территории Западно-Сибирского филиала ФГУП «ВНИИФТРИ». Стационарный активный водородный стандарт Ч1-75А расположен на 4-м этаже, а пассивные транспортируемые водородные часы Ч1-1006 могли перемещаться с –2-го этажа до 10-го этажа. Разница высот между этими точками составила 41,26 м.

Хронологически измерения проводились по следующей схеме: 10-й этаж → подвал → 10-й этаж. Начальная фаза измерений предполагала исследование температурной зависимости выходной частоты стандарта с целью максимально исключить частотный тренд, вызванный флуктуацией температуры.

Для обработки экспериментальных данных может быть использован алгоритм фильтрации с применением сглаживающих кубических сплайнов, описанный в работе [15].

На рис. 1 приведены результаты измерений по результатам 18 суток наблюдений на 10-м этаже. Температура в помещении дислокации роверного стандарта фиксировалась с периодом 6 часов, и данные считывались с сервера мониторинга климатических показателей Zabbix. Измерения температуры показаны на рис. 2.

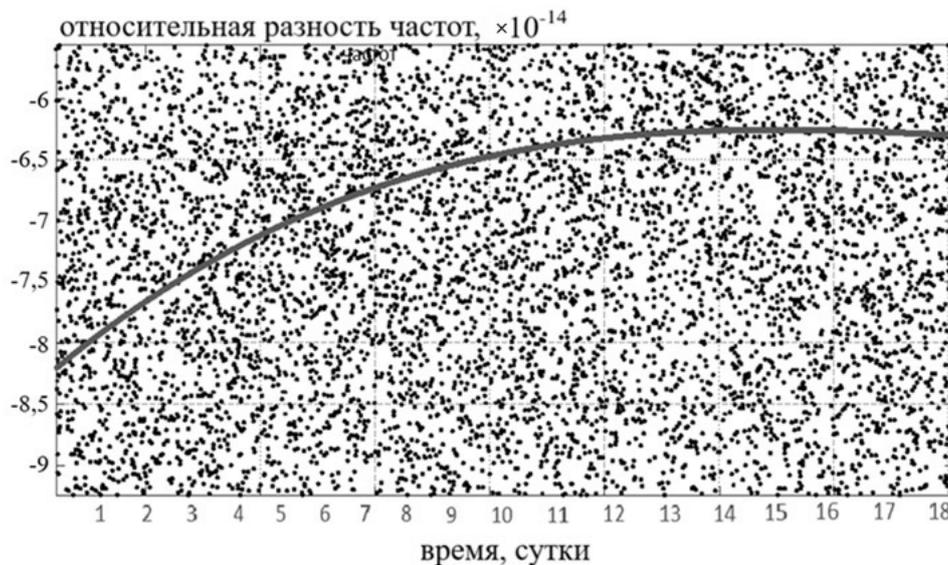


Рис. 1. Сглаженные данные

Fig. 1. Smoothed (fitted) data

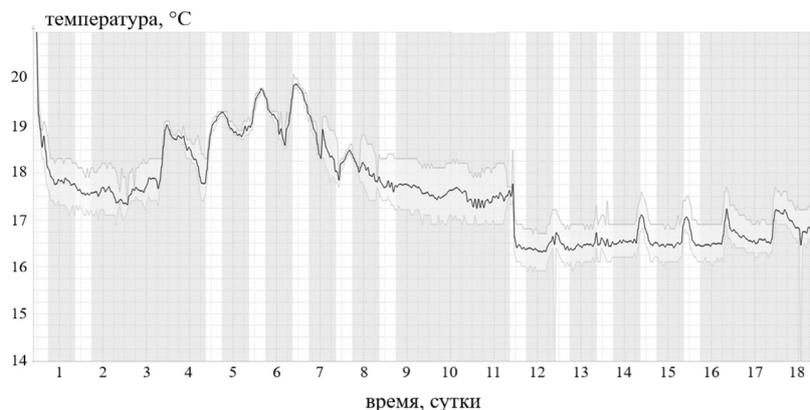


Рис. 2. График изменения температуры на 10-м этаже

Fig. 2. Graph of a temperature change on the 10th floor

Посуточное усреднение данных показано на рис. 3.

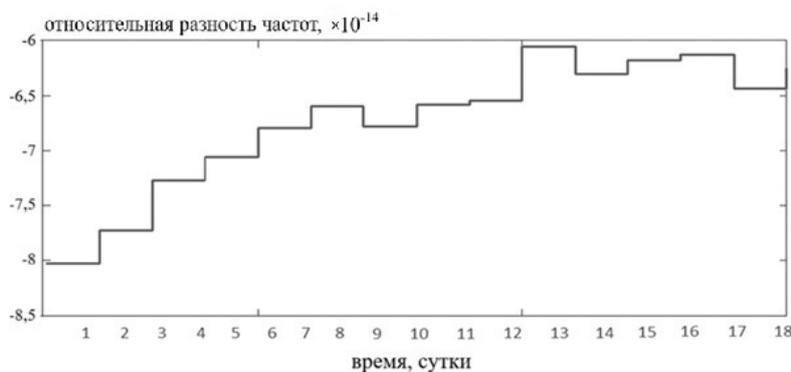


Рис. 3. Посуточное усреднение

Fig. 3. Daily averaging

Выход кривой относительной разности частот на плато наблюдается в период с 12-х по 18-е сутки наблюдений. В данный интервал времени кривая температуры также выходила на плато с соответствующим уменьшением флуктуаций (см. рис. 2). Таким образом, рабочая точка по температуре должна находиться на относительно горизонтальном участке кривой температуры.

При сохранении температуры постоянной около 18,2 °C с флуктуацией 0,2 °C были сняты измерения на четырех периодах наблюдений на 1-м этаже (рис. 4–7). Средние относительные разности частот измерялись с интервалом 1 с. Также для каждого интервала были посчитаны средние по ансамблю $m(f)$:

$$10\text{-й этаж, } 3\text{--}9 \text{ июня, } m(f) = -7,7876 \cdot 10^{-14};$$

$$10\text{-й этаж, } 8\text{--}9 \text{ июля, } m(f) = -8,6576 \cdot 10^{-14};$$

$$10\text{-й этаж, } 9\text{--}13 \text{ июля, } m(f) = -8,3343 \cdot 10^{-14};$$

$$10\text{-й этаж, } 15\text{--}19 \text{ июля, } m(f) = -8,2108 \cdot 10^{-14};$$

$$\text{подвал, } 28 \text{ июня – } 5 \text{ июля, } m(f) = -9,1905 \cdot 10^{-14};$$

подвал, 7–8 июля, $m(f) = -9,1165 \cdot 10^{-14}$;

подвал, 5–7 июля, $m(f) = -9,2814 \cdot 10^{-14}$.

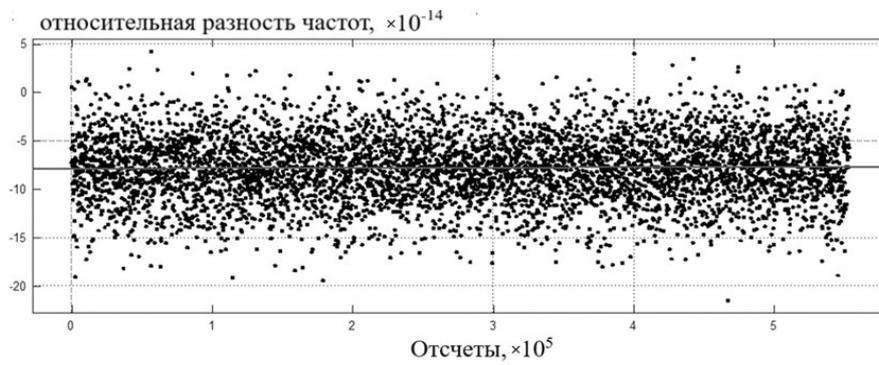


Рис. 4. Относительная разность частот на период 3–9 июня на 10-м этаже

Fig. 4. Relative frequency difference on the 10th floor for the period 3–9 June

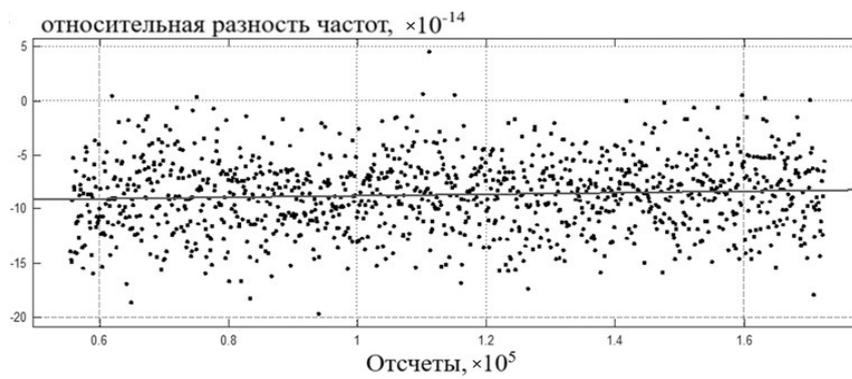


Рис. 5. Относительная разность частот на период 8–9 июня на 10-м этаже

Fig. 5. Relative frequency difference on the 10th floor for the period 8–9 June

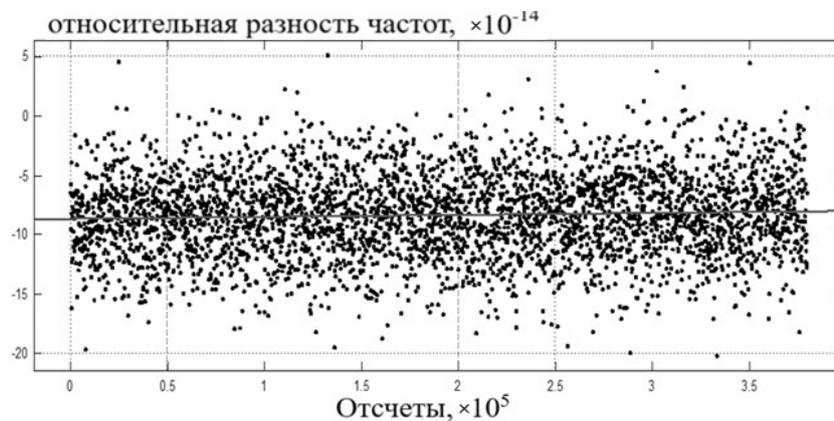


Рис. 6. Относительная разность частот на период 9–13 июля на 10-м этаже

Fig. 6. Relative frequency difference on the 10th floor for the period 9–13 July

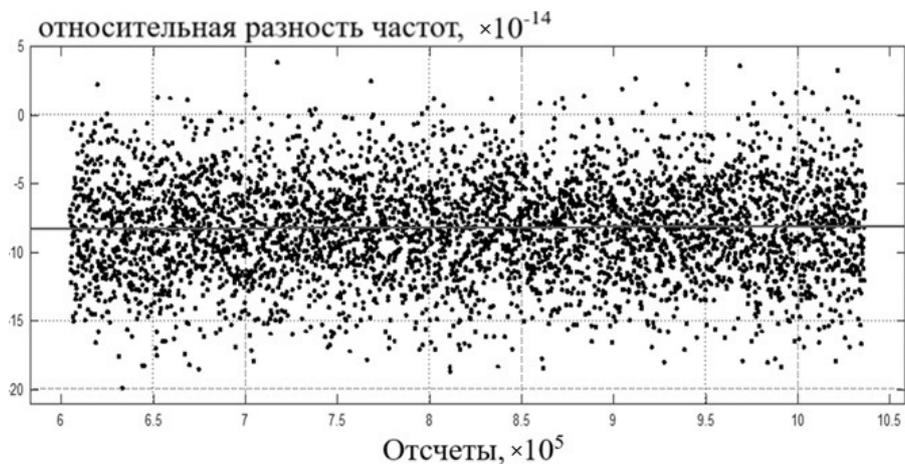


Рис. 7. Относительная разность частот на период 15–19 июля на 10-м этаже

Fig. 7. Relative frequency difference on the 10th floor for the period 15–19 July

Усреднение данных (рис. 4–7) дает значение относительной разности частот на 10-м этаже ($-8,2475 \cdot 10^{-14}$).

Среднеквадратическое отклонение разности частот на 10-м этаже составило $\sigma = 0,3117$. На основании несмещенной оценки дисперсии $\sigma = 0,3599$.

В подвальном помещении на –2-м этаже естественное термостатирование позволило уменьшить флуктуацию температуры до $0,05 \text{ }^\circ\text{C}$, поэтому были сняты данные за три периода измерений (рис. 8–10). Средние относительные разности частот измерялись с интервалом 1 с.

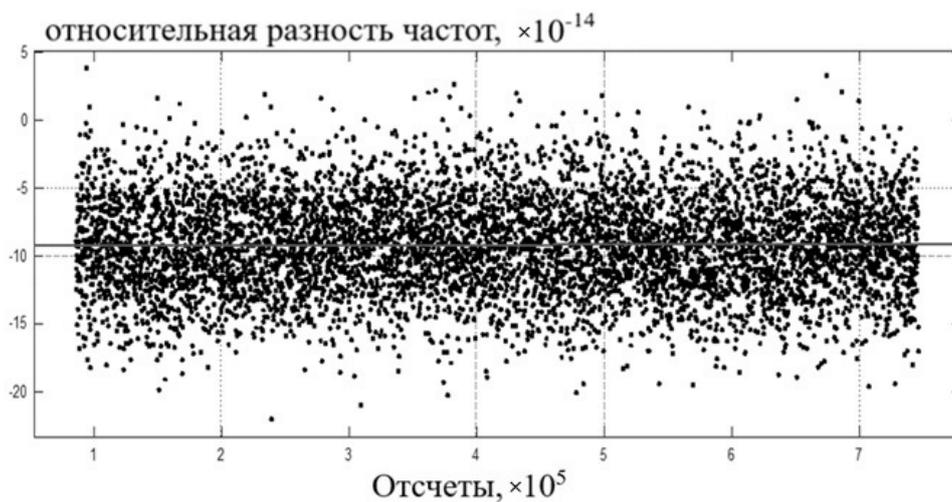


Рис. 8. Относительная разность частот на период 28 июня – 5 июля на –2-м этаже

Fig. 8. Relative frequency difference on the –2 floor for the period 28 June – 5 July

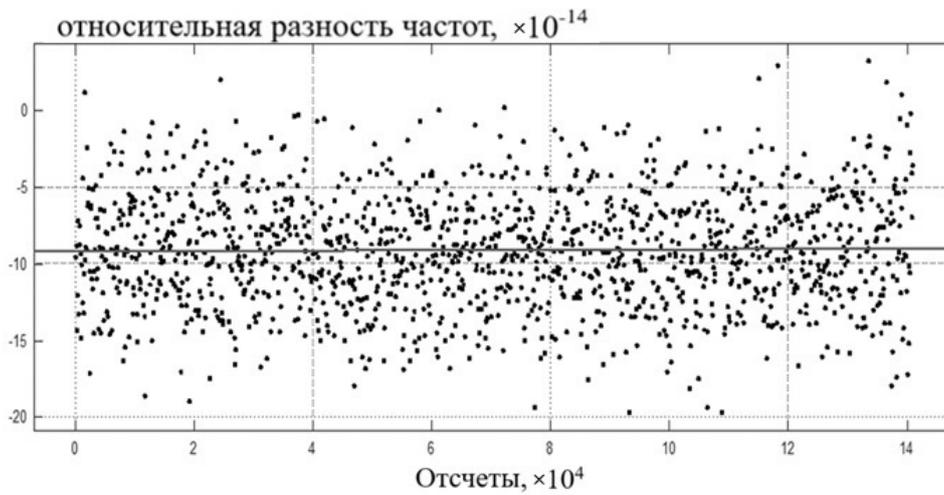


Рис. 9. Относительная разность частот на период 7–8 июля на –2-м этаже

Fig. 9. Relative frequency difference on 7–8 July on –2 floor

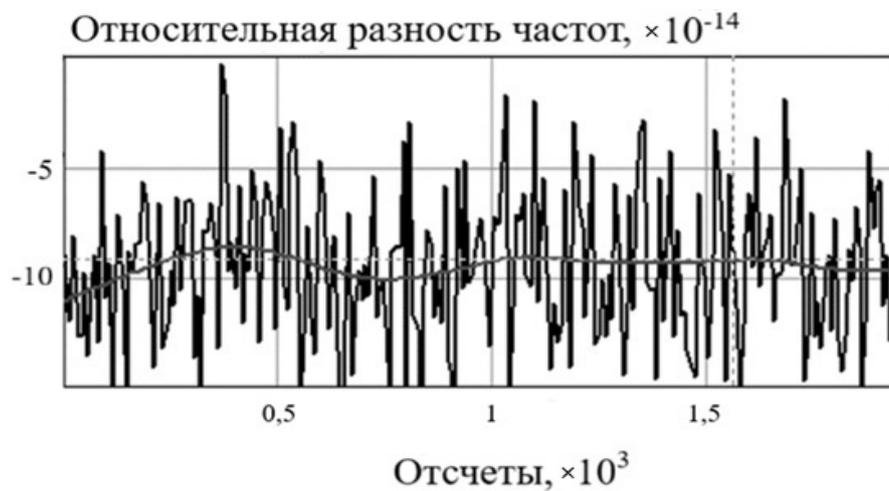


Рис. 10. Относительная разность частот на период 5–7 июля на –2-м этаже

Fig. 10. Relative frequency difference on the –2 floor for the period 5–7 July

Усреднение данных (рис. 8–10) дает значение относительной разности частот на –2-м этаже ($-9,1961 \cdot 10^{-14}$).

Среднеквадратическое отклонение разности частот на –2-м этаже составило $\sigma = 0,0674$. На основании несмещенной оценки дисперсии $\sigma = 0,0826$.

Исходя из полученных данных частотное смещение между 10-м и –2-м этажом составило $-8,2475 \cdot 10^{-14} - (-9,1961 \cdot 10^{-14}) = 9,4863 \cdot 10^{-15}$.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО СМЕЩЕНИЯ ЧАСТОТЫ ПО ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКОМУ КАНАЛУ

3.1. СХЕМА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Измерения проводились на территории Западно-Сибирского филиала ФГУП «ВНИИФТРИ». Стационарный активный водородный стандарт Ч1-75А расположен на 4-м этаже, а пассивные транспортируемые водородные часы Ч1-1006 могли перемещаться с –2-го этажа до 10-го этажа. Разница высот между этими точками составила 41,26 м. Схема измерений представлена на рис. 11.

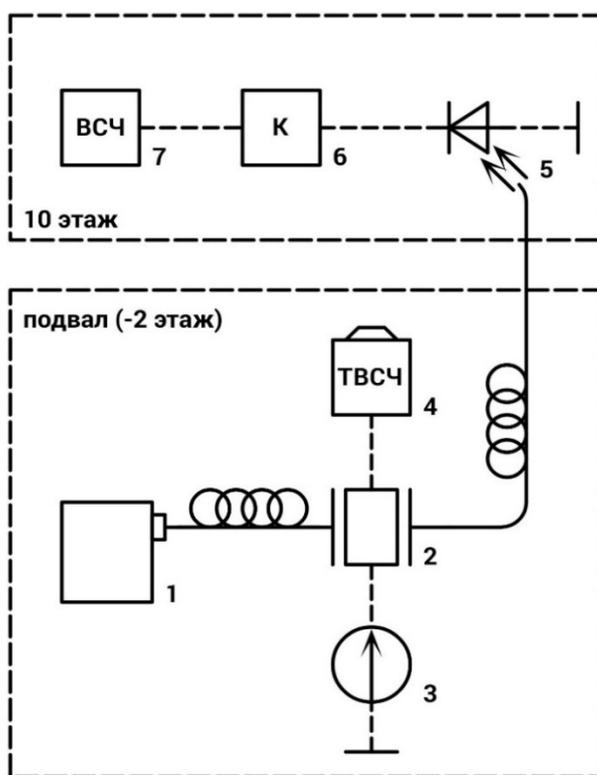


Рис. 11. Схема экспериментальной установки:

1 – волоконный лазер; 2 – электрооптический модулятор; 3 – источник постоянного напряжения; 4 – транспортируемый водородный стандарт частоты; 5 – стационарный стандарт частоты; 6 – компаратор; 7 – фотоприемник (сплошными линиями обозначены оптоволоконные связи, штриховыми – электрические)

Fig. 11. Experimental installation scheme:

1 is a fiber laser; 2 is an electro-optical modulator; 3 is a DC voltage source; 4 is a transported hydrogen frequency standard; 5 is a stationary frequency standard; 6 is a comparator; 7 is a photodetector (fiber wires are solid, electric wires are dashed)

Сигналы с выхода фотоприемника направлялись на фазовый многоканальный компаратор Ч7-315, где их частота сравнивалась с частотой стационарного эталона. Время установления рабочего режима компаратора 2 ч (7200 с), поэтому в работе представлены результаты, записанные после этого интервала. Нестабильность частоты, вносимая прибором, не превышает $3,0 \cdot 10^{-16}$ Гц.

В месте проведения наших экспериментов значение полярного угла $\theta = 35,26^\circ$. При размещении часов вблизи поверхности Земли второй член в фигурных скобках будет равен $-1,62 \cdot 10^{-3}$, а третий равен $-7,3 \cdot 10^{-5}$.

Это означает, что с точностью до третьего значащего числа можно пользоваться простым соотношением

$$\frac{\delta\nu}{\nu_1} = \frac{\mu}{c^2 a^2} H, \quad (20)$$

где разность частот часов, помещенных на перепаде высот H , будет равна $\delta\nu = \nu_2 - \nu_1$, а частота стандарта будет иметь минимальное значение на поверхности Земли, когда $r = a$:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\mu}{a^2 c^2} \right). \quad (21)$$

На поверхности Земли величина $\mu / (ca)^2 = 1,09 \cdot 10^{-16} \text{ м}^{-1}$.

3.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На первом этапе эксперимента транспортируемый стандарт частоты устанавливался рядом с эталоном (на 10-м этаже), чтобы установить разность частот между ними. Данные непрерывно записывались фазовым компаратором на протяжении 360 069 с, результаты измерений приведены на рис. 12.

Среднее значение относительной разности частот $(\nu_1^t - \nu_1^s) / \nu_1^s$ составило $-1,0161 \cdot 10^{-13}$, а измеренное среднее квадратическое относительное двухвыборочное отклонение (СКДО) за 50 000 с равно $8,1219 \cdot 10^{-15}$. При наложении линейного тренда на экспериментальные данные коэффициент наклона составляет $1,28 \cdot 10^{-20}$. На временном интервале измерений это позволяет оценить погрешность в $2,30 \cdot 10^{-15}$.

На следующем этапе транспортируемый стандарт частоты перемещался на 41,26 м ниже, а его частота наверху сравнивалась с частотой эталона. Измерения проводились непрерывно в течение 563 612 с. На рис. 13 представлены данные усредненных значений разности частот за каждые 1000 с. Масштаб соответствует рис. 13.

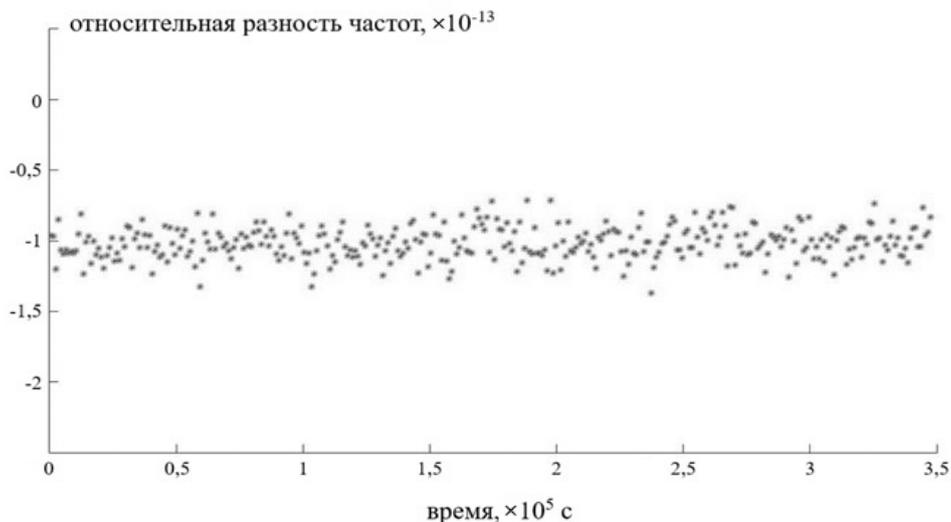


Рис. 12. Результат сравнения частот эталона и транспортируемого стандарта при их расположении в одной точке

Fig. 12. The result of comparing the frequencies of the reference and transported standard when they are located at the same point

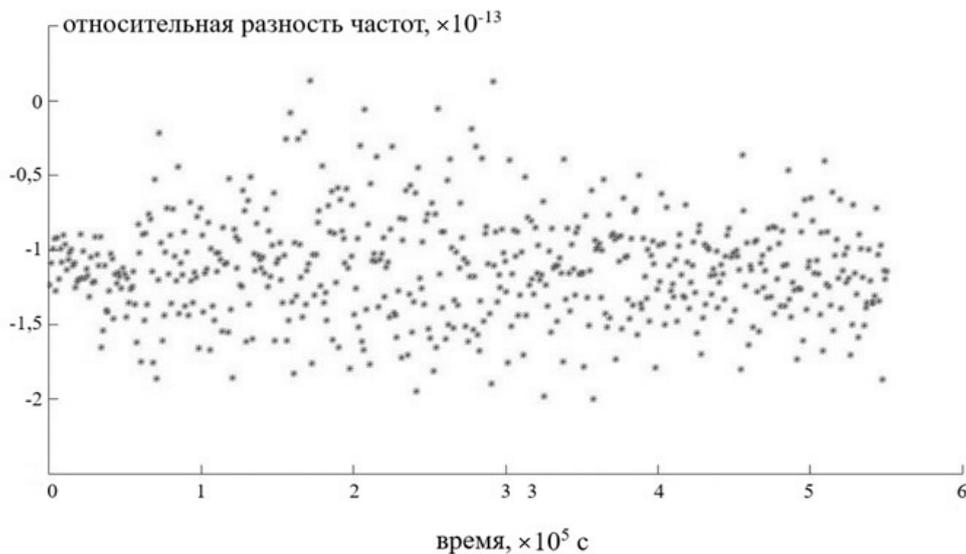


Рис. 13. Измеренная разность частот с усреднением за каждые 1000 с

Fig. 13. Measured frequency difference with averaging every 1000 sec

Среднее значение относительной разности частот $\left[\left(v_2^t \right)_1 - v_1^s \right] / v_1^s$ составило $-1,1224 \cdot 10^{-13}$, измеренное СКДО за 100 000 с равно $3,2814 \cdot 10^{-15}$. Также погрешность измерений можно оценить, накладывая линейный тренд на экспериментальные данные. Коэффициент наклона в этом случае составил

$9,36 \cdot 10^{-21}$, что при интервале измерения около $5 \cdot 10^5$ с позволяет оценить погрешность измерений за счет дрейфа частоты стандарта на уровне $2,33 \cdot 10^{-15}$.

Полученная на двух этапах разность средних значений $1,063 \cdot 10^{-14}$ позволяет оценить разность ортометрических высот в $48,8 \pm 9,8$ м, что согласуется с измерениями, выполненными с помощью поверенного тахеометра (41,26 м).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Были проведены измерения гравитационного смещения частоты водородных часов, разнесенных на 41,26 м при одновременной передаче сигнала по радиоканалу и волоконно-оптической линии связи.

Сравнивая результаты измерения относительной разностной частоты по двум каналам, отметим, что они отличаются на $1,1437 \cdot 10^{-15}$. При этом измерения, проводимые по оптическому каналу, имели более низкие значения СКДО. При изучении источников дополнительных погрешностей измерения при передаче сигнала через волоконно-оптическую линию связи было выявлено, что выходной сигнал модулятора сильно искажался с течением времени (начинали появляться дополнительные гармоники и происходило удвоение частоты). Такое поведение обусловлено нестабильностью рабочей характеристики модулятора. Для уменьшения погрешности измерения относительной разностной частоты стационарного и транспортируемого водородных стандартов необходимо введение обратной связи для стабилизации рабочей точки модулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pound R.V., Rebka Jr. G.A.* Gravitational red-shift in nuclear resonance // *Physical Review Letters*. – 1959. – Vol. 3 (9). – P. 439–441.
2. *Pound R.V., Rebka Jr. G.A.* Apparent weight of photons // *Physical Review Letters*. – 1960. – Vol. 4 (7). – P. 337–341.
3. *Pound R.V., Snider J.L.* Effect of gravity on nuclear resonance // *Physical Review Letters*. – 1964. – Vol. 13 (18). – P. 539–540.
4. *Ashby N.* Relativity in the global positioning system // *Living Reviews in Relativity*. – 2003. – Vol. 6. – Art. 1. – P. 1–42. – DOI: 10.12942/lrr-2003-1.
5. Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks / M. Takamoto, I. Ushijima, N. Ohmae, T. Yahagi, K. Kokado, H. Shinkai, H. Katori // *Nature Photonics*. – 2020. – Vol. 14 (7). – P. 411–415. – DOI: 10.1038/s41566-020-0619-8.
6. Real-time geopotentiometry with synchronously linked optical lattice clocks / T. Takano, M. Takamoto, I. Ushijima, N. Ohmae, T. Akatsuka, A. Yamaguchi, Y. Kuroishi, H. Munekane, B. Miyahara, H. Katori. – ArXiv preprint. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1608.07650> (accessed: 28.11.2024).
7. Delivery of high-stability optical and microwave frequency standards over an optical fiber network / J. Ye, J.-L. Peng, R.J. Jones, K.W. Holman, J.L. Hall, D.J. Jones, S.A. Diddams, J. Kitching, S. Bize, J.C. Bergquist // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2003. – Vol. 20 (7). – P. 1459–1467.
8. Geopotential measurements with synchronously linked optical lattice clocks / T. Takano, M. Takamoto, I. Ushijima, N. Ohmae, T. Akatsuka, A. Yamaguchi, Y. Kuroishi, H. Munekane, B. Miyahara, H. Katori // *Nature Photonics*. – 2016. – Vol. 10. – P. 662–666. – DOI: 10.1038/nphoton.2016.159.
9. Geopotential difference measurement using two transportable optical clocks' frequency comparisons / D. Liu, L. Wu, Ch. Xiong, L. Bao // *Remote Sensing*. – 2024. – Vol. 16. – P. 2462–2477.

10. Geodesy and metrology with a transportable optical clock / J. Grotti, S. Koller, S. Vogt, et al. // Nature Physics. – 2018. – Vol. 14. – P. 437–441. – DOI: 10.1038/s41567-017-0042-3.

11. A clock network for geodesy and fundamental science / C. Lisdat, G. Grosche, N. Quintin, et al. // Nature Communications. – 2015. – Vol. 7. – P. 1038–1051. – DOI: 10.1038/ncomms12443.

12. High-accuracy coherent optical frequency transfer over a doubled 642-km fiber link / D. Calonico, E.K. Bertacco, C.E. Calosso, C. Clivati, G.A. Costanzo, M. Frittelli, A. Godone, A. Mura, N. Poli, D.V. Sutyurin, G. Tino, M.E. Zucco, F. Levi // Applied Physics B. – 2014. – Vol. 117. – P. 979–986.

13. *Фатеев В.Ф., Рыбаков Е.А.* Экспериментальная проверка квантового нивелира на мобильных квантовых часах // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – 2021. – Т. 496. – С. 41–44. – DOI: 10.31857/S2686740020060097.

14. *Фатеев В.Ф.* Релятивистская теория и применение квантового нивелира и сети «Квантовый футшток» // Альманах современной метрологии. – 2020. – № 3. – С. 11–52.

15. *Воскобойников Ю.Е.* Частотная модель сглаживающего кубического сплайна и ее характеристики // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 5-1. – С. 18–23.

Дмитриев Александр Капитонович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры лазерных систем, главный научный сотрудник лаборатории квантовой криогенной электроники Новосибирского государственного технического университета. Ведущий научный сотрудник НИР ГЕОТЕХ, Сибирский государственный университет геосистем и технологий. Основное направление научных исследований: лазерная физика, спектроскопия, фемтосекундные лазеры, метрология. Имеет более 200 печатных работ. E-mail: dmitriev@corp.nstu.ru

Карпик Александр Петрович, доктор технических наук, профессор, ректор Сибирского государственного университета геосистем и технологий. Имеет более 300 печатных работ. Основное направление научных исследований: геодезия, спутниковая навигация. E-mail: kaf.astronomy@ssga.ru

Толстикова Александра Сергеевна, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник отдела 8 «Государственная служба времени, частоты и определения параметров вращения Земли» Западно-Сибирского филиала ФГУП «ВНИИФТРИ». Профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии Сибирского государственного университета геосистем и технологий. Профессор кафедры систем сбора и обработки данных Новосибирского государственного технического университета. Имеет более 100 печатных работ. Основное направление научных исследований: метрология, навигация. E-mail: tolstikov@sniim.ru

Головин Николай Николаевич, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры лазерных систем, младший научный сотрудник лаборатории квантовой криогенной электроники Новосибирского государственного технического университета. Младший научный сотрудник НИР ГЕОТЕХ, Сибирский государственный университет геосистем и технологий. Основное направление научных исследований: лазерная физика, спектроскопия, фемтосекундные лазеры. Имеет более 35 печатных работ. E-mail: n.golovin@corp.nstu.ru

Савинов Константин Николаевич, ассистент кафедры лазерных систем, младший научный сотрудник лаборатории квантовой криогенной электроники Новосибирского государственного технического университета. Младший научный сотрудник НИР ГЕОТЕХ, Сибирский государственный университет геосистем и технологий. Основное направление научных исследований: лазерная физика, стандарты частоты, КПН резонансы. Имеет более 20 печатных работ. E-mail: k.n.savinov@yandex.ru

Болдырев Вячеслав Сергеевич, студент физико-технического факультета Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований: лазерная физика, спектроскопия. Имеет одну печатную работу. E-mail: simplemail2019@mail.ru

Гусар Дмитрий Федорович, кандидат технических наук, начальник сектора 811 отдела 8 «Государственная служба времени, частоты и определения параметров вращения Земли» Западно-Сибирского филиала ФГУП «ВНИИФТРИ». Основное направление научных исследований: метрология, электроника.

Алексейцев Сергей Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры систем сбора и обработки данных Новосибирского государственного технического университета. Имеет более 40 печатных работ. Основное направление научных исследований: геодезия, навигация, СВЧ-техника. E-mail: aleksejtsev.94@mail.ru

Томилов Андрей Сергеевич, начальник отдела 8 «Государственная служба времени, частоты и определения параметров вращения Земли» Западно-Сибирского филиала ФГУП «ВНИИФТРИ». Имеет 9 печатных работ. Основное направление научных исследований: метрология, навигация. E-mail: tomler1@yandex.ru

Иваненко Алексей Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной фотоники Новосибирского государственного университета. Основное направление научных исследований: лазерная физика, квантовая криптография. Имеет более 100 печатных работ. E-mail: ivanenko.aleksey@gmail.com

Dmitriev Alexander K., D.Sc. (Phys.&Math.), professor at the Department of Laser Systems, chief researcher in the Laboratory of Quantum Cryogenic Electronics, Novosibirsk State Technical University. Leading researcher of R&D GEOTECH, Siberian State University of Geosystems and Technology. His research interests are currently focused on laser physics, spectroscopy, and femtosecond lasers. He has more than 200 publications. E-mail: dmitriev@corp.nstu.ru

Karpik Alexander P., D.Sc. (Eng.), professor, Rector, Siberian State University of Geosystems and Technologies. He has more than 300 publications. His research interests are currently focused on geodesy, satellite navigation. E-mail: kaf.astronomy@ssga.ru

Tolstikov Alexander S., D.Sc. (Eng.), leading researcher at the Department "State Service of Time, Frequency and Determination of the Parameters of the Earth's Rotation", West Siberian Branch of the Federal State Unitary Enterprise VNIIFTRI. Professor at the Department of Special Devices, Innovation and Metrology, Siberian State University of Geosystems and Technologies. Professor at the Department of Data Collection and Processing Systems, Novosibirsk State Technical University. He has more than 100 publications. His research interests are currently focused on metrology, satellite navigation. E-mail: tolstikov@sniim.ru

Golovin Nikolai N., PhD (Eng.), senior lecturer at the Department of Laser Systems, junior researcher in the Laboratory of Quantum Cryogenic Electronics, Novosibirsk State Technical University. junior researcher of R&D GEOTECH, Siberian State University of Geosystems and Technology. His research interests are currently focused on laser physics, spectroscopy, and femtosecond lasers. He has more than 35 publications. E-mail: n.golovin@corp.nstu.ru

Savinov Konstantin N., assistant at the Department of Laser Systems, junior researcher in the Laboratory of Quantum Cryogenic Electronics, Novosibirsk State Technical University. junior researcher at R&D GEOTECH, Siberian State University of Geosystems and Technology. His research interests are currently focused on laser physics, frequency standard, and CPT resonances. He has more than 20 publications. E-mail: k.n.savinov@yandex.ru

Boldyrev Vyacheslav S., student at the Physical Engineering Faculty, Novosibirsk State Technical University. His research interests are currently focused on laser physics and spectroscopy. He has 1 publication. E-mail: simplemail2019@mail.ru

Gusar Dmitry F., PhD (Eng.), Head of Sector 811, Department 8 "State Service of Time, Frequency and Determination of the Parameters of the Earth's Rotation", West Siberian Branch of the Federal State Unitary Enterprise VNIIFTRI. His research interests are currently focused on metrology and electronics

Aleksejtsev Sergey A., PhD (Eng.), assistant professor at the Department of Data Collection and Processing Systems, Novosibirsk State Technical University. He has more than 100 publications. His research interests are currently focused on geodesy, satellite navigation, and microwave technology. E-mail: aleksejtsev.94@mail.ru

Tomilov Andrey S., Head of Department 8 "State Service of Time, Frequency and Determination of the Parameters of the Earth's Rotation", West Siberian Branch of the Federal State Unitary Enterprise VNIIFTRI. He has 9 publications. His research interests are currently focused on geodesy and satellite navigation. E-mail: tomler1@yandex.ru

Ivanenko Alexey V., PhD (Phys.&Math.), senior researcher at the Laboratory of Nonlinear Photonics, Novosibirsk State University. He has more than 100 publications. His research interests are currently focused on laser physics and quantum cryptography. E-mail: ivanenko.aleksey@gmail.com

Measuring the gravitational frequency shift in a hydrogen clock when transmitting a signal via optical and radio frequency communication channels*

A.K. DMITRIEV^{1,2,a}, A.P. KARPIK^{1,b}, A.S. TOLSTIKOV^{1,2,3,c}, N.N. GOLOVIN^{1,2,d},
K.N. SAVINOV^{1,2,e}, V.S. BOLDYREV^{1,f}, D.F. GUSAR³, S.A. ALEKSEITSEV^{1,3,g},
A.S. TOMILOV^{3,h}, A.V. IVANENKO^{4,i}

¹ Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10 Plakhotnogo Street, Novosibirsk, 630108, Russian Federation

² Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marks Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

³ West Siberian Branch of the Russian Metrological Institute of Technical Physics and Radio Engineering, 4 Dimitrova Prospekt, Novosibirsk, 630004, Russian Federation

⁴ Novosibirsk State University, 2 Pirogova Street, Novosibirsk, 630090, Russian Federation

^a dmitriev@corp.nstu.ru ^b rector@ssga.ru ^c tolstikov@sniim.ru

^d n.golovin@corp.nstu.ru ^e k.n.savinov@yandex.ru ^f simplemail2019@mail.ru

^g alekseitsev.94@mail.ru ^h tomber1@yandex.ru ⁱ ivanenko.aleksey@gmail.com

Abstract

A scheme for measuring the gravitational frequency shift of hydrogen clocks during their movement between two points located at different orthometric altitudes with simultaneous signal transmission via radio and fiber-optic communication lines has been implemented.

Practical interest in studying the gravitational frequency shift of quantum standards is associated with the need to take it into account to improve accuracy in navigation satellite systems. Such measurements were performed using a space synchronization channel using signals from global navigation satellite systems. This became especially relevant when improving the metrological characteristics of quantum frequency and time standards, in particular, using transportable clocks based on optical lattices when transmitting a signal via fiber-optic communication lines. On the other hand, using quantum clocks, measurements of the difference in orthometric heights are performed using the relativistic synchronization method and the simultaneous use of the frequency standard redshift effect due to time dilation in a gravitational field and the redshift effect of photons overcoming the gravitational field.

This paper presents the results of measuring the gravitational frequency shift of a hydrogen clock when it is moved between two points located at different orthometric heights with signal transmission via a fiber-optic communication line and via a radio channel. In the first case, the radiation of a diode laser at a wavelength of 1.5 μm amplitude-modulated by a signal from the transported hydrogen clock at a frequency of 10 MHz, was transmitted via a fiber-optic communication line when a stationary hydrogen clock was used as a reference. Transmission via a radio channel was carried out via a coaxial radio frequency cable. The measurements were carried out on the territory of the West Siberian branch of the FSUE "VNIIFTRI".

Keywords: fiber optic communication lines, atomic clock, hydrogen frequency standard, orthometric altitude/height, gravitational frequency shift, relative frequency difference, frequency transfer, phase comparison

* Received 29 August 2024.

This research was carried out within the framework of the project "Development and Research of breakthrough technologies in the field of physical and relativistic geodesy in the interests of developing fundamental support for the GLONASS system" (R&D "GEOTECH-Kvant").

REFERENCES

1. Pound R.V., Rebka Jr. G.A. Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Physical Review Letters*, 1959, vol. 3 (9), pp. 439–441.
2. Pound R.V., Rebka Jr. G.A. Apparent weight of photons. *Physical Review Letters*, 1960, vol. 4 (7), pp. 337–341.
3. Pound R.V., Snider J.L. Effect of gravity on nuclear resonance. *Physical Review Letters*, 1964, vol. 13 (18), pp. 539–540.
4. Ashby N. Relativity in the global positioning system. *Living Reviews in Relativity*, 2003, vol. 6, art. 1, pp. 1–42. DOI: 10.12942/lrr-2003-1.
5. Takamoto M., Ushijima I., Ohmae N., Yahagi T., Kokado K., Shinkai H., Katori H. Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks. *Nature Photonics*, 2020, vol. 14 (7), pp. 411–415. DOI: 10.1038/s41566-020-0619-8.
6. Takano T., Takamoto M., Ushijima I., Ohmae N., Akatsuka T., Yamaguchi A., Kuroishi Y., Munekane H., Miyahara B., Katori H. *Real-time geopotentiometry with synchronously linked optical lattice clocks*. ArXiv preprint. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1608.07650> (accessed 28.11.2024).
7. Ye J., Peng J.-L., Jones R.J., Holman K.W., Hall J.L., Jones D.J., Diddams S.A., Kitching J., Bize S., Bergquist J.C. Delivery of high-stability optical and microwave frequency standards over an optical fiber network. *Journal of the Optical Society of America B*, 2003, vol. 20 (7), pp. 1459–1467.
8. Takano T., Takamoto M., Ushijima I., Ohmae N., Akatsuka T., Yamaguchi A., Kuroishi Y., Munekane H., Miyahara B., Katori H. Geopotential measurements with synchronously linked optical lattice clocks. *Nature Photonics*, 2016, vol. 10, pp. 662–666. DOI: 10.1038/nphoton.2016.159.
9. Liu D., Wu L., Xiong Ch., Bao L. Geopotential difference measurement using two transportable optical clocks' frequency comparisons. *Remote Sensing*, 2024, vol. 16, pp. 2462–2477.
10. Grotti J., Koller S., Vogt S., et al. Geodesy and metrology with a transportable optical clock. *Nature Physics*, 2018, vol. 14, pp. 437–441. DOI: 10.1038/s41567-017-0042-3.
11. Lisdat C., Grosche G., Quintin N., et al. A clock network for geodesy and fundamental science. *Nature Communications*, 2015, vol. 7, pp. 1038–1051. DOI: 10.1038/ncomms12443.
12. Calonico D., Bertacco E.K., Calosso C.E., Clivati C., Costanzo G.A., Frittelli M., Godone A., Mura A., Poli N., Sutyryn D.V., Tino G., Zucco M.E., Levi F. High-accuracy coherent optical frequency transfer over a doubled 642-km fiber link. *Applied Physics B*, 2014, vol. 117, pp. 979–986.
13. Fateev V.F., Rybakov E.A. Eksperimental'naya proverka kvantovogo nivelira na mobil'nykh kvantovykh chasakh [Experimental verification of a quantum level on a mobile quantum clock]. *Doklady Rossiiskoi akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki = Doklady Physics*, 2021, vol. 496, pp. 41–44. DOI: 10.31857/S2686740020060097. (In Russian).
14. Fateev V.F. Relyativistskaya teoriya i primeneniye kvantovogo nivelira v seti «Kvantovyi fut-shtok» [Relativistic theory and application of the quantum level and the Quantum Footstock network]. *Al'manakh sovremennoi metrologii = Al'manac of modern metrology*, 2020, no. 3, pp. 11–52.
15. Voskoboynikov Yu.E. Chastotnaya model' sglazhivayushchego kubicheskogo splaina i ee kharakteristiki [Frequency model of a smoothing cubic spline and its characteristics]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii = Modern High Technologies*, 2022, no. 5-1, pp. 18–23.

Для цитирования:

Измерение гравитационного смещения частоты в водородных часах при передаче сигнала через оптический и радиочастотный каналы связи / А.К. Дмитриев, А.П. Карпик, А.С. Толстик, Н.Н. Головин, К.Н. Савинов, В.С. Болдырев, Д.Ф. Гусар, С.А. Алексейцев, А.С. Томилов, А.В. Иваненко // Системы анализа и обработки данных. – 2024. – № 4 (96). – С. 59–77. – DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-59-77.

For citation:

Dmitriev A.K., Karpik A.P., Tolstikov A.S., Golovin N.N., Savinov K.N., Boldyrev V.S., Gusar D.F., Alekseitsev S.A., Tomilov A.S., Ivanenko A.V. Izmerenie gravitatsionnogo smeshcheniya chastoty v vodorodnykh chasakh pri peredache signala cherez opticheskiy i radiochastotnyy kanal svyazi [Measuring the gravitational frequency shift in a hydrogen clock when transmitting a signal via optical and radio frequency communication channels]. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Analysis and Data Processing Systems*, 2024, no. 4 (96), pp. 59–77. DOI: 10.17212/2782-2001-2024-4-59-77.

Правила для авторов

Журнал «Научный вестник НГТУ» основан в 1995 году на базе Новосибирского государственного технического университета. Печатная версия журнала зарегистрирована в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций в 2000 году. Свидетельство о регистрации ПИ № 77-1599 от 10.02.2000. Периодичность выхода издания – один раз в три месяца (четыре номера в год). В 2021 году был переименован в «Системы анализа и обработки данных». Научно-технические статьи, направленные в адрес журнала, проходят рецензирование и редактирование.

В журнале «Системы анализа и обработки данных» публикуются оригинальные статьи по следующим группам специальностей:

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки), *ранее* 05.13.18;

2.2.6 – Оптические и оптико-электронные приборы и комплексы (технические науки), *ранее* 05.11.07;

2.2.11 – Информационно-измерительные и управляющие системы (технические науки), *ранее* 05.11.16;

2.2.12 – Приборы, системы и изделия медицинского назначения (технические науки), *ранее* 05.11.17;

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки), *ранее* 05.13.01;

2.3.5 – Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей (технические науки), *ранее* 05.13.11.

Разделы журнала: информационные технологии и телекоммуникации; компьютерные науки и информатика; электроника, фотоника, приборостроение и связь.

Рекомендуемый объем статьи 10–16 страниц. Статьи объемом, не превышающим 8 страниц, могут быть размещены в разделе «Краткие сообщения». Возможна публикация дискуссионного материала в разделе «Дискуссии». В информационном разделе возможно размещение сообщений о состоявшихся и планируемых конференциях, семинарах и симпозиумах, сведений о факультетах и специальностях, научных разработках и научных школах. Статьи обзорного характера, как правило, не публикуются.

Website: <http://journals.nstu.ru/vestnik>

Условия приема статей

В редакцию журнала представляются следующие материалы.

1. Статья, подготовленная в соответствии с правилами оформления, – печатная версия, два экземпляра, подписанных авторами.

2. Контактная информация (телефоны рабочий и сотовый, адреса электронной почты, место работы, адрес места работы, должность, ученая степень, ученое звание автора, ORCID) – печатная версия, два экземпляра.

3. Описание статьи для базы данных «Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)», подготовленное в соответствии с правилами оформления, – печатная версия, один экземпляр.

4. Лицензионный договор, заполненный и подписанный, отправляется со всем пакетом документов; сканированный заполненный договор записывается на диск.

5. Электронная версия статьи, контактной информации, описания статьи для базы данных РИНЦ и сканированный лицензионный договор – в отдельных файлах на CD.

6. Экспертное заключение о возможности опубликования.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Требования к оформлению статьи

Формат оригинала – **A4**. Шрифт – **Times New Roman**. Текст набирается в русифицированном редакторе **Microsoft Word**. Параметры страницы (см):

левое поле – 3,3	верхнее поле – 4,0
правое поле – 3,3	нижнее поле – 3,9.
текстовое поле 22 × 14,4	

Межстрочные интервалы одинарные. Перед УДК оставляется четыре пустые строки размером 12. УДК набирается прописными буквами кеглем 8. После УДК перед заголовком оставляется пустая строка размером 8. Название статьи набирается кеглем 14 полужирным строчным шрифтом с отступом слева 1,8 см, без переносов слов, с выравниванием влево. После заголовка оставляется пустая строка размером 12. Фамилии автора – прописным шрифтом кеглем 8. После фамилий оставляется пустая строка размером 7. Указатель сноски * после названия статьи устанавливается в верхнем индексе. В сноске дата поступления статьи указывается курсивным шрифтом кеглем 8. После ФИО авторов статьи набирается аннотация кеглем 8 с отступом первой строки на 0,8 см, межстрочный интервал с множителем 1,1. После аннотации оставляется пустая строка размером 4. **Ключевые слова** – кеглем 8.

Заголовки разделов обязательны (например, **Введение, Постановка задачи, Методы анализа, Основной результат, Выводы** или **Заключение**), набираются прописным полужирным прямым шрифтом кеглем 8 с отступом 1,8 см. Перед ними оставляется пустая строка размером 20, после них – пустая строка размером 10. Основной текст – кеглем 10.

Подзаголовки – прописным полужирным шрифтом кеглем 8 с отступом 1,8 см. Перед ними и после них – пустая строка размером 10.

Рисунки представляются в **Corel Draw 11** или **Microsoft Word (RUS)**, в других редакторах не принимаются. Слово *Рис.* и его номер выделяются курсивом. Рисунки должны быть черно-белыми, в описании не должно быть ссылок на цвет.

Рисунки и таблицы нумеруются арабскими цифрами по порядку упоминания их в тексте. После номера должно следовать название **на русском и английском языке**. Подписанные подписи и названия таблиц – кеглем 9.

Все графы в таблицах должны иметь заголовки и разделяться вертикальными линиями. В головке таблицы по возможности указываются буквенные обозначения параметров и их единицы измерения.

Переменные в тексте набираются курсивным шрифтом кеглем 10. При написании формул использовать MathType версии не выше 6.0С. Формулы набирать по центру кеглем 11, надстрочные и подстрочные индексы – кеглем 9, знаки – кеглем 14 (латинские буквы – курсивным шрифтом, русские и греческие – прямым, цифры – прямым).

Например:

$$A(s) = \sum_{i=0}^{n^2+3} A_i s \lambda^{(i+1)^2} + \alpha.$$

Между текстом и формулами, а также между формулами оставляются пустые строки размером 4. Формулы не сжимать. Нумерацию формул указывать справа кеглем 10. Например:

$$D_f = D_c D + N_c N. \quad (1)$$

Нумерация страниц осуществляется следующим образом: Вставка / Номера страниц...; установить **положение** «вверху страницы», **выравнивание** – «справа», без нумерации первой страницы.

Колонтитулы устанавливаются сверху (с отступом от верхнего края страницы 3 см). Чтобы колонтитулы на четной, нечетной и первой страницах отличались, нужно установить: **Файл / Параметры страницы / Разметка; установить разные четные и нечетные и первая отличается.**

Колонтитулы на четных страницах. Вид / Колонтитулы; набираются курсивным прописным шрифтом кеглем 8. Фамилия автора с инициалами указывается впереди у правого края без отступа. Если авторов несколько, то указываются только два первых, далее «и др.».

Колонтитулы на нечетных страницах. Названия статьи с прописной буквы курсивным шрифтом кеглем 8, номера страниц – кеглем 10.

Перед списком литературы пустая строка размером 20. Заголовок «Список литературы» – кеглем 8 прописным полужирным шрифтом с отступом 1,8 см. После списка литературы пустая строка размером 10. Порядковый номер с красной строки кеглем 8 с интервалом 1,1. Фамилии и инициалы – кеглем 8 полужирным строчным шрифтом, название статьи (книги) – светлым шрифтом. Оформление библиографического списка по ГОСТ Р.7.0.5–2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления. – М.: Стандартинформ, 2008. – 19 с.

После списка литературы идет пустая строка размером 24. Далее приводятся краткие сведения об авторах кеглем 8 с интервалом 1,1 и отступом от левого края 1 см. Фамилия, имя, отчество – с красной строки курсивом. Последующий текст (ученая степень, ученое звание, членство в академиях и т. д.; основное направление научных исследований; количество имеющихся публикаций, в том числе монографий, учебных пособий; e-mail; рабочий телефон) – прямым шрифтом. **Информация предоставляется на русском и английском языке.**

Далее дается перевод на английский язык фамилии, имени, отчества автора и названия статьи, а также реферата и ключевых слов (обязательно).

Исправления, вносимые автором, при доработке статьи **выделять** желтым цветом.

Требования к оформлению РИНЦ

В описании статьи должна быть указана следующая информация.

1. Номера страниц, на которых размещена статья в сборнике.
2. Коды: УДК, и / или ББК, и / или DOI, и / или других классификационных индексов или систем регистрации.
3. Название статьи.
4. Фамилия, имя, отчество авторов.
5. Место работы каждого автора в именительном падеже. Указать должность автора по основному месту работы.
6. Контактная информация (почтовый адрес места работы, номер телефона, адрес электронной почты – обязательно).
7. Аннотация (не менее 320 и не более 640 знаков).
8. Ключевые слова: каждое слово или словосочетание отделяется от другого запятой (10–20 слов).
9. Пункты 3–8 на английском языке.
10. Список литературы.

Образец оформления приведен на сайте: <http://journal.nstu.ru/vestnik>.