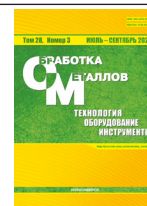




Обработка металлов

(технология • оборудование • инструменты)

Сайт журнала: http://journals.nstu.ru/obrabotka_metallov

Аналитическая оценка производительности обработки комплексных заготовок на основе марковских моделей

*Галина Невар^{a, *}, Станислав Рошчупкин^b, Сергей Братан^c, Александр Харченко^d*

Севастопольский государственный университет, ул. Университетская, 33, г. Севастополь, 299053, Россия

^a  <https://orcid.org/0009-0008-2528-881X>,  GVNevar@sevsu.ru; ^b  <https://orcid.org/0000-0003-2040-2560>,  st.roshchupkin@yandex.ru;^c  <https://orcid.org/0000-0002-9033-1174>,  serg.bratan@gmail.com; ^d  <https://orcid.org/0000-0003-1704-9380>,  khao@list.ru

ИНФОРМАЦИЯ О СТАТЬЕ

УДК 621.9.01: 519.2

История статьи:

Поступила: 01 июня 2026

Рецензирование: 13 июня 2026

Принята к печати: 27 июня 2026

Доступно онлайн: 15 сентября 2026

Ключевые слова:

Марковские процессы

Интенсивности переходов

Производительность

Комплексные заготовки

Предельные вероятности

АННОТАЦИЯ

Введение. В условиях многономенклатурного производства операции загрузки, разгрузки и вспомогательных перемещений узлов оборудования вносят значительный вклад в длительность технологического цикла. Предполагается, что при переходе от обработки отдельных простых заготовок к комплексным, объединяющим несколько деталей в одном блоке, может быть достигнуто сокращение непроизводительных временных затрат. Однако существующие аналитические подходы не позволяют количественно оценить выигрыш в производительности с учетом вероятностного характера переходов между технологическими состояниями. **Цель работы:** разработка аналитических выражений для оценки производительности технологической системы при обработке простых и комплексных заготовок на основе марковских моделей. **Задачей исследования** является установление соответствия между временными параметрами классического нормирования и интенсивностями переходов в марковской цепи, а также вывод формулы для относительного выигрыша. В работе технологический процесс представлен ориентированным графом, переходы между состояниями которого заданы интенсивностями. **Методы исследования:** математическое моделирование с использованием основных положений теории марковских процессов, численное моделирование в среде Maple, а также положения теории групповой обработки деталей. **Результаты и обсуждение.** Разработанные математические модели позволяют количественно оценить доли времени, которые технологическая система проводит в состояниях загрузки, обработки, вспомогательных перемещений и разгрузки. Полученные аналитические зависимости связывают производительность непосредственно с интенсивностями переходов между состояниями. Показано, что ключевыми состояниями, определяющими эффективность обработки, являются загрузка, разгрузка и вспомогательные перемещения. Выполнено численное моделирование в среде Maple, результаты которого подтвердили справедливость полученных формул. Представленные результаты подтверждают перспективность разрабатываемого подхода к аналитической оценке производительности обработки комплексных заготовок. Полученные выражения справедливы для широкого диапазона номенклатуры поверхностей и могут быть использованы для расчета выигрыша при объединении произвольного количества деталей.

Для цитирования: Аналитическая оценка производительности обработки комплексных заготовок на основе марковских моделей / Г.В. Невар, С.И. Рошчупкин, С.М. Братан, А.О. Харченко // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). – 2026. – Т. 28, № 3. – С. 29–43. – DOI: 10.17212/1994-6309-2026-28.3-29-43.

Введение

В современном машино- и приборостроении наблюдается устойчивая тенденция повышения требований к производительности металлообрабатывающего оборудования. Это обусловлено необходимостью сокращения производственных издержек, уменьшения длительности технологического цикла и повышения конкурентоспособности выпускаемой продукции. Классическая

формула штучного времени, известная из основ технологического нормирования, предполагает, что время изготовления одной детали складывается из основного (машинного), вспомогательного времени, времени обслуживания рабочего места и времени на отдых [1]. Однако эта модель базируется на допущении о детерминированном характере всех временных затрат и не учитывает стохастическую природу реального производства. Реальные производственные системы функционируют в условиях существенной неопределенности. Возможны незапланированные простои, отказы инструмента, брак и другие события, имеющие вероятностную природу [2]. Следовательно, для адекватного анализа и про-

*Адрес для переписки

Невар Галина Валерьевна, старший преподаватель
Севастопольский государственный университет,
ул. Университетская, 33,
299053, г. Севастополь, Россия
Тел.: +7 978 727-32-47, e-mail: GVNevar@sevsu.ru

гнозирования производительности необходимы математические методы, учитывающие эти факторы.

Теоретико-вероятностный подход к анализу производственных систем имеет длительную историю. Основы моделирования сложных систем с использованием марковских цепей с непрерывным временем были заложены в работах А.Д. Вентцелла [3], а также Е.С. Вентцель и Л.А. Овчарова [4], где подробно рассмотрены методы анализа случайных процессов. Классический учебник Дж.Р. Норриса [5] дает строгое изложение теории марковских цепей, включая методы вычисления предельных вероятностей. Дальнейшее развитие в области имитационного моделирования производственных систем продолжил А.М. Лоу [6].

В последние годы наблюдается активное развитие методов математического моделирования применительно к задачам машиностроения. В работе [7] предложен комплексный подход к интеграции инструментов бережливого производства и цифровых технологий (Lean 4.0). Авторы [8] рассматривают концепцию «фабрик будущего» в контексте Индустрии 5.0. Эти концепции требуют адекватного математического аппарата для оценки эффективности технологических решений на этапе их проектирования. Основы теории групповой обработки деталей были заложены С.П. Митрофановым [9], который ввел понятие комплексной детали как обобщенной модели, синтезирующей все поверхности деталей, входящих в технологическую группу. В развитие этих идей в работах [10, 11] предложена концепция использования комплексных заготовок – физического объединения нескольких заготовок комплектной группы в единый блок для последовательной обработки за один установ. Показано, что такой подход позволяет существенно сократить долю вспомогательного времени, однако аналитические зависимости для количественной оценки выигрыша в производительности в этих работах не были получены.

Теоретико-вероятностные аспекты функционирования технологических систем рассматривались также в работе [12]. Вопросы анализа и моделирования технологических процессов на основе теории графов и марковских процессов обсуждаются в [13]. Более широкий обзор методов классификации математических моделей

технологического проектирования представлен в [14]. Вопросы повышения жесткости технологической системы при обработке на металлорежущих станках рассмотрены в монографии [15]. Проблеме управления обработкой нежестких деталей посвящена работа [16]. Анализ перенастраиваемости оборудования проведен в работе [17], а синтез технологической системы на основе морфологического анализа выполнен в [18]. Эти исследования создают теоретическую базу для проектирования технологических систем обработки комплексных заготовок.

В работах [19, 20] рассматриваются вопросы прогнозируемой адаптации параметров процесса при обработке гибридных заготовок (из разных материалов) и дается оценка экономических эффектов от кастомизации продукции. Несмотря на значительное количество работ, посвященных как групповой технологии, так и вероятностному моделированию, остается нерешенной задача вывода замкнутых аналитических выражений для количественной оценки производительности технологической системы при обработке комплексных заготовок. Большинство существующих подходов ориентировано либо на детерминированные модели штучного времени, либо на имитационное моделирование, не дающее явных формул для расчета выигрыша.

Целью настоящей работы является разработка аналитических выражений для оценки производительности технологической системы при обработке простых и комплексных заготовок на основе марковских моделей с непрерывным временем. Для достижения поставленной цели в процессе исследования требовалось решить следующие **задачи**:

- установить соответствия между временными параметрами классического технормирования и интенсивностями переходов в марковской цепи;
- вывести формулы для производительности единичной заготовки через предельные вероятности ключевых состояний;
- вывести формулы для производительности комплексной заготовки через предельные вероятности ключевых состояний;
- получить аналитическое выражение для относительного выигрыша при переходе от раздельной обработки единичных заготовок к обработке комплексной заготовки.

Методика исследований

В настоящей работе рассматриваются два типа заготовок: единичная и комплексная. Единичная заготовка (рис. 1) представляет собой отдельную деталь и формируется с использованием теории групповой обработки, что позволяет обеспечить максимальную номенклатурную насыщенность элементарных наружных поверхностей, обрабатываемых точением [9]. Это, в свою очередь, дает возможность количественно оценить и выявить наибольшие значения времени пребывания технологической системы в каждом из исследуемых состояний [10, 11].

Следует отметить, что используемый в настоящей работе термин «комплексная заготовка» не тождествен понятию «комплексная деталь», введенному С.П. Митрофановым в рамках теории групповой технологии [9]. В классическом понимании комплексная деталь представляет собой обобщенную модель, синтезирующую все поверхности деталей группы, объединяющую все конструктивные элементы (поверхности) деталей, входящих в технологическую группу, и служит основой для разработки группового технологического процесса, применимого к любой детали группы. В отличие от этого, под ком-

плексной заготовкой (рис. 2) в данной работе понимается физическое объединение нескольких отдельных заготовок комплектной группы (i, j, k), поступающей на сборку в единый блок для их одновременной или последовательной обработки за один установ [10, 11].

Помимо того что обработка с одного установка позволяет добиться большей точности сопрягаемых деталей, запускаемых в производство комплектной группой, сравнение двух технологических подходов – обработки отдельных единичных заготовок и обработки комплексных заготовок – показывает, что во втором случае существенно сокращается время на вспомогательные операции, а также на операции загрузки и разгрузки, что в теории должно приводить к повышению производительности.

Разработанная аналитическая модель производительности базируется на результатах предварительных исследований концепции использования в производстве с целью повышения его гибкости и производительности комплексных заготовок, в которых были определены структура и номенклатурная насыщенность поверхностей обрабатываемых заготовок [10, 11].

На рис. 1 приняты следующие обозначения состояний, соответствующих различным техно-

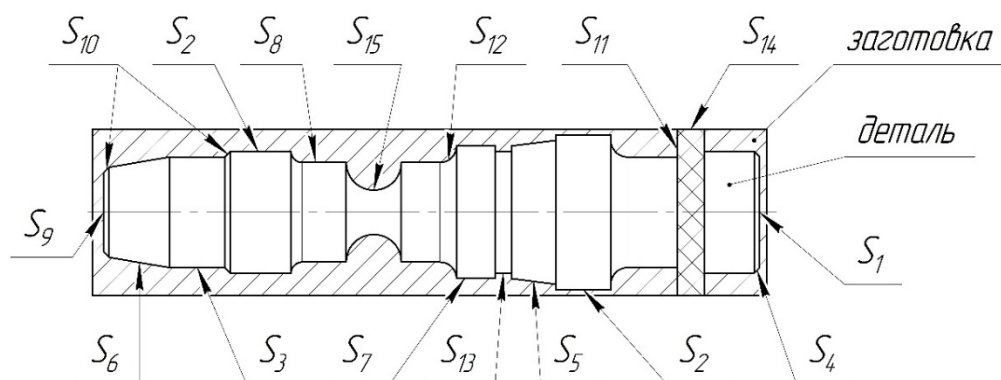


Рис. 1. Пример единичной заготовки

Fig. 1. Example of a single workpiece

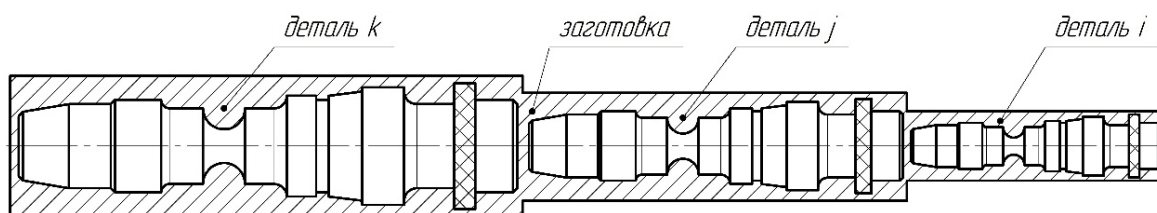


Рис. 2. Пример комплексной заготовки

Fig. 2. Example of a complex workpiece

логическим переходам токарной обработки: S_1 – подрезка торца; S_2 – точение открытой цилиндрической поверхности; S_3 – точение полуоткрытой цилиндрической поверхности; S_4 – точение открытой фаски справа; S_5 – точение полуоткрытой конической поверхности; S_6 – точение открытой конической поверхности, ограниченной полуоткрытым конусом; S_8 – точение полуоткрытой цилиндрической поверхности, ограниченной галтелью; S_9 – отрезка детали; S_{10} – точение фаски слева; S_{11} – подрезка полуоткрытого торца; S_{12} – точение галтели; S_{13} – точение канавки без привязки к виду и размеру; S_{14} – накатка рифлений; S_{15} – точение фасонной поверхности.

На основе анализа геометрии и технологических переходов для каждого типа заготовок были построены ориентированные графы технологического процесса [10, 11].

В настоящей работе рассматривается марковский процесс, описывающий функционирование идеального технологического процесса токарной обработки. Модель предполагает отсутствие отказов, поломок и брака, что позволяет оценить верхнюю границу производительности системы. Пространство состояний разделено на два класса: основные технологические переходы (съем материала) и вспомогательные переходы (загрузка, разгрузка, подвод/отвод и смена инструмента), что дает возможность определить долю машинного времени и получить предельные оценки эффективности.

Построенные графы относятся к классу марковских процессов чистого размножения, что полностью соответствует необратимому характеру технологического маршрута, где каждый переход выполняется однократно и возврат к предыдущему не предусмотрен. В этом классе процессов переходы возможны только из состояния с меньшим номером в состояние с большим номером, а обратные переходы (гибель) и поглощающие состояния (отказы) отсутствуют. Согласно классическим работам Е.С. Вентцель и Л.А. Овчарова, такой процесс является

частным случаем процессов гибели и размножения при нулевых интенсивностях «гибели» [4].

Для оценки производительности ключевое значение имеют прежде всего вспомогательные переходы, поскольку именно они определяют долю непроизводительных затрат времени в общем цикле. Учитывая громоздкость полных графов, включающих все возможные состояния и переходы, в настоящей работе представлены их упрощенные структуры (рис. 3). Вершины графа соответствуют отдельным состояниям, соответствующим различным технологическим переходам токарной обработки, а ориентированные ребра – возможным переходам между ними с соответствующими интенсивностями λ_n^m .

В общем виде матрица интенсивностей переходов Λ имеет размерность $[n \times n]$, где n – общее число состояний системы. Элементы матрицы λ_n^m представляют собой интенсивности перехода из состояния n в состояние m . Диагональные элементы определяются из условия сохранения суммы вероятностей:

$$\lambda_n^n = - \sum_{m \neq n} \lambda_n^m$$

Для единичной заготовки (рис. 1) получен граф, содержащий 18 вершин. Из них 15 вершин соответствуют состояниям обработки поверхностей $P_1, P_2, \dots, P_n$ ($n = 15$), а три вершины – ключевым состояниям: загрузка P_{16} , разгрузка P_{17} и вспомогательные перемещения P_{18} . Соответственно матрица интенсивностей переходов $\Lambda_{\text{прост}}$ имеет размерность $[18 \times 18]$.

Для комплексной заготовки (рис. 2), объединяющей m единичных заготовок, граф переходов строится как декартово произведение графов отдельных заготовок с добавлением межзаготовочных переходов. Если каждая единичная заготовка описывается 18 состояниями, то при независимом рассмотрении трех заготовок без учета общих состояний число состояний составило бы $N_{\text{компл}} = (N_{\text{прост}})^m = 18^3 = 5832$.

Однако в реальной технологической системе состояния загрузки, разгрузки и вспомогательных операций являются общими для всех деталей комплексной заготовки. Поэтому из декартова произведения исключаются повторяющиеся

ключевые состояния. Общее число состояний для комплексной заготовки определяется по формуле $N_{\text{компл}} = mN_{\text{обр}} + N_{\text{вспом}} = 3 \cdot 15 + 3 = 48$, соответственно матрица интенсивностей переходов $\Lambda_{\text{компл}}$ имеет размерность $[48 \times 48]$. Для наглядного представления структуры технологического процесса на рис. 3 приведены упрощенные графы переходов для единичной и комплексной заготовки.

Рассмотрим марковскую цепь с непрерывным временем, описывающую технологический

процесс изготовления детали. Система может находиться в n различных состояниях. В стационарном режиме для каждого состояния n выполняется уравнение баланса [3]:

$$P_n \sum_{m \neq n} \lambda_n^m = \sum_{m \neq n} P_m \lambda_m^n, n = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

где λ_n^m – интенсивность перехода из состояния n в состояние m ; P_n , P_m – вероятности потоков, переводящие систему из состояния S_n в состояние S_m .

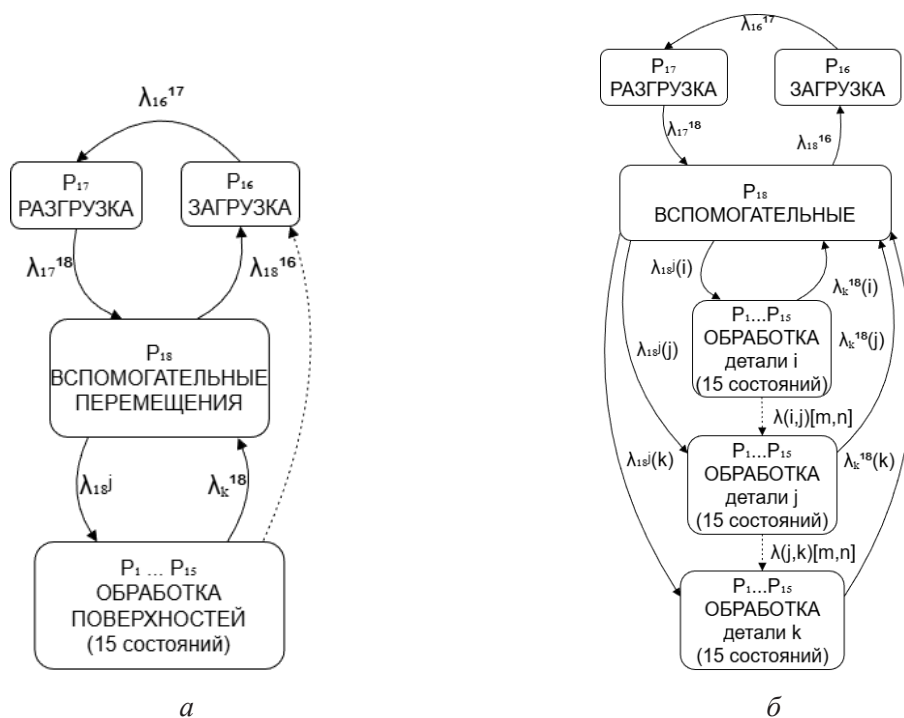


Рис. 3. Упрощенные структуры графов переходов:
а – для единичной заготовки; б – для комплексной заготовки

Fig. 3. Simplified structures of transition graphs:

а – for a single workpiece; б – for a complex workpiece

Система (1) дополняется условием нормировки:

$$\sum_{n=1} P_n = 1 \quad (n = \overline{1, k}). \quad (2)$$

В модели технологического процесса можно выделить ключевые состояния, непосредственно влияющие на фактическую производительность: P_{16} – состояние загрузки; P_{17} – состояние разгрузки; P_{18} – состояние вспомогательных перемещений (холостые ходы, подходы инструмента); $P_1, \dots, P_{15}$ – состояния обработки по-

верхностей. Интенсивности переходов между этими состояниями обозначим как λ_n^m . Для корректного описания процесса должны выполняться следующие соотношения: из состояния загрузки возможен переход только в состояние разгрузки: $\lambda_n^m > 0$, остальные $\lambda_{16}^m > 0$; из состояния разгрузки возможен переход только в состояние вспомогательных перемещений: $\lambda_{17}^{18} > 0$; из состояния вспомогательных перемещений возможны переходы в состояния обработки и в состояние загрузки.

Запишем уравнения баланса (1) для состояний P_{16} , P_{17} и P_{18} . Для состояния загрузки P_{16} входящие потоки поступают только из P_{18} с интенсивностью λ_{18}^{16} , а исходящие потоки – только в P_{17} с интенсивностью λ_{16}^{17} , уравнение баланса будет выглядеть следующим образом:

$$P_{16}\lambda_{16}^{17} = P_{18}\lambda_{18}^{16}. \quad (3)$$

Для состояния разгрузки P_{17} входящие потоки поступают только из P_{16} с интенсивностью λ_{16}^{17} , а исходящие потоки – только в P_{18} с интенсивностью λ_{17}^{18} , тогда уравнение баланса будет

$$P_{17}\lambda_{17}^{18} = P_{16}\lambda_{16}^{17}. \quad (4)$$

Для состояния вспомогательных перемещений P_{18} входящие потоки поступают из всех состояний обработки P_n ($n = 1...15$) с интенсивностями λ_n^{18} и из состояния разгрузки P_{17} с интенсивностью λ_{17}^{18} . Исходящие потоки направляются во все состояния обработки P_m ($m = 1...15$) с интенсивностями λ_{18}^m и в состояние загрузки P_{16} с интенсивностью λ_{18}^{16} . Уравнение баланса при этом:

$$P_{18} \left(\sum_{m=1}^{15} \lambda_{18}^m + \lambda_{18}^{16} \right) = \sum_{n=1}^{15} P_n \lambda_n^{18} + P_{17} \lambda_{17}^{18}. \quad (5)$$

Из уравнений (3) и (4) получаем связь между вероятностями:

$$P_{16} = \frac{\lambda_{18}^{16}}{\lambda_{16}^{17}} P_{18}, \quad P_{17} = \frac{\lambda_{18}^{18}}{\lambda_{17}^{18}} P_{18}. \quad (6)$$

Для определения производительности необходимо установить среднее время цикла – ключевую величину, характеризующую продолжительность полного цикла обработки. В классическом технормировании время изготовления одной детали (штучное время $T_{шт}$) включает фиксированные составляющие, в том числе время загрузки $T_{загр}$, время разгрузки $T_{разгр}$ и время других вспомогательных операций T_v . Однако в реальном стохастическом процессе

продолжительность каждой из этих операций является случайной величиной.

Среднее время цикла $T_{цикл}$ складывается из всех этапов обработки одной детали (или комплекта деталей):

$$T_{цикл} = \tau_3 + \sum_{k=1}^n \tau_{обр}^{(n)} + \tau_{всп} + \tau_p,$$

где τ_3 – среднее время загрузки; $\tau_{обр}^{(n)}$ – среднее время обработки k -й поверхности; $\tau_{всп}$ – среднее время вспомогательных операций; τ_p – среднее время разгрузки.

Поскольку технологическая система последовательно проходит через ключевые состояния P_{16} (загрузка), P_{17} (разгрузка) и P_{18} (вспомогательные перемещения), возвращаясь в исходное состояние после завершения полного цикла, то среднее время цикла можно выразить через вероятность нахождения системы в каждом из этих состояний и интенсивности выхода из них. Этот подход учитывает стохастический характер процесса и позволяет связать временные характеристики с предельными вероятностями состояний [4, 7].

Найдем среднее время цикла $T_{цикл}$ через состояние загрузки P_{16} . В стационарном режиме среднее время между двумя последовательными актами загрузки обратно пропорционально частоте завершения загрузки. Поскольку в единицу времени в среднем происходит $P_{16}\lambda_{16}^{17}$ событий «загрузка завершена», то среднее время цикла составит

$$T_{цикл} = \frac{1}{P_{16}\lambda_{16}^{17}}. \quad (7)$$

Учитывая, что среднее время загрузки $\tau_3 = 1/\lambda_{16}^{17}$ соответствует классическому времени $T_{загр}$, получаем $T_{цикл} = \frac{\tau_3}{P_{16}}$.

Найдем среднее время цикла $T_{цикл}$ через состояние разгрузки P_{17} . Аналогичным образом разгрузка является обязательной завершающей стадией цикла. Частота завершения разгрузки равна $P_{17}\lambda_{17}^{18}$. Среднее время цикла через состояние разгрузки:

$$T_{\text{цикл}} = \frac{1}{P_{17}\lambda_{17}^{18}} = \frac{\tau_p}{P_{17}}, \quad (8)$$

где $\tau_p = 1/\lambda_{17}^{18}$ – среднее время разгрузки, соответствующее классическому времени $T_{\text{разгр}}$.

Найдем среднее время цикла $T_{\text{цикл}}$ через состояние вспомогательных перемещений P_{18} . Состояние P_{18} является системообразующим элементом, через который реализуются переходы между обработкой и загрузкой/разгрузкой. Частота выхода из этого состояния равна $P_{18} \sum_{m \in M} \lambda_{18}^m$, где M – множество состояний, в которые возможен переход из P_{18} (состояния обработки и состояние загрузки). Среднее время цикла через это состояние:

$$T_{\text{цикл}} = \frac{1}{P_{18} \sum_{m \in M} \lambda_{18}^m} = \frac{\tau_{\text{всп}}}{P_{18}}, \quad (9)$$

где $\tau_{\text{всп}} = 1 / \sum_{m \in M} \lambda_{18}^m$ – среднее время, проводимое в состоянии вспомогательных перемещений за один визит, что соответствует классическому времени вспомогательных операций $T_{\text{в}}$. Таким образом, среднее время цикла может быть выражено через любое из ключевых состояний, и все три выражения эквивалентны:

$$\begin{aligned} T_{\text{цикл}} &= \frac{1}{P_{16}\lambda_{16}^{17}} = \frac{1}{P_{17}\lambda_{17}^{18}} = \frac{1}{P_{18} \sum_{m \in M} \lambda_{18}^m} = \\ &= \frac{\tau_3}{P_{16}} = \frac{\tau_p}{P_{17}} = \frac{\tau_{\text{всп}}}{P_{18}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из соотношений (10) следует, что среднее время цикла $T_{\text{цикл}}$ полностью определяется вероятностями ключевых состояний и интенсивностями переходов. Поскольку производительность есть величина, обратная времени цикла $Q = 1/T_{\text{цикл}}$, то выражение общей производительности непосредственно вытекает из полученных формул. Переходя от временных характеристик к количеству деталей, обрабатываемых в единицу времени, получаем следующее.

Производительность для единичной заготовки (рис. 1):

$$Q_e = \frac{1}{T_{\text{цикл}}} = P_{16}^e \lambda_{16}^{17} = \frac{P_{16}^e}{\tau_3}. \quad (11)$$

Это выражение показывает, что производительность единичной заготовки прямо пропорциональна вероятности состояния загрузки и обратно пропорциональна среднему времени загрузки. Данная формула является обобщением классического соотношения $Q = 1/T_{\text{шт}}$, поскольку при отсутствии случайных вариаций и при $P_{16}^e = 1$ она переходит в детерминированный предел.

Для наглядного представления соответствия между классическими временными параметрами и элементами марковской модели (рис. 4) приведена диаграмма соответствия: левая часть диаграммы иллюстрирует классическую детерминированную модель, правая часть показывает марковскую модель, где каждому классическому времени ставится в соответствие среднее значение.

Для комплексной заготовки, содержащей m деталей, за один цикл обрабатывается m деталей при сохранении того же времени цикла (загрузка и разгрузка выполняются однократно). Производительность в пересчете на одну деталь составляет

$$Q_k = \frac{m}{T_{\text{цикл}}} = m P_{16}^k \lambda_{16}^{17} = m \frac{P_{16}^k}{\tau_3}. \quad (12)$$

Сравнение выражений (11) и (12) показывает, что выигрыш в производительности при переходе к комплексной заготовке определяется отношением вероятностей загрузки в двух моделях и количеством объединяемых деталей. Учитывая, что из уравнений баланса (6) следует пропорциональность вероятностей загрузки и вспомогательного состояния, можно выразить выигрыш через отношение вероятностей P_{18}^k и P_{18}^e :

$$\frac{Q_k}{Q_e} = m \frac{P_{18}^k}{P_{18}^e}. \quad (13)$$

При этом, для нахождения P_{18}^k и P_{18}^e воспользуемся уравнением баланса (5) для состояния вспомогательных перемещений и получим

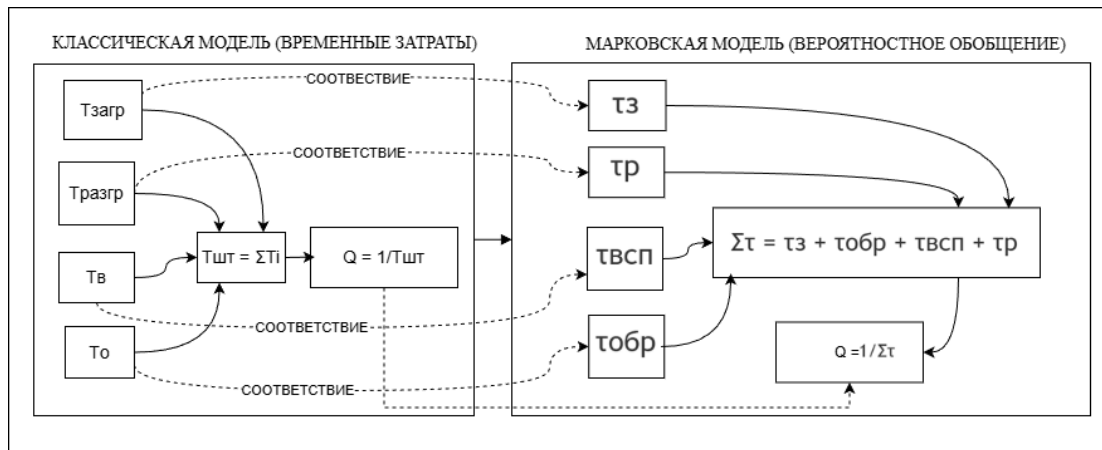


Рис. 4. Диаграмма соответствия между классической и марковской моделями производительности

Fig. 4. Correspondence chart between the classical and Markov productivity models

$$P_{18}^e = \frac{\sum_{n=1}^{15} P_n \lambda_n^{18} + P_{17} \lambda_{17}^{18}}{\sum_{m=1}^{15} \lambda_{18}^m + \lambda_{18}^{16}}, \quad (14)$$

$$P_{18}^k = \frac{\sum_{x \in \{i,j,k\}} \sum_{n=1}^{15} P_n(x) \lambda_n^{18}(x) + P_{17} \lambda_{17}^{18}}{\sum_{x \in \{i,j,k\}} \sum_{m=1}^{15} \lambda_{18}^m(x) + \lambda_{18}^{16}}.$$

Числитель выражений (14) представляет собой суммарный входящий поток в состояние P_{18} , который складывается из потока всех состояний обработки $\sum_{n=1}^{15} P_n \lambda_n^{18}$ и потока из состояния разгрузки $P_{17} \lambda_{17}^{18}$. Знаменатель представляет собой суммарный исходящий поток из состояния P_{18} , который складывается из потока во все состояния обработки $\sum_{m=1}^{15} \lambda_{18}^m$ и потока в состояние загрузки λ_{18}^{16} .

Введем следующие обозначения для суммарных потоков:

$$S = \sum_{n=1}^{15} P_n \lambda_n^{18} = \sum_{n=1}^{15} \frac{P_n}{\tau_{обр}^{(n)}} - \text{суммарный поток}$$

из состояний обработки в состояние P_{18} ;

$$R = \sum_{m=1}^{15} \lambda_{18}^m = \sum_{m=1}^{15} \frac{1}{\tau_{обр}^{(m)}} - \text{суммарный поток из со-}$$

стояния P_{18} в состояние обработки;

$$Z = P_{17} \lambda_{17}^{18} = \frac{P_{17}}{\tau_p} - \text{поток из состояния разгрузки}$$

в состояние P_{18} ; $\lambda_{18}^{16} = \frac{1}{\tau_{всп}}$ – интенсивность

перехода из состояния P_{18} в состояние загрузки.

Тогда выражения (14) для вероятности вспомогательного состояния принимают компактный вид с учетом того, что для комплексной заготовки, объединяющей m идентичных деталей, суммарные потоки из состояний обработки и в состоянии обработки увеличиваются пропорционально m , а поток из состояния разгрузки остается неизменным (разгрузка общая). Получим

$$P_{18}^e = \frac{S + Z}{R + \lambda_{18}^{16}}, \quad P_{18}^k = \frac{mS + Z}{mR + \lambda_{18}^{16}}. \quad (15)$$

Подставляя формулы (16) и (17) в соотношение (13), получаем окончательное аналитическое выражение для относительного выигрыша:

$$\frac{Q_k}{Q_e} = m \frac{mS + Z}{mR + \lambda_{18}^{16}} \frac{R + \lambda_{18}^{16}}{S + Z} =$$

$$= m \frac{m \sum_{n=1}^{15} \frac{P_n}{\tau_{обр}^{(n)}} + \frac{P_{17}}{\tau_p}}{m \sum_{m=1}^{15} \frac{1}{\tau_{обр}^{(m)}} + \frac{1}{\tau_{всп}}} \frac{\sum_{m=1}^{15} \frac{1}{\tau_{обр}^{(m)}} + \frac{1}{\tau_{всп}}}{\sum_{n=1}^{15} \frac{P_n}{\tau_{обр}^{(n)}} + \frac{P_{17}}{\tau_p}}. \quad (16)$$

В предельных случаях, когда доминирует обработка ($S \gg Z$ и $R \gg \lambda_{18}^{16}$) $\frac{P_{18}^k}{P_{18}^e} \approx \frac{mS}{mR} \frac{R}{S} = 1$,

следовательно $\frac{Q_k}{Q_e} \approx m$. Выигрыш в m раз

достигается за счет того, что одна операция загрузки обслуживает m деталей, а время обработки пропорционально количеству деталей. В случае, когда доминирует загрузка/разгрузка

$(Z \gg S \text{ и } \lambda_{18}^{16} \gg R) \frac{P_{18}^k}{P_{18}^e} \approx \frac{Z}{\lambda_{18}^{16}} \frac{\lambda_{18}^{16}}{Z} = 1$, анало-

гично $\frac{Q_k}{Q_e} \approx m$, выигрыш стремится к m , т. е.

к количеству объединяемых деталей.

Результаты и их обсуждение

Для верификации полученных аналитических соотношений и количественной оценки эф-

фективности комплексных заготовок было выполнено численное моделирование в среде Maple. Исходными данными служили векторы предельных вероятностей состояний, полученные из решения систем линейных алгебраических уравнений для единичной и комплексной заготовок (табл. 1). В соответствии с условиями задачи все ненулевые интенсивности переходов λ_n^m были приняты равными единице, что соответствует равной длительности всех операций в относительных единицах времени [10, 11].

В результате решения систем уравнений были получены значения предельных вероятностей ключевых состояний, на основе которых вычислены временные характеристики и производительность для обоих типов заготовок. Сводные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 1

Table 1

Значения предельных вероятностей состояний единичной и комплексной заготовок

Values of the limiting probabilities of the states of single and complex workpieces

№ / No.	Вероятность P_i / Probability P_i	Единичная заготовка / Single workpiece	Комплексная заготовка / Complex workpiece		
			Заготовка 1 (i) / Workpiece 1 (i)	Заготовка 2 (j) / Workpiece 2 (j)	Заготовка 3 (k) / Workpiece 3 (k)
1	P_1	0,0015026	0,0010172	0,0010172	0,0010172
2	P_2	0,0582622	0,0028241	0,0030031	0,0444621
3	P_3	0,1867397	0,0035301	0,0037539	0,1333865
4	P_4	0,0086120	0,0022523	0,0011321	0,0049053
5	P_5	0,0995299	0,0206797	0,0172451	0,0654489
6	P_6	0,0715674	0,0048921	0,0052168	0,0510131
7	P_7	0,1867397	0,0282414	0,0300313	0,1333865
8	P_8	0,15241673	0,0282414	0,0300313	0,1333865
9	P_9	0,0754756	0,0138810	0,0123473	0,0544353
10	P_{10}	0,0036893	0,0019013	0,0001886	0,0008175
11	P_{11}	0,0415682	0,0036925	0,0038947	0,0294997
12	P_{12}	0,0343229	0,0045620	0,0048465	0,0232694
13	P_{13}	0,01352405	0,0045777	0,0068666	0,0160222
14	P_{14}	0,0135240	0,0045777	0,0068666	0,0160222
15	P_{15}	0,0119529	0,0007682	0,0024885	0,0108900
16	$P_{16} (P_{00'})$	0,0135240	0,0091555		
17	$P_{17} (P_{00})$	0,0135240	0,0091555		
18	$P_{18} (P_0)$	0,01352405	0,0091555		

Сравнение производительности единичной и комплексной заготовок

Comparison of the productivity of single and complex workpieces

Показатель / Parameter	Единичная заготовка / Single workpiece	Комплексная заготовка (3 детали) / Complex workpiece (3 parts)
Вероятность загрузки P_{16} / Loading probability, P_{16}	0,013524	0,009156
Вероятность разгрузки P_{17} / Unloading probability, P_{17}	0,013524	0,009156
Вероятность вспомогательных операций P_{18} / Auxiliary operations probability, P_{18}	0,013524	0,009156
Среднее время цикла на одну деталь $T_{\text{цикл}}$, мин / Average cycle time per part, $T_{\text{сус}}$, min	73,94	36,41
Производительность Q , дет/ч / Productivity, Q , parts/h	0,811	1,648

Анализ представленных данных позволяет сделать следующие выводы. При переходе от раздельной обработки единичных заготовок к комплексной заготовке вероятности загрузки, разгрузки и вспомогательных операций уменьшаются примерно в 1,48 раза, что отражает сокращение доли непроизводительного времени в общем цикле. Производительность комплексной заготовки более чем вдвое превышает производительность раздельной обработки: 1,648 дет/ч против 0,811 дет/ч. Отношение производительностей составляет 2,031, что соответствует выигрышу 103,1 %.

Для наглядного представления распределения времени цикла были построены диаграммы и графики Ганта на основе рассчитанных предельных вероятностей. На рис. 5 представлена диаграмма для единичной заготовки (рис. 5, а), наглядно показывающая, что основная доля времени (более 95 %) приходится на обработку, в то время как загрузка, разгрузка и вспомогательные операции занимают незначительную часть цикла – по 1,35 % каждая. На диаграмме (рис. 5, б) для комплексной заготовки из трех деталей видно, что доля времени на обработку возрастает до 96,2 %, а доли загрузки, разгрузки и

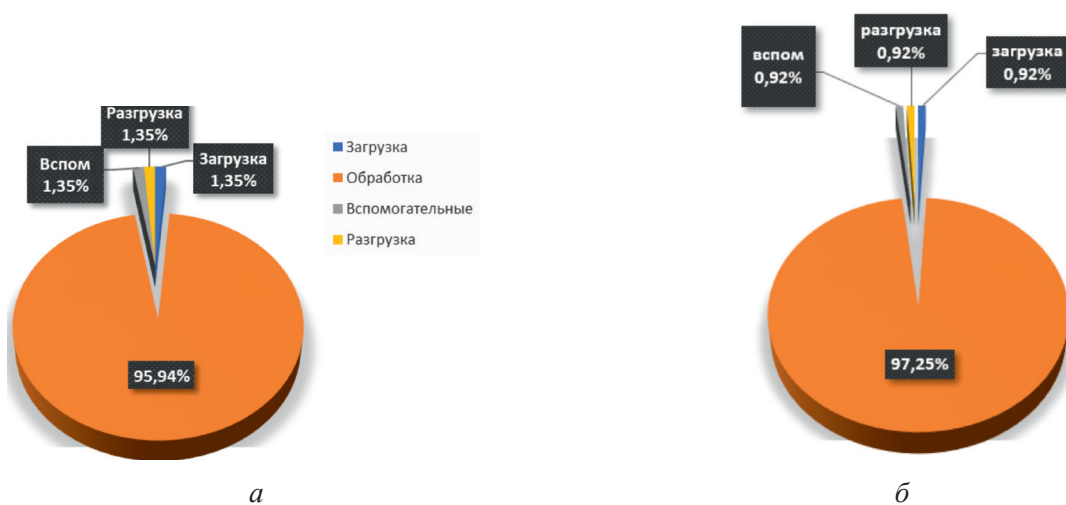


Рис. 5. Диаграммы распределения времени цикла изготовления:

а – единичной заготовки; б – комплексной, включающей в себя 3 единичные заготовки

Fig. 5. Distribution diagrams of the manufacturing cycle time:

а – for a single workpiece; б – for a complex workpiece comprising three single workpieces

вспомогательных операций уменьшаются до 0,97 % каждая, что свидетельствует о повышении эффективности использования оборудования.

Графики Ганта, представленные на рис. 6, показывают последовательность операций во времени. Для единичной заготовки (рис. 6, а) четко видны четыре последовательные стадии: загрузка, обработка, вспомогательные операции и разгрузка. Для комплексной заготовки (рис. 6, б) график Ганта демонстрирует, что загрузка и разгрузка выполняются однократно на весь комплект деталей, а обработка распределена между тремя деталями, разделенными краткими переходами.

Процентное соотношение долей времени, отраженное в диаграммах, позволяет сформулировать следующие практические рекомендации.

1. При проектировании комплексных заготовок следует стремиться к такому расположению

деталей, которое минимизирует холостые перемещения инструмента между поверхностями разных деталей.

2. При выборе режимов резания необходимо учитывать их влияние на интенсивности S и R . Увеличение скорости резания может сократить время обработки, но повысить частоту смены инструмента, что увеличит S .

3. При организации производства следует стремиться к максимальной интенсивности загрузки λ_{18}^{16} , так как производительность прямо пропорциональна этому параметру.

4. Для оценки эффективности достаточно контролировать всего три вероятности – P_{16} , P_{17} и P_{18} , а также интенсивности переходов между ними. Это существенно упрощает систему мониторинга производства.

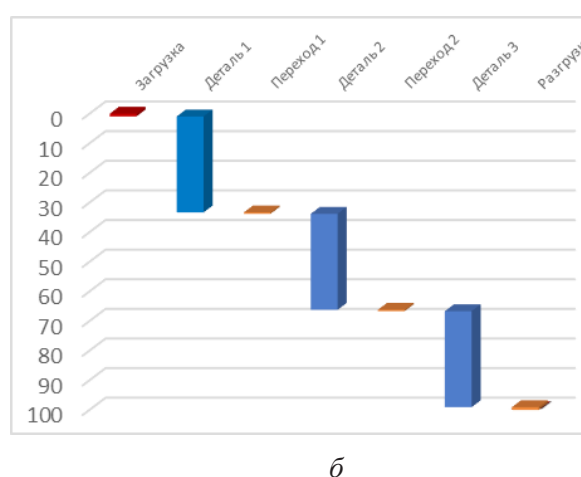
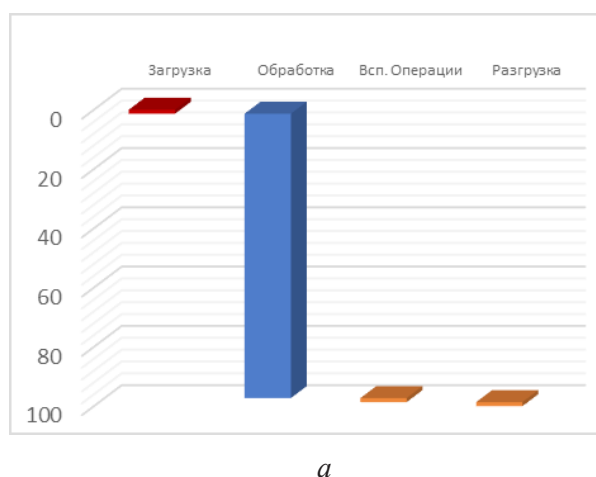


Рис. 6. Графики Ганта:

а – для единичной заготовки; б – для комплексной заготовки

Fig. 6. Gantt charts:

а – for a single workpiece; б – for a complex workpiece

Выводы

1. Установлено соответствие между временными параметрами классического технормирования (штучное время, время загрузки, разгрузки и вспомогательных операций) и интенсивностями переходов в марковской цепи. Показано, что среднее время цикла однозначно выражается через вероятности ключевых состояний и интенсивности выхода из них, а интенсивности переходов интерпретируются как величины, обратные средним временам выполнения операций.

Эта связь обосновывает применимость марковского аппарата для анализа производительности технологических систем.

2. Выведена аналитическая формула для производительности единичной заготовки, согласно которой она выражается через вероятность состояния загрузки и интенсивность перехода из загрузки в разгрузку. Однако с учетом уравнений баланса производительность может быть выражена также через состояния разгрузки или вспомогательных перемещений, что свидетельствует о равнозначности этих трех состояний

для оценки эффективности. Численное моделирование показало, что при равных интенсивностях всех переходов ($\lambda = 1$) вероятности загрузки, разгрузки и вспомогательных операций одинаковы и составляют $P_{16}^e = P_{17}^e = P_{18}^e = 0,0135$, а производительность единичной заготовки $Q_e = 0,811$ дет/ч.

3. Получено аналитическое выражение для производительности комплексной заготовки, объединяющей несколько деталей. Показано, что производительность в расчете на одну деталь возрастает пропорционально количеству деталей в комплекте, несмотря на снижение вероятностей ключевых состояний (для комплекта из трех деталей $P_{16}^k = P_{17}^k = P_{18}^k = 0,00916$). Численное моделирование для $m = 3$ дало производительность $Q_k = 1,648$ дет/ч, что в 2,03 раза выше, чем для единичной заготовки. Повышение производительности достигается за счет однократного выполнения операций загрузки, разгрузки и вспомогательных перемещений для всего комплекта деталей.

4. Выведено аналитическое выражение для относительного выигрыша при переходе от раздельной обработки единичных заготовок к обработке комплексной заготовки. Показано, что выигрыш определяется отношением вероятностей ключевых состояний (загрузки, разгрузки или вспомогательных перемещений) для двух типов заготовок. Численное моделирование для комплекта из трех деталей показало выигрыш $K = 2,03$ (увеличение производительности на 103 %). Предложенная зависимость позволяет количественно оценить ожидаемый эффект от внедрения комплексных заготовок на этапе технологической подготовки производства.

5. В качестве направления для дальнейших исследований предполагается переход от аналитической модели к имитационной, учитывающей стохастический характер реального производства. Представленные в работе аналитические расчеты выполнены для идеальных условий и характеризуют предельно достижимый уровень производительности (верхнюю границу). Однако реальные производственные системы подвержены случайным возмущениям – отказам оборудования, поломкам инструмента, браку. В связи

с этим планируется расширение разработанного графа состояний путем введения вершин, отражающих указанные явления. На базе расширенной модели будет построена имитационная модель, которая позволит получить реалистичные оценки производительности (нижнюю границу) и выполнить сравнительный анализ с аналитическими результатами, что даст возможность количественно оценить потери производительности за счет случайных факторов.

Список литературы

1. Корсаков В.С. Основы проектирования технологических процессов машиностроения. – М.: Машиностроение, 1972. – 368 с.
2. Developing the model of reliability of a complex technical system of repeated use with a complex operating mode / B. Lanetskii, V. Lukyanchuk, H. Khudov, M. Fisun, O. Zvieriev, I. Terebuhа // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2020. – Vol. 5, no. 4 (107). – P. 55–65. – DOI: 10.15587/1729-4061.2020.214995.
3. Wentzell A.D. A course in the theory of stochastic processes. – New York, etc.: McGraw-Hill, 1981. – 304 p. – ISBN 0-070-69305-6.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – 2-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с. – ISBN 5-06-003831-9.
5. Norris J.R. Markov chains. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 237 p. – (Cambridge Series on Statistical and Probabilistic Mathematics; 2). – ISBN 0-521-48181-3.
6. Law A.M. Simulation modeling and analysis. – 6th ed. – New York: McGraw-Hill, 2024. – 688 p. – ISBN 978-1260455326.
7. Valamede L.S., Akkari A.C.S. Lean 4.0: A new holistic approach for the integration of lean manufacturing tools and digital technologies // International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences. – 2020. – Vol. 5 (5). – P. 851–868. – DOI: 10.33889/IJMEMS.2020.5.5.063.
8. Adel A., Alani N., Jan T. Factories of the future in industry 5.0 – Softwarization, servitization, and industrialization // Internet of Things. – 2024. – Vol. 28. – P. 101431. – DOI: 10.1016/j.iot.2024.101431.
9. Митрофанов С.П. Научные основы групповой технологии. – Л.: Лениздат, 1959. – 435 с.
10. Невар Г.В., Рошупкин С.И., Мусеев Д.В. Концепция использования комплексной заготовки в условиях гибкого производства: Марковский анализ технологической системы // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. –

2026. – № 1 (375). – С. 19–24. – DOI: 10.33979/2073-7408-2026-375-1-19-24.

11. Невар Г.В., Роцупкин С.И., Братан С.М. Анализ и моделирование обработки комплексных заготовок из стали на основе теории графов и Марковских процессов // Черные металлы. – 2026. – № 4. – С. 60–65. – DOI: 10.17580/chm.2026.04.08.

12. Олейникова С.А. Математическое моделирование и системы массового обслуживания. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. – 90 с.

13. Догадина Е.П., Холкина Н.Е. Математическая модель функционирования производственных процессов с учетом их особенностей // Системы управления, связи и безопасности. – 2016. – № 1. – С. 1–9.

14. Калякулин С.Ю., Митин Э.В., Сульдин С.П. Классификация математических моделей технологического проектирования // Вестник машиностроения. – 2021. – № 8. – С. 68–71. – DOI: 10.36652/0042-4633-2021-8-68-71.

15. Кучер В.Н., Иванов А.И. Повышение жесткости технологической системы при обработке на металлорежущих станках. – М.: Машиностроение, 2005. – 240 с. – ISBN 5-94275-205-7.

16. Control of machining of axisymmetric low-rigidity parts / A. Świć, A. Gola, Ł. Sobaszek, O. Orynycz //

Materials. – 2020. – Vol. 13 (21). – P. 5053. – DOI: 10.3390/ma13215053.

17. Харченко А.О., Харченко А.А. Анализ и исследование переналаживаемости оборудования для внутренней мелкоразмерной резьбообработки // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2021. – № 2 (346). – С. 93–99. – DOI: 10.33979/2073-7408-2021-346-2-93-99.

18. Мирзоян Н.Ю., Харченко А.О. Синтез технологической системы мелкоразмерной резьбообработки в глухих глубоких отверстиях на основе морфологического анализа // Вестник современных технологий. – 2025. – № 1 (37). – С. 4–12.

19. Denkena B., Bergmann B., Witt M. Investigations on a predictive process parameter adaptation for machining of hybrid workpieces // CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology. – 2018. – Vol. 23. – P. 1–5. – DOI: 10.1016/j.cirpj.2018.10.004.

20. Титов С.А., Титова Н.В. Оценка экономических эффектов от кастомизации продукции российских промышленных предприятий // Стратегические решения и риск-менеджмент. – 2022. – Т. 13 (1). – С. 26–36. – DOI: 10.17747/2618-947X-2022-1-26-36.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© 2026 Авторы. Издательство Новосибирского государственного технического университета. Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



Obrabotka metallov - Metal Working and Material Science

Journal homepage: http://journals.nstu.ru/obrabotka_metallov



Analytical assessment of the processing productivity of complex workpieces based on Markov models

Galina Nevar^{a,}, Stanislav Roshchupkin^b, Sergey Bratan^c, Alexander Kharchenko^d*

Sevastopol State University, 33 Universitetskaya str., Sevastopol, 299053, Russian Federation

^a <https://orcid.org/0009-0008-2528-881X>, GVNevar@sevsu.ru; ^b <https://orcid.org/0000-0003-2040-2560>, st.roshchupkin@yandex.ru;
^c <https://orcid.org/0000-0002-9033-1174>, serg.bratan@gmail.com; ^d <https://orcid.org/0000-0003-1704-9380>, khao@list.ru

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 01 June 2026
 Revised: 13 June 2026
 Accepted: 27 June 2026
 Available online: 15 September 2026

Keywords:

Markov processes
 Transition intensities
 Productivity
 Complex workpiece
 Limit probabilities

ABSTRACT

Introduction. In multi-product manufacturing, loading, unloading, and auxiliary movements of equipment components contribute significantly to the overall processing cycle time. It is hypothesized that transitioning from the processing of individual simple workpieces to complex workpieces – combining several parts in a single unit – can reduce unproductive time expenditures. However, existing analytical approaches do not provide a quantitative assessment of the productivity gain while accounting for the probabilistic nature of transitions between technological states. **Purpose of the work** is to develop analytical expressions for evaluating the productivity of a technological system when processing simple and complex workpieces on the basis of Markov models. The research objective is to establish a correspondence between the time parameters of conventional time-and-motion study (technical rating) and the transition intensities in a Markov chain, and to derive a formula for the relative gain. The technological process is represented as a directed graph, with transitions between states specified by intensities. **The research methods** include mathematical modeling based on the fundamental principles of Markov process theory, numerical simulation in the Maple environment, and the principles of group parts processing theory. **Results and discussion.** The developed mathematical models enable quantitative estimation of the fractions of time that the technological system spends in the states of loading, processing, auxiliary movements, and unloading. The analytical relationships obtained directly relate productivity to the transition intensities between states. It is shown that the key states determining processing efficiency are loading, unloading, and auxiliary movements. Numerical simulations performed in the Maple environment confirmed the validity of the derived formulas. The results obtained demonstrate the potential of the proposed approach for the analytical assessment of the processing productivity of complex workpieces. The derived expressions are valid for a wide range of surface configurations and can be used to calculate the gain achieved when combining an arbitrary number of parts.

For citation: Nevar G.V., Roshchupkin S.I., Bratan S.M., Kharchenko A.O. Analytical assessment of the processing productivity of complex workpieces based on Markov models. *Obrabotka metallov (tekhnologiya, oborudovanie, instrumenty) = Metal Working and Material Science*, 2026, vol. 28, no. 3, pp. 29–43. DOI: 10.17212/1994-6309-2026-28.3-29-43. (In Russian).

References

1. Korsakov V.S. *Osnovy proektirovaniya tekhnologicheskikh protsessov mashinostroeniya* [Fundamentals of designing mechanical engineering technological processes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972, 368 p.
2. Lanetskii B., Lukyanchuk V., Khudov H., Fisun M., Zvieriev O., Terebucha I. Developing the model of reliability of a complex technical system of repeated use with a complex operating mode. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2020, vol. 5, no. 4 (107), pp. 55–65. DOI: 10.15587/1729-4061.2020.214995.
3. Wentzell A.D. *A course in the theory of stochastic processes*. New York, etc., McGraw-Hill, 1981. 304 p. ISBN 0-070-69305-6.
4. Ventsel E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya sluchainykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [Theory of Stochastic Processes and Its Engineering Applications]. 2nd ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2000. 383 p. ISBN 5-06-003831-9.

* Corresponding author

Nevar Galina Valerievna, Senior Lecturer
 Sevastopol State University,
 33 Universitetskaya str.,
 299053, Sevastopol, Russian Federation
 Tel.: +7 978 727-32-47, e-mail: gvnevar@sevsu.ru

5. Norris J.R. *Markov chains*. Cambridge, Cambridge University Press, 1997. 237 p. Cambridge Series on Statistical and Probabilistic Mathematics; 2. ISBN 0-521-48181-3.
6. Law A.M. *Simulation modeling and analysis*. 6th ed. New York, McGraw-Hill, 2024. 688 p. ISBN 978-1260455326.
7. Valamede L.S., Akkari A.C.S. Lean 4.0: A new holistic approach for the integration of lean manufacturing tools and digital technologies. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, 2020, vol. 5 (5), pp. 851–868. DOI: 10.33889/IJMEMS.2020.5.5.063.
8. Adel A., Alani N., Jan T. Factories of the future in industry 5.0 – Softwarization, servitization, and industrialization. *Internet of Things*, 2024, vol. 28, p. 101431. DOI: 10.1016/j.iot.2024.101431.
9. Mitrofanov S.P. *Nauchnye osnovy gruppovoy tekhnologii* [Scientific foundations of group technology]. Leningrad, Lenizdat Publ., 1959. 435 p.
10. Nevar G.V., Roshchupkin S.I., Moiseev D.V. Kontseptsiya ispol'zovaniya kompleksnoi zagotovki v usloviyakh gibkogo proizvodstva: Markovskiy analiz tekhnologicheskoi sistemy [Concept of using a complex billet in flexible production: markov analysis of a technological system]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii = Fundamental and Applied Problems of Technical Equipment and Technology*, 2026, no. 1 (375), pp. 19–24. DOI: 10.33979/2073-7408-2026-375-1-19-24. (In Russian).
11. Nevar G.V., Roshchupkin S.I., Bratan S.M. Analiz i modelirovanie obrabotki kompleksnykh zagotovok iz stali na osnove teorii grafov i Markovskikh protsessov [Analysis and modeling of complex steel workpieces processing based on graph theory and Markovian processes]. *Chernye metally*, 2026, no. 4, pp. 60–65. DOI: 10.17580/chm.2026.04.08. (In Russian).
12. Oleinikova S.A. *Matematicheskoe modelirovanie i sistemy massovogo obsluzhivaniya* [Mathematical modeling and queuing systems]. Voronezh, VGTU Publ., 2021. 90 p.
13. Dogadina E.P., Kholkina N.E. Matematicheskaya model' funktsionirovaniya proizvodstvennykh protsessov s uchedom ikh osobennosti [Mathematical model of the production processes, taking into account their specific features]. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti = Systems of Control, Communication and Security*, 2016, no. 1, pp. 1–9.
14. Kalyakulin S.Yu., Mitin E.V., Sul'din S.P. Klassifikatsiya matematicheskikh modelei tekhnologicheskogo proektirovaniya [Classification of mathematical models for technological design]. *Vestnik mashinostroeniya = Russian Engineering Research*, 2021, no. 8, pp. 68–71. DOI: 10.36652/0042-4633-2021-8-68-71. (In Russian).
15. Kucher V.N., Ivanov A.I. *Povyshenie zhestkosti tekhnologicheskoi sistemy pri obrabotke na metallorezhushchikh stankakh* [Increasing the rigidity of the technological system in machining on metal-cutting machines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 240 p. ISBN: 5-94275-205-7.
16. Świć A., Gola A., Sobaszek Ł., Orynycz O. Control of machining of axisymmetric low-rigidity parts. *Materials*, 2020, vol. 13 (21), p. 5053. DOI: 10.3390/ma13215053.
17. Kharchenko A.O., Kharchenko A.A. Analiz i issledovanie perenalazhivaemosti oborudovaniya dlya vnutrennei melkorazmerno rez'boobrabotki [Analysis and research of adjustability of equipment for internal small-sized threading]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii = Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*, 2021, no. 2 (346), pp. 93–99. DOI: 10.33979/2073-7408-2021-346-2-93-99.
18. Mirzoyan N.Yu., Kharchenko A.O. Sintez tekhnologicheskoi sistemy melkorazmerno rez'boobrabotki v glukhikh glubokikh otverstiyakh na osnove morfologicheskogo analiza [Synthesis of a technological system for small-sized thread machining in blind deep holes based on morphological analysis]. *Vestnik sovremennykh tekhnologii = Journal of Modern Technologies*, 2025, no. 1 (37), pp. 4–12.
19. Denkena B., Bergmann B., Witt M. Investigations on a predictive process parameter adaptation for machining of hybrid workpieces. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 2018, vol. 23, pp. 1–5. DOI: 10.1016/j.cirpj.2018.10.004.
20. Titov S.A., Titova N.V. Estimation of economic effects from product customization of Russian industrial enterprises. *Strategicheskie resheniya i risk-menedzhment = Strategic Decisions and Risk Management*, 2022, vol. 13, no. 1, pp. 26–36. DOI: 10.17747/2618-947X-2022-1-26-36.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflict of interest.