

УДК: 681.511.26

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ: ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД*

В.Ю. ФИЛЮШОВ

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, магистрант кафедры автоматики. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Из-за того, что линейные дифференциальные уравнения и линейные системы управления значительно проще нелинейных, возникает естественный вопрос, возможно ли нелинейные системы представить в виде линейных. Основная проблема заключается в нахождении такого преобразования координат, при котором полученная модель в новых координатах будет эквивалентна линейной модели. Искомое преобразование достигается путем введения обратных связей в управление. Для нахождения такого управления, при котором исходная нелинейная модель преобразуется не в приближенную, а в эквивалентную линейную модель, используется линеаризация обратной связью (ЛОС). Вначале находится такое управление u , при котором нелинейная модель объекта преобразуется в эквивалентную ему линейную с новым управлением v . Далее, используя линейные законы управления, находится новое управление v , позволяющее применять линейные методы синтеза для полученной модели объекта. В отличие от обычной линеаризации, ЛОС использует нелинейные законы управления, что во многих случаях позволяет достичь лучших результатов.

Ключевые слова: нелинейное управление, линеаризация обратной связью, регулятор, синтез

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-1-37-46

ВВЕДЕНИЕ

Анализ и синтез нелинейных систем управления является довольно сложной и трудоемкой задачей. Для исследования нелинейных объектов зачастую используют их модель, полученную при помощи линеаризации.

Мы будем рассматривать системы, описываемые уравнением (см. [1])

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R, \quad (1)$$

* Статья получена 14 октября 2015 г.

где u – гладкая функция в некоторой окрестности $\Omega(0)$ начала координат. Начало координат является положением равновесия $f(0,0) = 0$, здесь x – вектор состояния, u – управление.

В настоящее время наиболее часто можно увидеть несколько методов линеаризации. Запись нелинейного уравнения в отклонениях, полученная путем вычитания из исходного уравнения уравнения установившегося состояния и членов высшего порядка малости [2]. Линеаризация, полученная путем разложения в ряд Тэйлора в окрестности точки (функции), определяющей заданный режим и отбрасывания нелинейных членов [3]. Метод гармонической линеаризации, или метод гармонического баланса, основывается на разложении функций нелинейных звеньев в ряд Фурье и на пренебрежении указанными гармониками [4].

В отличие от описанных выше методов, *линеаризация обратной связью* (Linearization by output injection) [5] позволяет получить эквивалентную линейную модель объекта в новых переменных. Эквивалентность заключается в следующем: будет найдено такое нелинейное управление, что в замкнутой системе будут скомпенсированы нелинейности исходной модели и она примет форму управления Бруновского (Brunovsky controller form) [6]. Сложность решения данной задачи заключается в том, что влиять на состояние объекта мы можем только через управление u . Но структура объекта редко позволяет увидеть прямую зависимость нелинейности и управления для ее компенсации. И выбор новых переменных происходит *эвристическим* путем. С решением этой проблемы справляются методы дифференциальной геометрии [7], которые позволяют обосновать выбор новых переменных и дать алгоритм синтеза регулятора.

Эвристический метод заключается в структурном преобразовании модели объекта, которое позволяет найти управление для компенсации нелинейностей. В работе [8] приводится эвристически синтез регулятора для отработки возмущения и входных воздействий, а в работе [9] – эвристически синтез регулятора с использованием модального метода синтеза. В работе [10] произведен анализ влияния дифференцирующего фильтра на эвристически рассчитанный регулятор. В работе [11] произведен синтез регулятора для отклонения угла объекта «перевернутый маятник на тележке». В работе [12] произведен анализ влияния дифференцирующих фильтров на объект «перевернутый маятник на тележке».

Функция

$$u = \Phi(x, v),$$

где u , v – входы (управления), называется *преобразованием обратной связью*, если она разрешима относительно v . Переход от нелинейной системы (1)

к эквивалентной линейной путем преобразования, включающего преобразования обратной связью, называется *линеаризацией обратной связью*.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим несколько нелинейных объектов:

$$\dot{x} = ax^3 + u, \quad (2)$$

$$\dot{x}_1 = cx_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (3)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3^3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_1 + cx_3^3. \quad (4)$$

Структурная схема объекта (2) представлена на рис. 1, структурная схема объекта (3) – на рис. 2, структурная схема объекта (4) – на рис. 3.

Для заданных объектов требуется определить такой закон управления, при котором замкнутая система асимптотически устойчива в целом при доступности всего вектора состояния x .

2. ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

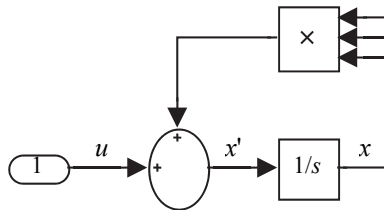


Рис. 1. Структурная схема объекта (2)

Рассмотрим пример объекта (2). Для данного примера ЛОС аналогична методу обратной задачи динамики [12]. Выберем регулятор таким образом, чтобы замкнутая система имела вид

$$\dot{x} = v.$$

Для этого приравняем правые части уравнения (2) и (5):

$$v = ax^3 + u. \quad (5)$$

И находим u :

$$u = v - ax^3. \quad (6)$$

Найденное управление (5) линеаризует объект (1) и приводит его к виду (4). Полученная система показана на рис. 2.

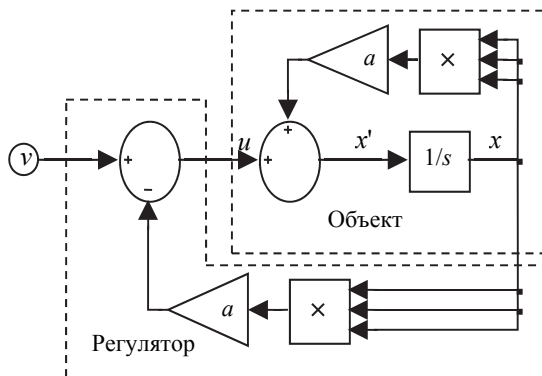


Рис. 2. Система «объект–регулятор»

Рассмотрим пример объекта (3).

Ниже будет приведен способ структурного преобразования исходного нелинейного объекта в эквивалентный линейный:

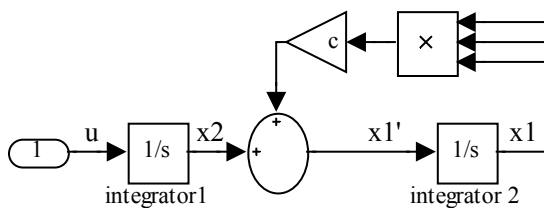


Рис. 3. Структурная схема объекта (3)

Суть данного способа заключается в переносе нелинейных звеньев объекта в управление для его последующей компенсации. В данном случае необходимо перенести $c(x_1)^3$ через *integrator1*.

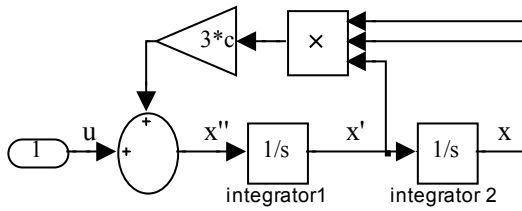


Рис. 4. Структурная схема после преобразования

Уравнение объекта после преобразования

$$\ddot{x} = 3cx^2 \cdot \dot{x} + u . \quad (7)$$

В новых переменных

$$x = x_1 = z_1 ,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 = z_2 = cx_1^3 + x_2 ,$$

$$\ddot{x} = \dot{z}_2 = 3cx^2 \cdot \dot{x} + u = 3cx_1^2 (cx_1^3 + x_2) + u .$$

Далее для компенсации нелинейности выберем управление вида

$$u = -3cx_1^2 (cx_1^3 + x_2) + v . \quad (8)$$

Система, замкнутая обратной связью, имеет вид

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 = v ,$$

а в новых переменных

$$\dot{z}_1 = z_2 , \quad \dot{z}_2 = v .$$

Подставим полученное управление (8) в исходное уравнение объекта (3):

$$\dot{x}_1 = cx_1^3 + x_2 , \quad \dot{x}_2 = -3cx_1^2 (cx_1^3 + x_2) + v .$$

Структурная схема системы «объект + регулятор» представлена на рис. 5.

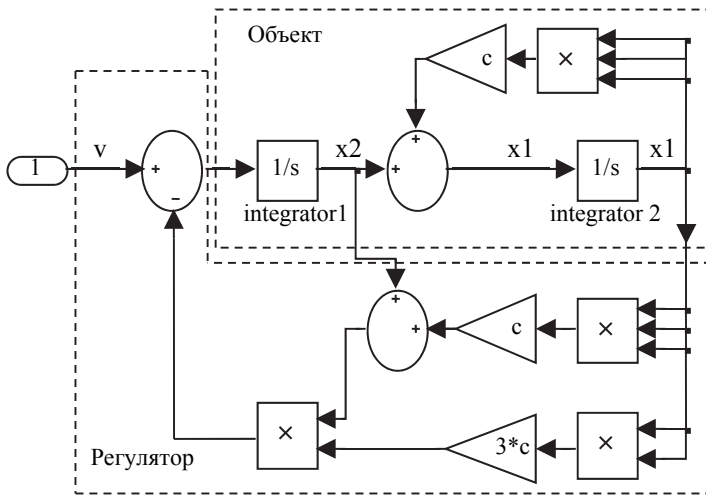


Рис. 5. Структурная схема системы «объект + регулятор»

Рассмотрим пример объекта (4)

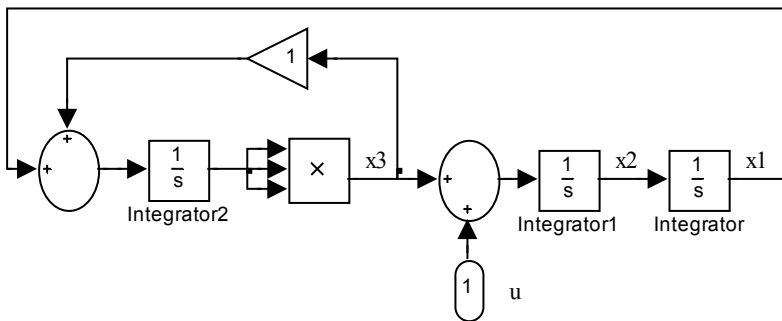


Рис. 6. Структурная схема объекта (4)

Попробуем найти преобразование координат эвристически. Для этого нам необходимо через старшую производную выразить все нелинейности объекта:

$$\dot{x}_1 = x_2 , \tag{9}$$

$$\dot{x}_2 = x_3^3 + u , \tag{10}$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + cx_3^3. \quad (11)$$

Подставим уравнение (9) в уравнение (8) и выразим x_1 :

$$x_1 = \frac{x_3^3 + u}{p^2}.$$

Подставим найденный x_1 в выражение (11):

$$\ddot{x}_3 = x_3^3 + 6cx_3\dot{x}_3 + 3cx_3^2\ddot{x}_3 + u.$$

Соответственно, управление u , необходимое для компенсации нелинейностей, будет выглядеть как

$$u = -\left(x_3^3 + 6cx_3(x_1 + cx_3)^2 + 3cx_3^2\left(x_2 + 3cx_3^2(x_1 + cx_3)\right)\right) + v,$$

а преобразование координат для перехода к линейной модели

$$z_1 = x_3, \quad z_2 = \dot{x}_3 = x_1 + cx_3^3, \quad z_3 = \ddot{x}_3 = x_2 + 3cx_3^2(x_1 + cx_3).$$

В новых переменных модель объекта примет вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = v.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показан метод нахождения управления, приводящего исходную нелинейную систему к эквивалентной ей линейной. К достоинствам данного метода можно отнести асимптотическую устойчивость объекта в целом, строго определенный алгоритм, возможность применять линейные законы управления для преобразованного объекта. Но существуют и очевидные недостатки, такие как необходимость доступности всего вектора состояния (см. [13]) и сложный закон управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

3. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2004. – 752 с.
4. *Зайцев Г.Ф.* Теория автоматического управления и регулирования. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Выща школа. – 1998. – 430 с.
5. *Krener A.J., Isidori A.* Linearization by output injection and nonlinear observers // *Systems & Control Letters*. – 1983. – Vol. 3. – P. 47–52.
6. *Marino R., Tomei P.* Nonlinear control design: geometric, adaptive, and robust. – London; New York: Prentice Hall, 1995. – 396 p.
7. *Ткачев С.Б.* Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем методом виртуальных выходов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 144 с.
8. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Синтез нелинейного регулятора для динамического нелинейного объекта // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2013. – № 1 (71). – С. 3–12.
9. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Пример модального синтеза для нелинейного объекта с использованием нелинейных обратных связей // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2013. – № 2 (72). – С. 3–9
10. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Использование дифференцирующего фильтра при синтезе нелинейного регулятора // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2013. – № 1 (71). – С. 13–21.
11. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.
12. *Филюшов В.Ю.* Применение дифференцирующего звена для управления перевернутым маятником // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2014. – № 4 (78). – С. 69–78.
13. *Ткачев С.Б.* Расширенная форма наблюдателя для нелинейных систем // *Актуальные проблемы фундаментальных наук: труды второй международной научно-технической конференции, Москва, 24–28 января 1994 г.: в 2 т.* – М., 1994. – Т. 1. – С. 66.

Филюшов Владислав Юрьевич, магистрант кафедры автоматике НГТУ. Основные направления научных исследований: построение наблюдателей, исследование перевернутого маятника. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Feedback linearization: heuristic approach*

V.Yu. Filiushov

Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, undergraduate of department automatics. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Due to the fact that the linear differential equations and linear control system is much simpler nonlinear, a natural question arises, is it possible to non-linear systems represented as linear. The main problem is in finding such a coordinate transformation, in which the resulting model in the new coordinates will be equivalent to a linear model. The required conversion is achieved by the introduction of feedback in management. To find such a control, in which, the original non-linear model is transformed not to approximate, and an equivalent linear model using feedback linearization In the beginning, there is a control u , in which the non-linear model of the object is converted into an equivalent linear him with a new management v . Next is-using linear control laws, is the new control v allows to use linear synthesis method to retrieve the object model. Unlike conventional linearization feedback linearization uses nonlinear control laws, which in many cases can achieve the results top-comrade.

Keywords: nonlinear control, feedback linearization, synthesis, regulator

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-1-37-46

REFERENCES

1. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2 [Automatic control theory. Vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ, 2004. 464 p.
2. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [Automatic control theory. Vol. 1. Linear systems]. Moscow, Fizmatlit Publ, 2003. 288 p.
3. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control systems theory]. 4th ed. St. Petersburg, Professiya Publ., 2004. 752 p.
4. Zaitsev G.F. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya i regulirovaniya* [Automatic control and regulation theory]. 2th ed. Kiev, Vyshcha shkola Publ., 1998. 430 p.
5. Krener A.J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 1983, vol. 3, pp. 47–52.
6. Marino R., Tomei P. *Nonlinear control design: geometric, adaptive, and robust*. London, New York, Prentice Hall, 1995. 396 p.

* Received 14 October 2015.

7. Tkachev S.B. *Stabilizatsiya neminimal'no fazovykh affinykh sistem metodom virtual'nykh vykhodov* [Stabilization of non-minimal phase systems by virtual outputs method]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2010. 144 p.
8. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Sintez nelineinogo regul'yatora dlya dinamicheskogo nelineinogo ob"ekta [The nonlinear controller synthesis for a dynamic nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 3–12.
9. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Primer modal'nogo sinteza dlya nelineinogo ob"ekta s ispol'zovaniem nelineinykh obratnykh svyazei [Modal synthesis example for nonlinear object using nonlinear feed-backs]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (72), pp. 3–9.
10. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Ispol'zovanie differentsiruyushchego fil'tra pri sinteze nelineinogo regul'yatora [Using differential filter for nonlinear control system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 13–21.
11. Voronoi V.V. *Polynomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regul'yatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. Nauk [Design of multi channel reduced degree controllers. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.
12. Filyushov V.Yu. Primenenie differentsiruyushchego zvena dlya upravleniya perevernutym mayatnikom [Applying of derivative element for control of inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 69–78.
13. Tkachev S.B. [Extended form of observer for nonlinear system]. *Aktual'nye problemy fundamental'nykh nauk: trudy vtoroi mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Actual problems of fundamental science: proceedings of the second international scientific-technical conference], Moscow, 24–28 Januare 1994, vol. 1, p. 66.