

УДК 519.24

ФОРМИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ШУМОВ*

А.А. ВОЕВОДА¹, Г.В. ТРОШИНА²

¹ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru

При разработке математической модели динамической системы всегда возникают те или иные теоретические и практические трудности. Например, отсутствуют строго определенные правила выбора переменных состояния, поскольку не существует однозначного представления структуры динамической системы. Выбор переменных состояния при реализации фильтра может оказаться критическим в смысле минимизации требуемых вычислений. При заданной последовательности измерений фильтр, в котором обрабатывается вектор переменных состояния, может потребовать так много вычислительных операций, что фактически удастся использовать только часть полученных измерений. Поэтому правильное формирование вектора состояния может привести к значительной экономии в вычислениях. Важным моментом является и моделирование измерений. Поведение динамической системы оценивается по результатам измерений. Если измерения вектора коррелированы, то соответствующие преобразования переменных в некоррелированную систему измерений позволяют разделить их по времени. Могут также иметь место случаи, когда отдельные измерения производятся с очень высокой скоростью или характеризуются большой неопределенностью, из-за чего объем информации о состоянии динамической системы возрастает. Отметим, что при моделировании многих задач промышленности используются модели очень высокого порядка. При этом в системах управления не всегда удастся получить непосредственно в реальном масштабе времени измерения всех переменных состояния системы и всех компонент вектора возмущения. Полное моделирование динамической системы, шумов и измерений позволяет применить алгоритмы фильтра Калмана. В практических приложениях (например, в задачах оптимизации) для решения систем линейных алгебраических уравнений применяют метод Холецкого (метод квадратных корней). Для многих практических задач оказывается необходимым улучшить априорную информацию, используя данные измерений, полученные в процессе работы системы.

Ключевые слова: математическая модель, идентификация, моделирование, белый шум, управление, оценивание параметров, метод Холецкого, коррелированный шум

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-2-58-67

* Статья получена 11 февраля 2016 г.

ВВЕДЕНИЕ

Решению вопросов активной идентификации динамических систем при действии шумов, возникающих в динамической системе и при наличии ошибок измерителя, посвящены работы [1–23]. В этих работах для оценки качества экспериментального материала используется информационная матрица Фишера. Отметим, что в данных работах в качестве помех динамики и измерителя рассматривался белый шум, что является абстракцией в некотором смысле, так как в реальных системах белый шум не реализуемый. В данной работе показан пример реализации коррелированных шумов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается линейная модель со многими входами-выходами в следующей форме [8]:

$$A(z)y_k = B(z)u_k + \xi_k,$$

где u , y , ξ являются входной, выходной и возмущающей последовательностью соответственно. Предполагается, что

$$B(z) = B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_n z^{-n}, \quad A(z) = \text{diag}[a(z), \dots, a(z)],$$

где $a(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$. Также принято, что ξ может быть представлена в виде авторегрессионной линейной модели, т. е.

$$F(z)\xi_k = \varepsilon_k,$$

где ε_k является независимой гауссовской последовательностью с нулевым средним и общей ковариацией Σ и $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z) = I + F_1 z^{-1} + \dots + F_q z^{-q}.$$

2. ПРИМЕР ФОРМИРОВАНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ШУМОВ

Для формирования в среде Simulink коррелированных шумов использовалось разложение Холецкого. Элементы треугольной матрицы Холецкого вычислялись по следующим формулам:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{j1} = a_{j1} / l_{11}, \quad j \in [2, n],$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2}, \quad i \in [2, n],$$

$$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} l_{jp} / l_{ii}), \quad i \in [2, n-1], \quad j \in [i+1, n],$$

a_{ij} – элементы исходной квадратной матрицы размерности $n \times n$.

Модель системы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_k = a_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{k-1} + a_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} b_1^{11} & b_1^{12} \\ b_1^{21} & b_1^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{k-1} + \\ + \begin{bmatrix} b_2^{11} & b_2^{12} \\ b_2^{21} & b_2^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{k-2} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_k$$

с

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_k + \begin{bmatrix} f_1^{11} & f_1^{12} \\ f_1^{21} & f_1^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_{k-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}_k,$$

где ε_k является последовательностью независимых, одинаково распределенных гауссовских случайных переменных, имеющих нулевое среднее и ковариацию Σ , т. е.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_0^{11} & \Sigma_0^{12} \\ \Sigma_0^{21} & \Sigma_0^{22} \end{pmatrix}.$$

В качестве базовых значений приняты следующие величины:

$$a_1 = 0.9, \quad a_2 = -0.6,$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

В результате имеем матрицу Холецкого в следующем виде:

$$Hol = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix}.$$

После работы алгоритма оценивания параметров были получены следующие оценки параметров: $a_1 = 0.8913$, $a_2 = -0.5930$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.7556 & 0.1483 \\ 0.2366 & 0.3539 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.2934 & 0.2738 \\ 0.3197 & 0.2697 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0.5910 & 0.2971 \\ 0.4232 & 0.5813 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.9513 & 0.4767 \\ 0.4767 & 0.9896 \end{pmatrix}.$$

Результаты работы алгоритма приведены после третьей итерации. В данном примере число исходных точек принято равным $N = 600$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на конкретном примере показано использование разложения Холецкого для формирования коррелированных шумов. Полученные результаты являются хорошей предпосылкой для его использования при решении прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 320 с.
2. *Льюнг Л.* Идентификация систем: теория для пользователя / под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
3. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
4. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
5. *Сейдж Э.П., Мелса Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 495 с.

6. Mehra R.K. Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. AC-19, N 6. – P. 753–768.
7. Mehra R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1970. – Vol. AC-15, N 2. – P. 175–184.
8. Goodwin G.C., Payne R.L., Kabaila P.V. On canonical forms and algorithms for multivariable time series analysis // The 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Tbilisi, 21–27 September 1976. – Amsterdam; New York: North-Holland Publ., 1978. – Vol. 3. – P. 1965–1973.
9. Воевода А.А., Трошина Г.В. Оценивание параметров моделей динамики и наблюдения для линейных стационарных дискретных систем с использованием информационной матрицы Фишера // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 3 (24). – С. 199–200.
10. Трошина Г.В. Активная идентификация линейных динамических дискретных стационарных объектов во временной области: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01 / Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск, 2007. – 171 с.
11. Трошина Г.В. О комплексе программ для решения задачи идентификации линейных динамических дискретных стационарных объектов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2008. – Вып. 4 (54). – С. 37–44.
12. Трошина Г.В. Вычислительные аспекты задачи восстановления вектора состояния для модели с неточно заданными параметрами // Сборник научных трудов НГТУ. – 2008. – Вып. 3 (53). – С. 25–34.
13. Воевода А.А., Трошина Г.В. Вычисление информационной матрицы Фишера для линейных стационарных дискретных систем с неизвестными параметрами в моделях динамики и наблюдения // Сборник научных трудов НГТУ. – 2006. – № 2 (44). – С. 29–34.
14. Трошина Г.В. О методах оценивания вектора состояния в задачах идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 1 (67). – С. 69–78.
15. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of linear stationary dynamic object on base of the Fisher information matrix: the steady state // Proceedings of the XII International Conference "Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2014)", Novosibirsk, Russia, 2–4 October 2014. – Novosibirsk, 2014. – P. 745–749. – doi: 10.1109/APEIE.2014.7040785.
16. Воевода А.А., Трошина Г.В. О некоторых методах фильтрации в задаче идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 2 (76). – С. 16–25.

17. Трошина Г.В. Об использовании фильтра Калмана при идентификации динамических систем // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 3 (77). – С. 37–52.
18. Трошина Г.В. Об активной идентификации динамических объектов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 41–52. – doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-41-52.
19. Воевода А.А., Трошина Г.В. Об оценке вектора состояния и вектора параметров в задаче идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 53–68. – doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-53-68.
20. Трошина Г.В. Моделирование динамических объектов в среде Simulink. Ч. 1 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 3 (81). – С. 55–68. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-3-55-68.
21. Воевода А.А., Трошина Г.В. Моделирование фильтра Калмана с обновленной последовательностью в среде Simulink // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 2 (80). – С. 7–17. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-2-7-17.
22. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of the inverted pendulum control system // Proceedings of the 18th International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2015). – St. Petersburg: LETI Publ., 2015. – Vol. 1. – P. 153–156.
23. The object unknown parameters estimation for the 'inverted pendulum-Cart' system in the steady state / G.V. Troshina, A.A. Voevoda, V.M. Patrín, M.V. Simakina // Proceedings of the 16th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM 2015), Altai, Er-lagol, 29 June – 3 July 2015. – Novosibirsk, 2015. – P. 186–188.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление многоканальными объектами. Имеет более 200 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru

Трошина Галина Васильевна, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – идентификация динамических объектов. Имеет более 60 публикаций. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru

The formation of the correlated noises*

A.A. Voevoda¹, G.V. Troshina²

¹ Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, doctor of Technical Sciences, professor of the automation department. E-mail: ucit@ucit.ru

² Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, candidate of Technical Sciences, associate professor of the computer engineering department. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru

Theoretical and practical difficulties always arise when mathematical model of dynamic system is developing. For example, there are no the strictly certain rules of the state variables choice as there is no unambiguous representation of the dynamic system structure. The state variables choice at the filter realization can be critical in sense of the required calculations minimization. At the measurements set sequence the filter in which the state variables vector is processed can demand so many computing operations that actually it is possible to use only part of the received measurements. Therefore the correct formation of the state vector can lead to considerable economy in calculations. The measurements modeling is the important point also. The dynamic system behavior is estimated by the measurements results. If the vector measurements are correlated, then the corresponding transformations of variables to uncorrelated measuring system allow to divide them on time. Cases when separate measurements are performed with very high speed or are characterized by big uncertainty can also take place. Therefore the information volume increases. We will note that when modeling many tasks of the industry the very high order models are used. At the same time in control systems it isn't always possible to receive directly in real time all state variables measurements and all noise vector components. Full modeling of dynamic system, noise and measurements allows to apply the Kalman filter algorithms. In practical applications (for example, in the optimization problems) apply Holetsky's method (the square roots method) for the linear algebraic equations decision.

Keywords: mathematical model, identification, modeling, white noise, control, parameters estimation, Holetsky's method, correlated noise

DOI: 10.17121/2307-6879-2016-2-58-67

REFERENCES

1. Åström K.J. *Introduction to stochastic control theory*. New York, London, Academic Press, 1970. 298 p. (Russ. ed.: Ostrem K. *Vvedenie v stokhasticheskuyu teoriyu upravleniya*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1973. 320 p.).
2. Ljung L. *System identification: theory for the user*. New Jersey, Prentice Hall, 1987. 384 p. (Russ. ed.: L'yung L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya*. Translated from English. Moscow, Nauka Publ., 1991. 432 p.).

* Received 11 February 2016.

3. Eykhoff P. *System identification: parameter and state estimation*. London, John Wiley & Sons, 1974. 555 p. (Russ. ed.: Eikkhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya: otsenivanie parametrov i sostoyaniya*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1975. 680 p.).
4. Meditch J.S. *Stochastic optimal linear estimation and control*. New York, McGraw-Hill, 1969. 384 p. (Russ. ed.: Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye lineinye otsenki i upravlenie*. Translated from English. Moscow, Energiya Publ., 1973, 440 p.).
5. Sage A.P., Melse J.L. *Estimation theory with application to communication and control*. New York, McGraw-Hill, 1972. 540 p. (Russ. ed.: Seidzh E.P., Melsa Dzh. *Teoriya otsenivaniya i ee primenenie v svyazi i upravlenii*. Translated from English. Moscow, Svyaz' Publ., 1976. 495 p.).
6. Mehra R.K. Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. AC-19, no. 6, pp. 753–768.
7. Mehra R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1970, vol. AC-15, no. 2, pp. 175–184.
8. Goodwin G.C., Payne R.L., Kabaila P.V. On canonical forms and algorithms for multivariable time series analysis. *The 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, Tbilisi, 21–27 September 1976, vol. 3, pp. 1965–1973.
9. Voevoda A.A., Troshina G.V. Otsenivanie parametrov modelei dinamiki i nablyudeniya dlya lineinykh statsionarnykh diskretnykh sistem s ispol'zovaniem informatsionnoi matritsy Fishera [Parameters estimation of dynamics and supervision models for linear stationary discrete systems with use of Fischer information matrix]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 3 (24), pp. 199–200.
10. Troshina G.V. *Aktivnaya identifikatsiya lineinykh dinamicheskikh diskretnykh statsionarnykh ob"ektov vo vremennoi oblasti*. Diss. kand. tekhn. nauk [Active identification of linear dynamic discrete stationary objects in a time domain. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2007. 171 p.
11. Troshina G.V. O komplekse programm dlya resheniya zadachi identifikatsii lineinykh dinamicheskikh diskretnykh statsionarnykh ob"ektov [About the programs complex for the identification problem solution of linear dynamic discrete stationary objects]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2008, no. 4 (54), pp. 37–44.
12. Troshina G.V. Vychislitel'nye aspekty zadachi vosstanovleniya vektora sostoyaniya dlya modeli s netochno zadannymi parametrami [Computing aspects of

problem of the state vector recovering for models with inexact given parameters]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2008, no. 3 (53), pp. 25–34.

13. Voevoda A.A., Troshina G.V. Vychislenie informatsionnoi matritsy Fishera dlya lineinykh statsionarnykh diskretnykh sistem s neizvestnymi parametrami v modelyakh dinamiki i nablyudeniya [Fischer information matrix calculation for linear stationary discrete systems with unknown parameters in dynamics and supervision models]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 2 (44), pp. 29–34.

14. Troshina G.V. O metodakh otsenivaniya vektora sostoyaniya v zadachakh identifikatsii [About state vector estimation methods in identification problems]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (67), pp. 69–78.

15. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of linear stationary dynamic object on base of the Fisher information matrix: the steady state. *Proceedings of the XII International Conference “Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE–2014)”*, Novosibirsk, Russia, 2–4 October 2014, pp. 745–749. doi: 10.1109/APEIE.2014.7040785

16. Voevoda A.A., Troshina G.V. O nekotorykh metodakh fil'tratsii v zadache identifikatsii [About some filtration methods in the identification problem]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 2 (76), pp. 16–25.

17. Troshina G.V. Ob ispol'zovanii fil'tra Kalmana pri identifikatsii dinamicheskikh sistem [About Kalman filter using for dynamic systems identification]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 3 (77), pp. 37–52.

18. Troshina G.V. Ob aktivnoi identifikatsii dinamicheskikh ob"ektov [About active identification of dynamic objects]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 41–52. doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-41-52

19. Voevoda A.A., Troshina G.V. Ob otsenke vektora sostoyaniya i vektora parametrov v zadache identifikatsii [About parameters vector estimation and state vector estimation in identification problem]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific*

papers of the Novosibirsk state technical university, 2014, no. 4 (78), pp. 53–68. doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-53-68

20. Troshina G.V. Modelirovanie dinamicheskikh ob"ektov v srede Simulink. Ch. 1 [The dynamic objects modelling in Simulink environment. Pt. 1]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 3 (81), pp. 55–68. doi: 10.17212/2307-6879-2015-3-55-68

21. Voevoda A.A., Troshina G.V. Modelirovanie fil'tra Kalmana s obnovlennoi posledovatel'nost'yu v srede Simulink [The modelling of the Kalman filter with the updated sequence in Simulink environment]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 2 (80), pp. 7–17. doi: 10.17212/2307-6879-2015-2-7-17

22. Voevoda A.A., Troshina G.V., Active identification of the inverted pendulum control system [Aktivnaya identifikaciya sistemy upravleniya perevernutij mayatnik]. *Proceedings of the 18th International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2015)*. St. Petersburg, LETI Publ., 2015, vol. 1, pp. 153–156.

23. Troshina G.V., Voevoda A.A., Patrin V.M., Simakina M.V. The object unknown parameters estimation for the 'inverted pendulum-Cart' system in the steady state. *Proceedings of the 16th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM 2015)*, Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015, pp. 186–188.