

УДК 519.24

## **ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В СРЕДЕ SIMULINK\***

А.А. ВОЕВОДА<sup>1</sup>, Г.В. ТРОШИНА<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru

<sup>2</sup> 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru

Метод наименьших квадратов широко используется при обработке большого объема информации, полученной в результате проведения, например, геодезических наблюдений или технических измерений. При использовании рекуррентных методов идентификации необходима модель системы, которая работает в реальном масштабе времени. Вычисления при этом должны выполняться последовательно и таким образом, чтобы обработка текущего измерения завершалась до начала следующего измерения. Поскольку последовательный способ вычислений предоставляет текущее значение оценки неизвестного параметра после каждого наблюдения, то появляется возможность прекратить наблюдения в том случае, если значение оцениваемого параметра практически перестает изменяться. Модели систем, работающие в реальном масштабе времени, позволяют, например, выбрать подходящее входное воздействие на следующем шаге, предсказать следующие значения выходного сигнала, провести настройку параметров объекта. Таким образом, рекуррентные методы позволяют обрабатывать входные данные до тех пор, пока не будет достигнута соответствующая точность модели. В данной работе рассматривается рекуррентный метод наименьших квадратов. Понимание специфики работы данного алгоритма может служить основой для его применения в практических приложениях. Выполнено моделирование объекта в среде Simulink. Демонстрируются графики входного и выходного сигналов. Отметим, что выбор входного воздействия оказывает заметное влияние на работу алгоритма. Приводятся результаты оценивания параметра для случая, когда на объект не воздействуют шумы, а также для случая, когда объект находится под действием шумов. Обсуждаются начальные условия, необходимые для корректной работы рекуррентного метода наименьших квадратов.

---

\* Статья получена 25 августа 2016 г.

**Ключевые слова:** математическая модель, идентификация, моделирование, белый шум, входной сигнал, оценивание параметров, рекуррентный метод наименьших квадратов

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-3-33-48

## ВВЕДЕНИЕ

Работы [1–22] посвящены вопросам идентификации, которые являются наиболее существенными для практического использования. Идентификация подразумевает выбор пользователем некоторых переменных и параметров, которые могут быть оценены как в реальном масштабе времени, так и по накопленным данным. Далее рассматривается рекуррентный метод наименьших квадратов для оценивания параметров статических объектов.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Модель системы имеет вид

$$x\theta = y + v,$$

где  $x$  – входной сигнал объекта;  $\theta$  – оцениваемый параметр объекта;  $y$  – выходной сигнал объекта (без шума);  $v$  – гауссовский шум на выходе объекта.

Предполагается, что проведено  $N$  измерений входного сигнала  $x$  и выходного  $y$ . Результаты  $i$ -го измерения обозначим через  $x_i$ ,  $y_i$ . Как известно, метод наименьших квадратов базируется на вычислении квадратичного отклонения

$$s(\theta) = \sum_{t=1}^N (y_t - x_t \theta).$$

Если ввести обозначения

$$X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad Y_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix},$$

то оценка наименьших квадратов имеет следующий вид [2]:

$$\hat{\theta}_N = \left( X_N^T X_N \right)^{-1} X_N^T Y_N.$$

Здесь  $\hat{\theta}_N$  – это оценка неизвестного параметра  $\theta$  по  $N$  измерениям. Формулы рекуррентного метода наименьших квадратов приведены ниже [8]:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1} (y_{N+1} - x_{N+1} \hat{\theta}_N), \quad (1)$$

$$K_{N+1} = \frac{P_N x_{N+1}}{(1 + x_{N+1} P_N x_{N+1})}, \quad (2)$$

$$P_{N+1} = \left( I - P_N \frac{x_{N+1} x_{N+1}^T}{1 + x_{N+1} P_N x_{N+1}} \right) P_N, \quad (3)$$

где  $K_{N+1}$  – коэффициент усиления;  $P_{N+1}$  – оценка дисперсии ошибки оценивания.

Первая формула позволяет уточнять шаг за шагом оценку параметра  $\theta$ . Следует заметить, что в рекуррентных вычислениях необходимо обратить внимание на задание начальных условий  $\theta_0$ ,  $K_0$ ,  $P_0$ , которое влияет на скорость сходимости итерационного процесса. Часто задают нулевые начальные условия. Особое внимание следует обратить на  $P_0$ , так как при  $P_0 = 0$  получить оценку  $\hat{\theta}_N$  невозможно.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ SIMULINK

Для моделирования процесса итерационного вычисления параметров статического объекта необходимо создать следующие блоки: генератор входного сигнала Input\_X, объект Object, шум Noise\_v, блок моделирования уравнений (1)–(3) Rekur\_MNK (рис. 1).

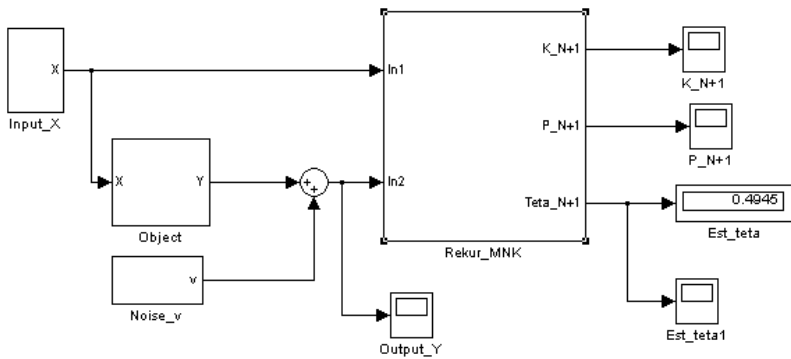


Рис. 1. Модель процесса итерационного вычисления оцениваемого параметра

Блок рекуррентных вычислений Rekur\_MNK по уравнениям (1)–(3) в среде Simulink приведен на рис. 2, а блоки вычисления по уравнениям (1)–(3), соответственно, на рис. 3–5.

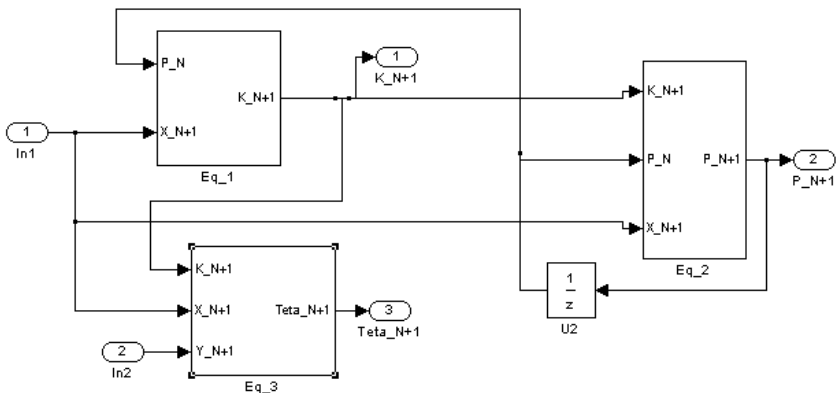


Рис. 2. Моделирование процесса вычислений по уравнениям (1)–(3)

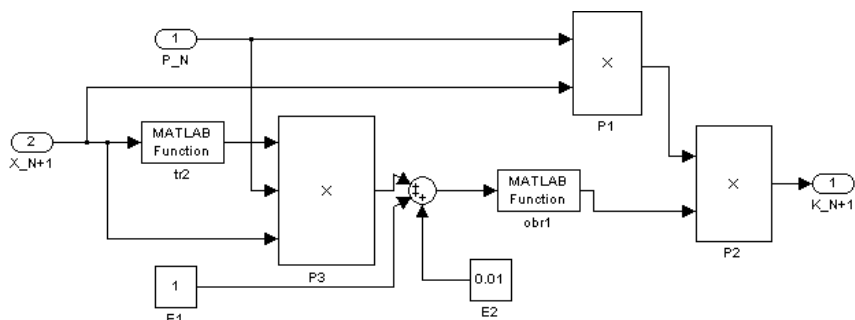


Рис. 3. Моделирование процесса вычислений по уравнению (1)

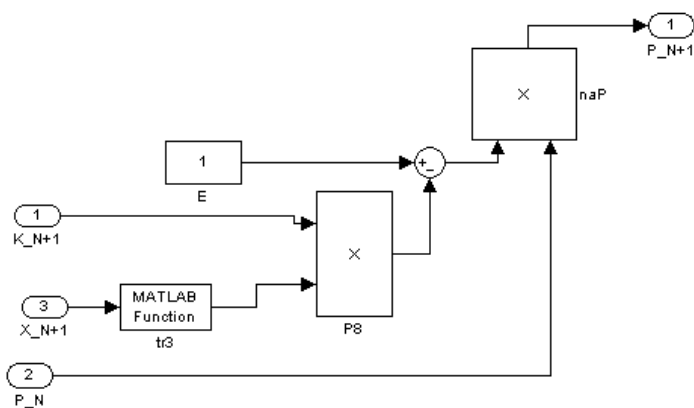


Рис. 4. Моделирование процесса вычислений по уравнению (2)

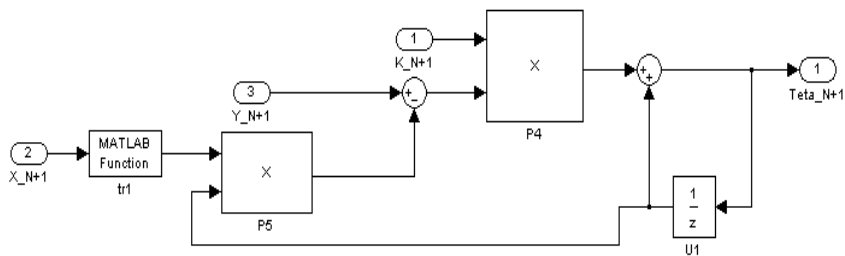


Рис. 5. Моделирование процесса вычислений по уравнению (3)

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНИВАЕМОГО ПАРАМЕТРА

На рис. 6–10 приведены результаты моделирования для объекта без шума процесса  $\nu$ . В качестве входного сигнала выбран сигнал типа меандра с амплитудой, равной единице (рис. 7), где  $x_i$  – номер отсчета (эксперимента).

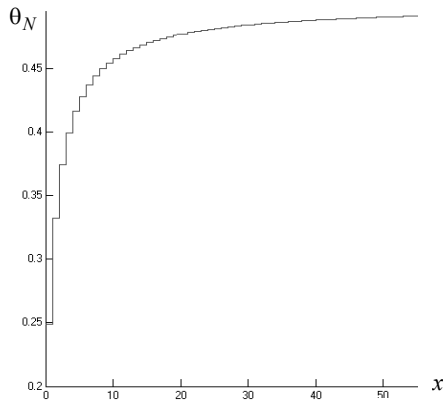


Рис. 6. Оценка параметра  $\theta$  без шума

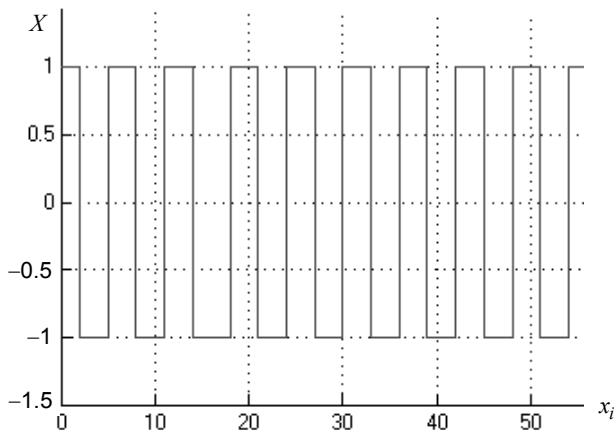


Рис. 7. Входной сигнал без шума

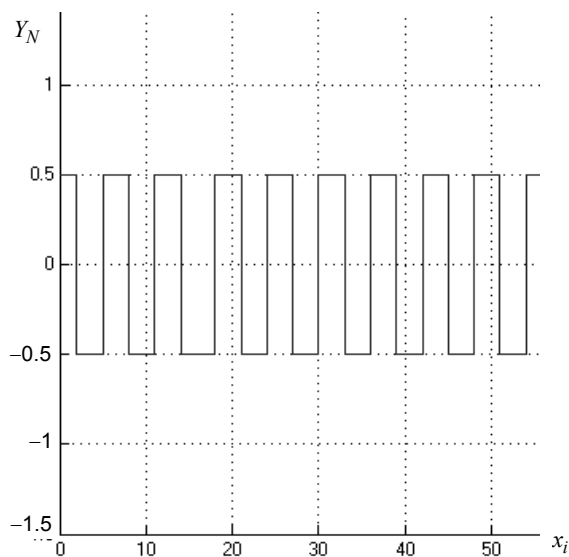
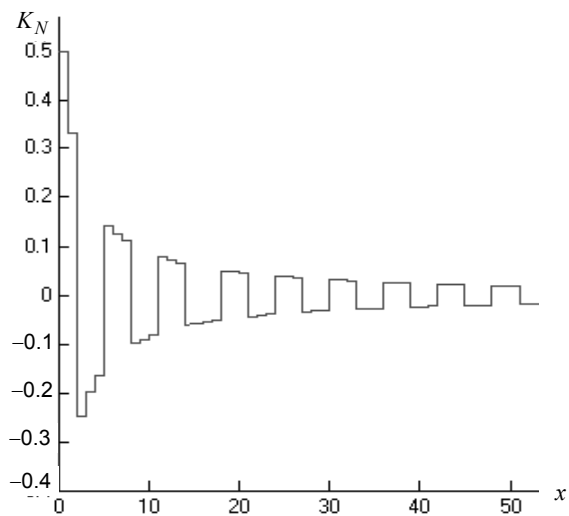


Рис. 8. Выход объекта без шума

Рис. 9. Параметр  $K$  без шума

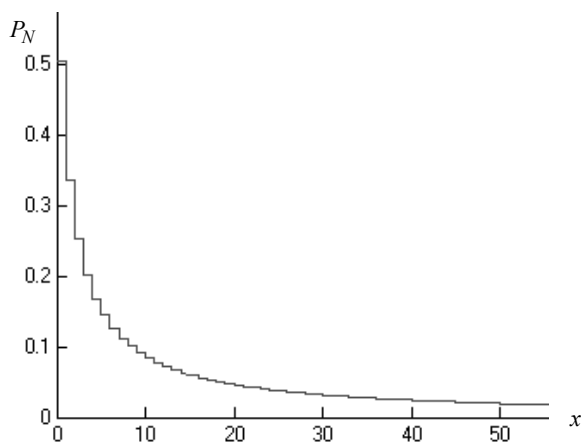


Рис. 10. Параметр  $P$  без шума

На рис. 11–14 приведены результаты моделирования для объекта при наличии шума процесса.

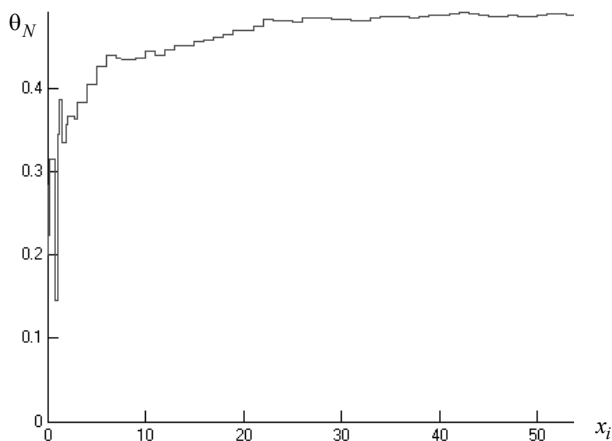


Рис. 11. Оценка с шумом



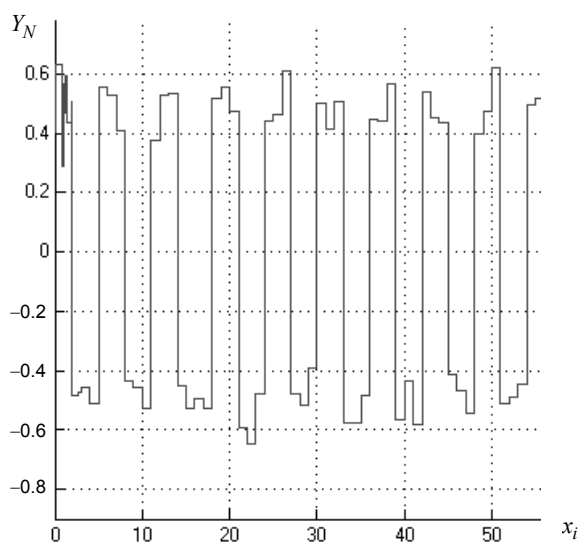


Рис. 12. Выход объекта при наличии шума

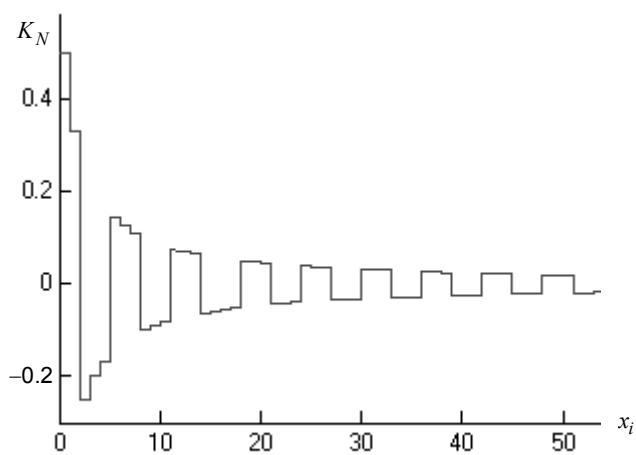


Рис. 13. Параметр  $K$  при наличии шума

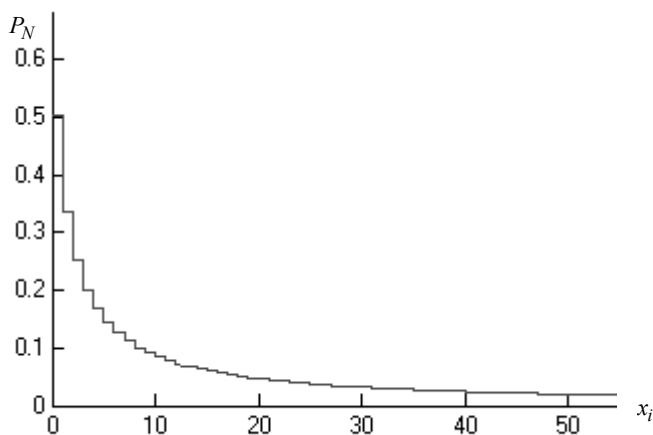


Рис. 14. Параметр  $P$  при наличии шума

Таким образом, продемонстрирована работоспособность рекуррентного алгоритма оценивания статических параметров.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе описана методика оценивания параметров статических объектов, что проверено в среде Simulink пакета MatLab. В дальнейшем это можно распространить на более сложные объекты.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 320 с.
2. *Льюнг Л.* Идентификация систем: теория для пользователя / под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
3. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
4. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
5. *Сейдж Э.П., Мелса Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 495 с.

6. Mehra R.K. Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. AC-19, N 6. – P. 753–768.
7. Mehra R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1970. – Vol. AC-15, N 2. – P. 175–184.
8. Goodwin G.C., Payne R.L. Dynamic system identification: experiment design and data analysis. – New York: Academic Press, 1977. – 291 p.
9. Воевода А.А., Трошина Г.В. Оценивание параметров моделей динамики и наблюдения для линейных стационарных дискретных систем с использованием информационной матрицы Фишера // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 3 (24). – С. 199–200.
10. Трошина Г.В. Активная идентификация линейных динамических дискретных стационарных объектов во временной области: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01 / Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск, 2007. – 171 с.
11. Трошина Г.В. Вычислительные аспекты задачи восстановления вектора состояния для модели с неточно заданными параметрами // Сборник научных трудов НГТУ. – 2008. – Вып. 3 (53). – С. 25–34.
12. Воевода А.А., Трошина Г.В. Вычисление информационной матрицы Фишера для линейных стационарных дискретных систем с неизвестными параметрами в моделях динамики и наблюдения // Сборник научных трудов НГТУ. – 2006. – № 2 (44). – С. 29–34.
13. Трошина Г.В. D-оптимальный план эксперимента в задачах активной идентификации по данным установившегося режима для линейных стационарных дискретных систем // Наука. Промышленность. Оборона: труды VII Всероссийской научно-технической конференции, 19–21 апреля 2006 г. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – С. 445–449.
14. Трошина Г.В. О методах оценивания вектора состояния в задачах идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 1 (67). – С. 69–78.
15. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of linear stationary dynamic object on base of the Fisher information matrix: the steady state // Proceedings of the XII International Conference "Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE–2014)", Novosibirsk, Russia, 2–4 October 2014. – Novosibirsk, 2014. – P. 745–749. – doi: 10.1109/APEIE.2014.7040785.
16. Воевода А.А., Трошина Г.В. О некоторых методах фильтрации в задаче идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 2 (76). – С. 16–25.

17. Трошина Г.В. Об использовании фильтра Калмана при идентификации динамических систем // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 3 (77). – С. 37–52.

18. Трошина Г.В. Об активной идентификации динамических объектов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 41–52. – doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-41-52.

19. Воевода А.А., Трошина Г.В. Об оценке вектора состояния и вектора параметров в задаче идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 53–68. – doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-53-68.

20. Трошина Г.В. Моделирование динамических объектов в среде Simulink. Ч. 1 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 3 (81). – С. 55–68. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-3-55-68.

21. Воевода А.А., Трошина Г.В. Моделирование фильтра Калмана с обновленной последовательностью в среде Simulink // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 2 (80). – С. 7–17. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-2-7-17.

22. Трошина Г.В. Моделирование динамических объектов в среде Simulink. Ч. 2 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 4 (82). – С. 31–41. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-4-31-41.

**Воевода Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление многоканальными объектами. Имеет более 200 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru

**Трошина Галина Васильевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – идентификация динамических объектов. Имеет более 60 публикаций. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru

## The parameters estimation of the linear static objects with use of the recursive least-squares method in the Simulink environment\*

A.A. Voevoda<sup>1</sup>, G.V. Troshina<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, doctor of Technical Sciences, professor of the automation department. E-mail: ucit@ucit.ru

<sup>2</sup> Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, candidate of Technical Sciences, associate professor of the computer engineering department. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru

The least-squares method is widely used when processing of the information large volume obtained as a result of carrying out, for example, geodetic observations or technical measurements. The model of system which works in real time is necessary when the identification recursive methods are used. Calculations at the same time have to be carried out consistently and so that processing of the current measurement came to the end prior to the following measurement. As the consecutive way of calculations provides the current value of the unknown parameter estimation after each observation, there is an opportunity to stop observations in case the value of the estimated parameter practically ceases to change. The system models working in real time allow to choose, for example, the suitable input signal on the following step, to predict the following values of an output signal, to carry out control of the object parameters. Thus, recursive methods allow to process input data until the corresponding accuracy of model is reached. In this work the recursive least-squares method is considered. The work specifics understanding of this algorithm can form a basis for its application in practical applications. The object construction is executed in the Simulink environment. Schedules of input and output signals are shown. Let's note that the input signal choice exerts noticeable impact on an algorithm work. The parameter estimation results for a case when an object isn't under noise, and also for a case when an object is under the noise are given. The initial conditions necessary for the correct work of the recursive least-squares method are discussed.

**Keywords:** mathematical model, identification, modeling, white noise, signal, parameters estimation, recursive least-squares method

DOI: 10.17121/2307-6879-2016-3-33-48

## REFERENCES

1. Åström K.J. *Introduction to stochastic control theory*. New York, London, Academic Press, 1970. 298 p. (Russ. ed.: Ostrem K. *Vvedenie v stokhasticheskuyu teoriyu upravleniya*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1973. 320 p.).
2. Ljung L. *System identification: theory for the user*. New Jersey, Prentice Hall, 1987. 384 p. (Russ. ed.: L'yung L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya*. Translated from English. Moscow, Nauka Publ., 1991. 432 p.).

---

\* Received 25 August 2016.

3. Eykhoff P. *System identification: parameter and state estimation*. London, John Wiley & Sons, 1974. 555 p. (Russ. ed.: Eikkhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya: otsenivanie parametrov i sostoyaniya*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1975. 680 p.).
4. Meditch J.S. *Stochastic optimal linear estimation and control*. New York, McGraw-Hill, 1969. 384 p. (Russ. ed.: Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye lineinye otsenki i upravlenie*. Translated from English. Moscow, Energiya Publ., 1973, 440 p.).
5. Sage A.P., Melse J.L. *Estimation theory with application to communication and control*. New York, McGraw-Hill, 1972. 540 p. (Russ. ed.: Seidzh E.P., Melsa Dzh. *Teoriya otsenivaniya i ee primenenie v svyazi i upravlenii*. Translated from English. Moscow, Svyaz' Publ., 1976. 495 p.).
6. Mehra R.K. Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. AC-19, no. 6, pp. 753–768.
7. Mehra R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1970, vol. AC-15, no. 2, pp. 175–184.
8. Goodwin G.C., Payne R.L. *Dynamic system identification: experiment design and data analysis*. New York, Academic Press, 1977. 291 p.
9. Voevoda A.A., Troshina G.V. Otsenivanie parametrov modeli dinamiki i nablyudeniya dlya lineinykh statsionarnykh diskretnykh sistem s ispol'zovaniem informatsionnoi matritsy Fishera [Parameters estimation of dynamics and supervision models for linear stationary discrete systems with use of Fischer information matrix]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 3 (24), pp. 199–200.
10. Troshina G.V. *Aktivnaya identifikatsiya lineinykh dinamicheskikh diskretnykh statsionarnykh ob"ektov vo vremennoi oblasti*. Diss. kand. tekhn. nauk [Active identification of linear dynamic discrete stationary objects in a time domain. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2007. 171 p.
11. Troshina G.V. Vychislitel'nye aspekty zadachi vosstanovleniya vektora sostoyaniya dlya modeli s netochno zadannymi parametrami [Computing aspects of problem of the state vector recovering for models with inexact given parameters]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2008, no. 3 (53), pp. 25–34.
12. Voevoda A.A., Troshina G.V. Vychislenie informatsionnoi matritsy Fishera dlya lineinykh statsionarnykh diskretnykh sistem s neizvestnymi parametrami v modelyakh dinamiki i nablyudeniya [Fischer information matrix calculation for linear stationary discrete systems with unknown parameters in dynamics and super-

vision models]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 2 (44), pp. 29–34.

13. Troshina G.V. [D-optimum design of experiment in active identification problems on base of steady state for single-line stationary discrete systems]. *Trudy VII Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii "Nauka. Promyshlennost'. Oborona"* [Proceedings of the 7<sup>th</sup> All-Russian scientific and technical conference "Science. Industry. Defence"], Novosibirsk, Russia, 19–21 April 2006, pp. 445–449. (In Russian)

14. Troshina G.V. O metodakh otsenivaniya vektora sostoyaniya v zadachakh identifikatsii [About state vector estimation methods in identification problems]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (67), pp. 69–78.

15. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of linear stationary dynamic object on base of the Fisher information matrix: the steady state. *Proceedings of the XII International Conference "Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE–2014)"*, Novosibirsk, Russia, 2–4 October 2014, pp. 745–749. doi: 10.1109/APEIE.2014.7040785

16. Voevoda A.A., Troshina G.V. O nekotorykh metodakh fil'tratsii v zadache identifikatsii [About some filtration methods in the identification problem]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 2 (76), pp. 16–25.

17. Troshina G.V. Ob ispol'zovanii fil'tra Kalmana pri identifikatsii dinamicheskikh sistem [About Kalman filter using for dynamic systems identification]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 3 (77), pp. 37–52.

18. Troshina G.V. Ob aktivnoi identifikatsii dinamicheskikh ob"ektov [About active identification of dynamic objects]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 41–52. doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-41-52

19. Voevoda A.A., Troshina G.V. Ob otsenke vektora sostoyaniya i vektora parametrov v zadache identifikatsii [About parameters vector estimation and state vector estimation in identification problem]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 53–68. doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-53-68

20. Troshina G.V. Modelirovanie dinamicheskikh ob"ektov v srede Simulink. Ch. 1 [The dynamic objects modelling in Simulink environment. Pt. 1]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 3 (81), pp. 55–68. doi: 10.17212/2307-6879-2015-3-55-68
21. Voevoda A.A., Troshina G.V. Modelirovanie fil'tra Kalmana s obnovlennoi posledovatel'nost'yu v srede Simulink [The modelling of the Kalman filter with the updated sequence in Simulink environment]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 2 (80), pp. 7–17. doi: 10.17212/2307-6879-2015-2-7-17
22. Troshina G.V. Modelirovanie dinamicheskikh ob"ektov v srede Simulink. Ch. 2 [The dynamic objects modelling in Simulink environment. Pt. 2]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 4 (82), pp. 31–41. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-4-31-41