

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2

ВЫБОР НАИЛУЧШЕЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ В АЛГОРИТМАХ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ*

Ю.Е. ВОСКОБОЙНИКОВ¹, Д.А. КРЫСОВ²

¹ 630008, РФ, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (СибСТРИН), заведующий кафедрой прикладной математики, профессор, доктор физико-математических наук. E-mail: voskoboynikov@corp.nstu.ru, voscob@mail.ru

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматизи. E-mail: Tomahawk.RUS@gmail.com

При фильтрации зашумленных сигналов и изображений широкое распространение получили алгоритмы вейвлет-фильтрации, основанные на вейвлет-разложении фильтруемого сигнала или изображения в базисе выбранных вейвлет-функций. В этом случае фильтрация включает три следующих этапа:

- вычисление прямого дискретного вейвлет-преобразования (вычисляются коэффициенты разложения по зашумленным значениям сигнала);
 - обработка «зашумленных» коэффициентов разложения (построение оценок для коэффициентов разложения «точного», незашумленного сигнала);
 - вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования от обработанных коэффициентов разложения – нахождение значений «отфильтрованного» сигнала.
- Совокупность этих трех этапов обработки в дальнейшем будем называть вейвлет-фильтрацией.

Качество фильтрации в основном определяется принятым алгоритмом обработки коэффициентов разложения на втором этапе. Большинство используемых алгоритмов носит пороговый характер: коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае коэффициент подвергается некоторому (чаще всего нелинейному) преобразованию, которое задается используемой пороговой функцией. Наиболее часто при построении алгоритмов вейвлет-фильтрации используются однопараметрические пороговые функции. В литературе предложено несколько таких функций, однако отсутствуют комплексные исследования влияния вида пороговой функции на ошибку вейвлет-фильтрации, что затрудняет обоснованное применение пороговых функций на практике. В работе выполнены оригинальные исследования влияния однопараметрических пороговых функций четырех видов на ошибку фильтрации как одномерных сигналов, так и изображений при различ-

* Статья получена 06 июня 2016 г.

ных уровнях шума измерений. Вводится коэффициент оптимальности, позволяющий объективно сравнивать разные пороговые функции. На основе анализа этого коэффициента даются практические рекомендации по применению наилучших (оптимальных) пороговых функций.

Ключевые слова: вейвлет-представление сигналов, вейвлет-представление изображений, пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации, пороговые функции, однопараметрические пороговые функции, минимальная ошибка пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации, коэффициент оптимальности пороговых функций, наилучшая пороговая функция

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-3-71-82

ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия для фильтрации зашумленных сигналов и изображений широко используется разложение сигнала в базисе вейвлет-функций [1, 2]. Такое представление сигнала имеет ряд преимуществ по сравнению с представлением в базисе функций \sin , \cos [3]. Фильтрация с использованием вейвлет-разложения включает три этапа:

- вычисление прямого дискретного вейвлет-преобразования (вычисляются коэффициенты разложения по зашумленным значениям сигнала);
- обработка «зашумленных» коэффициентов разложения (построение оценок для коэффициентов разложения «точного» сигнала);
- вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования от обработанных коэффициентов разложения (нахождение значений «отфильтрованного» сигнала).

Совокупность этих трех этапов обработки в дальнейшем будем называть *вейвлет-фильтрацией*.

Качество фильтрации зависит как от выбранного базиса вейвлет-функций, так и от алгоритмов обработки коэффициентов разложения на втором этапе (последнее имеет определяющее значение). Большинство используемых алгоритмов носит пороговый характер: коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае коэффициент подвергается некоторому (чаще всего нелинейному) преобразованию, которое задается используемой пороговой функцией. Пороговые функции могут зависеть от одного параметра (однопараметрические) или от нескольких, чаще всего от двух (двухпараметрические пороговые функции). Наиболее часто при построении алгоритмов вейвлет-фильтрации используются однопараметрические пороговые функции. В литературе предложено несколько таких функций, однако отсутствуют комплексные исследования влияния вида пороговой функции на

ошибку вейвлет-фильтрации, что затрудняет обоснованное применение пороговых функций на практике.

Поэтому данная работа посвящена исследованиям, целью которых является определение наилучшей (оптимальной) пороговой функции с наименьшей среднеквадратической ошибкой фильтрации.

1. ПОРОГОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

Удобной формой вейвлет-представления является многомасштабное (*multiresolution*) представление вида [4–6]

$$\hat{f}(x) = \sum_k a_{J,k} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (1)$$

которое можно интерпретировать как восстановление исходного сигнала по его коэффициентам разложения на J -м уровне. Функции $\{\varphi_{j,k}(x)\}$ называют масштабирующими (или отцовскими), а функции $\{\psi_{j,k}(x)\}$ – вейвлет-функциями (или материнскими). Коэффициенты разложения $a_{J,k}$ называют аппроксимирующими, $d_{j,k}$ – детализирующими, и они определяются выражениями

$$a_{j,k} = \int_R f(x) \varphi_{j,k}(x) dx, \quad d_{j,k} = \int_R f(x) \psi_{j,k}(x) dx, \quad (2)$$

где R – интервал определения функции $f(x)$. Переменная j характеризует уровень разложения, и ее часто называют коэффициентом масштаба, а переменная k – временной сдвиг той или иной базисной функции.

Как правило, пороговой обработке подвергаются детализирующие коэффициенты разложения $\tilde{d}_{j,k}$, потому что они имеют ошибки (обусловленные шумом измерения) на порядок и более меньше по сравнению с детализирующими (подробнее см. [7, 8]). Идеальный алгоритм обработки можно определить правилом: **необходимо обратить в нуль «шумовые» коэффициенты разложения, которые обусловлены только шумом измерения, сохранив при этом «информативные» коэффициенты разложения незашумленного сигнала.**

В определенной (но не в полной) степени этому требованию удовлетворяют *пороговые алгоритмы*, которые в зарубежной литературе получили

название *thresholding*. В этих алгоритмах наиболее часто используются две пороговые функции [7]:

- «жесткая» пороговая функция вида

$$T_H(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda; \end{cases} \quad (3)$$

- «мягкая» пороговая функция вида

$$T_S(\tilde{d}, \lambda) = \text{sign}(\tilde{d}) [|\tilde{d}| - \lambda]_+, \quad (4)$$

где λ – величина порога, а $[z]_+$ определяется как $[z]_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0; \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$

Графики этих функций приведены на рис. 1 (функция $T_H(\tilde{d}, \lambda)$ обозначена цифрой 1, функция $T_S(\tilde{d}, \lambda)$ – цифрой 2).

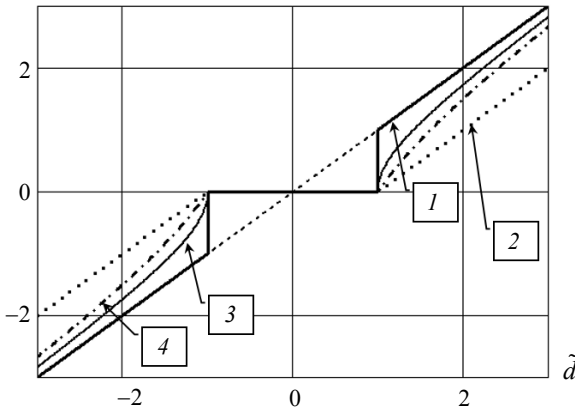


Рис. 1. Графики пороговых функций

Отметим характерные особенности этих функций:

- из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину λ в функции $T_S(\tilde{d}, \lambda)$ возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала, особенно при больших значениях λ ;

- наличие в функции $T_H(\tilde{d}, \lambda)$ разрыва в окрестности λ может вызвать появление осцилляций (эффект Гиббса) в «особых» точках обрабатываемого сигнала.

Для преодоления этих недостатков были предложены другие пороговые функции, представляющие собой определенный компромисс между функциями (3), (4), а именно:

- пороговая функция (получившая название *garrote*) вида [9]

$$T_G(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d} - \frac{\lambda^2}{\tilde{d}}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda; \end{cases} \quad (5)$$

- пороговая функция (получившая название *hyperbole*) вида [10]

$$T_{HIP}(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \text{sign}(\tilde{d})\sqrt{\tilde{d}^2 - \lambda^2}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda. \end{cases} \quad (6)$$

Графики этих функций приведены на рис. 1 (функция $T_{HIP}(\tilde{d}, \lambda)$ – кривая 3, функция $T_G(\tilde{d}, \lambda)$ – кривая 4). Видно, что в окрестности точки λ эти функции не имеют разрыва, и большие («информативные») коэффициенты разложения (\tilde{d} значительно больше λ) будут сохраняться полностью.

Возникает вопрос: **Какая из пороговых функций (3)–(6) обуславливает меньшую ошибку фильтрации?**

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

К сожалению, пороговый характер обработки коэффициентов разложения зашумленного сигнала обуславливает нелинейность порогового алгоритмавейлет-фильтрации. Это делает затруднительным дать ответ на предыдущий вопрос исходя из аналитических исследований среднеквадратической ошибки фильтрации с использованием разных пороговых функций.

Поэтому для ответа на вопрос о наилучшей пороговой функции был проведен обширный вычислительный эксперимент по фильтрации одномерных (рис. 2) и двумерных (рис. 3) сигналов. Характерная особенность этих сигналов – их разные частотные характеристики: *Doppler* и *LENA* представляют собой «гладкие» сигналы, *Rectangular* и *TARGET* – «контрастные» сигналы с резким изменением амплитуд. Спектр последних сигналов является широко-

полосным, что существенно усложняет их фильтрации из-за совпадений высокочастотных составляющих сигнала и шума измерения.

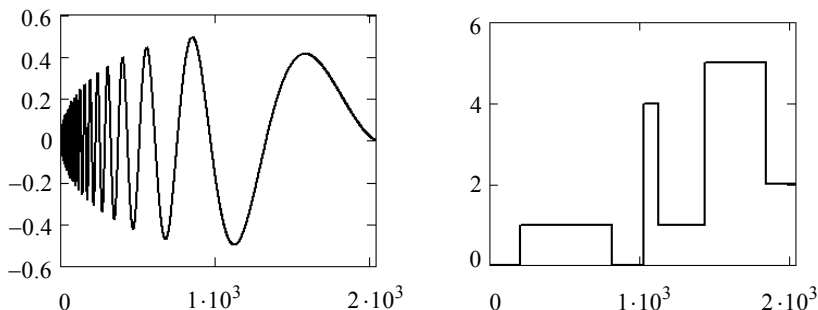


Рис. 2. Одномерные сигналы *Doppler* и *Rectangular*



Рис. 3. Изображения *LENA* и *TARGET*

Точные значения сигналов и изображений искажались нормально распределенными шумами измерений с нулевым средним и дисперсией, определяемой по задаваемому относительному уровню шума $\delta_{\eta} = 0.015, 0.05, 0.15$. Пороговые значения λ задавались выражением (7) (подробнее см. [7, 8, 11]):

$$\lambda_{opt}^{(j)} = \beta_{opt} \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (7)$$

где N_j – число коэффициентов на j -м уровне разложения; β_{opt} – величина, при которой ошибка фильтрации достигает минимума. Определение β_{opt}

является возможным, так как точные значения в вычислительном эксперименте (в отличие от практики) известны. Для обработки реальных данных в работах [8, 11] предложены алгоритмы, основанные на критерии оптимальности линейных алгоритмов фильтрации [12] и позволяющие достаточно точно оценить β_{opt} .

В качестве меры точности фильтрации при использовании различных пороговых функций принята средняя минимальная относительная ошибка фильтрации $\bar{\delta}_Z$, вычисляемая по объему выборки 30, где Z означает имя используемой пороговой функции. Относительная ошибка определялась выражением

$$\delta_Z = \frac{\|\hat{f}_Z - f\|}{\|f\|},$$

где f, \hat{f}_Z – незашумленный (точный) и отфильтрованный сигналы; $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора или матрицы.

Введем в рассмотрение *коэффициент оптимальности* пороговой функции Z , определяемый выражением

$$k_Z = \frac{\min\{\bar{\delta}\}}{\bar{\delta}_Z}.$$

Очевидно, что пороговая функция, имеющая $k_Z = 1$, является наилучшей для вейвлет-фильтрации данного зашумленного сигнала.

Значения k_Z для различных пороговых функций и уровней шума представлены в табл. 1 (одномерные сигналы) и табл. 2 (изображения). Ячейки, в которых $k_Z = 1$ (максимальное значение), выделены серым фоном.

В качестве интегрированной характеристики оптимальности пороговых функций примем среднее значение коэффициента оптимальности, которое вычисляется для каждой пороговой функции по всем уровням шума измерения и всем сигналам (таких сочетаний 12), т. е.

$$\bar{k}_Z = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} k_Z^{(m)},$$

где $k_Z^{(m)}$ – значение коэффициента оптимальности для m -го сочетания уровня шума измерения и вида сигнала (берется из табл. 1, 2). Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 1

Значения коэффициентов оптимальности пороговых функций при фильтрации одномерных сигналов

Пороговая функция	Фильтруемый сигнал	Относительный уровень шума		
		0,015	0,05	0,15
$T_H(\tilde{d}, \lambda)$	<i>Doppler</i>	0,959	0,974	0,967
	<i>Rectangular</i>	0,979	0,965	0,965
$T_S(\tilde{d}, \lambda)$	<i>Doppler</i>	0,842	0,842	0,883
	<i>Rectangular</i>	0,802	0,872	0,886
$T_{HIP}(\tilde{d}, \lambda)$	<i>Doppler</i>	1,000	1,000	1,000
	<i>Rectangular</i>	1,000	1,000	1,000
$T_G(\tilde{d}, \lambda)$	<i>Doppler</i>	0,998	0,992	0,996
	<i>Rectangular</i>	0,990	0,994	0,997

Таблица 2

Значения коэффициентов оптимальности пороговых функций при фильтрации изображений

Пороговая функция	Фильтруемое изображение	Относительный уровень шума		
		0,015	0,05	0,15
$T_H(\tilde{d}, \lambda)$	<i>LENA</i>	0,953	0,885	0,895
	<i>TANGER</i>	0,944	0,922	0,902
$T_S(\tilde{d}, \lambda)$	<i>LENA</i>	0,933	1,000	0,990
	<i>TANGER</i>	0,880	0,922	0,970
$T_{HIP}(\tilde{d}, \lambda)$	<i>LENA</i>	0,989	0,977	0,980
	<i>TANGER</i>	1,000	0,989	0,982
$T_G(\tilde{d}, \lambda)$	<i>LENA</i>	1,000	0,999	1,000
	<i>TANGER</i>	1,000	1,000	1,000

Таблица 3

Средне значения коэффициента оптимальности для различных пороговых функций

Пороговая функция	Среднее значение коэффициента оптимальности
$T_H(\tilde{d}, \lambda)$	0,9168
$T_S(\tilde{d}, \lambda)$	0,9492
$T_{НПР}(\tilde{d}, \lambda)$	0,9930
$T_G(\tilde{d}, \lambda)$	0,9971

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ значений коэффициента оптимальности k_Z , приведенных в этих таблицах, позволяет сделать следующие выводы.

1. Максимальные значения $k_Z = 1$ (а следовательно, и наименьшую ошибку фильтрации) при фильтрации одномерных дискретных сигналов имеет пороговая функция $T_{НПР}(\tilde{d}, \lambda)$. Немного меньшие значения коэффициента оптимальности имеет пороговая функция $T_G(\tilde{d}, \lambda)$.

2. Максимальные значения коэффициента оптимальности при фильтрации изображений имеют разные пороговые функции, и это зависит от уровня шума и изображения (наиболее предпочтительной является пороговая функция $T_G(\tilde{d}, \lambda)$).

3. Анализ средних значений коэффициентов оптимальности, приведенных в табл. 3, позволяет рекомендовать функцию $T_G(\tilde{d}, \lambda)$ в качестве оптимальной пороговой функции (она имеет максимальное среднее значение \bar{k}_Z коэффициента оптимальности).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: Солон-Р, 2002. – 448 с.
2. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MatLAB. – М.: ДМК, 2005. – 304 с.

3. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-преобразования: основные свойства и примеры применения. – М.: ИКИ РАН, 1994. – 56 с. – (Препринт / Институт космических исследований РАН; № 1891).
4. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. – Спб.: Изд-во ВУС, 1999. – 189 с.
5. *Mallat S.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Transactions of the American Mathematical Society. – 1989. – Vol. 315. – P. 69–87.
6. *Mallat S.* A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1989. – Vol. 11. – P. 674–693.
7. *Воскобойников Ю.Е.* Вейвлет-фильтрация сигналов и изображений: (с примерами в MathCAD): монография. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2015. – 188 с.
8. *Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В.* Оценивание оптимальных пороговых величин в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений // Автометрия. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 3–14.
9. *Gao H.-Y.* Wavelet shrinkage denoising the non-negative garrote // Journal of Computational and Graphical Statistics. – 1998. – Vol. 7, N 4. – P. 469–488.
10. *Vidakovic B.* Statistical modeling by wavelets. – New York: John Wiley & Sons, 1999. – 365 p. – (Wiley series in probability and statistics).
11. *Voskoboynikov Yu.E., Gochakov A.V.* Estimation of optimal threshold values in algorithms of wavelet filtration of images // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2011. – Vol. 47, N 2. – P. 105–113.
12. *Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В., Колкер А.Б.* Фильтрация сигналов и изображений: Фурье и вейвлет алгоритмы: монография. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. – 188 с.

Воскобойников Юрий Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (СибСТРИН), профессор кафедры автоматки Новосибирского государственного технического университета. Автор 18 учебных пособий и более 290 научных работ по методам и алгоритмам решения некорректных задач интерпретации экспериментальных данных, вычислительной томографии, фильтрации сигналов и изображений, в том числе шести монографий по решению некорректно поставленных задач и задач фильтрации сигналов и изображений. E-mail: voscob@mail.ru

Крысов Данила Алексеевич, аспирант кафедры автоматике Новосибирского государственного технического университета. E-mail: Tomahawk.RUS@gmail.com

Choose of the best one-parameter threshold function to the wavelet filtering algorithms*

Yu.E. Voskoboinikov¹, D.A. Krysov²

¹ Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, doctor of Physics and Mathematics Sciences, professor. E-mail: voskoboynikov@corp.nstu.ru, voscob@mail.ru

² Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, PhD. student. E-mail: Tomahawk.RUS@gmail.com

By filtering noisy signals and images the wavelet filtering algorithms are often used. They are based by wavelet analysis of a filtering signal or image to the basis choosing wavelet functions. The filtration has three stages:

- to calculate direct discrete wavelet transformation (the coefficients of a noisy signal are founded).
- to work with the “noisy” coefficients (the estimations of the “clear” signal’s coefficients are founded).
- to calculate inverse discrete wavelet transformation using the estimations of the “clear” signal’s coefficients (the filtering signal are founded.)

The complex of these three processing steps is called the *wavelet filtering*.

Generally the quality of the filtering is turned on choosing algorithm by second step of the filtering. Most algorithms are threshold. To these algorithms the coefficient, which is lesser then some absolute threshold, is set to zero. Otherwise the coefficient is got the transformation (of-ten not linear). The transformation is sets by use threshold function. Generally the one-parameter threshold functions are used to design the wavelet filtering algorithms. Several algorithms are offered in the books. However, there are no complexes researches by influence the type of the threshold function to the wavelet filtering estimate are been. This fact obstructs the use of the threshold functions in practice.

In this paper the original research to influence four one-parameter threshold function to filtering precision are presented. The signals and the images are investigated. The different noise levels are applied. The optimal coefficient of the one-parameter threshold functions is offered. This coefficient helps to compare different threshold functions and to found the best of them. The practical recommendations to the using the best (optimal) threshold functions are given.

Keywords: wavelet representation of signals, wavelet representation of images, threshold algorithms of the wavelet filtering, threshold functions, one-parameter threshold functions, minimum error of threshold wavelet filtering algorithms, optimal coefficient of the one-parameter threshold functions, the best threshold function

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-3-71-82

* Received 06 June 2016.

REFERENCES

1. D'yakovon V.P. *Veivlety. Ot teorii k praktike* [Wavelets. From theory to practice]. Moscow, Solon-R Publ., 2002. 448 p.
2. Smolentsev N.K. *Osnovy teorii veivletov. Veivlety v MatLAB* [Basics of wavelet theory. Wavelets in MatLAB]. Moscow, DMK Publ., 2005. 304 p.
3. Astaf'eva N.M. *Veivlet-preobrazovaniya: osnovnye svoistva i primery primeneniya* [Wavelet transformations. Basic properties and examples]. Preprint no. 1891. Space Research Institute. Moscow, 1994. 56 p.
4. Vorob'ev V.I., Gribunin V.G. *Teoriya i praktika veivlet-preobrazovaniya* [Theory and practice of wavelet transformation]. St. Petersburg, VUS Publ., 1999. 189 p.
5. Mallat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989, vol. 315, pp. 69–87.
6. Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, vol. 11, pp. 674–693.
7. Voskoboinikov Yu.E. *Veivlet-fil'tratsiya signalov i izobrazhenii: (s primerami v MathCAD)* [Wavelet filtering of signals and images: (with examples in MathCAD)]. Novosibirsk, NGASU (Sibstrin) Publ., 2015. 188 p.
8. Voskoboinikov Yu.E., Gochakov A.V. Otsenivanie optimal'nykh porogovykh velichin v algoritmakh veivlet-fil'tratsii izobrazhenii [Estimation of optimal threshold values in algorithms of wavelet filtration of images]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2011, vol. 47, no. 2, pp. 3–14. (In Russian)
9. Gao H.-Y. Wavelet shrinkage denoising the non-negative garrote. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1998, vol. 7, no. 4, pp. 469–488.
10. Vidakovic B. *Statistical modeling by wavelets. Wiley series in probability and statistics*. New York, John Wiley & Sons, 1999. 365 p.
11. Voskoboinikov Yu.E., Gochakov A.V. Estimation of optimal threshold values in algorithms of wavelet filtration of images. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2011, vol. 47, no. 2, pp. 105–113. Translated from *Avtometriya*, 2011, vol. 47, no. 2, pp. 3–14.
12. Voskoboinikov Yu.E., Gochakov A.V., Kolker A.B. *Fil'tratsiya signalov i izobrazhenii: Fur'e i veivlet algoritmy* [Filtering signals and images: Fourier and wavelet algorithms]. NGASU (Sibstrin) Publ., 2010. 188 p.