СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2016. – № 3(85).** –107–114

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УСТРОЙСТВ

УДК 550.837;550.37.382

О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕМЫ О НЕКОТОРЫХ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ*

В.В. АКСЕНОВ

630090, РФ, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, профессор, доктор физико-математических наук. E-mail: Aksenov@omzg.sscc.ru

В статье решается проблема о пределах применимости теоремы о некоторых соленоидальных векторных полях в шаре и вне его. Сформулирована и доказана теорема об источниках тороидального векторного поля (электромагнитного поля электрических токов).

Ключевые слова: векторные поля, тороидальные и полоидальные векторные поля

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-3-107-114

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] и монографии [2] опубликовано доказательство теоремы о некоторых соленоидальных векторных полях следующего содержания.

Теорема 1. *Соленоидальное векторное поле* H *в сферической области* V (*в шаре с поверхностью* S *и радиусом* R) *однозначно восстанавливается выражением*

$$H = H_1 + H_2 = \nabla \times (Qr) + \nabla \times \nabla (Qr), \qquad (1)$$

если известна нормальная составляющая $H_N(r)$ *на* S, *а функция* $Q(r,\ \theta,\ \varphi) \in C^{\infty}$, *среднее которой* $\langle \mathrm{Q} \rangle = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} Q \sin\theta d\theta d\phi = 0$ *на* S *и* $H,\ H_1,\ H_2 \neq 0,\ \nabla \times H_1 = H_2$ *всюду.*

---

* Статья получена 30 мая 2016 г.

В монографии [2] обозначено: $\mathbf{H_1} = \mathbf{H_T}$ и $\mathbf{H_2} = \mathbf{H_P}$, $\mathbf{H_T}$ – несиловое тороидальное гидромагнитное поле, $\mathbf{H_P}$ – силовое полоидальное гидромагнитное поле [8].

Исходные посылки к формулировке теоремы состоят в следующем. Соленоидальное векторное поле по определению $\nabla \cdot \mathrm{H} = 0$ можно восстановить произвольным векторным полем A:

$$\mathrm{H} = \nabla \times \mathrm{A}, \tag{2}$$

так как $\nabla \cdot \nabla \times \mathrm{A} \equiv 0$ из-за образования оператором $\nabla \cdot \nabla \times$ взаимоисключающих слагаемых при любой функции **A**.

Это обстоятельство позволяет ввести тороидальное ортогональное разложение векторного поля **A** следующим образом [1, 9]:

$$A = (Qr) + \nabla \times (Qr), \tag{3}$$

не накладывая ни на **A**, ни на **Q** каких-либо дополнительных условий, кроме существования у них бесконечного числа производных $A,\ Q \in C^{\infty}$. При этом условие $\nabla \times H_1 = H_2$ теоремы 1 возникает и выполняется автоматически $\nabla \times H_1 = \nabla \times \nabla \times H_1 = \nabla \times \nabla \times (Qr) \equiv H_2$. Однако этим условием задаются классы векторных полей H_1, H_2, которые при этом подчиняются разложению (1). Физически эти классы функций отвечают гидромагнитным полям, наблюдаемым в космической электродинамике [8].

Естественно, что существуют и другие векторные поля, не подчиняющиеся условиям $H,\ H_1,\ H_2 \neq 0$ и $\nabla \times H_1 = H_2$ и не подпадающие под действие разложения (1). Физически это электромагнитные поля в технической электродинамике, в которой отсутствуют несиловые магнитные поля $\mathbf{H_T}$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Разложение (1), согласно [2], позволяет ввести тороидальные H_{T} и полоидальные H_P и упомянутые выше магнитные поля следующим образом:

$$H_1 = H_{\mathrm{T}} + \nabla \times (Qr),\ \ H_2 = H_P = \nabla \times \nabla \times (Qr)\,, \tag{4}$$

а также найти для них формулы через функции **Q** и **A** в сферических координатах:

$$H_{P\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,(Qr) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rA_{\varphi},\ \ H_{P\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(Qr) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rA_{\theta}; \tag{5}$$

$$H_{\mathrm{Pr}} = -\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial(Qr)}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(Qr)}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta A_\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\theta\right);$$

$$H_{T\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(Qr) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r,\ \ H_{T\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(Qr) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}A_r.$$

Разлагая произвольную функцию Q по сферическим гармоникам

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Psi(r)A_n^m P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{6}$$

где A_n^m – комплексные постоянные, а $\Psi(r) = r^n$ для $r < R$ и $\frac{1}{r^{n+1}}$ для $r > R$, и подставляя разложение в формулы (5), получим в каждой точке внутри или вне шара разложение полей по сферическим гармоникам с неизвестными комплексными постоянными A_n^m, которые следует определять, используя данные на поверхности S шара V [10].

Этот алгоритм в принципе повторяет алгоритм К.Ф. Гаусса из [3, 4], полученный им при разл магнитного поля, в частности магнитного поля Земли в атмосфере $(\nabla\times H = 0)$ [5, 10].

Здесь необходимо обратить внимание еще на одно условие, сформулированное в теореме 2 работы [1]. Это условие касается функции **Q**. Вообще говоря, она произвольна в связи с формулами (2) и (3). Однако, в научной литературе известно решение уравнения для векторного потенциала источников внутри шара с условием потенциальности поля вне его. Это достигается при условии $\nabla\cdot A = 0$ и $A_r = 0$. В теореме 2 работы [1] доказано, что условие $\nabla\cdot A = 0$ в выражении (3) достигается при

$$Q(r,\ \theta,\ \varphi) = Q(\theta,\ \varphi)/r^3 \tag{7}$$

и калибровкой Кулона без предварительного обнуления компоненты A_r (формула 17 в [1]). Условием (7) задается класс функций Q, обеспечивающих разложение (1). Условие (7) повторяет условие убывания магнитного поля как физического объекта по закону $1/r^3$. Поэтому условия

$$H,\ H^1,\ H^2,\ Q \in C^\infty,\ \nabla \times H^1 = H^2,\ \langle Q \rangle = 0,\ Q = Q/r^3,\ H_{2N}\ \mid \tilde{A}\ \neq 0, \quad (8)$$

обеспечивают *математические пределы* применимости теоремы 1 из [1].

Физические пределы применимости теоремы 1 как в технической электродинамике, так и в космических магнитных полях задаются следующей теоремой.

Теорема 2. *Источником тороидального магнитного поля являются сферические (тороидальные) компоненты полного электрического тока, если* $j \neq 0$.

Действительно. Спроектируем уравнение для полного электрического тока [7]

$$j = \Delta A = (\nabla\nabla \cdot A - \nabla \times \nabla \times A) \quad (9)$$

на оси сферической системы координат, закрепленной в центре сферической области, и выпишем только тороидальные компоненты полного тока:

$$-j_\theta = \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{2\partial A_\theta}{r\partial r} + \frac{1}{r^2\ \sin^2\theta}\ \frac{\partial^2\ A_\theta}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta^2} - \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\ \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} -$$

$$-\frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} - 2\ \frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{2\partial A_r}{r^2\partial\theta};$$

$$-j_\varphi = \frac{1}{r\ \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 rA_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} -$$

$$-\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta A_\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 rA_\varphi}{\partial\theta\partial\varphi} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}. \quad (10)$$

Если учесть формулы (5), то можно выразить сферические компоненты векторного потенциала через скалярную функцию Q следующим образом:

$$A_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\varphi};\ A_\theta = -\frac{\partial Q}{\partial\theta};\ A_r = rQ.$$

Компоненты тороидального поля по определению имеют вид

$$H_{T\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\varphi};\ H_{T\varphi} = -\frac{\partial Q}{\partial\theta};\ H_{Tr} = 0\ . \tag{11}$$

Анализ формулы (10) показывает, что проекции уравнения для полного тока на оси сферической системы координат, закрепленной в центре области V, имеют среди слагаемых следующие выражения:

$$\frac{2\partial A_r}{\theta\partial\varphi} = \frac{2}{r\ \sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\varphi} = \frac{2}{r}H_{T\theta};\ \ \frac{2\partial A_r}{r^2\partial\theta} = \frac{2}{r}\frac{\partial Q}{\partial\theta} = -\frac{2}{r}\ H_{T\varphi}\ . \tag{12}$$

Выражения (12) как раз и есть удвоенные компоненты тороидального магнитного поля, отнесенные к расстоянию *r*, что дает им размерность плотности тока. Из формул (10)–(12) вытекает чрезвычайно важный вывод о том, что тороидальные компоненты плотности полного тока j_θ и j_φ порождают не только полоидальное магнитное поле, но, что наиболее важно, также и компоненты тороидального магнитного поля. То же самое имеет место и в переменных электромагнитных полях. Там компоненты полного тока имеют вид

$$\Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\ \cos\theta}{r^2\ \sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \ae^2 A_\theta = j_\theta;$$

$$\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \frac{2\ \cos\theta}{r^2\ \sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \ae^2 A_\theta = j_\theta; \tag{13}$$

$$\Delta A_\theta - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}A_\theta - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \ae^2 A_r = j_r\,,$$

$$\bar{\ae}^2 = \imath\omega\mu\sigma\,.$$

Здесь скалярный сферический оператор Лапласа Δ должен быть применен к каждой из сферических компонент векторного потенциала. Уравнения (13) показывают, что и в переменном электромагнитном поле тороидальные компоненты полного тока содержат те же слагаемые, что и в (12), возбуждающие тороидальные компоненты магнитного поля согласно формулам (12).

Теорема доказана.

Пределы применимости теоремы 1 в физически реальных магнитных полях включают в себя тороидальные всюду не потенциальные магнитные поля источников в виде тороидальных электрических токов и полоидальные магнитные поля, создаваемые этими же тороидальными токами [6].

Такие поля и такие токи существуют в природе, и найдены они в данных двух МГГ 1933 и 1957–1958 гг. и в данных всемирной магнитной съемки 1964–1965 гг. [7]. Поэтому теорема 1 доказана не только аналитически [1, 2], но и проверена экспериментально в прикладном геомагнетизме, подробно разработанном в работах [1, 2, 6, 7].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Любые другие магнитные поля должны удовлетворять условиям (8) и разложению (1) и только в этом случае будут подпадать под действие теоремы 1.

При этом уравнения Максвелла электродинамикой, возникающей в связи с (1–5) для полей $\mathbf{H_T}$ и $\mathbf{H_P}$, обобщаются до вида (22) из [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аксенов В.В.* О некоторых соленоидальных векторных полях в сферических областях // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 7. – С. 1056–1059.

2. *Аксенов В.В.* Введение в геомагнетизм. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2012. – 132 с.

3. *Gauss K.F.* Allgemaine theorie des erdmagnetismus // Gauss K.F. Werke. – Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1877. – Bd. 5. – P. 119–193.

4. *Gauss K.F.* Allgemeine lehrsätze in beziehung die im verkehrten verhältnisse des quadrats der entfernung wirkenden anziehungs – und abstossungs-kräfte // Gauss K.F. Werke. – Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1877. – Bd. 5. – P. 195–242.

5. *Vleuten A. van*. Over de dagelijksche variatie van het aardmagnetisme. Proefschrift / Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut. – Utrecht, 1917. – P. 25–30.

6. *Аксенов В.В.* Моделирование тороидальных и полоидальных электромагнитных полей // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 5. – С. 3–24.

7. *Аксенов В.В.* Электромагнитное поле Земли. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2010. – 269 с.

8. *Паркер Е.Н.* Космические магнитные поля, их образование и проявления: в 2 ч. – М.: Мир, 1982. – 2 ч.

9. *Аксенов В.В.* Тороидальное разложение векторного потенциала магнитного поля и его приложения // Вестник Московского университета. Серия 3, Физика. Астрономия. – 2015. – № 6. – С. 127–133.

10. *Аксенов В.В.* Моделирование магнитного поля источников, находящихся в шаре и вне его // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 8. – С. 111–126.

11. *Аксенов В.В.* Несиловые и силовые электромагнитные поля // Известия вузов. Физика. – 2016. – Т. 59, № 3. – С. 3–10.

Аксенов Валентин Васильевич доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Основные направления научных исследований: математика – дифференциальные уравнения, физика – техническая и космическая электродинамика, геофизика – прикладной геомагнетизм. E-mail: kurbon_111@mail.ru

On constraints of applicability of the theorem of solenoidal Vector fields*

V.V. Aksenov

Institute of Computational Mathematics and Mathematics Geophysics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 6 Lavrentev avenue, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, Gl.n.s.E-mail: Aksenov@omzg.sscc.ru

In this paper we solve the problem of applicability constraints of the theorem of solenoidal vector fields inside the sphere and outside it. The theorem of the Sources of the toroidal vector field, i.e. the electromagnetic field of electric currents, has been proved and formulated.

Keywords: vector field, toroidal and poloidal vector field

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-3-107-114

REFERENCES

1. Aksenov V.V. O nekotorykh solenoidal'nykh vektornykh polyakh v sfericheskikh oblastyakh [On some solenoidal vector fields in spherical fields]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 7, pp. 1056–1059. (In Russian)

Received 30 May 2016.

2. Aksenov V.V. *Vvedenie v geomagnetism* [Introduction to geomagnetism]. Novosibirsk, ICMMG SB RAS Publ., 2012. 132 p.

3. Gauss K.F. Allgemaine theorie des erdmagnetismus. Gauss K.F. *Werke*. Göttingen, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1877, bd. 5, pp. 119–193.

4. Gauss K.F. Allgemeine lehrsätze in beziehung die im verkehrten verhältnisse des quadrats der entfernung wirkenden anziehungs – und abstossungs-kräfte. Gauss K.F. *Werke*. Göttingen, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1877, bd. 5, pp. 195–242.

5. Vleuten A. van. *Over de dagelijksche variatie van het aardmagnetisme*. Proefschrift. Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut. Utrecht, 1917, pp. 25–30.

6. Aksenov V.V. Modelirovanie toroidal'nykh i poloidal'nykh elektromagnitnykh polei [Simulation of toroidal and poloidal electromagnetic fields]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 5, pp. 3–24. (In Russian)

7. Aksenov V.V. *Elektromagnitnoe pole Zemli* [Electromagnetic field of the Earth]. Novosibirsk, ICMMG SB RAS Publ., 2010. 269 p.

8. Parker E.N. *Cosmical Magnetic Fields*. Oxford, Clarendon Press, 1979 (Russ. ed.: Parker E.N. *Kosmicheskie magnitnye polya, ikh obrazovanie i proyavleniya*: v 2 ch. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1982).

9. Aksenov V.V. Toroidal'noe razlozhenie vektornogo potentsiala magnitnogo polya i ego prilozheniya [The Toroidal decomposition of the vector potential of the magnetic field and its applications]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 3, Fizika. Astronomiya – Moscow University Physics Bulletin*, 2015, vol. 6, pp. 127–133. (In Russian)

10. Aksenov V.V. Modelirovanie magnitnogo polya istochnikov, nakhodyashchikhsya v share i vne ego [Simulation of magnetic field sources located in the ball and off it]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2015, vol. 27, no. 8, pp. 111–126. (In Russian)

11. Aksenov V.V. Nesilovye i silovye elektromagnitnye polya [Non-forceful and forceful electromagnetic fields]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika – Russian Physics Journal*, 2016, vol. 59, no. 3, pp. 3–10. (In Russian)