

УДК: 681.511.26

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ: ПЕРЕВЕРНУТЫЙ МАЯТНИК*

А.А. ВОЕВОДА¹, В.Ю. ФИЛЮШОВ²

¹ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: ucit@ucit.ru

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

В настоящее время актуальны методы синтеза нелинейных систем, использующие как можно более точную исходную модель. Сложность синтеза нелинейных систем заключается в большом их разнообразии, что не дает возможность применения какого-либо определенного метода синтеза для обширного класса объектов. Для облегчения задачи синтеза нелинейную систему представляют в виде линейной модели, полученной разложением в ряд Тэйлора в окрестности точки линеаризации. Но такое представление не описывает всех свойств работы исходного объекта. Для того чтобы применять линейные методы синтеза для нелинейных объектов, целесообразно использовать линеаризацию обратной связью, которая приводит поведение исходного объекта к линейному виду. Возможность составления таких нелинейных обратных связей требует доступности всего вектора состояния объекта, в некоторых случаях и его производной. Для нахождения вектора состояния в данной работе будем использовать наблюдатель состояния полного порядка.

Ключевые слова: нелинейное управление, линеаризация обратной связью, регулятор, наблюдатель состояния, синтез

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-4-62-71

ВВЕДЕНИЕ

Различные варианты применения *линеаризации обратной связью* [1] были рассмотрены в работах [2–10]. В отличие от разложения в ряд Тэйлора [11], линеаризация обратной связью позволяет найти эквивалентную линейную модель. В указанных работах изложены методы структурной линеаризации, линеаризация с применением алгебры Ли, синтез систем на основе приме-

* Статья получена 05 июля 2016 г.

ния нелинейных обратных связей с идентификацией вектора состояния наблюдателем или дифференцирующими фильтрами. В приведенных работах рассмотрены различные модели объектов, в том числе модель перевернутого маятника на тележке.

В работе [12] использована модель перевернутого маятника следующего вида:

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)g \sin(\theta) - ml \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + u \cos(\theta)}{(M + m \sin^2(\theta))l}. \quad (1)$$

Координата тележки s не рассматривалась, так как ставилась задача стабилизации самого маятника по углу отклонения θ . Построен линейный модальный регулятор для линеаризованной модели, полученной разложением в ряд Тэйлора в окрестности нулевого угла отклонения маятника от вертикали. Приведение к такому линейному виду осуществлено путем построения линеаризующей добавки при помощи нелинейных обратных связей. Для построения такой линеаризующей добавки использовалась вторая производная угла отклонения, что нежелательно.

В данной работе мы будем строить линеаризующую добавку, но при помощи визуального, структурного подхода, который позволяет наглядно изложить идею линеаризации обратной связью. Удалось составить управление без использования второй производной, что позволяет в полной мере воспользоваться наблюдателем состояния полного порядка.

1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Уравнение (1) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение, выраженное через старшую производную. Управление в него входит аддитивно, что позволяет произвести линеаризацию, не применяя преобразование координат.

Структурная схема объекта (1) представлена на рис. 1.

На рис. 2 приведена структурная схема, эквивалентная рис. 1, где

$$a_1(\theta) = (M + m)g \sin(\theta) - ml \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2,$$

$$a_2(\theta) = (M + m \sin^2(\theta))l.$$

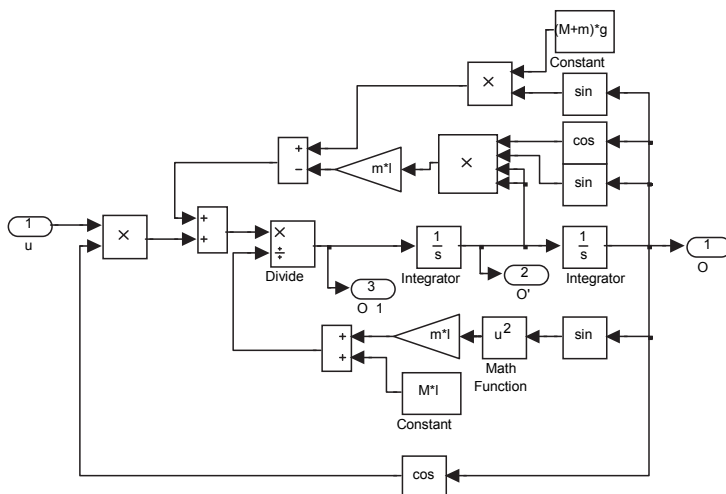


Рис. 1. Структурная схема объекта «перевернутый маятник»

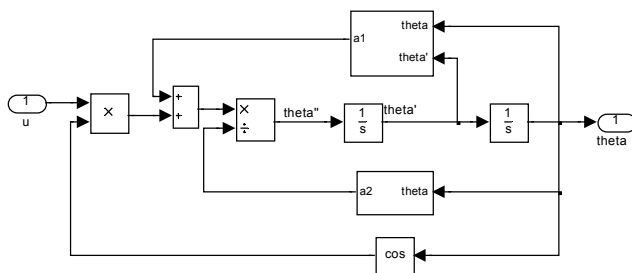


Рис. 2. Эквивалентная структурная схема объекта

В итоге получим

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1(\theta)}{a_2(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{a_2(\theta)} u. \quad (2)$$

Далее составим управление такое, чтобы компенсировать нелинейности и привести исходную модель к виду

$$\ddot{\theta} = u_r \quad (3)$$

или в виде структурной схемы, показанной на рис. 3.



Рис. 3. Желаемая структурная схема после преобразования

Такое преобразование получено на основе следующих соображений. Необходимо получить уравнение вида (3) из уравнения (2), приравняв их правые части:

$$u_r = \frac{a_1(\theta)}{a_2(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{a_2(\theta)} u,$$

или

$$u = \frac{u_r a_2(\theta) - a_1(\theta)}{\cos \theta}. \quad (4)$$

Как видим, такое управление не имеет решения при угле $\pi/2$, так как происходит деление на ноль и управляющий сигнал принимает бесконечные значения. Но заметим, что движение маятника при углах, приближающихся к его горизонтальному положению, требует все больших усилий для придания ему вертикального положения. В нашем случае мы не будем рассматривать стабилизацию угла из горизонтального положения или близкого к нему. Ниже представлена структурная схема полученной системы «объект–линеаризирующая добавка».

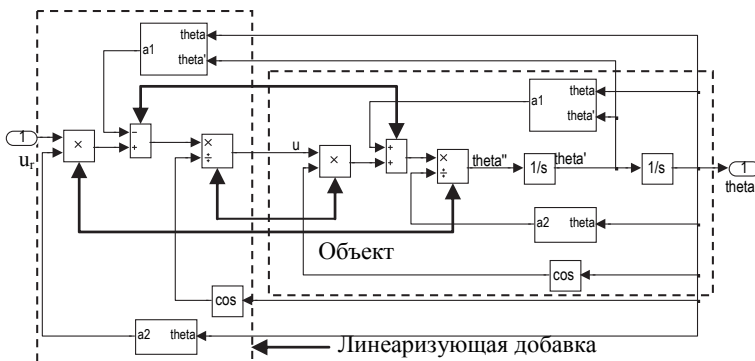


Рис. 4. Структурная схема объекта (2) с управлением (4)

На рис. 4 жирными линиями показаны компоненты, компенсирующие друг друга, что в итоге приводит исходное уравнение объекта (2) к эквивалентному виду (3). Заметим, что в отличие от системы, полученной в работе [12], мы не использовали значение второй производной.

Синтез регулятора будем производить аналогично [12]. Для вычисления значения производной угла будем использовать наблюдатель состояния полного порядка, который описывается уравнением

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x}).$$

Матрица коэффициентов L , так же как и в [12], задает корни характеристического полинома, равные $s_{1,2} = -20$, обеспечивающие удовлетворительную скорость убывания ошибки.

Управление запишем в следующем виде:

$$u_r = -K\tilde{x} + v.$$

Матрица коэффициентов K рассчитана так, что замкнутая управлением система имела корни характеристического полинома, как и в работе [12], равные $s_{1,2} = -4$.

Ниже приведены графики переходных процессов синтезированной динамической системы (ДС) и ДС из работы [11] при следующих параметрах объекта: $M = 30$, $m = 70$, $l = 1$, $g = 10$.

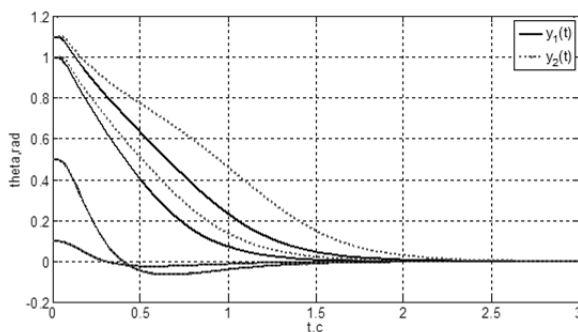


Рис. 5. Графики переходных процессов синтезированной системы $y_1(t)$ и системы из работы [12], $y_2(t)$

Как видно из рис. 5, при сравнительно небольших углах отклонения графики переходных процессов совпадают, но при увеличении начального угла система, синтезированная в данной статье, работает лучше. Ниже представлены структурные схемы системы, полученной в работе [11], и системы, полученной в данной работе.

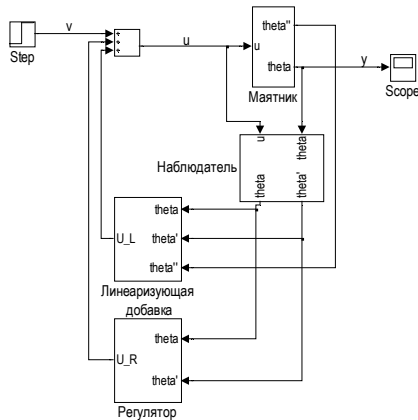


Рис. 6. Структурная схема из работы [11]

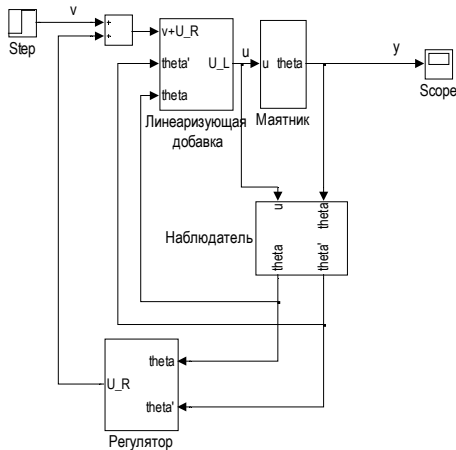


Рис. 7. Структурная схема, синтезированная в данной работе

Из структурных схем полученных систем видно, что они принципиально отличаются. В первом случае линеаризирующая добавка и регулятор имеют аддитивную связь, и для линеаризации используется вторая производная выхода. Во втором случае регулятор и линеаризирующая добавка не имеют линейной связи, линеаризация выполнялась без вычисления второй производной выхода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показан способ формирования управления на основе линеаризации обратной связью. Полученная эквивалентная линейная схема (3) позволяет применять линейные методы синтеза. В нашем случае это был модальный регулятор с вычислением компонент вектора состояния наблюдателем полного порядка. В отличие от системы, синтезированной в работе [12], вторая производная выхода не была использована и структура полученной системы имела иной вид. Управляющее воздействие имеет нелинейную связь с линеаризирующей добавкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
2. *Филюшов В.Ю.* Линеаризация обратной связью: эвристический подход // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 37–46.
3. *Воевода А.А., Филюшов В.Ю.* Линеаризация обратной связью // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 68–76.
4. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Синтез нелинейного регулятора для динамического нелинейного объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 3–12.
5. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Пример модального синтеза для нелинейного объекта с использованием нелинейных обратных связей // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 2 (72). – С. 3–9.
6. *Воевода А.А., Иванов А.Е.* Использование дифференцирующего фильтра при синтезе нелинейного регулятора // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 1 (71). – С. 13–21.
7. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01: защищена 22.10.2013. – Новосибирск, 2013. – 173 с.

8. *Филишов В.Ю.* Применение дифференцирующего звена для управления перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 69–78.
9. *Вороной В.В.* Полиномиальная методика расчета нелинейных регуляторов для нелинейных систем // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 3 (52). – С. 185–188.
10. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* О модели перевернутого маятника // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 1 (67). – С. 3–14.
11. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
12. *Воевода А.А., Филишов В.Ю.* Линеаризация обратной связью: перевернутый маятник // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 49–60.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований: теория автоматического управления, сети Петри. Имеет более 200 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru

Филишов Владислав Юрьевич, аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – теория автоматического управления. Имеет 4 публикации. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Feedback linearization: inverted pendulum^{*}

A.A. Voevoda¹, V.Yu. Filiushov²

¹Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospect, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), professor. E-mail: ucit@ucit.ru

²Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, undergraduate of department automatics. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

Currently, the relevance of methods of synthesis of nonlinear systems using more accurate initial model are raised. The complexity of synthesizing nonlinear systems lies in the large variability that does not allow applying any particular method of synthesis for a broad class of objects. To facilitate the task of synthesis of nonlinear system represented by the linear model obtained by the decomposition in a Taylor series in a neighborhood of the point of linearization. But this representation does not describe all of the behavior properties of the source ob-

^{*} Received 05 July 2016.

ject. In order to apply the linear methods of synthesis for nonlinear objects, it is better to apply the feedback linearization, which leads the behavior of the source object to the line of sight. The possibility of such nonlinear feedback requires the fame of the whole state vector of the object in some cases and its derivative. For finding the state vector, we use the observer of a condition of a full order.

Keywords: nonlinear control, feedback linearization, control, state observer, synthesis

DOI: 10.17212/2307-6879-2016-4-62-71

REFERENCES

1. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2 [Automatic control theory. Vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.
2. Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: evristicheskii podkhod [Feedback linearization: heuristic approach]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (83), pp. 37–46.
3. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu [Feedback linearization]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 68–76.
4. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Sintez nelineinogo regul'yatora dlya dinamicheskogo nelineinogo ob'ekta [The nonlinear controller synthesis for a dynamic nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 3–12.
5. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Primer modal'nogo sinteza dlya nelineinogo ob'ekta s ispol'zovaniem nelineinykh obratnykh svyazei [Modal synthesis example for nonlinear object using nonlinear feed-backs]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (72), pp. 3–9.
6. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Ispol'zovanie differentsiruyushchego fil'tra pri sinteze nelineinogo regul'yatora [Using differential filter for nonlinear control system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 1 (71), pp. 13–21.
7. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regul'yatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [Design of multi channel reduced degree controllers. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.
8. Filiushov V.Yu. *Primenenie differentsiruyushchego zvena dlya upravleniya perevernutym mayatnikom* [Applying of derivative element for control of inverted

pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 69–78.

9. Voronoy V.V. Polinomial'naya metodika rascheta nelineinykh regulyatorov dlya nelineinykh sistem [The polynomial calculation procedure of nonlinear regulators for nonlinear system]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 3 (52), pp. 185–188.

10. Voevoda A.A., Shoba E.V. O modeli perevernutogo mayatnika [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (67), pp. 3–14.

11. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [Automatic control theory. Vol. 1. Linear systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p.

12. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: perevernutyi mayatnik [Feedback linearization: inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 49–60.