

УДК 519.24

## ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ\*

Г.В. ТРОШИНА

*630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru*

В данной работе приводятся результаты моделирования динамического объекта второго порядка с двумя неизвестными параметрами в среде Simulink при наличии гауссовых шумов в моделях динамики и измерителя. Моделирование динамических параметров с использованием рекуррентной схемы метода наименьших квадратов организовано в виде нескольких блоков. Многослойная структура, где блоки каждого уровня отражают основные операции, входящие в алгоритм оценивания неизвестных параметров динамической системы, позволяет компактно отразить весь процесс идентификации. Моделирование динамического объекта в среде Simulink выполнено для непрерывного и дискретного случая. В среде MatLab выполнены вычисления, связанные с преобразованием динамической системы в пространстве состояний. Порядок проведения преобразований входных и выходных данных формируется в отдельном блоке. В рамках активной идентификации моделируется входной сигнал типа меандра. Результаты оценивания неизвестных параметров динамического объекта выводятся на индикаторы, и выполняется построение графиков. Для вычисления коэффициента усиления, используемого в рекуррентной схеме метода наименьших квадратов, организован специальный блок. Отметим, что измерение, содержащее информацию более важную по сравнению с уже известной информацией, подразумевает большее значение коэффициента усиления. При этом измерения, выполненные с высоким значением шума, несут меньшее количество полезной информации. Оценка дисперсии ошибки оценивания с учетом изменений динамической системы вычисляется в одном из блоков нижнего уровня. При использовании рекуррентной идентификации следует, что свойства динамической системы изменяются во времени, и в алгоритмах необходимо учитывать все эти изменения.

**Ключевые слова:** математическая модель, активная идентификация, моделирование, рекуррентный метод наименьших квадратов, оценивание параметров, динамический объект, входной сигнал, белый шум

DOI: 10.17212/2307-6879-2017-1-53-63

---

\* Статья получена 24 октября 2016 г.

## ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–22] представлены различные методы, которые широко применяются для идентификации динамических систем при наличии шумов в моделях динамики и наблюдения. В данной работе описаны результаты моделирования в среде Simulink рекуррентной процедуры метода наименьших квадратов, который используется при оценивании неизвестных параметров динамического объекта.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При исследовании динамических объектов при наличии помех динамики и измерителя довольно часто рассматривается математическая модель, представленная ниже [7–14]:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Psi u_k + w_k,$$

$$y_{k+1} = H x_{k+1} + v_{k+1},$$

где  $x_{k+1}$  – вектор состояния,  $u_k$  – вектор управления,  $w_k$  – вектор возмущения,  $y_{k+1}$  – вектор наблюдения,  $v_{k+1}$  – вектор ошибки наблюдения,  $\Phi$  – матрица состояния,  $\Psi$  – матрица управления,  $H$  – матрица наблюдения. Моделирование динамического объекта в среде Simulink выполнено для непрерывного и дискретного случая.

При использовании метода наименьших квадратов рассматривается следующая функция квадратичного отклонения [8]:

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^N \left( y_i - x_i^T \theta \right)^2.$$

В этом случае оценку неизвестных параметров можно получить в соответствии с формулой

$$\hat{\theta}_N = \left( X_N^T X_N \right)^{-1} X_N^T Y_N.$$

В данной работе для динамического объекта второго порядка при наличии помех динамики и измерителя выполнено моделирование в среде Simulink

рекуррентной оценки неизвестных параметров  $\hat{\theta}$  согласно нижеприведенным формулам [8]:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1} \left( y_{N+1} - x_{N+1}^T \hat{\theta}_N \right),$$

$$K_{N+1} = \frac{P_N x_{N+1}}{\left( 1 + x_{N+1}^T P_N x_{N+1} \right)},$$

$$P_{N+1} = \left( I - P_N \frac{x_{N+1} x_{N+1}^T}{1 + x_{N+1}^T P_N x_{N+1}} \right) P_N,$$

где  $K_{N+1}$ ,  $P_{N+1}$  вычисляются по результатам  $N+1$  измерений.

## 2. ПРИМЕР

Общая схема вычисления оценок неизвестных параметров динамического объекта в среде Simulink представлена на рис. 1, где показаны следующие блоки: Input\_Blok – блок для генерации входного воздействия в случае активной идентификации; Simulation – блок для моделирования динамического объекта; Estimation – основной блок, касающийся моделирования итерационной схемы для вычисления неизвестных параметров методом наименьших квадратов.

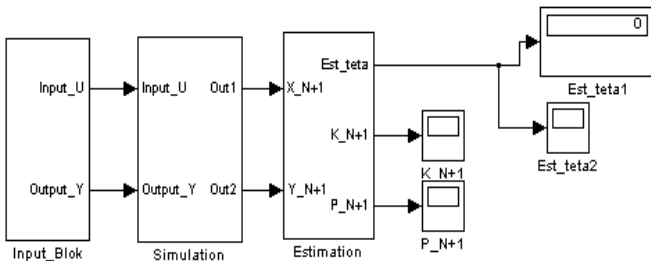


Рис. 1. Общая схема вычисления неизвестных параметров

Порядок формирования блока Estimation довольно подробно приводится в работах [12–13].

В качестве примера рассматривается динамический объект следующего вида:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ \theta_1 & -\theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} w_{k+1}^1 \\ w_{k+1}^2 \end{pmatrix},$$

$$y_{k+1} = (0 \quad 1)x_{k+1} + v_{k+1},$$

где  $x_{k+1}$  – вектор состояния,  $u_k$  – вектор управления,  $w_k$  – вектор возмущения,  $y_{k+1}$  – вектор измерения,  $v_{k+1}$  – вектор ошибки измерения с нулевым математическим ожиданием [11–20].

В блоке Simulation выполнено моделирование следующих выражений для сигналов  $x_i$  и  $y_i$ :

$$\bar{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.5u_k + 0.5y_k - y_{k+1} \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix},$$

$$\bar{y}_{k+1} = y_{k+2} - y_{k+1}.$$

Моделирование выполнено при базовых значениях объекта:  $\theta^1 = 0.5$ ,  $\theta^2 = 0.8$ . Входной сигнал представляет собой меандр с периодом  $T = 20$  и амплитудой, равной единице.

График выходного сигнала объекта при наличии шумов измерений показан на рис. 2.

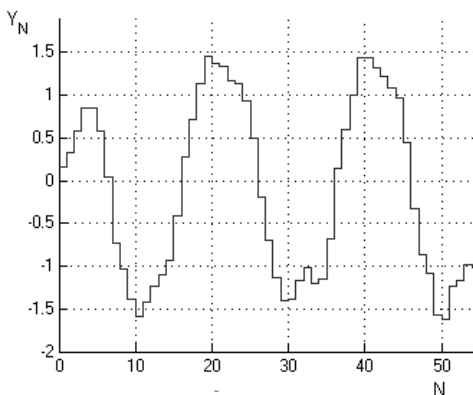


Рис. 2. Выходной сигнал объекта при наличии шумов измерений

Моделирование динамического объекта при наличии гауссовых шумов осуществлялось при  $m = 0$  и  $\sigma^2 = 0.025$  для 120 наблюдений. В этом случае получили следующий результат оценивания:  $\theta^1 = 0.5774$ ,  $\theta^2 = 0.8061$  (рис. 3).

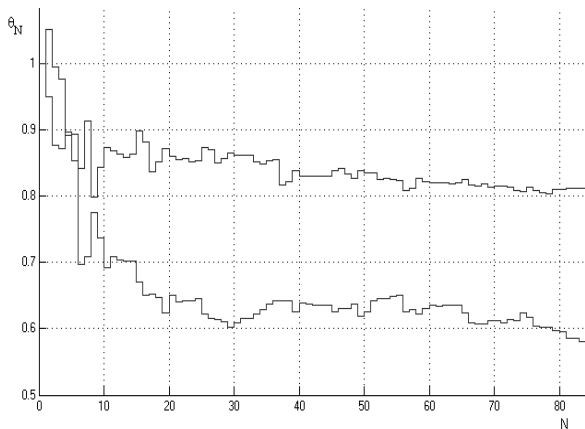


Рис. 3. Оценки параметров при наличии гауссовых шумов

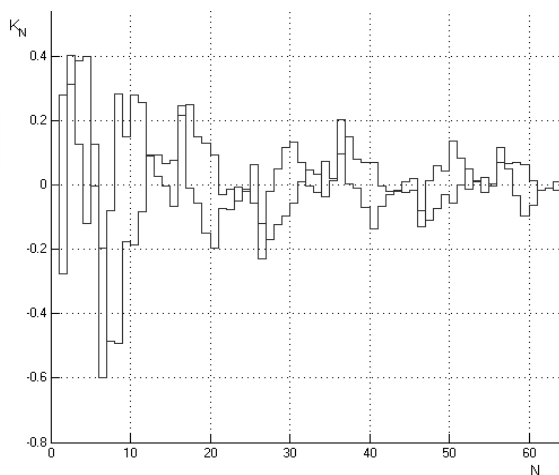


Рис. 4. График сходимости коэффициента усиления  $K_N$

Коэффициент усиления  $K_N$  сходится примерно за 50–60 итераций (рис. 4).

Погрешность, связанная с вычислением оценок параметров, находится примерно в пределах 5...7%. Моделирование, выполненное в среде Simulink, показало, что данный алгоритм хорошо работает при наличии шумов в моделях динамики и наблюдения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлены результаты моделирования рекуррентного алгоритма наименьших квадратов, используемого для оценивания неизвестных параметров динамической системы при наличии гауссовых шумов в моделях динамики и наблюдения. Это позволяет распространить данную методику и на более сложные системы, например, модели типа перевернутого маятника.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 320 с.
2. *Льюнг Л.* Идентификация систем: теория для пользователя / под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
3. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
4. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
5. *Сейдж Э.П., Мелса Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 495 с.
6. *Gupta H.K., Mehra R.K.* Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculation // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. 19, N 7. – P. 774–785.
7. *Mehra R.K.* Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. AC-19, N 6. – P. 753–768.
8. *Mehra R.K.* On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1970. – Vol. AC-15, N 2. – P. 175–184.
9. *Goodwin G.C., Payne R.L.* Dynamic system identification: experiment design and data analysis. – New York: Academic Press, 1977. – 291 p.
10. *Mehra R.K.* Optimal input for linear system identification // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. 19, N 3. – P. 192–200.

11. Трошина Г.В. Активная идентификация линейных динамических дискретных стационарных объектов во временной области: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01 / Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск, 2007. – 171 с.
12. Воевода А.А., Трошина Г.В. Рекуррентный метод оценивания параметров в динамическом объекте // Научный вестник НГТУ. – 2016. – № 4 (65). – С. 7–18.
13. Воевода А.А., Трошина Г.В. Реализация итерационного метода наименьших квадратов для оценивания параметров статических объектов в среде MATLAB // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 1. – С. 28–36.
14. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of linear stationary dynamic object on base of the Fisher information matrix: the steady state // Proceedings of the XII International Conference "Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2014)", Novosibirsk, Russia, 2–4 October 2014. – Novosibirsk, 2014. – P. 745–749. – doi: 10.1109/APEIE.2014.7040785.
15. Воевода А.А., Трошина Г.В. О некоторых методах фильтрации в задаче идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 2 (76). – С. 16–25.
16. Воевода А.А., Трошина Г.В. Об оценке вектора состояния и вектора параметров в задаче идентификации // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 4 (78). – С. 53–68. – doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-53-68.
17. Воевода А.А., Трошина Г.В. Моделирование фильтра Калмана с обновленной последовательностью в среде Simulink // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 2 (80). – С. 7–17. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-2-7-17.
18. Трошина Г.В. Вычислительные аспекты задачи восстановления вектора состояния для модели с неточно заданными параметрами // Сборник научных трудов НГТУ. – 2008. – Вып. 3 (53). – С. 25–34.
19. Трошина Г.В. Об использовании фильтра Калмана при идентификации динамических систем // Сборник научных трудов НГТУ. – 2014. – № 3 (77). – С. 37–52.
20. Трошина Г.В. Моделирование динамических объектов в среде Simulink. Ч. 1 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 3 (81). – С. 55–68. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-3-55-68.
21. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of the inverted pendulum control system // Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2015). – St. Petersburg: LETI Publ., 2015. – Vol. 1. – P. 153–156.
22. The object unknown parameters estimation for the 'inverted pendulum-Cart' system in the steady state / G.V. Troshina, A.A. Voevoda, V.M. Patrín, M.V. Sima-

kina // Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM 2015), Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015. – Novosibirsk, 2015. – P. 186–188.

*Трошина Галина Васильевна*, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – идентификация динамических объектов. Имеет более 60 публикаций. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru

### **The formation of the correlated noises\***

**G.V. Troshina**

*Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, candidate of Technical Sciences, associate professor of the computer engineering department. E-mail: troshina@dean.cs.nstu.ru*

The modeling results of the second order dynamic object with two unknown parameters in the Simulink environment for a case when Gaussian noises are in dynamic model and measurement model are given in this work. The dynamic parameters modeling with use of the least-squares method recurrent scheme is organized in the form of several blocks. The multilayered structure where blocks of each level reflect the main operations for an dynamic parameters estimation algorithm allows to represent the identification process compactly. The dynamic object modeling in the Simulink environment is executed for a continuous case and discrete case. The calculations connected with the dynamic system transformation in the state-space are executed in the MatLab environment. The sequence of carrying out transformations for the input and output data is formed in the separate block. The input signal like a meander is modelled within the active identification method. The estimation results of the dynamic object unknown parameters are brought to indicators and the schedules construction is carried out. The special block is organized for the strengthening coefficient calculation which is used in the least-squares method recurrent scheme. We will note that the measurement containing information which is more important in comparison with already known information means the strengthening coefficient bigger value. At the same time the measurements executed with the noise high value give the useful information smaller quantity. The estimation error variance assessment with the dynamic system changes is calculated in one of the lower level blocks. When using the recurrent identification it is necessary to provide that dynamic system properties change in time and in algorithms it is necessary to consider all these changes.

**Keywords:** mathematical model, active identification, modeling, recurrent least-squares method, parameters estimation, dynamic object, input signal, white noise

DOI: 10.17212/2307-6879-2017-1-53-63

---

\* Received 24 October 2016.



## REFERENCES

1. Åström K.J. *Introduction to stochastic control theory*. New York, London, Academic Press, 1970. 298 p. (Russ. ed.: Ostrem K. *Vvedenie v stokhasticheskuyu teoriyu upravleniya*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1973. 320 p.).
2. Ljung L. *System identification: theory for the user*. New Jersey, Prentice Hall, 1987. 384 p. (Russ. ed.: L'yung L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya*. Translated from English. Moscow, Nauka Publ., 1991. 432 p.).
3. Eykhoff P. *System identification: parameter and state estimation*. London, John Wiley & Sons, 1974. 555 p. (Russ. ed.: Eikkhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya: otsenivanie parametrov i sostoyaniya*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1975. 680 p.).
4. Meditch J.S. *Stochastic optimal linear estimation and control*. New York, McGraw-Hill, 1969. 384 p. (Russ. ed.: Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye lineinye otsenki i upravlenie*. Translated from English. Moscow, Energiya Publ., 1973, 440 p.).
5. Sage A.P., Melse J.L. *Estimation theory with application to communication and control*. New York, McGraw-Hill, 1972. 540 p. (Russ. ed.: Seidzh E.P., Melsa Dzh. *Teoriya otsenivaniya i ee primeneniye v svyazi i upravlenii*. Translated from English. Moscow, Svyaz' Publ., 1976. 495 p.).
6. Gupta H.K., Mehra R.K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, no. 7, pp. 774–785.
7. Mehra R.K. Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. AC-19, no. 6, pp. 753–768.
8. Mehra R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1970, vol. AC-15, no. 2, pp. 175–184.
9. Goodwin G.C., Payne R.L. *Dynamic system identification: experiment design and data analysis*. New York, Academic Press, 1977. 291 p.
10. Mehra R.K. Optimal input for linear system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, no. 3, pp. 192–200.
11. Troshina G.V. *Aktivnaya identifikatsiya lineinykh dinamicheskikh diskretnykh statsionarnykh ob"ektov vo vremennoi oblasti*. Diss. kand. tekhn. nauk [Active identification of linear dynamic discrete stationary objects in a time domain. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2007. 171 p.
12. Voevoda A.A., Troshina G.V. Rekurrentnyi metod otsenivaniya parametrov v dinamicheskom ob"ekte [A recurrent method for parameter estimation in the dynamic object]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (65), pp. 7–18.

13. Voevoda A.A., Troshina G.V. Realizatsiya iteratsionnogo metoda naimen'shikh kvadratov dlya otsenivaniya parametrov staticheskikh ob'ektov v srede MATLAB [The iterative least-squares method for the parameters estimation of static objects in MATLAB]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*, 2017, no. 1, pp. 28–36.
14. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of linear stationary dynamic object on base of the Fisher information matrix: the steady state. *Proceedings of the XII International Conference “Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2014)”*, Novosibirsk, Russia, 2–4 October 2014, pp. 745–749. doi: 10.1109/APEIE.2014.7040785.
15. Voevoda A.A., Troshina G.V. O nekotorykh metodakh fil'tratsii v zadache identifikatsii [About some filtration methods in the identification problem]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 2 (76), pp. 16–25.
16. Voevoda A.A., Troshina G.V. Ob otsenke vektora sostoyaniya i vektora parametrov v zadache identifikatsii [About parameters vector estimation and state vector estimation in identification problem]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (78), pp. 53–68. doi: 10.17212/2307-6879-2014-4-53-68.
17. Voevoda A.A., Troshina G.V. Modelirovanie fil'tra Kalmana s obnovlennoi posledovatel'nost'yu v srede Simulink [The modelling of the Kalman filter with the updated sequence in Simulink environment]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 2 (80), pp. 7–17. doi: 10.17212/2307-6879-2015-2-7-17.
18. Troshina G.V. Vychislitel'nye aspekty zadachi vosstanovleniya vektora sostoyaniya dlya modeli s netochno zadannymi parametrami [Computing aspects of problem of the state vector recovering for models with inexact given parameters]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2008, no. 3 (53), pp. 25–34.
19. Troshina G.V. Ob ispol'zovanii fil'tra Kalmana pri identifikatsii dinamicheskikh sistem [About Kalman filter using for dynamic systems identification]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 3 (77), pp. 37–52.

20. Troshina G.V. Modelirovanie dinamicheskikh ob"ektov v srede Simulink. Ch. 1 [The dynamic objects modelling in Simulink environment. Pt. 1]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 3 (81), pp. 55–68. doi: 10.17212/2307-6879-2015-3-55-68.
21. Voevoda A.A., Troshina G.V., Active identification of the inverted pendulum control system [Aktivnaya identifikaciya sistemy upravleniya perevernutij mayatnik]. *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2015)*. St. Petersburg, LETI Publ., 2015, vol. 1, pp. 153–156.
22. Troshina G.V., Voevoda A.A., Patrin V.M., Simakina M.V. The object unknown parameters estimation for the 'inverted pendulum-Cart' system in the steady state. *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM 2015)*, Altai, Erlagol, 29 June – 3 July 2015, pp. 186–188.