

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 681.513

АВТОНОМНОСТЬ И АСТАТИЗМ В МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ*

А.А. ВОЕВОДА¹, К.М. БОБОБЕКОВ²

¹ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики. E-mail: uscit@uscit.ru

² 630087, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: kurbon_111@mail.ru

Основная задача, поставленная в работе, это обеспечение астатизма и автономности каналов в многоканальных системах. Исследование проводится на примере двухканального объекта второго порядка. Так как чаще описание объекта задано в виде правого полиномиального разложения, описание регулятора задаем в виде левого полиномиального разложения. Это позволяет получить характеристический матричный полином в удобном при синтезе регулятора полиномиальном матричном виде. При обеспечении астатизма, в предположении использования так называемого однопараметрического регулятора, свободный член полинома знаменателя регулятора следует взять равным нулю. При использовании однопараметрического регулятора при требовании автономности каналов задача существенно усложняется, и предлагается переходить к использованию двухпараметрического регулятора. Для обеспечения астатизма и автономности каналов при помощи двухпараметрического регулятора можно взять свободный член полинома «знаменателя» регулятора равным нулю, что соответствует введению интегратора в регулятор. Возможен второй вариант решения задачи – без добавления интегратора в регулятор, при котором также получим свойства астатизма и автономности каналов. Однако данная система теряет свойства автономности и астатизма даже при незначительных изменениях параметров объекта, что нежелательно для систем автоматического управления.

Ключевые слова: объект управления, многоканальные системы, системы автоматического управления, однопараметрический регулятор, двухпараметрический регулятор, автономизации каналов, полиномиальное матричное описание, астатизм

DOI: 10.17212/2307-6879-2017-3-7-31

* Статья получена 04 апреля 2017 г.

ВВЕДЕНИЕ

При синтезе регуляторов в системе автоматического управления (САУ) для многоканальных объектов [1–5] актуальна задача обеспечения астатизма и автономности каналов. Если первая задача – обеспечение астатизма [11] при сохранении показателей переходного процесса – решается относительно несложно, то вторая задача – автономность каналов – решается значительно сложнее. Эти задачи рассматривались, например, в работе [7]. В данной работе, в отличие от [7], для астатизма системы интегратор не «вводится» в объект, а решается эта задача приравниванием нулю матричного коэффициента «знаменателя» регулятора при нулевой степени s . Что касается вопроса астатизма, то в первой части исследования анализируются возможности «классического» регулятора [10–12], расположенного после элемента сравнения перед объектом. Как показано, часто возможности данного регулятора весьма ограничены при попытках автономизации каналов. Во второй части показано, что существенно большими возможностями обладают так называемые двухпараметрические регуляторы (*two-parameter regulator*) [1, с. 270]. Эти регуляторы условно можно изобразить в виде трех блоков: первый блок «обрабатывает» задающее воздействие $v(s)$, второй блок стоит в обратной связи и, третий блок – перед объектом (рис. 1). По аналогии с термином «двухпараметрический регулятор» назовем обычный регулятор «однопараметрическим» регулятором.

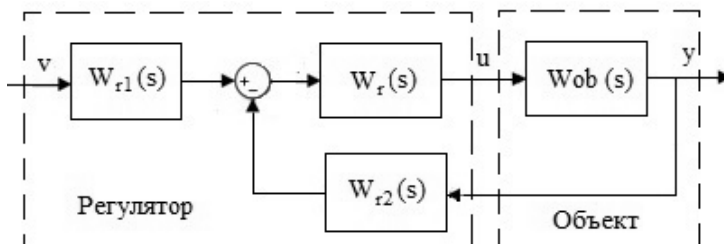


Рис. 1. Структурная схема САУ с двухпараметрическим регулятором

В данной работе будем опираться на исследования [8, 12–14]. Рассуждения, приведенные в данной работе, иллюстрируются на примере двухканального объекта, позаимствованного из работы [8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объект и его моделирование. Для упрощения математических выкладок ниже приводимые рассуждения будут проиллюстрированы на примере двухканальной системы, рассмотренной в [7] и близкой по смыслу к системе, исследованной в [8, 9, 11–16]. Зададим значения параметров двухканального объекта в виде правого полиномиального разложения такие же, как в [7]:

$$D_r(s) = \begin{pmatrix} 4s^2 + 2 & -1 \\ -1 & s^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad N_r(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Уравнение объекта, преобразующего вектор управления $u(s)$ в вектор выходного сигнала $y(s)$, запишется так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N_r(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 4s^2 + 2 & -1 \\ -1 & s^2 + 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{D_r^{-1}(s)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Реализация уравнения объекта (2) в полиномиальном матричном виде приведена на рис. 2. При реализации этой структуры предполагается невырожденность полиномиальной матрицы $D_r(s)$, т. е. полагаем $\det D_r(s) \neq 0$.

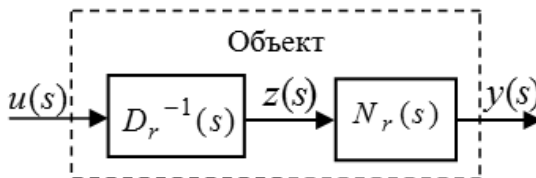


Рис. 2. Структурная схема двухканального объекта для правого полиномиального разложения

Воспользуемся рис. 2 и запишем выходной сигнал первого блока:

$$z(s) = D_r^{-1}(s)u(s), \quad (3)$$

откуда

$$D_r(s)z(s) = u(s). \quad (4)$$

Подставим значение полиномиальной матрицы $D_r(s)$ из (1) в (4):

$$(D_2 s^2 + D_0)z(s) = u(s), \quad (5)$$

откуда найдем $z(s)$:

$$z(s) = D_2^{-1} s^{-2} (-D_0 z(s) + u(s)). \quad (6)$$

Запишем уравнение выхода объекта $y(s)$:

$$y(s) = N_r z(s).$$

В нашем случае $N_r(s) = N_0$, тогда

$$y(s) = N_0 z(s). \quad (7)$$

Реализация объекта в матричном полиномиальном виде в соответствии с уравнениями (6) и (7) приведена на рис. 3, где векторы $u(s)$, $z(s)$ и $y(s)$ – двухмерные.

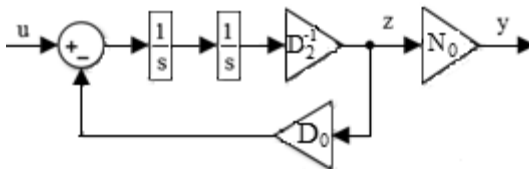


Рис. 3. Моделирование объекта (2) в Simulink

Переходные процессы объекта при подаче на вход вектора управления $u(t) = (1(t) \ 0)^t$ приведены на рис. 4, а при подаче вектора $u(t) = (0 \ 1(t))^t$ – на рис. 5. Как и следовало ожидать, переходные процессы носят колебательный характер, что несложно увидеть из полиномиальной матрицы «знаменателя» объекта $D_r(s)$. Действительно, полюса объекта легко вычислить из $\det D_r(s)$:

$$\det D_r(s) = 4s^4 + 6s^2 + 1,$$

откуда получим две пары комплексно-сопряженных чисел, расположенных на мнимой оси $\{\pm 1, 14i, \pm 0, 437i\}$.

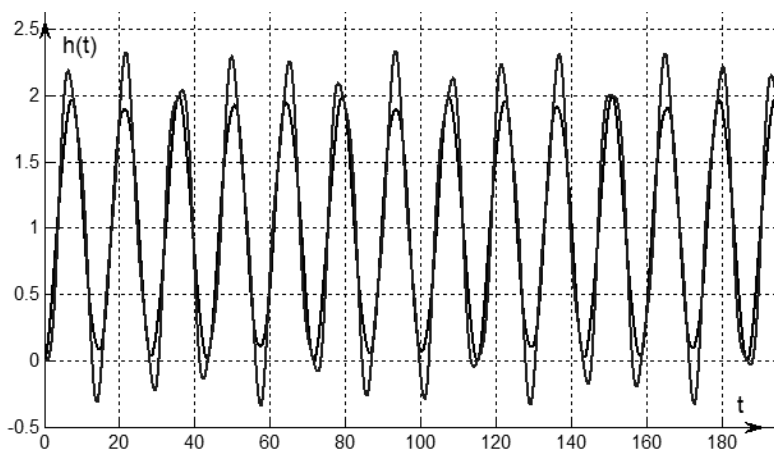


Рис. 4. Переходные процессы объекта для $u(t) = (1(t) \ 0)^T$

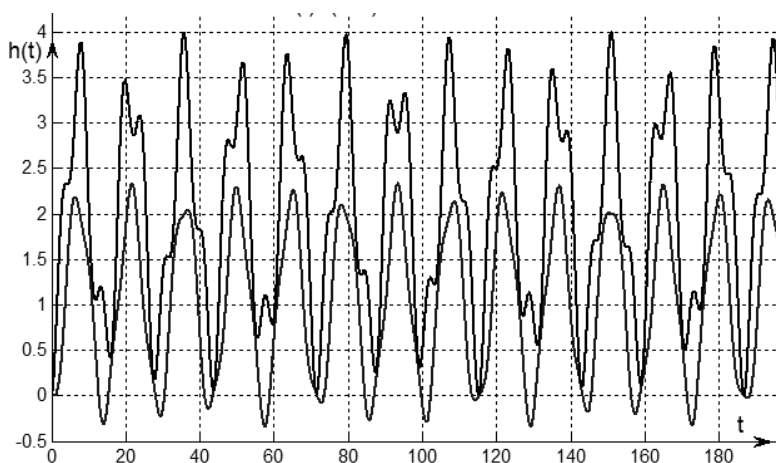


Рис. 5. Переходные процессы объекта для $u(t) = (0 \ 1(t))^T$

Из анализа переходных процессов следует, что уместно желаемые полюса выбирать в диапазоне $[-2; 0,5]$. Перейдем к синтезу регулятора для данного двухканального объекта.

2. СИНТЕЗ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

Для данного объекта рассмотрим задачу синтеза двухканального регулятора. Передаточная функция объекта в виде правого полиномиального разложения записывается следующим образом:

$$W_{ob}(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s). \quad (8)$$

В соответствии с известной методикой синтеза многоканального регулятора при использовании правого полиномиального разложения объекта удобнее регулятор искать в виде левого полиномиального разложения [6–9, 11–15]:

$$W_r(s) = Y_l^{-1}(s)X_l(s). \quad (9)$$

Характеристическая матрица системы в соответствии с [7] равна

$$Y_l(s)D_r(s) + X_l(s)N_r(s) = C(s).$$

Последняя формула может быть свернута следующим образом:

$$(Y_l(s) \mid X_l(s)) \begin{pmatrix} D_r(s) \\ N_r(s) \end{pmatrix} = C(s). \quad (10)$$

Так как объект и регулятор двухканальные, можем развернуть матрицы $Y_l(s)$, $X_l(s)$ и $C(s)$:

$$Y_l(s) = \begin{pmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{pmatrix}, \quad X_l(s) = \begin{pmatrix} x_{11}(s) & x_{12}(s) \\ x_{21}(s) & x_{22}(s) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$C(s) = \begin{pmatrix} c_{11}(s) & 0 \\ 0 & c_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

Подставим $Y_l(s)$, $X_l(s)$ и $C(s)$ из (11) и $D_r(s)$, $N_r(s)$ из (1) в (10):

$$\begin{pmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) & \mid & x_{11}(s) & x_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) & \mid & x_{21}(s) & x_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4s^2 + 2 & -1 \\ -1 & s^2 + 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}(s) & 0 \\ 0 & c_{22}(s) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Как известно, в одноканальных системах при степени знаменателя передаточной функции объекта, равной n , степени числителя и знаменателя передаточной функции регулятора выбираются на единицу меньше, т. е. равными $n-1$. Аналогично, в многоканальных системах столбцовые степени полиномиальных матриц «числителя» и «знаменателя» регулятора следует выбирать на единицу меньше столбцовых степеней «числителя» и «знаменателя» объекта. При необходимости обеспечения астатизма в системе столбцовые степени «числителя» и «знаменателя» регулятора следует выбирать равными столбцовым степеням «числителя» и «знаменателя» объекта.

Определим степени элементов $y_{ij}(s)$, $x_{ij}(s)$ матриц $Y_l(s)$ и $X_l(s)$: так как $\deg c_{11}(s) = \deg c_{22}(s) = 4$, выбираем $\deg y_{ij}(s) = \deg x_{ij}(s) = 2$ для $\forall i, j$, следует выбрать степени полиномов¹ регулятора равными единице. Но для обеспечения астатизма системы повысим степени до двух, что позволит взять матричные коэффициенты в матрицах $Y_l(s)$ при s в нулевой степени равными нулю. Знание степеней матриц $Y_l(s)$ и $X_l(s)$ позволяет нам выписать формулы для определения регулятора:

$$Y_l(s) = Y_2 s^2 + Y_1 s, \quad X_l(s) = X_2 s^2 + X_1 s + X_0. \quad (13)$$

Запишем передаточную функцию замкнутой системы через полиномиальные матрицы регулятора (13) и полиномиальные матрицы объекта (1):

$$W_{cl}(s) = N_r(s) \underbrace{(Y_l(s)D_r(s) + X_l(s)N_r(s))^{-1}}_{C^{-1}(s)} X_l(s) = N_r(s)C^{-1}(s)X_l(s), \quad (14)$$

где $C(s)$ – характеристическая полиномиальная матрица системы.

Из уравнения (1) несложно получить матрицы $D_r(s)$ и $N_r(s)$ в виде матричных полиномов:

$$D_r(s) = D_2 s^2 + D_0, \quad N_r(s) = N_0. \quad (15)$$

Воспользуемся уравнением (1) и выпишем матрицы D_2 , D_0 и N_0 :

$$D_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

¹ Здесь $\deg()$ – обозначение степени соответствующего полинома.

Итак, подставим (13) и (15) в характеристическую матрицу (14) и зададим желаемую характеристическую матрицу таким образом, чтобы все корни были равны $\{-1 -1 -1 -1\}$:

$$\begin{aligned} & (Y_2 s^2 + Y_1 s)(D_2 s^2 + D_1 s + D_0) + (X_2 s^2 + X_1 s + X_0)(N_2 s^2 + N_1 s + N_0) = \\ & = C_4 s^4 + C_3 s^3 + C_2 s^2 + C_1 s + C_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Раскроем скобки в уравнении (17):

$$\begin{aligned} & (Y_2 D_2 + X_2 N_2) s^4 + (Y_2 D_1 + Y_1 D_2 + X_2 N_1 + X_1 N_2) s^3 + (Y_2 D_0 + Y_1 D_1 + \\ & + X_2 N_0 + X_1 N_1 + X_0 N_2) s^2 + (Y_1 D_0 + X_1 N_0 + X_0 N_1) s + X_0 N_0 = \\ & = C_4 s^4 + C_3 s^3 + C_2 s^2 + C_1 s + C_0. \end{aligned}$$

Перейдем от полиномиального матричного уравнения к обычным линейным уравнениям с вещественными коэффициентами. Для этого приравниваем коэффициенты при s с одинаковыми степенями в левой и правой частях и получим систему линейных уравнений, которую приведем в матричном виде:

$$\mathfrak{I} \mathfrak{R} = \mathfrak{N}. \quad (18)$$

Здесь

$$\mathfrak{I} = (Y_2 \mid Y_1 \mid X_2 \mid X_1 \mid X_0), \quad \mathfrak{N} = (C_4 \mid C_3 \mid C_2 \mid C_1 \mid C_0),$$

$$\mathfrak{R} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} D_2 & D_1 & D_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D_2 & D_1 & D_0 & 0 \\ \hline N_2 & N_1 & N_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & N_2 & N_1 & N_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & N_2 & N_1 & N_0 \end{array} \right). \quad (19)$$

В данном случае D_1 , N_2 и N_1 – нулевые матрицы. В уравнение (19) подставим значения D_i , N_i и C_i , откуда

$$\mathfrak{I} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} y_{11}^2 & y_{12}^2 & y_{11}^1 & y_{12}^1 & x_{11}^2 & x_{12}^2 & x_{11}^1 & x_{12}^1 & x_{11}^0 & x_{12}^0 \\ y_{21}^2 & y_{22}^2 & y_{21}^1 & y_{22}^1 & x_{21}^2 & x_{22}^2 & x_{21}^1 & x_{22}^1 & x_{21}^0 & x_{22}^0 \end{array} \right),$$

$$\aleph = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$\aleph = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ранг матрицы \aleph , имеющей размеры 10×10 , равен десяти, обусловленность $\text{cond}(\aleph)$ равна 9,3 и значение детерминанта $\det \aleph = 16$. Из уравнения (18) несложно найти \Im :

$$\Im = \aleph \aleph^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 0,25 & 0 & 1 & 0 & 5,5 & 0,25 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Итак, выпишем полиномиальные матрицы регулятора $Y_I(s)$ и $X_I(s)$ с учетом вычисленных параметров регулятора:

$$Y_I(s) = \begin{pmatrix} 0,25s^2 + s & 0 \\ 0 & s^2 + 4 \end{pmatrix}, \quad X_I(s) = \begin{pmatrix} 5,5s^2 + 2s + 1 & 0,25s^2 + s \\ s^2 + 4s & 5s^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим вычисления, для чего $Y_I(s)$ и $X_I(s)$ подставим в характеристическую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0,25s^2 + s & 0 \\ 0 & s^2 + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4s^2 + 2 & -1 \\ -1 & s^2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5,5s^2 + 2s + 1 & 0,25s^2 + s \\ s^2 + 4s & 5s^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 & 0 \\ 0 & s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \end{pmatrix}.$$

Для реализации регулятора вначале выпишем его уравнение в виде левого матричного полиномиального представления:

$$Y_I(s)u(s) = X_I(s)e(s).$$

Подставим $Y_I(s)$ и $X_I(s)$ из (13) в предыдущее уравнение:

$$(Y_2s^2 + Y_1s)u(s) = (X_2s^2 + X_1s + X_0)e(s).$$

Выполним стандартные преобразования, необходимые для реализации однопараметрического регулятора в матричном виде в пакете Matlab:

$$u(s) = Y_2^{-1} \left(X_2e(s) + s^{-1} \left(X_1e(s) - Y_1u(s) + s^{-1}X_0e(s) \right) \right). \quad (20)$$

Однопараметрическая структурная схема системы автоматического управления, соответствующая (20), (6), (7) и реализованная в пакете Simulink – Matlab, приведена на рис. 6.

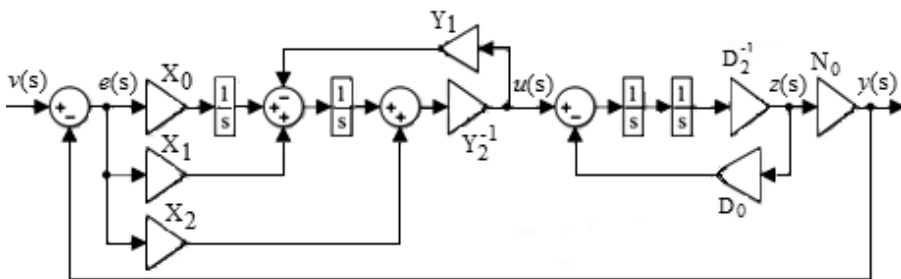


Рис. 6. Моделирование САУ с однопараметрическим регулятором (20) и объектом (6), (7)

Переходные процессы в системе при задании $v(t) = (1 \ 0)^t$ и $v(t) = (0 \ 1)^t$ приведены на рис. 7.

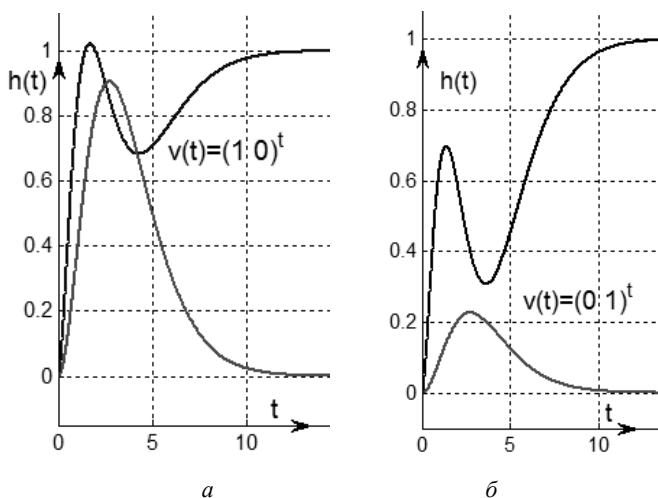


Рис. 7. Переходные процессы в САУ по рис. 6

Как видим, система устойчивая, время переходного процесса равно примерно 10 с при значительном перерегулировании, достигающем по собственным каналам 20...30 %, а по перекрестным каналам – до 100 %. Очевидно, что задача автономизации каналов не выполнена. Для того чтобы решить задачу автономизации, воспользуемся двухпараметрическим регулятором [1], что и будет рассмотрено в следующем разделе.

3. СИНТЕЗ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА: АВТОНОМНОСТЬ КАНАЛОВ

Для обеспечения автономности каналов многоканальной САУ воспользуемся двухпараметрическим регулятором [1], структурная схема которого приведена на рис. 1, а реализация – на рис. 8. Опишем уравнениями систему на рис. 8:

$$u(s) = W_{r1}(s)v(s) - W_{r2}(s)y(s); \quad (21)$$

$$W_{ob}(s)u(s) = y(s). \quad (22)$$

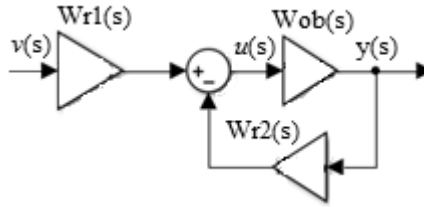


Рис. 8. Реализация САУ с объектом $W_{ob}(s)$ и с двухпараметрическим регулятором $(W_{r1}(s), W_{r2}(s))$

Подставим (21) в (22):

$$W_{ob}(s)(W_{r1}(s)v(s) - W_{r2}(s)y(s)) = y(s)$$

и перегруппируем члены в предыдущей формуле:

$$(I + W_{ob}(s)W_{r2}(s))y(s) = W_{ob}(s)W_{r1}(s)v(s). \quad (23)$$

С учетом того, что в уравнении (21) передаточные функции регулятора можно представить в виде левого матричного полиномиального представления

$$W_{r1}(s) = Y_l^{-1}(s)Z_l(s), \quad W_{r2}(s) = Y_l^{-1}(s)X_l(s),$$

уравнение (21) преобразуется в уравнение вида

$$u(s) = Y_l^{-1}(s)Z_l(s)v(s) - Y_l^{-1}(s)X_l(s)y(s). \quad (24)$$

Если в (22) подставим (8), получим

$$N_r(s)D_r^{-1}(s)u(s) = y(s). \quad (25)$$

Из (24) и (25) легко получить

$$N_r(s)D_r^{-1}(s)\left(Y_l^{-1}(s)Z_l(s)v(s) - Y_l^{-1}(s)X_l(s)y(s)\right) = y(s).$$

После простых преобразований предыдущее уравнение записывается в следующем виде:

$$\left(I + N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)X_l(s)\right)y(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)Z_l(s)v(s). \quad (26)$$

Уравнение (26) соответствует рис. 9.

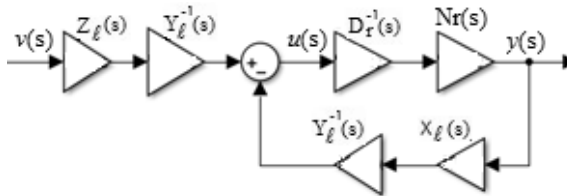


Рис. 9. Моделирование САУ с двухпараметрическим регулятором в соответствии с уравнением (26)

После элементарных структурных преобразований структурная схема на рис. 9 преобразуется в структурную схему на рис. 10, которая может быть описана уравнениями:

$$\bar{u}(s) = Z_l(s)v(s) - X_l(s)y(s); \quad (27)$$

$$N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)\bar{u}(s) = y(s). \quad (28)$$

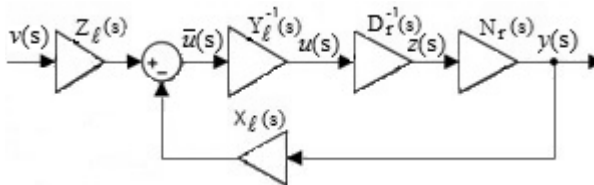


Рис. 10. Структурная схема рис. 9 после преобразований

Для проверки правильности структурных преобразований, в результате которых структурная схема на рис. 9 преобразована в структуру на рис. 10, уравнение (27) подставим в (28):

$$N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)(Z_l(s)v(s) - X_l(s)y(s)) = y(s).$$

После перегруппировки получим

$$(I + N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)X_l(s))y(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)Z_l(s)v(s), \quad (29)$$

что соответствует рис. 10. Осуществим простое структурное преобразование, а именно звено $X_l(s)$ в цепи обратной связи перенесем через сумматор (рис. 11).

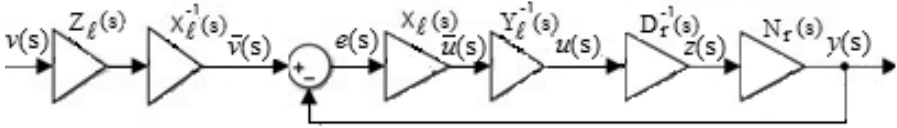


Рис. 11. Преобразованная структурная схема системы

Схема на рис. 11 может быть описана уравнениями:

$$e(s) = \bar{v}(s) - y(s); \quad (30)$$

$$\bar{v}(s) = Y_l^{-1}(s)Z_l(s)v(s); \quad (31)$$

$$N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)X_l(s)e(s) = y(s). \quad (32)$$

Уравнение (30) подставим в (32):

$$N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)X_l(s)(\bar{v}(s) - y(s)) = y(s)$$

и перегруппируем:

$$\left(I + N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)X_l(s) \right) y(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s)Y_l^{-1}(s)X_l(s)\bar{v}(s). \quad (33)$$

Уравнение (33) слева умножим на $\left(N_r(s)D_r^{-1}(s) \right)^{-1}$, что можно выполнить ввиду невырожденности указанной матрицы, и упростим правую часть:

$$\left[\left(N_r(s)D_r^{-1}(s) \right)^{-1} + Y_l^{-1}(s)X_l(s) \right] y(s) = Y_l^{-1}(s)X_l(s)\bar{v}(s).$$

Далее слева умножим на $\left(Y_l^{-1}(s)X_l(s) \right)^{-1}$ и получим

$$\left[\left(Y_l^{-1}(s)X_l(s) \right)^{-1} \left(N_r(s)D_r^{-1}(s) \right)^{-1} + I \right] y(s) = \bar{v}(s),$$

откуда

$$\left(X_l^{-1}(s)Y_l(s)D_r(s)N_r^{-1}(s) + I \right) y(s) = \bar{v}(s).$$

Вместо единичной матрицы подставим $X_l^{-1}(s)X_l(s)N_r(s)N_r^{-1}(s)$:

$$\left(X_l^{-1}(s)Y_l(s)D_r(s)N_r^{-1}(s) + X_l^{-1}(s)X_l(s)N_r(s)N_r^{-1}(s) \right) y(s) = \bar{v}(s).$$

Вынесем $X_l^{-1}(s)$ и $N_r^{-1}(s)$ за скобки и получим

$$X_l^{-1}(s)(Y_l(s)D_r(s) + X_l(s)N_r(s))N_r^{-1}(s)y(s) = \bar{v}(s).$$

Слева умножим на $X_l(s)$:

$$\underbrace{X_l(s)X_l^{-1}(s)}_I \underbrace{(Y_l(s)D_r(s) + X_l(s)N_r(s))}_{C(s)} N_r^{-1}(s)y(s) = X_l(s)\bar{v}(s),$$

откуда

$$C(s)N_r^{-1}(s)y(s) = X_l(s)\bar{v}(s),$$

где $C(s)$ – характеристический полином замкнутой системы. Окончательно получим

$$y(s) = N_r(s)C^{-1}(s)X_l(s)\bar{v}(s). \quad (34)$$

Если учтем, что $\bar{v}(s) = X_l^{-1}(s)Z_l(s)v(s)$ (31), получим из (34):

$$y(s) = N_r(s)C^{-1}(s)\underbrace{X_l(s)X_l^{-1}(s)}_I Z_l(s)v(s). \quad (35)$$

Очевидно, что

$$y(s) = N_r(s)C^{-1}(s)Z_l(s)v(s),$$

откуда легко получить передаточную функцию замкнутой системы с двух-параметрическим регулятором

$$W_{cl}(s) = N_r(s)C^{-1}(s)Z_l(s). \quad (36)$$

Воспользуемся рис. 10 – выпишем уравнения:

$$\begin{aligned}\bar{u}(s) &= Z_I(s)v(s) - X_I(s)y(s), \\ Y_I(s)u(s) &= \bar{u}(s).\end{aligned}\quad (37)$$

Значение $\bar{u}(s)$ подставим в (37):

$$Y_I(s)u(s) = Z_I(s)v(s) - X_I(s)y(s). \quad (38)$$

Для автономизации каналов следует выбрать $Z_I(s) = N_r^{-1}(s)$, значения $Y_I(s)$ и $X_I(s)$ возьмем из (13), а так как $N_r(s) = N_0 = [1 \ 0; 0 \ 1]$ получим

$$(Y_2 s^2 + Y_1 s)u(s) = Z_0(s)v(s) - (X_2 s^2 + X_1 s + X_0)y(s).$$

Предыдущую формулу перепишем в удобном для моделирования виде:

$$u(s) = Y_2^{-1} \left(-X_2 y(s) + s^{-1} \left(-Y_1 u(s) - X_1 y(s) + s^{-1} (Z_0(s)v(s) - X_0 y(s)) \right) \right). \quad (39)$$

Уравнения (6), (7) и (39) позволяют реализовать астатическую САУ с двухпараметрическим регулятором (рис. 13) со свойством автономности каналов.

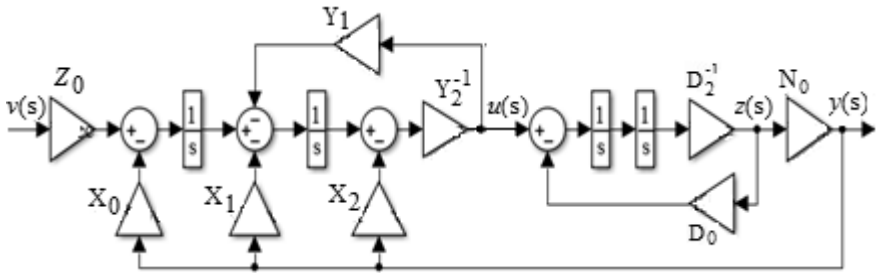


Рис. 13. Реализация астатической системы регулирования с двухпараметрическим регулятором

Переходные процессы в системе для $v(t) = (1(t), 0)^t$ приведены на рис. 14, а для $v(t) = (0, 1(t))^t$ имеют аналогичный вид.

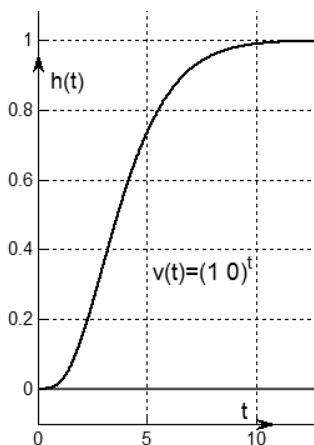


Рис. 14. Переходные процессы
в системе на рис. 13

Таким образом реализован алгоритм управления с использованием двух-параметрического регулятора с целью автономизации каналов и получения свойств астатизма.

4. СИНТЕЗ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ АСТАТИЧЕСКОГО СВОЙСТВА

Воспользуемся двухпараметрическим регулятором для автономизации каналов при условии, в отличие от вышерассмотренного, без свойства астатизма: это предполагает наличие ненулевого члена в знаменателе регулятора при s^0 . Эту методику расчета, как и в предыдущих разделах статьи, проиллюстрируем на примере того же объекта.

Воспользуемся уравнением (38), подставим в него значения $Y_I(s)$ и $X_I(s)$:

$$Y_I(s) = Y_1 s + Y_0, \quad X_I(s) = X_1 s + X_0.$$

В данном случае это полиномы первого порядка, где $Y_0 \neq 0$:

$$(Y_1 s + Y_0)u(s) = Z_0(s)v(s) - (X_1 s + X_0)y(s).$$

В соответствии с ранее изложенным $Z_l(s) = N_r^{-1}(s)$. Перепишем уравнение регулятора в удобном для моделирования виде:

$$u(s) = Y_1^{-1} \left(-X_1 y(s) + s^{-1} (-Y_0 u(s) + Z_0(s)v(s) - X_0 y(s)) \right).$$

Если модель объекта позаимствуем из рис. 13, получим схему моделирования САУ, приведенную на рис. 15.

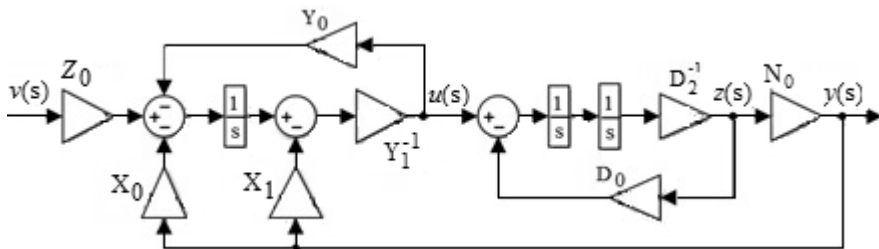


Рис. 15. Структурная схема системы с двухпараметрическим регулятором без астатизма

При точно заданных параметрах объекта система ведет себя как автономная и астатическая (рис. 16). Однако при незначительных изменениях параметров объекта свойства астатизма и автономности нарушаются. Так, например, при изменении матриц D_0 и N_0 до значений

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1,9 & -1,05 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$$

система теряет свойства астатизма и автономности каналов.

Для сравнения приведем результаты, полученные в [7] для этого же объекта, где полиномиальные матрицы однопараметрического регулятора такие:

$$Y_l(s) = \begin{pmatrix} 0,25s + 0,75 & 0 \\ 0 & s + 3 \end{pmatrix}, \quad X_l(s) = \begin{pmatrix} 2,5s - 0,5 & 0,25s \\ s + 3 & 2s \end{pmatrix}. \quad (40)$$

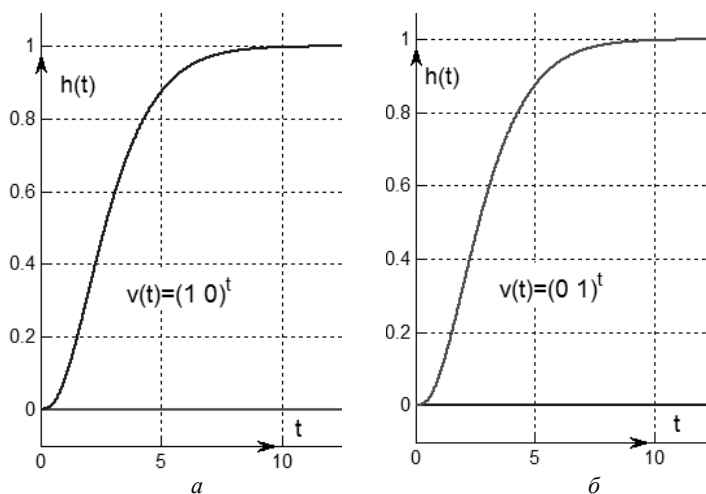


Рис. 16. Выход системы на рис. 15 при точно заданных параметрах объекта

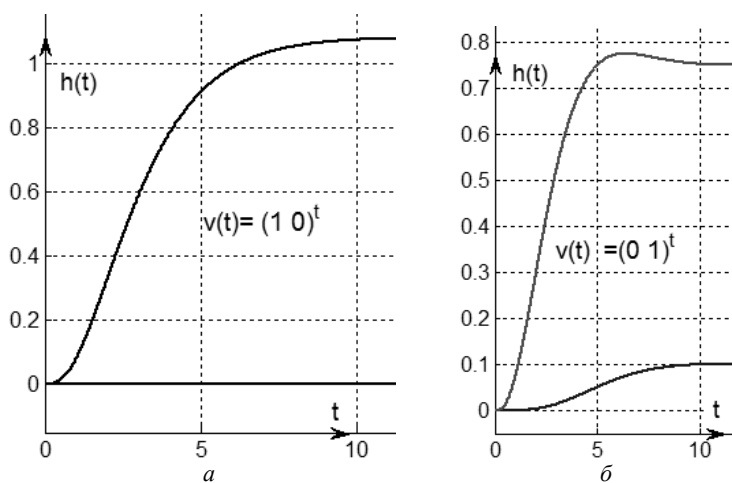


Рис. 17. Выход системы на рис. 15 при изменении параметров объекта в пределах 5 %

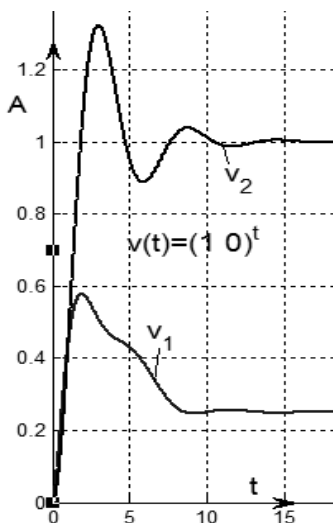


Рис. 18. Переходные процессы в системе с однопараметрическим регулятором (40) и объектом (2), приведенные в [7, с. 79]

Показатели переходных процессов существенно хуже (рис. 18), и безусловно невозможно говорить об астатизме и автономности. По сравнению с процессами, полученными в данной работе (рис. 16), перерегулирование достигает 30 %, а перекрестные сигналы – до 60 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что возможности системы с двухпараметрическим регулятором по сравнению с однопараметрическим регулятором существенно больше, и можно добиваться лучших динамических и статических характеристик. На примере двухканального объекта показано, что можно добиться автономности каналов при выполнении условий астатизма. По сравнению с однопараметрическим регулятором система с двухпараметрическим регулятором обладает свойствами грубости относительно вариации параметров объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – 3rd ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
2. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
3. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.
4. *Гайдук А.Р.* Теория автоматического управления: учебник. – М.: Высшая школа, 2010. – 415 с.
5. *Плохотников В.В.* Модальный синтез систем управления с интервальными параметрами: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2002. – 182 с.
6. *Воевода А.А., Ижицкая Е.А.* Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 2 (56). – С. 3–10.
7. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.
8. *Шоба Е.В.* Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.
9. *Бобобеков К.М.* О структурных преобразованиях многоканальных линейных систем в матричном полиномиальном представлении // Научный вестник НГТУ. – 2017. – № 2 (67). – С. 7–25.
10. *Бобобеков К.М., Воевода А.А.* Расчет параметров регулятора для стабилизации перевернутого маятника по углу отклонения // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 18–32.
11. *Бобобеков К.М., Воевода А.А.* Синтез двухканальной системы полиномиальным методом: обеспечение астатизма // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 7–19.
12. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: полиномиальный метод синтеза двухканальной системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 4 (58). – С. 121–124.
13. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 1 (38). – С. 195–198.

14. Воевода А.А., Вороной В.В. Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов заданной структуры // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2 (51). – С. 214–218.

15. Воевода А.А., Бобобеков К.М. Синтез линейных многоканальных регуляторов с использованием структурных преобразований // Вестник Астраханского государственного технического университета. – 2017. – № 3. – С. 7–20.

16. Воевода А.А., Шоба Е.В. Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза в пространстве состояний // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 1 (59). – С. 25–34.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление многоканальными объектами. Имеет более 200 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru

Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович, специалист по технологиям машиностроения, 2008–2013 гг. – кафедра «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» механико-технологического факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2013 по 2015 г. ассистент Таджикского технического университета. С 2015 г. аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. Имеет более 18 публикаций. E-mail: kurbon_111@mail.ru

Autonomy and astaticism in a multichannel system with a two-parameter regulator*

A.A. Voevoda¹, K.M. Bobobekov²

¹ *Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), professor. E-mail: ucit@ucit.ru*

² *Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department "Automatics". E-mail: kurbon_111@mail.ru*

The main task set in the work is the provision of astaticism and autonomy of channels in multichannel systems. The investigation is carried out using the example of a two-channel object of the second order. Since more often the description of the object is given in the form of a

* Received 04 April 2017.

right polynomial expansion, the description of the regulator is given in the form of a left polynomial expansion. This makes it possible to obtain a characteristic matrix polynomial it is convenient, when synthesizing a regulator in a polynomial matrix form. When providing astaticism, the assumption of so-called one-parameter regulator, the free member of the polynomial of the denominator of the regulator should be taken equal to zero. When using a one-parameter regulator, when the demand for the autonomy of channels, the problem becomes much more complicated, and it is proposed to proceed to the use of a two-parameter regulator. To ensure astaticism and channel autonomy with the help of a two-parameter regulator, one can take the free member of the "denominator" polynomial of the regulator equal to zero, which corresponds to the introduction of the integrator in the regulator. Is possible a second variant of the solution of the problem without adding an integrator to the regulator, in which we also obtain the properties of astaticism and autonomy of channels. However, this system loses the properties of autonomy and astaticism even with insignificant changes in the parameters of the object, which is not desirable for automatic control systems.

Keywords: control object, multi-channel systems, automatic control systems, one-parameter regulator, two-parameter regulator, channel autonomy, polynomial matrix description, astaticism

DOI: 10.17212/2307-6879-2017-3-7-31

REFERENCES

1. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 3rd ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.
2. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p.
3. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.
4. Gaiduk A.R. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [The theory of automatic control]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2010. 415 p.
5. Plokhotnikov V.V. *Modal'nyi sintez sistem upravleniya s interval'nymi parametrami*. Diss. kand. tekhn. nauk [Modal synthesis of control systems with interval parameters. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2002. 182 p.
6. Voevoda A.A., Izhitskaya E.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza [Stabilization of two-mass systems: modal synthesis method]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 2 (56), pp. 3–10.

7. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [A polynomial method for calculating the multi-channel controllers low order. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

8. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.

9. Bobobekov K.M. O strukturnykh preobrazovaniyakh mnogokanal'nykh lineinykh sistem v matrichnom polinomial'nom predstavlenii [About structural transformations of multichannel linear systems in the matrix polynomial representation]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 2 (67), pp. 7–25.

10. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Raschet parametrov regulyatora dlya stabilizatsii perevernutogo mayatnika po uglu otkloneniya [Calculation of controller parameters for the stabilization of the inverted pendulum by corner deviation]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 18–32.

11. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Sintez dvukhkanal'noi sistemy polinomial'nym metodom: obespechenie astatizma [Synthesis of two-channel system polynomial method: ensuring astatic]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (83), pp. 7–19.

12. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: polinomial'nyi metod sinteza dvukhkanal'noi sistemy [Two-mass system stabilization: polynomial method of two-channel system synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 4 (58), pp. 121–124.

13. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya [Stabilisation of two-mass system by a modal method of synthesis with polynomial factorization]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (38), pp. 195–198.

14. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov zadannoi struktury [Polynomial method for calculating multi-channel controllers of a given structure]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo*

gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university, 2013, no. 2 (51), pp. 214–218.

15. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Sintez lineinykh mnogokanal'nykh regulyatorov s ispol'zovaniem strukturnykh preobrazovaniy [Synthesis of linear multi-channel regulators using structural transformations]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Astrakhan State Technical University*, 2017, no. 3, pp. 7–20.

16. Voronoi V.V., Shoba E.V. Stabilizatsiya trekhmassovoi sistemy: dvukhkanal'nyi PD-regulyator [Stabilisation of three-mass system: two-input two-output PD-regulator]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 4 (62), pp. 183–188.