СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2018. – № 1 (91).** – 7–30

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 681.513

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЗАИМНО ПРОСТОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ СИЛЬВЕСТРА*

К.М. БОБОБЕКОВ[1], Э.Ш. ТАУРОВ[2]

[1] *630087, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: kurbon_111@mail.ru*
[2] *734042, РТ, г. Душанбе, пр. академиков Раджабовых, 10, Таджикский технический университет имени акад. М.С. Осими, старший преподаватель кафедры теоретической механики и сопротивления материалов. E-mail: taurov79@mail.ru*

В зависимости от используемого математического описания объекта (например, использования дифференциальных уравнений, передаточных функций, полиномиальных описаний) развиваются различные методы синтеза. При синтезе регуляторов важно формализовать методику синтеза таким образом, чтобы в результате обеспечить желаемые требования к системе автоматического управления (регулирования). В данной работе анализируются и развиваются полиномиальные методы синтеза регуляторов. При анализе и синтезе систем автоматического управления, как правило, используется взаимно простое разложение передаточной функции, или, другими словами, полиномы числителя и знаменателя не имеют одинаковых корней. Для решения этой задачи проще всего использовать команду *roots* или команду *minreal*, например, если используем пакет Matlab. Обычно при полиномиальном методе синтеза переходят от полиномиальных уравнений к числовым матричным уравнениям, что приводит к так называемой матрице Сильвестра. Для определения взаимно простых полиномов, как известно, можно воспользоваться указанной матрицей Сильвестра. Если матрица Сильвестра вырожденная, то это говорит о существовании одинаковых корней полиномов числителя и знаменателя. В работе исследуется возможность использования матрицы Сильвестра и уточняется алгоритм приведения к взаимно простому виду. Работа алгоритма иллюстрируется на шести примерах. Актуальность решения задачи приведения к взаимно простому виду объясняется тем, что эта методика используется при решении задачи полиномиального метода синтеза одноканальных и многоканальных систем.

Ключевые слова: передаточная функция, одноканальная система, взаимно простое разложение, матрица Сильвестра, вырожденная матрица, однородная линейная система уравнений

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-7-30

---

* Статья получена 08 ноября 2017 г.

ВВЕДЕНИЕ

В анализе и синтезе систем автоматического управления (САУ) важную роль играет взаимная простота (*coprime*) полиномов числителя и знаменателя передаточной функции как объекта, так и регулятора. Если полиномы числителя и знаменателя имеют одинаковые корни, то могут возникнуть проблемы как с управляемостью, так и с наблюдаемостью. Кстати, при переходе к описанию в пространстве состояний (A, b, c) это приводит к увеличению размеров матрицы A и векторов b и c. Кроме того, из-за неустойчивых корней система может стать неустойчивой. Это требование, так же как и обычное условие *правильности* или *строгой правильности* [13, 17], следует учитывать при анализе и синтезе САУ. В данной работе подробно анализируется применение матрицы Сильвестра для поиска взаимно простого разложения передаточной функции, схематично изложенного в работах [1, p. 192–195; 2]. Актуальность данного исследования существенно возрастает, если учесть, что матрица Сильвестра также может быть использована при синтезе регулятора. С такими примерами синтеза регуляторов можно познакомиться, например, в [1, 2, 7, 8, 10–14, 16–18], а также в диссертационных работах [19, 20].

Допустим, у передаточной функции $w(s) = n(s)/d(s)$ полиномы $n(s) = \sum_{i=0}^{m} n_i s^i$ и $d(s) = \sum_{i=0}^{n} d_i s^i$ имеют одинаковые корни, которые следует сократить. Для удобства можно ввести обозначения:

$$\deg n(s) = m\,, \quad \deg d(s) = n\,.$$

В данной работе предполагается, что передаточная функция *правильная*, т. е. $\deg n(s) \le \deg d(s)$. Безусловно, можно пойти по простейшему пути, а именно: воспользовавшись командой Matlab [15], например *roots*, вычислить корни полиномов $n(s)$ и $d(s)$, выполнить сокращение и получить взаимно простое представление $w(s) = \overline{n}(s)/\overline{d}(s)$. Другими словами, имеем

$$w(s) = n(s)/d(s) = \overline{n}(s)/\overline{d}(s)\,, \tag{1}$$

где $\deg \overline{d}(s) < n$. Это полиномиальное уравнение с неизвестными полиномами $\overline{n}(s) = \sum_{i=0}^{m-r} \overline{n}_i s^i$ и $\overline{d}(s) = \sum_{i=0}^{n-r} \overline{d}_i s^i$, где r – число одинаковых корней полиномов $n(s)$ и $d(s)$. Исследуем вопрос использования матрицы Сильвестра, по сути переход от полиномиального уравнения к числовому матричному уравнению, для получения взаимно простого разложения.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЗАИМНО ПРОСТОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Из выражения (1) несложно получить уравнение

$$d(s)(-\overline{n}(s)) + n(s)\overline{d}(s) = 0. \tag{2}$$

Это полиномиальное уравнение с неизвестными полиномами[1] $\overline{n}(s) = \sum_{i=0}^{m-r} \overline{n}_i s^i$ и $\overline{d}(s) = \sum_{i=0}^{n-r} \overline{d}_i s^i$. Полиномиальное уравнение (2) с двумя неизвестными полиномами $\overline{n}(s)$ и $\overline{d}(s)$ можно преобразовать к матричному уравнению с коэффициентами и неизвестными из множества вещественных чисел:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} d & n & d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} d_0 & n_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & n_1 & d_0 & n_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & d_1 & n_1 & d_0 & n_0 \\ d_n & n_n & \dots & \dots & d_1 & n_1 \\ 0 & 0 & d_n & n_n & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n & n_n \end{pmatrix}}_{\Re} \end{array} \begin{pmatrix} -\overline{n}_0 \\ \overline{d}_0 \\ -\overline{n}_1 \\ \overline{d}_1 \\ \dots \\ -\overline{n}_{n-1} \\ \overline{d}_{n-1} \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

Кратко уравнение (3) можно записать

$$\Re x = 0. \tag{4}$$

[1] Уравнение $d(s)(-\overline{n}(s)) + n(s)\overline{d}(s) = 0$ имеет бесконечно много решений, где $n(s) = \overline{n}(s)r(s)$, $d(s) = \overline{d}(s)r(s)$, так как можем выбирать любой полином $r(s) \neq 0$.

Для упрощения записи матрицы $\Re$ здесь взяли $m = n$. Кроме того, пока предполагаем, что сократится по одному корню, т. е. $r = 1$. Это соответствует вектору-столбцу из коэффициентов полиномов $\overline{n}(s)$ и $\overline{d}(s)$. Здесь матрица $\Re$ размером $2n \times 2n$ состоит из коэффициентов d_i и n_i. Это однородное линейное алгебраическое уравнение. Матрицу $\Re$ называют результантной матрицей Сильвестра[2] (*Sylvester resultant*). Если матрица Сильвестра вырожденная, то существует ненулевое решение[3] (3). Это означает, что полиномы $\overline{n}(s)$ и $\overline{d}(s)$ степени $n-1$ или меньше, удовлетворяющие уравнению (2), существуют. Таким образом, $n(s)$ и $d(s)$ не взаимно простые. Если матрица Сильвестра не вырожденная, то ненулевых решений (3) не существует или эквивалентно нет полиномов $\overline{n}(s)$ и $\overline{d}(s)$ степени меньше n. Таким образом, $n(s)$ и $d(s)$ взаимно простые. Вышесказанное запишем в виде следствия [1, p. 193].

---

[2] Матрицей Сильвестра (*Sylvester resultant* [1, p. 193]) принято называть матрицу вида

$$\Re = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} d_0 & n_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & n_1 & d_0 & n_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & d_1 & n_1 & d_0 & n_0 \\ d_n & n_n & \vdots & \vdots & d_1 & n_1 \\ 0 & 0 & d_n & n_n & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n & n_n \end{array}\right).$$

[3] Для обоснования существования решения можно, например, воспользоваться:

Следствие 3.2 [1, p. 51]

1. Для любой заданной матрицы A размером $m \times n$, где $m \geq n$, существует решение x уравнения $xA = y$ для любого вектора-строки y, если и только если матрица A имеет полный столбцовый ранг.

2. Для любой заданной матрицы A размером $m \times n$, где $m \geq n$, и любого вектора-строки y размером $1 \times n$, пусть x_p будет решением $xA = y$ и пусть $k = m - \rho(A)$. Если $k = 0$, решение x_p единственное. Если $k > 0$, тогда для любых α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, вектор

$$x = x_p + \alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_k n_k$$

есть решение $xA = y$, где $n_i A = 0$ и множество векторов $\{n_1, \ldots, n_k\}$ линейно независимое.

Следствие. $d(s)$ и $n(s)$ не взаимно простые если и только если матрица Сильвестра вырожденная.

Если матрица Сильвестра вырожденная, тогда отношение $n(s)/d(s)$ может быть сведено к виду $n(s)/d(s) = \overline{n}(s)/\overline{d}(s)$, где $\overline{n}(s)$ и $\overline{d}(s)$ взаимно простые.

Обсудим, как получить взаимно простое разложение непосредственно из уравнения (3). Исследуем линейную независимость столбцов $\Re$ в направлении слева направо. Мы назовем столбцы, сформированные из d_i, *d*-столбцами, и сформированные из n_i – n-столбцами. Тогда каждый *d*-столбец линейно независимый от столбцов с левой стороны. Действительно, так как $d_n \neq 0$, первый *d*-столбец линейно независимый (ненулевой). Второй *d*-столбец также линейно независим от столбцов слева, так как с левой стороны от d_n все элементы нулевые. Продолжая аналогичные рассуждения (слева направо) для *d*-столбцов, делаем заключение, что *все d-столбцы линейно независимые от столбцов слева*. С другой стороны, *n*-столбец может быть зависимый или не зависимый от столбцов слева. Получим, что если *n*-столбец становится линейно зависимым от столбцов слева, тогда все последующие *n*-столбцы линейно зависимые от столбцов слева. Пусть μ обозначает число линейно независимых *n*-столбцов в матрице $\Re$. Тогда $(\mu+1)$-й *n*-столбец – это первый *n*-столбец, который становится линейно зависимым от столбцов слева, и будем называть его *первым зависимым n-столбцом*. Обозначим через $\Re_1$ подматрицу $\Re$, которая включает первый зависимый *n*-столбец и все столбцы слева. Таким образом, $\Re_1$ состоит из $\mu+1$ *d*-столбцов (все они линейно-независимые) и $\mu+1$ *n*-столбцов (последний *n*-столбец линейно зависим от предыдущих). Таким образом, матрица $\Re_1$ ранга $2\mu+1$ содержит $2(\mu+1)$ столбцов. Другими словами, матрица $\Re_1$ имеет ядро размерности один и, следовательно, имеет один ненулевой вектор из ядра. Заметим, что если c – вектор из ядра, т. е. $\Re_1 c = 0$, то и αc также принадлежит ядру при любом ненулевом $\alpha \in R$. Хотя мы можем использовать любой вектор из ядра, будем использовать вектор из ядра с единицей, стоящей в последнем элементе вектора из ядра. Для удобства такой вектор можно называть нормированным вектором из ядра (*monic null vector*).

Примечание: из вышеприведенных рассуждений следует, что *степень* приведенной *передаточной функции* $\overline{n}(s)/\overline{d}(s)(s)$ равна μ.

По сути, это соответствует теореме 7.4 в работе [1, p. 195]. Здесь под степенью передаточной функции подразумевается степень полинома знаменателя, которая в соответствии с алгоритмом приведения больше или равна степени числителя.

2. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗАИМНО ПРОСТЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Проиллюстрируем процедуру вычисления взаимно простого разложения, использующего матрицу Сильвестра, на нескольких примерах.

Пример 1. Найдем взаимно простое разложение для передаточной функции

$$n(s)/d(s) = s+1/s+1\,,$$

здесь $d(s)$ и $n(s)$ – полиномы числителя и знаменателя, где степень полинома числителя $m=1$ и степень полинома знаменателя $n=1$. Сформируем матрицу Сильвестра размером $2n \times 2n$. Так как $\deg \bar{d}(s) < n$, поэтому степени полиномов $\bar{d}(s)$ и $\bar{n}(s)$ будут нулевые:

$$\underbrace{\begin{array}{cc} d & n \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \end{array}}_{\Re} \underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \end{pmatrix}}_{x} = 0\,,$$

где матрица $\Re$ размером 2 × 2 имеет ранг 1 (здесь и далее ранг матрицы $\Re$ обозначим через q), что показывает наличие одинакового корня (корней) в $d(s)$ и $n(s)$. Матрица $\Re$ состоит из одного (dn)-блочного столбца, одного d-столбца (линейно независимого – ненулевой вектор!) и одного линейно зависимого n-столбца, что позволяет определить значение $\mu = 0$, т. е. $\mu + 1 = 1$. В данном случае $\Re_1 = \Re$ квадратная – нет необходимости отбрасывать строчки. Для поиска элемента из ядра (решения вышепри-веденного уравнения) опять используем команду ***null***:

```
>> n=[1 1]; d=[1 1]; R=[d; n]'; rank(R)
>> x=null(R);
>> x1= x/ x(2)
```

$x_1 = (-1 \quad 1)^t$.

Это соответствует $(-\overline{n}_0 \quad \overline{d}_0)^t = (-1 \quad 1)^t$, или

$$\frac{\overline{n}(s)}{\overline{d}(s)} = \frac{\overline{n}_0}{\overline{d}_0} = 1,$$

что подтверждает работоспособность алгоритма для вырожденного случая.

Пример 2. Найдем взаимно простое разложение для передаточной функции

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 7s + 12}.$$

Здесь очевидно, что $n(s)/d(s) = (s+1)(s+2)/(s+3)(s+4)$, но мы это забываем и «отрабатываем» методику поиска взаимно простого разложения, что соответствует равенству степеней $m = n = 2$. Так как предполагаем взаимное сокращение полиномов, то $\deg \overline{d}(s) < n$, поэтому степени полиномов $\overline{d}(s)$ и $\overline{n}(s)$ берем на единицу меньше, т. е. равные единице. Матрица Сильвестра размером $2n \times 2n = 4 \times 4$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 12 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{\Re} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} -\overline{n}_0 \\ \overline{d}_0 \\ \hline -\overline{n}_1 \\ \overline{d}_1 \end{pmatrix}}_{x} = 0$$

имеет ранг четыре, т. е. матрица Сильвестра невырожденная и, следовательно, полиномы $n(s)$ и $d(s)$ взаимно простые. Вышеприведенное уравнение не имеет ненулевых решений, что подтверждает работоспособность алгоритма и в этом «вырожденном» случае.

Пример 3. Рассмотрим чрезвычайно простой пример с целью формализации алгоритма поиска взаимно простого разложения

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2}.$$

В нашем случае $n = 2$, и поэтому выберем степени взаимно простых полиномов на единицу меньше. Формируем матрицу Сильвестра: первый (dn)-блочный столбец – это столбцы d и n, дополненные снизу нулями, так как высота столбцу должна быть равна $2n = 2 \cdot 2 = 4$. Далее справа дописываем столбцы (dn) со смещением вниз на одну позицию и дополняем нулями:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{\mathfrak{R}} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ \hdashline -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У матрицы R размером 4×4 ранг равен двум ($q = 2$). Матрица R состоит из двух линейно независимых d-столбцов и двух n-столбцов, причем линейно зависимых от столбцов слева, то есть $\mu = 0$. Тогда второй столбец из матрицы R – это первый линейно зависимый n-столбец ($\mu + 1 = 1$). Выбираем слева направо линейно независимые столбцы до первого линейно зависимого столбца, который включаем в матрицу R_1 , и вычисляем вектор из ядра:

```
>>n=[1 2 1]; d=[1 2 1]; R1=[d; n]';
>> x=null(R1);
x1=x/x(2)
```

В результате получим нормированный вектор из ядра

$$x_1 = (-1 \quad 1)^t,$$

что позволяет определить взаимно простое представление передаточной функции

$$(-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0)^t = (-1 \quad 1)^t,$$

или

$$\frac{\bar{n}(s)}{\bar{d}(s)}=\frac{\bar{n}_0}{\bar{d}_0}=1\,.$$

Пример 4. Определим взаимно простое разложение

$$\frac{n(s)}{d(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s^3+7s^2+15s+9}\,. \tag{5}$$

Здесь полиномы числителя и знаменателя не взаимно простые – $n(s)/d(s)=(s+1)(s+2)/(s+3)(s+4)$, но это забываем и проверяем методику. В нашем случае $n=3$ и $m=2$, т. е. матрица содержит 3 dn-блочных столбца. Матрица Сильвестра размером $2n\times 2n=6\times 6$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} d & n & d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc:cc} 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 15 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\Re}\underbrace{\begin{pmatrix} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ \hdashline -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ \hdashline -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix}}_{x}=0 \tag{6}$$

имеет ранг, равный пяти ($q=5<6$), что указывает на наличие одинаковых нулей и полюсов. В матрицу $\Re$ входит три линейно независимых d-столбца, а именно 1, 3 и 5-й столбцы, и два линейно независимых n-столбца ($5-3=2$), а именно 2 и 4-й столбцы. Таким образом, $\mu=2$. Шестой столбец – это первый линейно зависимый столбец (6) – в данном случае столбцы вычеркивать не нужно. Следовательно, $\Re_1=\Re$. Так как $rank(\Re_1)=5$, ядро $\Re_1$ одномерное. Решим уравнение $\Re_1 x=0$:

```
>>n=[2 3 1 0]; d=[9 15 7 1]; R=[d 0 0; n 0 0; 0 d 0; 0 n 0; 0 0 d; 0 0 n; ]';
>>m=rank(R);
>>x=null(R);
x1=x/x(6)
```

Вектор из ядра

$$x_1 = (-2 \quad 9 \quad -1 \quad 6 \quad 0 \quad 1)^t$$

позволяет определить взаимно простое представление передаточной функции

$$x = (-\overline{n}_0 \quad \overline{d}_0 \quad -\overline{n}_1 \quad \overline{d}_1 \quad -\overline{n}_2 \quad \overline{d}_2)^t = (-2 \quad 9 \quad -1 \quad 6 \quad 0 \quad 1)^t .$$

Таким образом, от не взаимно простых полиномов передаточной функции (5) перейдем к уравнению (7):

$$\frac{\overline{n}(s)}{\overline{d}(s)} = \frac{s+2}{s^2+6s+9}, \tag{7}$$

где $\overline{n}(s)$ и $\overline{d}(s)$ – взаимно простые полиномы.

Решение задачи без использования команды *null*. Можно решить задачу без использования команды ***null***. Применим методику синтеза регулятора с использованием полиномиального разложения [10, 13, 16, 19, 20] к задаче поиска взаимно простого разложения передаточной функции. Так как матрица $\Re$ размером 6×6 имеет ранг пять, мы можем «перенести» шестой столбец направо, так как он линейно зависимый от первых пяти:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:cc:c} 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 9 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 15 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}}_{\Re_1} \underbrace{\begin{pmatrix} -\overline{n}_0 \\ \overline{d}_0 \\ \hdashline -\overline{n}_1 \\ \overline{d}_1 \\ \hdashline -\overline{n}_2 \end{pmatrix}}_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(-\overline{d}_2\right). \tag{8}$$

Так как шестая строка матрицы $\Re_1$ линейно зависимая, ее отбрасываем:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc:c} 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 9 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 15 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right)}_{\Re_2} \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{c} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ \hdashline -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ \hdashline -\bar{n}_2 \end{array}\right)}_{x_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c} \left(-\bar{d}_2\right).$$

Ввиду невырожденности $\Re_2$ уравнение $\Re_2 x_1 = -c\,\bar{d}_2$ можем решить так:

$$x_1 = \Re_2^{-1}(-c\,\bar{d}_2)\,.$$

Откуда

$$x_1 = (-2\bar{d}_2 \quad 9\bar{d}_2 \quad -1\bar{d}_2 \quad 6\bar{d}_2 \quad 0)^t\,.$$

Итак, вернемся от x_1 к вектору x:

$$x = (-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0 \quad -\bar{n}_1 \quad \bar{d}_1 \quad -\bar{n}_2 \quad \bar{d}_2)^t =$$

$$= (-2\bar{d}_2 \quad 9\bar{d}_2 \quad -1\bar{d}_2 \quad 6\bar{d}_2 \quad 0 \quad \bar{d}_2)^t\,.$$

Если зададим $\bar{d}_2 = 1$, то получим уравнение (6). Таким образом, получили взаимно простые полиномы $\bar{n}(s)$ и $\bar{d}(s)$, которые соответствуют (8).

Пример 5 [1, p. 194–195]. Найдем взаимно простое разложение для передаточной функции

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \frac{6s^3 + s^2 + 3s - 20}{2s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 16s + 10}, \tag{9}$$

где

$$n(s) = (s^2 + 1,5s + 2,4946)(s + 1,33)\,,$$

$$d(s) = (s^2 + 1,5s + 2,4946)(s^2 + 2s + 2)\,,$$

т. е. для числителя и знаменателя имеются общие множители $s^2+1,5s+$ $+2,4946$. В данном случае $n=4$ и $m=3$. Составим матрицу Сильвестра: первый и второй столбцы – это столбцы d и n, дополненные снизу нулями так, чтобы высота столбца была равна $2n=2\cdot 4=8$. Справа дописываем столбцы d и n со смещением вниз на одну позицию и с дополнением вверху нулями. В итоге эту процедуру повторяем столько раз, чтобы размер матрицы $\Re$ стал равным $2n\times 2n=8\times 8$:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} d & n & d & n & d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array} &
\underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
16 & 3 & 10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
15 & 1 & 16 & 3 & 10 & -20 & 0 & 0 \\
7 & 6 & 15 & 1 & 16 & 3 & 10 & -20 \\
2 & 0 & 7 & 6 & 15 & 1 & 16 & 3 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 6 & 15 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{array}\right)}_{\Re}
\end{array}
\left(\begin{array}{c}
-\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ \hdashline -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ \hdashline -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \\ \hdashline -\bar{n}_3 \\ \bar{d}_3
\end{array}\right)
=
\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}.
$$

Так как матрица $\Re$ размером 8 × 8 имеет ранг $q=6$, т. е. матрица $\Re$ вырожденная, это подтверждает наличие одинаковых корней в $n(s)$ и $d(s)$. Другими словами, эти полиномы не взаимно простые. Очевидно, что все четыре d-столбца, а именно 1, 3, 5 и 7-й столбцы матрицы $\Re$, линейно независимые. Заключаем, что в матрице $\Re$ только два n-столбца $(6-4=2)$, а именно 2 и 4-й столбцы линейно независимые, откуда получаем, что $\mu=2$. Тогда $(\mu+1)$-й n-столбец, т. е. третий n-столбец – это первый n-столбец, линейно зависимый от столбцов слева. Таким образом, матрица $\Re_1$ включает первый зависимый n-столбец, т. е. в матрицу $\Re_1$ размером 8×6 входят шесть столбцов слева из матрицы $\Re$. Это можно прокомментировать следующим образом: матрица $\Re$ вырожденная, т. е. должны сократиться одинаковые корни в числителе и знаменателе, и у матрицы должно остаться $2\cdot 3=6$ столбцов. Так как все элементы последней строки матрицы $\Re_1$ нулевые, ее можем выбросить.

То есть матрица $\Re_1$ будет размером 7×6 и ранга пять: размерность ядра – единица.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} d & n & d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc:cc}
10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
16 & 3 & 10 & -20 & 0 & 0 \\
15 & 1 & 16 & 3 & 10 & -20 \\
7 & 6 & 15 & 1 & 16 & 3 \\
2 & 0 & 7 & 6 & 15 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{array}\right)}_{\Re_1}
\end{array}
\underbrace{\left(\begin{array}{c} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ \hdashline -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ \hdashline -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \end{array}\right)}_{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Воспользуемся командой x=null($\Re_1$) Matlab для определения вектора из ядра:

```
>> n=[-20 3 1 6 0]; d=[10 16 15 7 2]; R1=[d 0 0; n 0 0; 0 d 0; 0 n 0; 0 0 d; 0 0 n]';
>> x=null(R1)
x =[0.686   0.343   -0.5145   0.3430   0.0000   0.1715]'.
```

В результате получили вектор из ядра x, который «нормируем»:

```
>> x1=x/x(6),
x1 =[4   2   -3   2   0   1]'
```

Мы нашли вектор x_1 из ядра $\Re_1$, т. е. $\Re_1 x_1 = 0$. Другими словами, в соответствии с (10) нашли коэффициенты полиномов $\bar{n}(s)$ и $\bar{d}(s)$:

$$(-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0 \quad -\bar{n}_1 \quad \bar{d}_1 \quad -\bar{n}_2 \quad \bar{d}_2)^t = (4 \quad 2 \quad -3 \quad 2 \quad 0 \quad 1)^t,$$

что соответствует

$$\bar{n}(s) = -4 + 3s + 0 \cdot s^2, \ \bar{d}(s) = 2 + 2s + s^2.$$

Взаимно простое представление передаточной функции (9) найдено:

$$w(s)=\frac{6s^3+s^2+3s-20}{2s^4+7s^3+15s^2+16s+10}=\frac{3s-4}{s^2+2s+2}\,.$$

Пример 6. Найдем взаимно простое разложение для передаточной функции

$$\frac{n(s)}{d(s)}=\frac{s^3+3s^2+3s+1}{s^5+6s^4+14s^3+16s^2+9s+2}\,,$$

где $n(s)=(s+1)(s+1)(s+1)$, $d(s)=(s+1)(s+1)(s+1)(s+1)(s+2)$, но предполагаем, что нам неизвестно это разложение. В данном случае $n=5$ и $m=3$. Используя уравнение (3) для данного случая, получим

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} d & n & d & n & d & n & d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array} &
\underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc:cc}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
16 & 3 & 9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
14 & 1 & 16 & 3 & 9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 14 & 1 & 16 & 3 & 9 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 0 & 6 & 0 & 14 & 1 & 16 & 3 & 9 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 14 & 1 & 16 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 14 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)}_{\Re}
\end{array}
\left(\begin{array}{c}
-\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ \hdashline -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ \hdashline -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \\ \hdashline -\bar{n}_3 \\ \bar{d}_3 \\ \hdashline -\bar{n}_4 \\ \bar{d}_4
\end{array}\right)
=
\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Матрица $\Re$ размером $2n\times 2n=10\times 10$ имеет ранг $q=7$, что подтверждает наличие одинаковых корней в $n(s)$ и $d(s)$. Очевидно, что все d-столбцы линейно независимые, откуда следует, что второй и четвертый n-столбцы также линейно независимые ($7-5=2$), следовательно, получаем $\mu=2$. Далее, третий n-столбец – это первый n-столбец, линейно зависимый от столбцов слева (11). Вычеркнем все столбцы правее шестого столбца. Так как все элементы 9-й и 10-й строк матрицы $\Re$ после вычеркивания столбцов 7, 8, 9 и 10 нулевые, их также вычеркиваем. В результате получим матрицу $\Re_1$ размером 8×6 и ранга пять:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} d & n & d & n & d & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array} & \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc:cc:} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 3 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 14 & 1 & 16 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 0 & 14 & 1 & 16 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\Re_1} \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{c} -\bar{n}_0 \\ \bar{d}_0 \\ \hdashline -\bar{n}_1 \\ \bar{d}_1 \\ \hdashline -\bar{n}_2 \\ \bar{d}_2 \end{array}\right)}_{x} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Очевидно, что размерность ядра $\Re_1$ – единица. Решим уравнение (12):

$$x = [0.2582 \quad -0.5146 \quad 0.00 \quad -0.7746 \quad 0.0 \quad -0.2582]^t.$$

После нормировки получим

$$x_1 = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1]^t.$$

Другими словами, нашли коэффициенты полиномов $\bar{n}(s)$ и $\bar{d}(s)$:

$$(-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0 \quad -\bar{n}_1 \quad \bar{d}_1 \quad -\bar{n}_2 \quad \bar{d}_2)^t = (-1 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1)^t,$$

что соответствует

$$\bar{n}(s) = 1 + 0s + 0\cdot s^2, \quad \bar{d}(s) = 2 + 3s + s^2,$$

или

$$\frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 16s^2 + 9s + 2} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Задача поиска взаимно простого разложения решена с использованием алгоритма, предложенного в работе [1, p. 192–195] и детализированного в данной работе. Следует отметить, что количество линейно независимых n-столбцов ровно степени знаменателя приведенной передаточной функции и обозначается через μ.

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗАИМНО ПРОСТОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Предполагаем, что задана передаточная функция $w(s) = n(s) / d(s)$, где

$$n(s) = \sum_{i=0}^{m} n_i s^i, \quad d(s) = \sum_{i=0}^{n} d_i s^i$$

такая, что степень числителя меньше или равна степени знаменателя $m \le n$. Подчеркнем, что $n \ge 1$. Здесь используем обозначения n-столбца и d-столбца:

$$n = (n_0, n_1, ..., n_m)^t, \quad d = (d_0, d_1, ..., d_n)^t .$$

Два столбца d и n, стоящие рядом и дополненные нулями сверху и снизу так, чтобы число элементов в столбцах равнялось $2n$, будем называть (dn)-блочным столбцом. В алгоритме осуществляется исследование уравнения (4) $\Re x = 0$, включающее в себя матрицу Сильвестра $\Re$ и вектор коэффициентов из взаимно простого представления передаточной функции

$$x = (-\bar{n}_0 \quad \bar{d}_0 \mid -\bar{n}_1 \quad \bar{d}_1 \quad \ldots \quad -\bar{n}_{n-1} \quad \bar{d}_{n-1})^t .$$

Алгоритм состоит из ряда действий.

◦ Составление матрицы Сильвестра $\Re$ размером $2n \times 2n$ из n (dn)-блоков: первый (dn)-столбец дополнен снизу нулями до размера $2n$, второй (dn)-столбец получим из первого (dn)-столбца смещением вниз на одну позицию и дополнением сверху нулями. Аналогичным образом строим (dn)-столбцы в количестве n. Формируем x-столбец из коэффициентов полиномов $\bar{n}(s)$ и $\bar{d}(s)$ размером $2n$.

◦ Вычисление ранга матрицы $\Re$: $q = rank(\Re)$.

◦ Если $q = 2n$, то передаточная функция $w(s) = n(s) / d(s)$ взаимно простая и, следовательно, выполняется ***выход из алгоритма***, иначе $q < 2n$ – ищем взаимно простое разложение – переход на следующий шаг.

◦ Формирование матрицы $\Re_1$, состоящей из линейно независимых столбцов матрицы $\Re$, взятых слева направо, включая первый линейно зависимый столбец:

– так как все *d*-столбцы в количестве n матрицы $\Re$ линейно не зависимы от всех столбцов слева, определяем количество μ линейно независимых *n*-столбцов слева направо в матрице $\Re$: $\mu = q - n$ – от ранга q матрицы $\Re$ отнимаем n – количество *d*-столбцов;

– ($\mu + 1$)-й *n*-столбец – это первый линейно зависимый *n*-столбец (матрица $\Re_1$ состоит из $\mu + 1$ *d*-столбцов (все они линейно независимые) и $\mu + 1$ *n*-столбцов (последний *n*-столбец линейно зависит от предыдущих));

– если внизу в матрице $\Re_1$ имеется нулевая/нулевые строка/строки, то ее/их вычеркиваем – матрица $\Re_1$ сформирована (матрица $\Re_1$ имеет ранг $2\mu + 1$ и содержит $2(\mu + 1)$ столбец).

◦ Формируем вектор x – у исходного вектора x вычеркиваем столько последних элементов, сколько столбцов вычеркнули при формировании матрицы $\Re_1$.

– Для определения ненулевого решения x (состоит из коэффициентов взаимно простых полиномов числителя и знаменателя передаточной функции уравнения $\Re_1 x = 0$) можно воспользоваться командой Matlab ***null***($\Re_1$) – вектор x принадлежит ядру $\Re_1$.

– Найденный вектор нормируем – элементы вектора x делим на последний его элемент (можно назвать нормированным вектором из ядра – *monic null vector*).

– Выпишем взаимно простые полиномы передаточной функции объекта.

Конец алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимость приведения передаточной функции $w(s) = n(s) / d(s)$, где $n(s)$ и $d(s)$ – полиномы от s, могущие содержать одинаковые корни, к взаимно простому виду объясняется тем, что это условие обязательно при анализе и синтезе САУ. Как было сказано ранее, для этого можно воспользоваться несколькими алгоритмами, а при работе на персональном компьютере можно использовать какой-либо стандартный алгоритм (команду). С учетом того, что эта задача может решаться с применением матрицы Сильвестра, которую используем также при синтезе САУ, в данной работе проведена формализация решения поставленной задачи с использованием указанной матрицы. При этой формализации были уточнены положения алгоритма, которые ранее были упущены при исследовании этого алгоритма другими авторами (например, [1, 2, 19, 20]). Работа алгоритма показана на шести примерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – 3rd ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.

2. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984. – 636 p.

3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

4. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

5. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.

6. *Воевода А.А., Вороной В.В., Шоба Е.В.* Модальный синтез многоканального регулятора пониженного порядка с использованием «обратной» производной на примере трехмассовой системы // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1 (46). – С. 15–22.

7. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 1 (38). – С. 195–198.

8. *Воевода А.А.* Стабилизация двухмассовой системы: полиномиальный метод синтеза двухканальной системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 4 (58). – С. 121–124.

9. *Бобобеков К.М.* О структурных преобразованиях многоканальных линейных систем в матричном полиномиальном представлении // Научный вестник НГТУ. – 2017. – № 2 (67). – С. 7–25.

10. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Синтез линейных многоканальных регуляторов с использованием структурных преобразований // Вестник Астраханского государственного технического университета. – 2017. – № 3. – С. 7–20.

11. *Бобобеков К.М.* Полиномиальный метод синтеза одноканальной двухмассовой системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 25–36.

12. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Расчет параметров регулятора для стабилизации перевернутого маятника по углу отклонения // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 18–32.

13. *Бобобеков К.М.* О нормировании полиномов знаменателей объекта и регулятора при полиномиальном методе синтеза // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 7–24.

14. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* Управление перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 3–14.

15. *Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А.* Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учебное пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2011. – 464 с.

16. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Решение переопределенной линейной системы уравнений при полиномиальном синтезе регуляторов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2017. – № 4 (56). – С. 84–99.

17. *Воевода А.А.* Матричные передаточные функции (основные понятия): конспект лекций по курсу «Проектирование систем управления» для 4–5 курсов АВТФ (специальность 2101) / Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. – 94 с.

18. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов заданной структуры // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2 (51). – С. 214–218.

19. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.

20. *Шоба Е.В.* Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.

21. The modeling tests of the new PID-regulators structures / A.A. Voevoda, V.A. Zhmud, R.Y. Ishimtsev, V.M. Semibalamut // Proceedings of the 18th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, ASM 2009, 7–9 September, 2009, Palma de Mallorka, Spain. – [S. l.], 2009. – P. 165–168.

22. *Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.* О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

23. *Воевода А.А., Вороной В.В.* Модальный синтез регуляторов пониженного порядка методом дифференцирования характеристического полинома // Сборник научных трудов НГТУ. – 2011. – № 1 (63). – С. 3–12.

24. *Бобобеков К.М.* Об особенностях реализации двухпараметрического регулятора стабилизации положения маятника в среде Matlab // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 115–130.

Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович, специалист по технологиям машиностроения, 2008–2013 гг. – кафедра «Технология машиностроения металлорежущих станков и инструментов» механико-технологического факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2013 по 2015 г. ассистент Таджикского технического университета. С 2015 г. аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. Имеет более 20 публикаций. E-mail: kurbon_111@mail.ru

Тауров Эмонуддин Шарифович, инженер-механик по специальности «Автомобили и автомобильное хозяйство», 1998–2003 гг. – кафедра «Автомобили и автомобильное хозяйство» автодорожного факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2003 по 2008 г. ассистент Таджикского технического университета. С 2005 по 2008 г. аспирант кафедры «Теплотехника и теплотехническое оборудование» ТТУ по специальности 01.04.14 «Теоретические основы теплотехники». С 2008 г. старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ТТУ им. акад. М.С. Осими. В настоящее время специализируется в области теплофизики. Имеет более 25 публикаций. E-mail: taurov79@mail.ru

Calculation of a mutually simple expansion for single-channel transfer functions using the Sylvester matrix*

K.M. Bobobekov[1], E.Sh. Taurov[2]

[1] *Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department Automatics. E-mail: kurbon_111@mail.ru*

[2] *Novosibirsk State Technical University, 10 academicians of Rajabovs Prospekt, Dushanbe, 734042, Republic of Tajikistan, senior teacher of Department Theoretical Mechanics and Strength of Materials. E-mail: taurov79@mail.ru*

Depending on the mathematical used description of the object, for example, the use of differential equations, transfer functions, polynomial descriptions, various methods of synthesis develop. When synthesizing regulators, it is important to formalize the synthesis procedure in such a way as to result in the desired requirements for an automatic control (regulation) system. In the analysis and synthesis of automatic control systems, as a rule, a mutually simple decomposition of the transfer function is used, or in other words, the polynomials of the numerator and the denominator do not have the same roots. To solve this problem, it's easiest to use the *roots* command or the *minreal* command, for example, if we use the Matlab package. Usually, with a polynomial method of synthesis, pass from polynomial equations to numerical matrix equations, which leads to the so-called Sylvester matrix. To determine mutually simple polynomials, as is known, one can use the Sylvester matrix. If the Sylvester matrix is singular, then this suggests the existence of identical roots of the numerator and denominator polynomials. In this paper, we investigate the possibility of using the Sylvester matrix and be defined the algorithm to bringing to a coprime kind. The algorithm is illustrated in five examples. This is explained by the fact that this technique can also be used to solve the problem of synthesis of single-channel and multi-channel systems. The topicality of solving the problem of reduction to a coprime (relatively simple) form is explained by the fact that this method is used in solving the problem of a polynomial method for the synthesis of single-channel and multichannel systems.

Keywords: transfer function, single-channel system, a coprime fraction, Sylvester matrix, singular matrix, homogeneous linear equation system

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-7-30

REFERENCES

1. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 3rd ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.

2. Chen C.T. *Linear system theory and design*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984. 636 p.

* *Received 08 November 2017.*

3. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p.

4. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2. *Mnogomernye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.

5. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.

6. Voevoda A.A., Voronoy V.V., Shoba E.B. Modal'nyi sintez mnogokanal'nogo regulyatora ponizhennogo poryadka s ispol'zovaniem "obratnoi" proizvodnoi na primere trekhmassovoi sistemy [Modal synthesis of multi-channel low-order controller using the "reverse" derivative principle for three-mass system]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (46), pp. 15–22.

7. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya [Stabilisation of two-mass system by a modal method of synthesis with polynomial factorization]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (38), pp. 195–198.

8. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: polinomial'nyi metod sinteza dvukhkanal'noi sistemy [Two-mass system stabilization: polynomial method of two-channel system synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 4 (58), pp. 121–124.

9. Bobobekov K.M. O strukturnykh preobrazovaniyakh mnogokanal'nykh lineinykh sistem v matrichnom polinomial'nom predstavlenii [About structural transformations of multichannel linear systems in the matrix polynomial representation]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhniches-kogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 2 (67), pp. 7–25.

10. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Sintez lineinykh mnogokanal'nykh regulyatorov s ispol'zovaniem strukturnykh preobrazovanii [Synthesis of linear multichannel regulators using structural transformations]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Astrakhan State Technical University*, 2017, no. 3, pp. 7–20.

11. Bobobekov K.M. Polinomial'nyi metod sinteza odnokanal'noi dvukhmassovoi sistemy [A polynomial method for the synthesis of single-channel two-mass system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 25–36.

12. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Raschet parametrov regulyatora dlya stabilizatsii perevernutogo mayatnika po uglu otkloneniya [Calculation of controller parameters for the stabilization of the inverted pendulum by corner deviation]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 18–32.

13. Bobobekov K.M. O normirovanii polinomov znamenatelei ob"ekta i regulyatora pri polinomial'nom metode sinteza [About rationing polynomials denominator object and regulator during polynomial method of synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 7–24.

14. Voevoda A.A., Shoba E.B. Upravlenie perevernutym mayatnikom [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 3–14.

15. Gaiduk A.R., Belyaev V.E., P'yavchenko T.A. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya v primerakh i zadachakh s resheniyami v MATLAB* [Theory of automatic control in examples and problems with solutions in MATLAB]. 2nd ed., rev. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011. 464 p.

16. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Reshenie pereopredelennoi lineinoi sistemy uravnenii pri polinomial'nom sinteze regulyatorov [Solution of an overdetermined linear system of equations for polynomial synthesis of regulators]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System analysis. Modeling*, 2017, no. 4 (56), pp. 84–99.

17. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii: (osnovnye ponyatiya)* [Matrix transfer functions (basic concepts)]. Novosibirsk State Technical University. Novosibirsk, NSTU Publ., 1994. 94 p.

18. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov zadannoi struktury [Polynomial method for calculating multi-channel controllers of a given structure]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (51), pp. 214–218.

19. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [A polynomial method for

calculating the multi-channel controllers low order. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

20. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.

21. Voevoda A.A., Zhmud V.A., Ishimtsev R.Y., Semibalamut V.M. The modeling tests of the new PID-regulators structures. *Proceedings of the IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, ASM 2009*, Palma de Mallorka, Spain, 7–9 September, 2009, pp. 165–168.

22. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. O ponizhenii poryadka stabiliziruyushchego upravleniya na primere dvoinogo perevernutogo mayatnika [Reducing the stabi-lizing control order for a double inverted pendulum]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumenta-tion and Data Processing*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 69–83. (In Russian).

23. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Modal'nyi sintez regulyatorov ponizhennogo poryadka metodom differentsirovaniya kharakteristicheskogo polinoma [Modal design of reduced order controllers by method of differentiation of the characteristic polynomial]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 1 (63), pp. 3–12.

24. Bobobekov K.M. Ob osobennostyakh realizatsii dvukhparametricheskogo regulyatora stabilizatsii polozheniya mayatnika v srede Matlab [On the peculiarities of realization the two-parameter regulator of stabilization the position pendulum in environment MATLAB]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 115–130.

Для цитирования:

Бобобеков К.М., Тауров Э.Ш. Вычисление взаимно простого разложения для одноканальных передаточных функций с использованием матрицы Сильвестра // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 7–30. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-7-30.

For citation:

Bobobekov K.M., Taurov E.Sh. Vychislenie vzaimno prostogo razlozheniya dlya odnokanal'nykh peredatochnykh funktsii s ispol'zovaniem matritsy Sil'vestra [Calculation of a mutually simple expansion for single-channel transfer functions using the Sylvester matrix]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 7–30. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-7-30.