СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2018. – № 1 (91).** – 31–67

УДК 681.513

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО МЕТОДА СИНТЕЗА ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ СИЛЬВЕСТРА*

К.М. БОБОБЕКОВ

630087, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: kurbon_111@mail.ru

Метод синтеза линейных регуляторов для линейных объектов с использованием полиномиального разложения наряду с классическими методами синтеза, такими как синтез в пространстве состояний с использованием наблюдателей полного и пониженного порядка, синтез с использованием передаточных функций и логарифмических частотных характеристик, оптимальные методы синтеза и другие, находит все большее распространение. При полиномиальном методе синтеза, как правило, используется переход от полиномиальных представлений к матричным числовым уравнениям, что приводит к уравнениям с неквадратной вырожденной матрицей Сильвестра. При решении задачи формализации алгоритмов синтеза для многоканальных систем опираются на алгоритмы синтеза одноканальных систем. В данной работе используются результаты, полученные в [1, 2] и других работах, в которых перечисляются требования, предъявляемые к полиномиальному описанию объекта: правильность (строгая правильность) передаточной функции объекта, взаимная простота полиномов числителя и знаменателя передаточной функции объекта. Особо следует отметить требование взаимной простоты полиномов числителя и знаменателя. Невыполнение этого требования приводит прежде всего к вырождению матрицы Сильвестра, а также может привести к нарушению управляемости, наблюдаемости и т. д. Кроме того, необходимо учесть ограничение, накладываемое на выбор степени регулятора, что равносильно ограничению на желаемый характеристический полином замкнутой системы. На основе анализа расчетов многочисленных примеров синтеза одноканальных регуляторов, шесть из которых приведены в данной статье, приведен формализованный алгоритм синтеза регуляторов. Во многих работах при решении задачи синтеза линейно зависимые строки / столбцы в матрице Сильвестра обнуляют совместно с соответствующими параметрами регулятора. В данной работе предлагается линейно зависимые строки с соответствующими неизвестными параметрами регулятора переносить в правую часть уравнения. Это приводит к появлению свободных параметров регулятора, которые можно задавать произвольно (в некоторых случаях накладываются дополнительные ограничения). Это соответствует общему решению системы линейных уравнений, которые при задании сво-

* Статья получена 23 ноября 2017 г.

бодным параметром регулятора конкретных значений приводит к различным вариантам синтезируемого регулятора.

Ключевые слова: передаточная функция объекта, строго правильный и не строго правильный объект, взаимно простые и не взаимно простые полиномы, линейное уравнение, однородное и неоднородное полиномиальное уравнение, синтез одноканальных систем, матрица Сильвестра, алгоритм синтеза регуляторов

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-31-67

ВВЕДЕНИЕ

Взаимная простота (*coprime*) полиномов числителя и знаменателя передаточной функции как объекта, так и регулятора играет важную роль при анализе и синтезе систем автоматического управления (САУ) [1, 2, 5]. Могут возникнуть проблемы с управляемостью и наблюдаемостью в случае, если полиномы числителя и знаменателя объекта имеют одинаковые корни. Также при анализе и синтезе САУ следует учитывать условие *правильности* (*proper*) или *строгой правильности* (*strictly proper*) [13] передаточной функции объекта. В работе подробно анализируется задача синтез одноканальной системы в случае, когда полиномы числителя и знаменателя передаточной функции объекта взаимно простые [8]. Также рассматривается задача выбора степени регулятора и степени характеристического полинома замкнутой системы (ХПЗС).

Задача синтеза систем управления в теории автоматического управления [1–5, 9, 11, 15, 18, 22] занимает очень важное место, так как она позволяет создавать системы, обеспечивающие различные технические требования, возникающие в различных областях техники. Реальные технические системы можно рассматривать как многоканальные системы, которые в связи со сложностью процессов вынуждают использовать многоканальные регуляторы, расчет параметров которых – довольно сложная задача, которая в настоящее время интенсивно развивается (Гайдук А.Р., Воронов В.В., Ким Д.П., Chen C.T., Doyle J.C., Dorf R.C., Bishop R.H.). В частности, задача синтеза многоканальных регуляторов в САУ, где объект и регулятор предполагаются линейными, рассматривалась в диссертационных работах [12, 13]. Аппарат полиномиального матричного разложения, используемый в последних вышеуказанных работах, показал свою перспективность и используется в данной работе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем одноканальные системы автоматического управления (рис. 1), где v – задающее воздействие (входной сигнал), y – выходной сигнал, e – ошибка (разность между входным v и выходным сигналом y),

$w_r(s) = x(s) / y(s)$ – передаточная функция регулятора, u – управляющий сигнал, $w_{ob}(s) = n(s) / d(s)$ – передаточная функция объекта. Здесь $x(s)$, $y(s)$, $n(s)$ и $d(s)$ – полиномы от s. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl}(s) = (x(s)n(s)) / (y(s)d(s) + x(s)n(s)) . \quad (1)$$

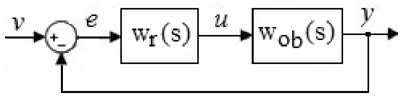

Рис. 1. Структурная схема одноканальной системы с единичной обратной связью

Знаменатель передаточной функции $w_{cl}(s)$ (1) – *характеристический полином замкнутой системы* (ХПЗС) и при решении задачи синтеза приравнивается к желаемому ХПЗС $c(s)$:

$$y(s)d(s) + x(s)n(s) = c(s) . \quad (2)$$

Постановка задачи заключается в том, что для заданных полиномов $d(s)$, $n(s)$ и $c(s)$ необходимо определить неизвестные полиномы $y(s)$ и $x(s)$ из линейного уравнения (2), которое можно рассматривать как линейное уравнение относительно $y(s)$ и $x(s)$ – т. е. искать решение уравнения (2) как сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, не задумываясь над физическим смыслом задачи. Но правильнее будет учитывать физическую суть задачи, что накладывает дополнительные ограничения на объект, желаемый характеристический полином и регулятор. Последовательно рассмотрим два эти подхода с целью формализации алгоритма синтеза, рассмотренного в ряде работ, в том числе в [1].

2. О РЕШЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Так как задача синтеза САУ сводится к решению полиномиального уравнения, остановимся подробнее на этой задаче.

Теорема 1 [1, p. 272] Для заданных полиномов $d(s)$, $n(s)$ и $c(s)$ полиномиальное решение $y(s)$ и $x(s)$ уравнения

$$y(s)d(s) + x(s)n(s) = c(s)$$

существует тогда и только тогда, когда $d(s)$ и $n(s)$ взаимно простые.

Комментарий: здесь нет требования на правильность объекта и нет гарантии, что регулятор будет правильным. Необходимость требования взаимной простоты состоит в том, что если полиномы $d(s)$ и $n(s)$ не взаимно простые, например, они включают общий полиномиальный множитель $\alpha(s)$, то для существования решения (2) необходимо включить $\alpha(s)$ в $c(s)$, в противном случае решение не существует. Для существования решения необходимо наложить ограничения на выбор $c(s)$.

Схема поиска решения уравнения (2) очевидна. Вначале ищем частное решение неоднородного уравнения (2). Для этого с использованием алгоритма Евклида находим решение $(\overline{x}(s),\ \overline{y}(s))$ уравнения

$$\overline{y}(s)d(s)+\overline{x}(s)n(s)=1 .$$

Далее ищем решение уравнения

$$c(s)\overline{y}(s)d(s)+c(s)\overline{x}(s)n(s)=c(s) ,$$

которое равно $(c(s)\overline{x}(s),\ c(s)\overline{y}(s))$ – это частное решение неоднородного уравнения (2). Общее решение однородного уравнения

$$\hat{y}(s)d(s)+\hat{x}(s)n(s)=0$$

практически очевидно: $\hat{y}(s)=-n(s)$ и $\hat{x}(s)=d(s)$. В итоге общее решение уравнения (2) следующее:

$$y(s)=\overline{y}(s)c(s)+q(s)\hat{y}(s)\,,\ \ x(s)=\overline{x}(s)c(s)+q(s)\hat{x}(s) .$$

Здесь $q(s)$ – любой полином (можем задавать произвольно).

Пример 1 [1, p. 272]. Используем вышеприведенные рассуждения для решения уравнения (2) при

$$n(s)=s-2\,,\quad d(s)=s^2-1\,,\quad c(s)=s^3+4s^2+6s+4\,,$$

где $\deg d(s)<\deg c(s)$. Для удобства назовем $n(s)$ и $d(s)$ полиномами числителя и знаменателя передаточной функции, а $c(s)$ – желаемым характеристическим полиномом. С точки зрения алгебры для определения неизвестных полиномов $y(s)$ и $x(s)$ необходимо найти общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения. Тогда сумма их и будет общим решением (2).

Итак, запишем однородное уравнение

$$\hat{y}(s)(s^2-1)+\hat{x}(s)(s-2)=0$$

и найдем его решение $\hat{y}(s)$ и $\hat{x}(s)$:

$$\hat{y}(s)=-n(s)q(s)=-(s-2)q(s)\,,\ \hat{x}(s)=d(s)q(s)=(s^2-1)q(s)\,. \qquad (3)$$

Уравнение (3) – это общее решение однородного уравнения, причем $q(s)$ может быть задано любым, в том числе и нулевым.

Запишем неоднородное уравнение, причем возьмем правую часть равной единице

$$\overline{y}(s)(s^2-1)+\overline{x}(s)(s-2)=1\,.$$

Полиномы $\overline{y}(s)$ и $\overline{x}(s)$ можно получить при помощи алгоритма Евклида [2]. Тогда $\overline{y}(s)=1/3$ и $\overline{x}(s)=-(s+2)/3$. Если единицу в правой части заменить на $c(s)$, то частное решение неоднородного уравнения будет равно

$$\overline{y}(s)=\frac{1}{3}c(s)\,,\qquad \overline{x}(s)=\frac{-(s+2)}{3}c(s)\,.$$

Итак, можем записать общее решение:

$$\begin{aligned} y(s)&=\frac{1}{3}(s^3+4s^2+6s+4)+q(s)(-s+2),\\ x(s)&=-\frac{1}{3}(s+2)(s^3+4s^2+6s+4)+q(s)(s^2-1). \end{aligned} \qquad (4)$$

Уравнение (4) – это общее решение уравнения (2), содержащее «свободный параметр» $q(s)$. Если зададим $q(s)=0$, получим

$$x(s)=-(s+2)(s^3+4s^2+6s+4)\,,\ y(s)=s^3+4s^2+6s+4\,.$$

Выше полиномы $x(s)$ и $y(s)$ были названы полиномами числителя и знаменателя регулятора. Следовательно, произойдет *сокращение полиномов* числителя и знаменателя, и, кроме того, получим *неправильный регулятор* $w_r(s) = -(s+2)$ – степень числителя больше степени знаменателя, что может вызвать затруднение при реализации регулятора.

Если зададим $q(s) = (s^2 + 6s + 15)/3$, то получим правильный регулятор

$$w_r(s) = \frac{-22s - 23}{3s + 34},$$

а если зададим $q(s) = (1{,}1s^2 + 6s + 15)/3$, то снова получим *неправильный* регулятор

$$w_r(s) = \frac{0{,}1s^4 - 0{,}1s^2 - 22s - 23}{-0{,}1s^3 + 0{,}2s^2 + 3s + 34}.$$

Если выбрать $q(s) = -2/3$, то $y(s)$ не будет содержать свободный член и система приобретает свойство астатизма.

3. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА

Далее рассматриваем систему (рис.1), где полиномы числителя и знаменателя передаточных функции объекта $w_{ob}(s) = n(s)/d(s)$ и регулятора $w_r(s) = x(s)/y(s)$ имеют вещественные коэффициенты и, следовательно, полюса системы, т. е. корни ХПЗС $y(s)d(s) + x(s)n(s) = c(s)$ будут либо вещественными, либо комплексно-сопряженными. В данной постановке задачи при помощи выбора $x(s)$ и $y(s)$ решается задача «смещения» полюсов объекта, но не решается задача изменения (смещения) нулей объекта. Действительно, это очевидно:

$$w_{cl}(s) = \big(x(s)n(s)\big)/\big(y(s)d(s) + x(s)n(s)\big).$$

Вместо прямого решения полиномиального уравнения (2) преобразуем его в «набор» линейных алгебраических уравнений. Вспоминаем, что рассматриваем объекты строго правильные $\deg n(s) < \deg d(s) = n$ и ищем регулятор правильный, но не строго правильный $\deg x(s) \le \deg y(s) = m$. Тогда $c(s)$ в уравнении (2) имеет степень не выше $n+m$. Развернем полиномы, входящие в (2):

$$d(s) = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \cdots + d_n s^n,$$

$$n(s) = n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + \cdots + n_n s^n,$$

$$y(s) = y_0 + y_1 s + y_2 s^2 + \cdots + y_m s^m,$$

$$x(s) = x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + \cdots + x_m s^m,$$

$$c(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_{n+m} s^{n+m}.$$

Здесь все коэффициенты являются вещественными константами, не обязательно ненулевыми (в частности, $d_n \ne 0$). Подставляя их в (2) и сопоставляя коэффициенты при одинаковых степенях *s*, получим $n+m+1$ уравнений:

$$y_0 d_0 + x_0 n_0 = c_0,$$

$$y_0 d_1 + x_0 n_1 + y_1 d_0 + x_1 n_1 = c_1,$$

$$\cdots$$

$$y_m d_n + x_m n_n = c_{n+m}.$$

Они могут быть записаны в матричном виде

$$\underbrace{[y_0\ x_0\ \ y_1\ x_1\ \ldots\ y_{m-1}\ x_{m-1}\ \ y_m\ x_m]}_{\mathfrak{I}}\mathfrak{R} = \underbrace{[c_0\ \ c_1\ \ldots\ c_{m+n}]}_{\aleph},$$

или

$$\mathfrak{I}\mathfrak{R} = \aleph. \tag{5}$$

Здесь $\Re$ – матрица Сильвестра[1] (*Sylvester resultant* [1, p. 193]):

$$\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)} = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_n & 0 & \dots & 0 \\ n_0 & n_1 & \dots & n_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_0 & \dots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 \\ \dots & n_0 & \dots & n_{n-1} & n_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_0 & \dots & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n_0 & \dots & n_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В формуле (6), в отличие от (5), указаны размеры матрицы $\Re$.

Матрица $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ имеет $2(m+1)$ строк и $n+m+1$ столбцов и сформирована из коэффициентов полиномов $d(s)$ и $n(s)$. Две первые строки – это просто коэффициенты $y(s)$ и $x(s)$, упорядоченные в соответствии с возрастанием степеней s – так называемая блочная *dn*-строка. Следующие две строки – это две первые строки, смещенные вправо на одну позицию. Мы повторяем этот процесс до тех пор, пока не получим $(m+1)$ пару строк из коэффициентов. Строчный вектор слева в уравнении (5) состоит из коэффициентов регулятора $\Im(s)$, который необходимо найти. Если $\Im(s)$ имеет степень *m*, тогда этот строчный вектор будет содержать $2(m+1)$ элементов. Строчный вектор справа в выражении (5) состоит из коэффициентов $\aleph(s)$. Для вычисления уравнения регулятора необходимо решить линейное алгебраическое уравнение (5).

Используя следствие 3.2 [1, p. 51], мы заключаем, что (5) имеет решение для любого $c(s)$, если и только если $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ имеет ***полный столбцо-***

[1] Количество строк матрицы $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ равно количеству элементов вектора-строки $\Im$, а количество столбцов ровно количеству элементов вектора-строки $\aleph$ (количество коэффициентов желаемого характеристического полинома).

вый ранг. Необходимое условие для $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ иметь полный столбцовый ранг состоит в том, чтобы $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ была квадратная или количество строк было больше, чем количество столбцов, т. е.

$$2(m+1) \geq n+m+1 \text{ или } m \geq n-1 .$$

Если $m < n-1$, тогда $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ будет неполного столбцового ранга и решение может существовать только лишь для некоторых $c(s)$, но не для любых $c(s)$.

Если $m = n-1$, тогда $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ становится квадратной матрицей размера $2n \times 2n$, но $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ невырожденная, если и только если $d(s)$ и $n(s)$ взаимно простые. Таким образом, если $d(s)$ и $n(s)$ взаимно простые, тогда $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ имеет ранг $2n$ (полный столбцовый ранг). Если m увеличить на единицу, тогда число столбцов увеличится на единицу, но число строк увеличится на две. Так как $d_n \neq 0$, новая d-строка линейно независима от предыдущих строк. Таким образом, матрица $\Re_{2(n+1)\times 2(n+1)}$ имеет ранг $2(n+1)$ – полный столбцовый ранг. Повторяя аналогичные рассуждения, заключаем, что если $n(s)$ и $d(s)$ взаимно простые и если $m \geq n-1$, тогда матрица $\Re_{2(m+1)\times(n+m+1)}$ будет полного столбцового ранга. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2 [1, p. 275]. Рассмотрим систему с единичной обратной связью, показанную на рис. 1. Объект описывается строго правильной передаточной функцией $w_{ob}(s) = n(s)/d(s)$, где $n(s)$ и $d(s)$ – взаимно простые полиномы с $\deg n(s) < \deg d(s) = n$. Пусть $m \geq n-1$. Тогда для любого полинома $c(s)$ степени $n+m$ существует правильный регулятор $w_r(s) = x(s)/y(s)$ степени m такой, что передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl}(s) = \frac{n(s)\,x(s)}{y(s)\,d(s) + x(s)\,n(s)} = \frac{n(s)\,x(s)}{c(s)} .$$

Для проверки некоторых особенностей, связанных с формированием матрицы Сильвестра и с решением системы уравнений (5), приведем несколько примеров расчета регулятора. Это позволит сформулировать алгоритм синтеза.

4. ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ

Пример 2. В этом примере рассмотрим случай, когда полиномы $n(s)$ и $d(s)$ не взаимно простые, т. е. нарушим необходимое условие взаимной простоты, указанное в теореме 1, и покажем, что при дополнительных ограничениях, наложенных на $c(s)$, решение существует. В качестве полиномов $n(s)$ и $d(s)$ возьмем *не взаимно простые полиномы* числителя и знаменателя передаточной функции объекта:

$$n(s) = s + 1,\ d(s) = (s + 1)^2,$$

т. е. передаточная функция объекта $w_{ob}(s) = (s + 1) / (s + 1)^2$.

Так как степень объекта $n = 2$, зададим степень регулятора на единицу меньше, т. е. $m = n - 1 = 1$:

$$w_r(s) = x(s) / y(s),$$

где $x(s) = (x_1 s + x_0)$, $y(s) = (y_1 s + y_0)$. В этом примере используем подсказку, приведенную в работе [1, р. 272]: зададим желаемый характеристический полином такой, чтобы один корень совпадал с общим корнем полиномов числителя и знаменателя объекта $c(s) = (s + 1)(s + 2)^2$, т. е.

$$c(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4,$$

что соответствует корням $\{-1\ -2\ -2\}$. Для решения задачи синтеза перейдем от полиномиального уравнения (2) к системе линейных уравнений с вектором неизвестных (5). Для этого сформируем матрицу $\Re$: первая и вторая строка – это строки d и n (блочная dn-строка), дополненные нулями так, чтобы длина строки было равна $n + m + 1$, т. е. равна четырем. Снизу дописываем блочную dn-строку со смещением вправо на одну позицию и с дополнением слева нулями. В итоге эту процедуру повторяем столько раз, чтобы размер матрицы $\Re$ стал равным $(n+m+1)\times(n+m+1)=4\times4$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 & x_0 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}}_{\Im}\underbrace{\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}}_{\Re}=\underbrace{\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}_{\aleph},$$

где $n_0=1$, $n_1=1$, $n_2=0$, $d_0=1$, $d_1=2$ и $d_2=1$. Матрица $\Re$ имеет ранг, равный трем, и это подтверждает, что полиномы $d(s)$ и $n(s)$ не взаимно простые.

Исследуем матрицу $\Re$: при вычеркивании одного из 1-го, 2-го, 3-го или 4-го столбцов ранг матрицы $\Re$ не понижается. При вычеркивании 3-й строки матрицы $\Re$ ранг матрицы понижается, а при вычеркивании одной из 1-й, 2-й или 4-й строки матрицы $\Re$ ранг не меняется. Это говорит о том, что следует проанализировать три варианта решения. Приведем один из вариантов.

Итак, вычеркиваем четвертый столбец из матрицы $\Re$, умноженный на c_3, и обозначим $\Re\to\Re_1$ и $\aleph\to\aleph_1$. Далее перенесем четвертую строку из матрицы $\Re_1$, умноженную на $-x_1$, вправо. После переноса обозначим $\Re_1\to\Re_2$, $\Im\to\Im_1$ и правую частью $\aleph_1\to\aleph_2$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 & x_0 & y_1 \end{pmatrix}}_{\Im_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\Re_2}=\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8-x_1 & 5-x_1 \end{pmatrix}}_{\aleph_2}.$$

Матрица $\Re$ невырожденная, имеет размер 3×3, и ранг равен трем. Не сложно определить $\Im_1$:

$$\Im_1=\aleph_2\Re_2^{-1}=(3-x_1 \quad x_1+1 \quad 1).$$

Вернемся от $\Im_1$ к $\Im$:

$$\Im=(3-x_1 \quad x_1+1 \quad 1 \quad x_1).$$

Передаточная функция регулятора будет равна

$$w_r(s) = \frac{x_1 s + (x_1 + 1)}{s + (3 - x_1)}.$$

Как видно, передаточная функция регулятора содержит «свободный» параметр x_1, и его можно задавать произвольно. Например, если зададим $x_1 = 0$, то получим строго правильный регулятор

$$w_r(s) = \frac{1}{s+3}.$$

Пример 3. Возьмем объект из первого примера:

$$w_{ob}(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s-2}{s^2-1}, \tag{7}$$

где полиномы взаимно простые. Степень объекта n равна 2, *выбираем* степень регулятора на единицу меньше степени объекта $m = n - 1 = 1$, откуда степень ХПЗС $n + m = 3$. Корни системы зададим равными $\{-2, -1 \pm i1\}$, или

$$c(s) = (s+2)(s+1+i1)(s+1-i1) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4,$$

где $c(s)$ – желаемый характеристический полином замкнутой системы. Сформируем матрицу $\Re$: первая и вторая строка – это строки d и n (блочная dn-строка), дополненные нулями так, чтобы длина строки было равна $n + m + 1$, т. е. равна четырем. Снизу дописываем блочную dn-строку со смещением вправо на одну позицию и с дополнением слева нулями. В итоге эту процедуру повторяем столько раз, чтобы размер матрицы $\Re$ стал равным $(n + m + 1) \times (n + m + 1) = 4 \times 4$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 & x_0 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}}_{\Im} \underbrace{\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}}_{\Re} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}_{\aleph}. \tag{8}$$

Здесь $n_0 = -2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $d_0 = -1$, $d_1 = 0$ и $d_2 = 1$. Матрица $\Re$ имеет ранг четыре, и это подтверждает, что полиномы $d(s)$ и $n(s)$ взаимно простые. Определитель $\det(\Re) = -3$ и обусловленность $cond(\Re) = 6$. Из уравнения (8) не сложно определить искомые параметры $\Im$:

$$\begin{pmatrix} y_0 & x_0 & y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,33 & -7,67 & 1 & -7,33 \end{pmatrix}.$$

В результате получили правильный регулятор

$$w_r(s) = \frac{-7,33s - 7,67}{s + 11,33}.$$

Для того чтобы удостовериться в правильности решения, вычислим ХПЗС:

$$(s + 11,33)(s^2 - 1) + (-7,33s - 7,67)(s - 2) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4.$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Пример 4. Продолжим исследование по синтезу регулятора для объекта, рассмотренного в первом и третьем примерах. В отличие от примера 3 зададим степень регулятора равной степени объекта $m = n = 2$ ($m > n - 1!$):

$$w_r(s) = \frac{x_2 s^2 + x_1 s + x_0}{y_2 s^2 + y_1 s + y_0}.$$

Пусть заданы корни системы $\{-2 \ -2 \ -1 \pm i1\}$, т. е. ХПЗС равен

$$c(s) = (s + 2)(s + 2)(s + 1 + i1)(s + 1 - i1) = s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 16s + 8.$$

Сформируем матрицу $\Re$ – транспонированную матрицу Сильвестра. Первые две строки – это блочная *dn*-строка, дополненная нулями так, чтобы длина строки было равна $n + m + 1$, т. е. в данном случае $n + m + 1 = 5$. Следующие блочные *dn*-строки дописываются аналогично примерам 2 и 3. В итоге размер матрицы $\Re$ равен $2(m + 1) \times (n + m + 1) = 6 \times 5$:

$$\underbrace{\left(y_0 \quad x_0 \mid y_1 \quad x_1 \mid y_2 \quad x_2\right)}_{\Im}\underbrace{\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccc} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}}_{\Re} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}^t}_{\aleph}. \tag{9}$$

Значения d_i и n_i берем из выражения (7). Матрица $\Re$ вырожденная, так как ранг равен пяти, $rank(\Re) = 5$ и обусловленность $cond(\Re) = 6$. Следовательно, столбцы матрицы $\Re$ линейно независимые (количество строк больше, чем столбцов). Уравнение (9) имеет много решений[2].

Исследуем матрицу $\Re$: при вычеркивании 4-й или 5-й строк из матрицы $\Re$ ранг матрицы понижается, а при вычеркивании одной из 1, 2, 3 и 6-й строк матрицы $\Re$ ранг не меняется. Это говорит о том, что следует проанализировать четыре варианта решения.

Вариант 1. Так как произведение вектора-строки $\Im$ на матрицу $\Re$ ровно линейной комбинации строк $\Re$ с коэффициентами из $\Im$, можем перенести первую строку матрицы $\Re$, умноженную на $-y_0$, направо. После переноса обозначим $\Re \to \Re_1$, $\Im \to \Im_1$ и правую частью $\aleph \to \aleph_1$:

$$\underbrace{\left(x_0 \mid y_1 \quad x_1 \mid y_2 \quad x_2\right)}_{\Im_1}\underbrace{\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}}_{\Re_1} =$$

---

[2] Для любой заданной матрицы A размером $m \times n$, где $m \geq n$, существует решение x уравнения $xA = y$ для любого вектора-строки y, если и только если матрица A имеет полный столбцовый ранг.

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 - d_0 y_0 & c_1 - d_1 y_0 & c_2 - d_2 y_0 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}}_{\aleph_1}$$

или $\Im_1 \Re_1 = \aleph_1$. Найдем решение последнего уравнения

$$\Im_1 = \aleph_1 \Re_1^{-1},$$

откуда

$$\Im_1 = \begin{pmatrix} -4 - 0,5y_0 & 24,7 - 0,5y_0 & -22,3 & 1 & -0,5y_0 - 18,7 \end{pmatrix}.$$

В решении появился «свободный» параметр y_0. Вернемся от $\Im_1$ к $\Im$:

$$\Im = \begin{pmatrix} y_0 & -4 - 0,5y_0 & 24,7 - 0,5y_0 & -22,3 & 1 & -0,5y_0 - 18,7 \end{pmatrix}.$$

В результате получим правильную передаточную функцию регулятора

$$w_{r1}(s) = \frac{(0,5y_0 - 18,7)s^2 - 22,3s - (4 + 0,5y_0)}{s^2 + (24,7 - 0,5y_0)s + y_0}.$$

Передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl1}(s) = \frac{(\mathrm{s} - 2)\left((0,5y_0 - 18,7)s^2 - 22,3s - (4 + 0,5y_0)\right)}{s^4 + 6s^3 + 14,1s^2 + 15,9s + 8}.$$

Продемонстрируем возможность использования свободы выбора параметра y_0: построим график корневых годографов полинома числителя регулятора (рис. 2).

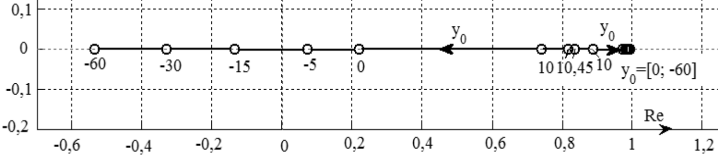

Рис. 2. Корневые годографы для варианта 1

Выбираем значение $y_0 = 10,45$, что соответствует самому левому расположению нулей замкнутой системы, откуда

$$w_{r1}(s) = \frac{-13,475s^2 - 22,3s - 9,225}{s^2 + 19,475s + 10,45}.$$

В этом случае, как видно из рис. 3, система имеет перерегулирование, равное 60…70 %. Если зададим $y_0 = 0$, что соответствует астатизму системы, передаточная функция регулятора

$$w_{r1}(s) = \frac{-18s^2 - 22,3s - 4}{s^2 + 24,7s}$$

будет содержать интегратор и установившаяся ошибка будет равна нулю (рис. 4). Однако по сравнению с предыдущим случаем перерегулирование существенно возрастет.

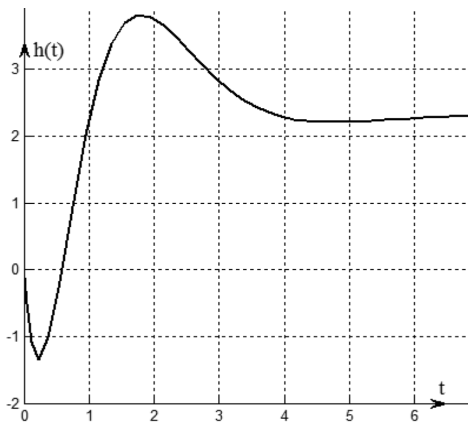

Рис. 3. Переходный процесс системы при подаче единичного входного сигнала при $y_0 = 10,45$

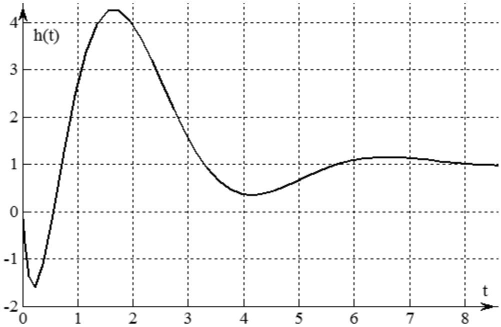

Рис. 4. Переходный процесс системы при $y_0 = 0$

Вариант 2. Перенесем вторую строку матрицы $\Re$, умноженную на $-x_0$, вправо. После переноса обозначим $\Re \to \Re_2$, $\Im \to \Im_2$ и правую часть через $\aleph \to \aleph_2$:

$$\underbrace{\left(y_0 \mid y_1 \quad x_1 \mid y_2 \quad x_2\right)}_{\Im_2}\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array}\right)\begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}}_{\Re_2} =$$

$$= \underbrace{\left(c_0 - n_0 x_0 \quad c_1 - n_1 x_0 \quad c_2 - n_2 x_0 \quad c_3 \quad c_4\right)}_{\aleph_2}$$

или $\Im_2 \Re_2 = \aleph_2$. Найдем решение:

$$\Im_2 = \aleph_2 \Re_2^{-1} = \left(-8 - 2x_0 \quad 28,7 + x_0 \quad -22,3 \quad 1 \quad -22,7 - x_0\right).$$

В решении появился «свободный» параметр x_0. Вернемся от $\Im_2$ к $\Im$:

$$\Im = \left(-8 - 2x_0 \quad x_0 \mid 28,7 + x_0 \quad -22,3 \mid 1 \quad -22,7 - x_0\right).$$

В результате получим правильный регулятор

$$w_{r2}(s) = \frac{(-22,7 - x_0)s^2 - 22,3s + x_0}{s^2 + (28,7 + x_0)s - (8 + 2x_0)},$$

что соответствует

$$w_{cl2}(s) = \frac{(\mathrm{s} - 2)((-22,7 - x_0)s^2 - 22,3s + x_0)}{s^4 + 6s^3 + 14,1s^2 + 15,9s + 8}.$$

Построим график корневых годографов для корней полинома числителя, для чего изменим значение свободного параметра x_0 в пределах от –14 до –8 (рис. 5).

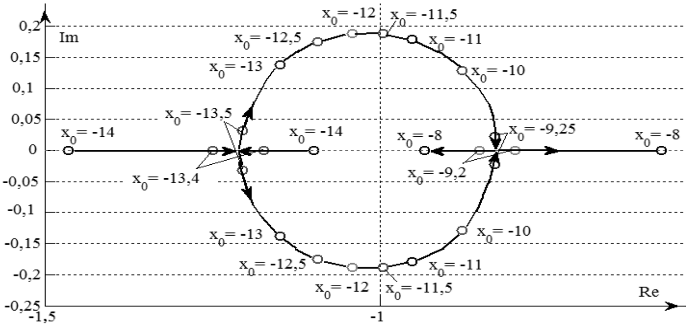

Рис. 5. Корневые годографы для варианта 2

Если выберем $x_0 = -13,4$, получим передаточную функцию регулятора

$$w_{r2}(s) = \frac{-9,3s^2 - 22,3s - 13,4}{s^2 + 15,3s + 18,8},$$

нули которой (и, соответственно, передаточной функции замкнутой системы) имеют самое левое расположение.

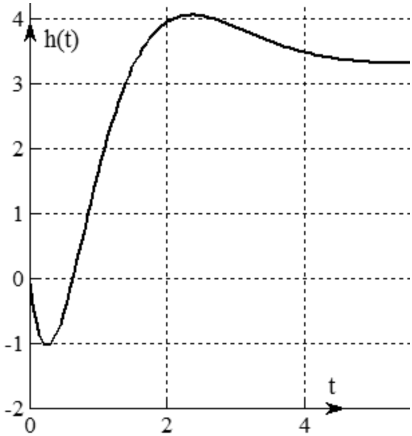

Рис. 6. Переходный процесс системы при подаче единичного входного сигнала при $x_0 = -13,4$

Как видно из рис. 6, качество перерегулирования улучшилось относительно варианта 1 и примерно равно 20…25 %.

Вариант 3. Перенесем третью строчку из матрицы $\Re$ направо:

$$\underbrace{\left(y_0 \quad x_0 \mid x_1 \mid y_2 \quad x_2\right)}_{\Im_3} \underbrace{\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array}\right) \end{array}}_{\Re_3} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} =$$

$$= \underbrace{\left(c_0 \quad c_1 - d_0 y_1 \quad c_2 - d_1 y_1 \quad c_3 - d_2 y_1 \quad c_4\right)}_{\aleph_3}.$$

Откуда найдем

$$\Im_3 = (49,3 - 2y_1 \quad y_1 - 28,7 \quad -22,3 \quad 1 \quad 6 - y_1).$$

Итак, вернемся от $\Im_3$ к $\Im$:

$$\Im = (49,3 - 2y_1 \quad y_1 - 28,7 \quad y_1 \quad -22,3 \quad 1 \quad 6 - y_1),$$

что соответствует регулятору вида

$$w_{r3}(s) = \frac{(6 - y_1)s^2 - 22,3s + (y_1 - 28,7)}{s^2 + y_1 s + (49,3 - 2y_1)}.$$

Значения нулей системы соответствуют корням числителя

$$w_{cl3}(s) = \frac{(\mathrm{s}-2)((6 - y_1)s^2 - 22,3s + (y_1 - 28,7))}{s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 15,9s + 8,1}.$$

Корневые годографы нулей приведены на рис. 7.

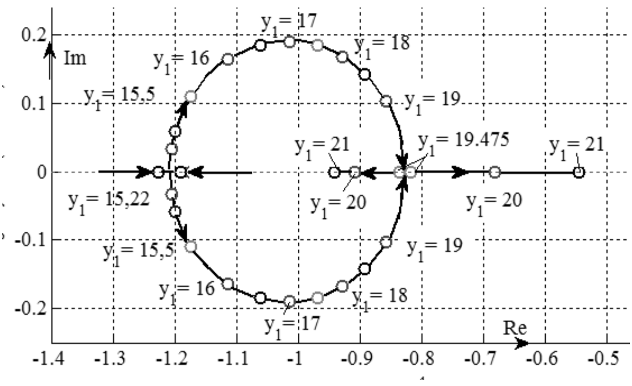

Рис. 7. Корневые годографы для варианта 3

Выбираем $y_1 = 15,22$:

$$w_{r3}(s) = \frac{-9,22s^2 - 22,3s - 13,5}{s^2 + 15,22s + 18,86}.$$

Вариант 4. Перенесем шестую строчку из матрицы $\Re$, умноженную на $-x_2$, вправо. После переноса получим

$$\underbrace{\left(y_0 \quad x_0 \mid y_1 \quad y_1 \mid y_2\right)}_{\Im_4} \underbrace{\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{ccccc} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}}_{\Re_4} =$$

$$= \underbrace{\left(c_0 \quad c_1 \quad c_2 - n_0 x_2 \quad c_3 - n_1 x_2 \quad c_4 - n_2 x_2\right)}_{\aleph_4},$$

или $\Im_4 \Re_4 = \aleph_4$. Откуда найдем

$$\Im_4 = \aleph_4 \Re_4^{-1} = (37{,}3 + 2x_2 \quad -22{,}7 - x_2 \quad 6 - x_2 \quad -22{,}3 \quad 1).$$

Вернемся от $\Im_4$ к $\Im$:

$$\Im = (37{,}3 + 2x_2 \quad -22{,}7 - x_2 \quad 6 - x_2 \quad -22{,}3 \quad 1 \quad x_2).$$

Выпишем передаточные функции регулятора замкнутой системы:

$$w_{r4}(s) = \frac{x_2 s^2 - 22{,}3s - (22{,}7 + x_2)}{s^2 + (6 - x_2)s + (37{,}3 + 2x_2)},$$

$$w_{cl4}(s) = \frac{(\mathrm{s} - 2)(x_2 s^2 - 22{,}3s - (22{,}7 + x_2))}{s^4 + 6s^3 + 14{,}1s^2 + 15{,}9s + 8}.$$

Нули системы зависят от x_2 (рис. 8).

Например, для $x_2 = -9{,}2$ передаточная функция регулятора определяет нули замкнутой системы $\{2 \;\; -1{,}25 \;\; -1{,}17\}$, где первый корень – это ноль объекта. У переходного процесса (рис. 9) перерегулирование равно примерно 25 %.

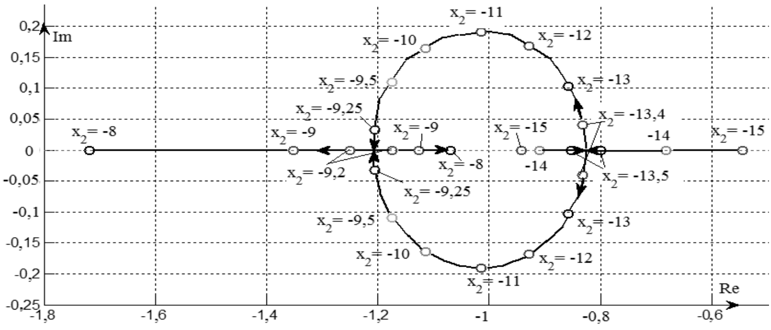

Рис. 8. Корневые годографы для варианта 4

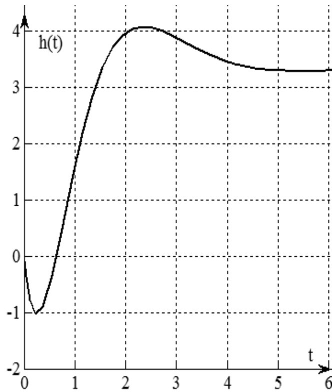

Рис. 9. Переходный процесс в системе при $x_2 = -9,2$

Пример 5. Продолжим исследование по синтезу регулятора для объекта

$$w_{ob}(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s-2}{s^2-1}.$$

В отличие от примера 3 зададим степень регулятора равной трем, $m \ge n-1=3$:

$$w_r(s)=\frac{x_3s^3+x_2s^2+x_1s+x_0}{y_3s^3+y_2s^2+y_1s},$$

а свободный параметр знаменателя регулятора берем равным нулю. Степень $c(s)$ будет равна $m+n=5$; выберем корни системы $\{-1,-1,-1,-1,-1\}$, что соответствует ХПЗС

$$c(s)=s^5+5s^4+10s^3+10s^2+5s+1\,.$$

Сформируем матрицу $\Re$:

$$\underbrace{\left(x_0 \mid y_1 \quad x_1 \mid y_2 \quad x_2 \mid y_3 \quad x_3\right)}_{\Im}\underbrace{\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{matrix} \end{array}}_{\Re}=\underbrace{\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5 \end{pmatrix}^t}_{\aleph}\,. \qquad (10)$$

Размер матрицы $\Re$ стал равным $(2m+1)\times(n+m+1)=7\times 6$ – мы написали $(2m+1)$ вместо $2(m+1)$ из-за того, что положили $y_0=0$. Значения d_i и n_i берем из выражения (7). Матрица $\Re$ вырожденная – ранг равен шести $rank(\Re)=6$ и обусловленность $cond(\Re)=6$. Следовательно, столбцы матрицы $\Re$ линейно независимые. Уравнение (10) имеет ряд решений.

Исследуем матрицу $\Re$: при вычеркивании 1-й или 5-й, или 6-й строк из матрицы $\Re$ ранг матрицы понижается, а при вычеркивании одной из 2, 3, 4 и 7-й строк матрицы $\Re$ ранг не меняется. Это говорит о том, что следует проанализировать четыре варианта решения уравнения (10).

Вариант 1. Перенесем вторую строку матрицы $\mathfrak{R}$, умноженную на $-y_1$, вправо. После переноса вместо матриц $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{I}$ и $\aleph$ введем $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{I}_1$ и $\aleph_1$:

$$\underbrace{\left(x_0 \,\vert\, x_1 \,\vert\, y_2 \quad x_2 \,\vert\, y_3 \quad x_3\right)}_{\mathfrak{I}_1} \underbrace{\begin{array}{cl} \begin{matrix} 1 & \;2 & \;3 & \;4 & \;5 & \;6 \end{matrix} & \\ \left(\begin{array}{cccccc} n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array}\right) & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \end{array}}_{\mathfrak{R}_1} =$$

$$= \underbrace{\left(c_0 \quad c_1 - d_0 y_1 \quad c_2 - d_1 y_1 \quad c_3 - d_2 y_1 \quad c_4 \quad c_5\right)}_{\aleph_1},$$

или $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_1 = \aleph_1$. Найдем решение последнего уравнения

$$\mathfrak{I}_1 = \aleph_1 \mathfrak{R}_1^{-1} = (-0,5 \,\vert\, -0,5y_1 - 2,75 \,\vert\, 18,2 - 0,5y_1 \quad -15,5 \,\vert\, 1 \quad 0,5y_1 - 13,2)\,.$$

В решении появился «свободный» параметр y_1. Вернемся от $\mathfrak{I}_1$ к $\mathfrak{I}$:

$$\mathfrak{I} = \left(-0,5 \,\vert\, y_1 \quad -0,5y_1 - 2,75 \,\vert\, 18,2 - 0,5y_1 \quad -15,5 \,\vert\, 1 \quad 0,5y_1 - 13,2\right).$$

В результате получим правильную передаточную функцию регулятора

$$w_{r1}(s) = \frac{(0,5y_1 - 13,2)s^3 - 15,5s^2 + (-0,5y_1 - 2,75)s - 0,5}{s^3 + (18,2 - 0,5y_1)s^2 + y_1 s}\,.$$

Передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl1}(s) = \frac{(\mathrm{s} - 2)((0,5y_1 - 13,2)s^3 - 15,5s^2 + (-0,5y_1 - 2,75)s - 0,5)}{s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1}\,.$$

При $y_1 = 24,4$ получим регулятор с интегратором

$$w_{r1}(s) = \frac{-s^3 - 15,5s^2 - 14,95s - 0,5}{s^3 + 6s^2 + 24,4s}\,.$$

Переходный процесс в системе (рис. 9) подтверждает астатические свойства.

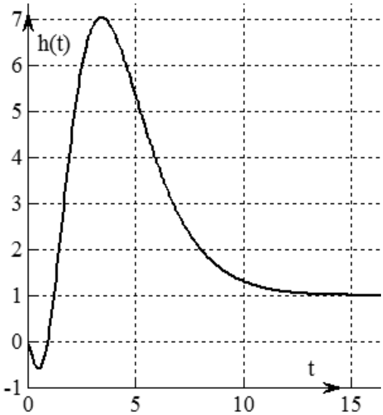

Рис. 10. Переходный процесс в системе при $y_1 = 24,4$

Вычисление ХПЗС подтверждает правильность вычислений:

$$(s^3 + 6s^2 + 24,4s)(s^2 - 1) + (-s^3 - 15,5s^2 - 14,95s - 0,5)(s - 2) =$$
$$= s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1\,.$$

Вариант 2. Перенесем седьмую строку матрицы $\Re$ вправо:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \;\vdots\; y_1 & x_1 \;\vdots\; y_2 & x_2 \;\vdots\; y_3 \end{pmatrix}}_{\Im_2} \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}}_{\Re_2} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 - n_0 x_3 & c_4 - n_1 x_3 & c_5 - n_2 x_3 \end{pmatrix}}_{\aleph_2}\,.$$

В решении появился «свободный» параметр x_3:

$$\Im_2 = \aleph_2 \Re_2^{-1} = (-0,5 \mid 2x_3 + 26,5 \quad -x_3 - 16 \mid 5 - x_3 \quad -15,5 \mid 1)\,.$$

Вернемся от $\Im_2$ к $\Im$:

$$\Im = (-0,5 \mid 2x_3 + 26,5 \quad -x_3 - 16 \mid 5 - x_3 \quad -15,5 \mid 1 \quad x_3)\,.$$

В результате получили правильную передаточную функцию регулятора

$$w_{r2}(s) = \frac{x_3 s^3 - 15,5 s^2 + (-x_3 - 16)s - 0,5}{s^3 + (5 - x_3)s^2 + (2x_3 + 26,5)s}\,.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$w_{cl2}(s) = \frac{(s-2)(x_3 s^3 - 15,5 s^2 + (-x_3 - 16)s - 0,5)}{s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1}$$

подтверждает правильность вычислений.

Если $x_3 = -1$, то получим регулятор из первого варианта

$$w_{r1}(s) = \frac{-s^3 - 15,5 s^2 - 15s - 0,5}{s^3 + 6s^2 + 24,5s}\,.$$

Пример 6. Продолжим исследование по синтезу регулятора для объекта (7). В отличие от примера 3 зададим степень регулятора равной трем $m \geq n - 1 = 3$:

$$w_r(s) = \frac{x_3 s^3 + x_2 s^2 + x_1 s + x_0}{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}\,.$$

Степень $c(s)$ равна $m + n = 5$; пусть корни системы будут такие же, как и в примере 5: $\{-1, -1, -1, -1, -1\}$, т. е. ХПЗС равен

$$c(s) = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1\,.$$

Сформируем матрицу $\Re$ – матрицу Сильвестра: размер матрицы $\Re$ оказался равным $2(m+1)\times(n+m+1)=8\times 6$:

$$\underbrace{\left(y_0 \quad x_0 \,\vdots\, y_1 \quad x_1 \,\vdots\, y_2 \quad x_2 \,\vdots\, y_3 \quad x_3\right)}_{\Im} \underbrace{\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccccc} d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \end{array}}_{\Re} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}^t}_{\aleph}. \quad (11)$$

Значения d_i и n_i подставим из выражения (7). Матрица $\Re$ вырожденная – ранг равен шести $rank(\Re)=6$ и обусловленность $cond(\Re)=6$. Следовательно, столбцы матрицы $\Re$ линейно независимые (количество строк больше, чем столбцов). Уравнение (11) имеет ряд решений.

Исследуем матрицу $\Re$: при вычеркивании 7-й строки из матрицы $\Re$ ранг матрицы понижается, а при вычеркивании одной из 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 8-й строк (их количество обозначим через q) матрицы $\Re$ ранг не понижается. Это говорит о том, что следует проанализировать $q(q-1)/2=7\cdot 6/2=21$ вариант вычеркивания пар строк из матрицы $\Re$. Ранг не понижается при вычеркивании пар строк, отмеченных в таблице знаком «+», а клетки таблицы, отмеченные «•», соответствуют запрещенным парам.

Пары строк, разрешенные к вычеркиванию

	1	2	3	4	5	6	8
1		•	+	+	+	•	+
2			+	+	+	•	+
3				+	+	+	+
4					•	+	•
5						+	•
6							+
8							

Вариант 1. Для решения задачи перенесем 1-ю и 8-ю строки, умноженные на $-y_0$ и $-x_3$, вправо. После переноса обозначим $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{I} \to \mathfrak{I}_1$ и правую часть $\aleph \to \aleph_1$:

$$\underbrace{\left(x_0 \;\vdots\; y_1 \quad x_1 \;\vdots\; y_2 \quad x_2 \;\vdots\; y_3\right)}_{\mathfrak{I}_1}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\underbrace{\left(\begin{array}{cccccc}
n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\
0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\
0 & 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2
\end{array}\right)}_{\mathfrak{R}_1}
\end{array}
\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} =$$

$$= \underbrace{\left(c_0 - d_0 y_0 \quad c_1 - d_1 y_0 \quad c_2 - d_2 y_0 \quad c_3 - n_0 x_3 \quad c_4 - n_1 x_3 \quad c_5 - n_2 x_3\right)}_{\aleph_1};$$

или $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_1 = \aleph_1$. Найдем решение последнего уравнения $\mathfrak{I}_1 = \aleph_1 \mathfrak{R}_1^{-1}$:

$$\mathfrak{I}_1 = (-0,5(y_0 + 1) \;\vdots\; 2x_3 - 0,5y_0 + 26,5 \quad -x_3 - 16 \;\vdots\; 5 - x_3 \quad 0,5y_0 - 15,5 \;\vdots\; 1).$$

В решении появились два «свободных» параметра y_0 и x_3. Как и в предыдущих примерах, вернемся от $\mathfrak{I}_1$ к $\mathfrak{I}$:

$$\mathfrak{I} = (y_0 \quad -0,5(y_0 + 1) \;\vdots\; 2x_3 - 0,5y_0 + 26,5 \quad -x_3 - 16 \;\vdots$$

$$\vdots\; 5 - x_3 \quad 0,5y_0 - 15,5 \;\vdots\; 1 \quad x_3).$$

В результате получили правильную передаточную функцию регулятора

$$w_{r1}(s) = \frac{x_3 s^3 + (0,5y_0 - 15,5)s^2 + (-x_3 - 16)s - 0,5(y_0 + 1)}{s^3 + (5 - x_3)s^2 + (2x_3 - 0,5y_0 + 26,5)s + y_0}$$

в предположении, что $x_3 \neq 0$, и строго правильную, если $x_3 = 0$. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$w_{cl1}(s) = \frac{(s-2)(x_3 s^3 + (0,5y_0 - 15,5)s^2 + (-x_3 - 16)s - 0,5(y_0 + 1))}{s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1} .$$

При $y_0 = 0$ и $x_3 = 0$ получим строго правильный регулятор

$$w_{r1}(s) = \frac{-15,5s^2 - 16s - 0,5}{s^3 + 5s^2 + 26,5s} ,$$

обеспечивающий астатические свойства системы.

5. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ

Для заданной передаточной функции объекта $w_{ob}(s) = n(s)/d(s)$ с полиномами

$$n(s) = \sum_{i=0}^{n-1} n_i s^i , \; d(s) = \sum_{i=0}^{n} d_i s^i$$

указана степень $n-1$ полинома числителя объекта $n(s)$, но она может быть и меньше $n-1$. Передаточную функцию регулятора

$$w_r(s) = x(s)/y(s)$$

с полиномами

$$x(s) = \sum_{i=0}^{m} x_i s^i , \; y(s) = \sum_{i=0}^{m} y_i s^i$$

выбираем с одинаковыми степенями:

$$\deg x(s) = \deg y(s) = m \geq n-1 .$$

Характеристический полином замкнутой системы будет степени $m+n$:

$$c_0 s^0 + c_1 s^1 + \cdots + c_{n+m} s^{n+m} .$$

При решении задачи синтеза используется матрица Сильвестра

$$\Re = \left(\begin{array}{cc:cc:cc} d_0 & n_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & n_1 & d_0 & n_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & d_1 & n_1 & d_0 & n_0 \\ d_n & n_n & \vdots & \vdots & d_1 & n_1 \\ 0 & 0 & d_n & n_n & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n & n_n \end{array}\right).$$

В тексте статьи матрицы такого вида и матрицы транспонированные также называем матрицами Сильвестра.

Опыт, накопленный при решении значительного количества примеров синтеза, позволяет сформулировать следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ОДНОКАНАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

1. Задание степени регулятора $m \geq n-1$.

2. Формирование матричного уравнения $\Im\Re = \aleph$, где $\Re$ – матрица Сильвестра.

3. Если $m = n-1$, то матрица Сильвестра невырожденная, квадратная размером $2n \times 2n$. Переход к пункту 4.

Если $m \geq n$, то размер матрицы $\Re$ равен $2(m+1)\times(m+n+1)$, где $(2m+2) > (m+n+1)$, т. е. строк больше, чем столбцов. Ранг матрицы $\Re$ равен $m+n+1$. Переход к пункту 6.

4. Решение уравнения $\Im\Re = \aleph$: $\Im = \aleph\Re^{-1}$.

5. Формирование регулятора, проверка (вычисление ХПЗС). КОНЕЦ.

6. Вычисление $rank\,\Re$ и при необходимости вычисление $\det\Re$ и обусловленности $cond\,\Re$. Примечание: $rank(\Re) < (2n+2)$ на q:

$$rank(\Re) + q = 2n+2 .$$

Если $q = 1$, переход к пункту 7а.

Если $q = 2$, переход к пункту 7б.

Значения $q = 3, 4, \cdots$ здесь не рассматриваются.

7а. Поиск линейно независимых строк матрицы $\Re$, т. е. тех строк, при вычеркивании которых ранг понижается, – их «убирать» из матрицы $\Re$ *нельзя*. Поиск линейно зависимых строк матрицы $\Re$, т. е. таких строк, при вычеркивании которых (вычеркиваем по одной строке и будем называть их разрешенными) ранг не понижается. Их количество обозначим через r. После переноса разрешенной строки вправо получаем систему уравнений $\Im_1\Re_1 = \aleph_1$, где матрица $\Re_1$ квадратная и невырожденная. Вектор-строка $\aleph_1$ содержит свободный параметр. Далее выполняем пункты 8, 9, 10 и 11 для всех линейно зависимых строк матрицы $\Re$ по очереди. КОНЕЦ.

7б. Если количество строк больше количества столбцов на 2, то количество вариантов возрастает (но не более $r(r-1)/2$). Получаем различные варианты переноса строк вправо (количество строк, переносимых вправо, равно количеству свободных параметров). Далее выполняем пункты 8, 9, 10 и 11 по очереди для всех линейно зависимых строк матрицы $\Re$. КОНЕЦ.

8. Решаем матричное уравнение $\Im_1\Re_1 = \aleph_1$: $\Im_1 = \aleph_1\Re_1^{-1}$.

9. По известному $\Im_1$ востанавливаем $\Im$.

10. Выписываем формулу регулятора с параметрами.

11. Используем свободные параметры для достижения каких либо дополнительных требований к САУ, например, для обеспечения астатизма и / или заданного расположения нулей системы.

КОНЕЦ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача синтеза одноканальных регуляторов полиномиальным методом. Рассмотрена задача решения полиномиального алгебраического уравнения: общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения позволяет найти общее решение неоднородного уравнения, что далее может быть применено к синтезу регуляторов. Задача синтеза одноканальных регуляторов было рассмотрена на нескольких примерах, и на основе этих примеров предложен алгоритм вычисления одноканальных регуляторов полиномиальным методом.

Подчеркнем, что если выбираем степень регулятора на единицу меньше степени объекта $m = n - 1$, то не сложно вычислить параметры регулятора, а если $m \geq n$, то в решении появляются свободные параметры, которые можно задавать произвольно и, соответственно, получать различные регуляторы. Другими словами, существует бесконечно много решений. Но свободные параметры можно использовать для обеспечения каких-либо дополнительных требований (например, расположения нулей системы) либо обеспечения астатизма. Показано, каким образом можно использовать корневые годографы для наилучшего в некотором смысле расположения нулей: в нескольких примерах выбираются такие значения свободных параметров, при которых корни системы лежали бы как можно левее с целью уменьшения перерегулирования и уменьшения времени переходного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen C.T.* Linear system theory and design. – 3rd ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.

2. *Kailath T.* Linear systems. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980. – 350 p.

3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

4. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

5. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.

6. *Бобобеков К.М.* Полиномиальный метод синтеза одноканальной двухмассовой системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 25–36.

7. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Расчет параметров регулятора для стабилизации перевернутого маятника по углу отклонения // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 18–32.

8. *Бобобеков К.М.* О нормировании полиномов знаменателей объекта и регулятора при полиномиальном методе синтеза // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 7–24.

9. *Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А.* Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учебное пособие. – 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2011. – 464 с.

10. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Решение переопределенной линейной системы уравнений при полиномиальном синтезе регуляторов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2017. – № 4 (56). – С. 84–99.

11. *Воевода А.А.* Матричные передаточные функции (основные понятия): конспект лекций по курсу «Проектирование систем управления» для 4–5 курсов АВТФ (специальность 2101) / Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. – 94 с.

12. *Вороной В.В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 173 с.

13. *Шоба Е.В.* Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.

14. *Бобобеков К.М.* Об особенностях реализации двухпараметрического регулятора стабилизации положения маятника в среде Matlab // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 115–130.

15. *Dorf R.C., Bishop R.H.* Modern control systems. – 12th ed. – Harlow: Pearson, 2011. – 1111 p.

16. *Воевода А.А., Корюкин А.Н., Чехонадских А.В.* О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевернутого маятника // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 69–83.

17. *Воевода А.А., Шоба Е.В.* Управление перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 3–14.

18. *Doyle J.C., Francis B., Tannenbaum A.* Feedback control theory. – New York: Macmillan, 1990. – 198 p.

19. *Воевода А.А., Вороной В.В*. Модальный синтез регуляторов пониженного порядка методом дифференцирования характеристического полинома // Сборник научных трудов НГТУ. – 2011. – № 1 (63). – С. 3–12.

20. *Чехонадских А.В.* Алгебраический метод синтеза алгоритмов автоматического управления пониженного порядка: дис. … д-ра техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 341 с.

21. *Воевода А.А., Ижицкая Е.А.* Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза // Сборник научных трудов НГТУ. – 2009. – № 2 (56). – С. 3–10.

22. *Гайдук А.Р.* Теория автоматического управления: учебник. – М.: Высшая школа, 2010. – 415 с.

23. *Воевода А.А., Бобобеков К.М.* Полиномиальный метод синтеза ПИ(Д)-регулятора для неминимально фазового объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 4 (82). – С. 7–20. – doi: 10.17212/2307-6879-2015-4-7-20.

Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович, специалист по технологиям машиностроения, 2008–2013 гг. – кафедра «Технология машиностроения металлорежущих станков и инструментов» механико-технологического факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2013 по 2015 г. ассистент Таджикского технического университета. С 2015 г. аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. Имеет более 25 публикаций. E-mail:kurbon_111@mail.ru

Formalization of a polynomial method for the synthesis of single-channel systems using the Sylvester matrix[*]

K.M. Bobobekov

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk,630073, Russian Federation, the post-graduate student of Department Automatics. E-mail: kurbon_111@ mail.ru

The method of synthesizing linear regulators for linear objects using polynomial decomposition, along with classical synthesis methods, such as synthesis in the state space using full and reduced order observers, transfer functions and synthesis using logarithmic frequency characteristics (LATCH), optimal synthesis methods, and others, finds more and more widespread. With a polynomial method of synthesis, as a rule, a transition from polynomial representations to matrix numeric ones is used, which leads to equations with a non-square degenerate Sylvester matrix. When solving the problem of formalizing synthesis algorithms for multichannel systems, it is necessary to return to the synthesis algorithm for single-channel systems. In this paper, based on the results obtained by Chen, Kailath and other authors, based on an analysis of the calculation of numerous examples of calculating single-channel systems, a formal algorithm for the synthesis of regulators is presented. When solving the problem of formalizing synthesis algorithms for multi-channel systems, rely on algorithms for the synthesis of single-channel systems. In this article, is use the results obtained by Chen, Kailath and other authors, which lists the requirements for the polynomial description of the object: the proper (strictly proper) of the transfer function of the object, the mutual simplicity of the polynomials numerator and denominator transfer function of the object. Of particular note is the requirement of mutual simplicity of numerator and denominator polynomials – failure to do so leads, first of all, to degeneration of the Sylvester matrix, and can also lead to violation of controllability, observability, etc. In addition, it is necessary to take into account the restriction imposed on the choice of the degree of the regulator, which is equivalent to limiting the desired characteristic polynomial of the closed system. Based on the analysis of calculations of numerous examples of synthesis of single-channel regulators, six of which are given in this article, a formalized algorithm for the synthesis of regulators is presented. In many studies, in solving the synthesis problem, linearly dependent rows / columns in the Sylvester matrix are zeroed together with the corresponding parameters of the regulator. In this article is propose linearly dependent rows with corresponding unknown parameters of the regulator to be transferred to the right side of the equation. This leads to the appearance of free regulator parameters, which can be set arbitrarily (in some cases additional limiting are imposed). This corresponds to the general solution of a system of linear equations, which when given by a free parameter of the regulator of specific values leads to different versions of the synthesized regulator.

Keywords: the transfer function of an object, a strictly proper and not strictly proper object, mutually simple and not mutually simple polynomials, a linear equation, a homogeneous and inhomogeneous polynomial equation, the synthesis of single-channel systems, the Sylvester matrix, algorithm for the synthesis of regulators

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-1-31-67

[*] *Received 23 November 2017.*

REFERENCES

1. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 3rd ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.

2. Kailath T. *Linear systems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1980. 350 p.

3. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 1. *Lineinye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 1. Linear]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 288 p.

4. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2. *Mnogomernye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.

5. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.

6. Bobobekov K.M Polinomial'nyi metod sinteza odnokanal'noi dvukhmassovoi sistemy [A polynomial method for the synthesis of single-channel two-mass system]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 25–36.

7. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Raschet parametrov regulyatora dlya stabilizatsii perevernutogo mayatnika po uglu otkloneniya [Calculation of controller parameters for the stabilization of the inverted pendulum by corner deviation]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 18–32.

8. Bobobekov K.M. O normirovanii polinomov znamenatelei ob"ekta i regulyatora pri polinomial'nom metode sinteza [About rationing polynomials denominator object and regulator during polynomial method of synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 7–24.

9. Gaiduk A.R., Belyaev V.E., P'yavchenko T.A. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya v primerakh i zadachakh s resheniyami v MATLAB* [Theory of automatic control in examples and problems with solutions in MATLAB]. 2nd ed., rev. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011. 464 p.

10. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Reshenie pereopredelennoi lineinoi sistemy uravnenii pri polinomial'nom sinteze regulyatorov [Solution of an overdetermined linear system of equations for polynomial synthesis of regulators]. *Sov-*

remennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System analysis. Modeling, 2017, no. 4 (56), pp. 84–99.

11. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii: (osnovnye ponyatiya)* [Matrix transfer functions (basic concepts)]. Novosibirsk State Technical University. Novosibirsk, NSTU Publ., 1994. 94 p.

12. Voronoi V.V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov ponizhennogo poryadka*. Diss. kand. tekhn. nauk [A polynomial method for calculating the multi-channel controllers low order. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 173 p.

13. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.

14. Bobobekov K.M. Ob osobennostyakh realizatsii dvukhparametricheskogo regulyatora stabilizatsii polozheniya mayatnika v srede Matlab [On the peculiarities of realization the two-parameter regulator of stabilization the position pendulum in environment MATLAB]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 115–130.

15. Dorf R.C., Bishop R.H. *Modern control systems*. 12th ed. Harlow, Pearson, 2011. 1111 p.

16. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. O ponizhenii poryadka stabiliziruyushchego upravleniya na primere dvoinogo perevernutogo mayatnika [Reducing the stabi-lizing control order for a double inverted pendulum]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumenta-tion and Data Processing*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 69–83. (In Russian).

17. Voevoda A.A., Shoba E.B. Upravlenie perevernutym mayatnikom [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 3–14.

18. Doyle J.C., Francis B., Tannenbaum A. *Feedback control theory*. New York, Macmillan, 1990. 198 p.

19. Voevoda A.A., Voronoy V.V. Modal'nyi sintez regulyatorov ponizhennogo poryadka metodom differentsirovaniya kharakteristicheskogo polinoma [Modal design of reduced order controllers by method of differentiation of the characteristic polynomial]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 1 (63), pp. 3–12.

20. Chekhonadskikh A.V. Algebraicheskii metod sinteza algoritmov avtomaticheskogo upravleniya ponizhennogo poryadka. Diss. doct. tekhn. nauk [Alge-

braic method of synthesis of algorithms for automatic control of reduced order. Dr. eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 341 p.

21. Voevoda A.A., Izhitskaya E.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza [Stabilization of two-mass systems: modal synthesis method]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2009, no. 2 (56), pp. 3–10.

22. Gaiduk A.R. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [The theory of automatic control]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2010. 415 p.

23. Voevoda A.A., Bobobekov K.M. Polinomial'nyi metod sinteza PI(D)-regulyatora dlya neminimal'no fazovogo ob"ekta [Polynomial method synthesis of PI(D) regulator for non-minimum-phase object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 4 (82), pp. 7–20.

Для цитирования:

Бобобеков К.М. Формализация полиномиального метода синтеза одноканальных систем с использованием матрицы Сильвестра // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 1 (91). – С. 31–67. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-31-67.

For citation:

Bobobekov K.M. Formalizatsiya polinomial'nogo metoda sinteza odnokanal'nykh sistem s ispol'zovaniem matritsy Sil'vestra [Formalization of a polynomial method for the synthesis of single-channel systems using the Sylvester matrix]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (91), pp. 31–67. doi: 10.17212/2307-6879-2018-1-31-67.