

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОБЪЕКТ: ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ*

В.Ю. ФИЛЮШОВ

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

В настоящее время набирают популярность нелинейные методы синтеза, которые используют исходную нелинейную модель. Такой подход дает возможность формировать управление не только в окрестности точки линеаризации, а в большей области изменения переменных состояния, что позволяет в законе управления учитывать поведение объекта наиболее полно. Для моделей, линеаризованных в окрестности некоторой точки, применяются линейные методы синтеза, такие как модальный метод синтеза, методы синтеза с использованием полиномиального разложения, алгоритмы оптимизации, построение ПИД-регуляторов и другие. Но такое представление не описывает всех свойств работы исходного объекта. Для того чтобы применять линейные методы синтеза для нелинейных объектов, целесообразней использовать линеаризацию обратной связью, которая приводит поведение исходного объекта к линейному виду. Суть метода заключается в поиске такого компенсирующего управления, при котором поведение замкнутой системы будет соответствовать поведению системы, описанной линейными дифференциальными уравнениями. Тогда для синтезированной системы появляется возможность рассчитать регулятор линейными методами синтеза. В настоящей работе осуществлен обзор предыдущих работ по данной теме. Рассмотрены различные одноканальные нелинейные объекты; объект, содержащий тригонометрическую функцию; показана возможность получения различного решения задачи линеаризации нелинейными обратными связями для одного и того же объекта. На примере подсистемы «маятник» модели объекта перевернутый маятник на тележке произведен синтез системы управления с модальным регулятором и наблюдателем состояния полного порядка, где в одном случае использовалась старшая производная выходной величины, а в другом – нет; показана возможность применения данного метода для многоканальных объектов (двух- и трехканальных), нелинейных по выходу, а также показан формализованный метод поиска линеаризующего управления на основе алгебры и скобок Ли.

Ключевые слова: нелинейное управление, линеаризация обратной связью, регулятор, наблюдатель состояния, синтез, многоканальный, алгебра Ли

* Статья получена 19 февраля 2018 г.

ВВЕДЕНИЕ

К достаточно новым методам синтеза линейных многоканальных объектов можно отнести стабилизацию с использованием *полиномиального разложения*. Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов описан в работе [1], в которой приводится алгоритм построения управления. В [2] приведены примеры модального метода синтеза с использованием полиномиального разложения для двухмассовой системы. В [3] рассмотрена стабилизация двухканальной системы методом разделения движений с использованием полиномиального разложения, что сводится к решению диофантова уравнения. Также к многоканальным объектам относится перевернутый маятник на тележке. В работе [4] приведен пример синтеза ПИД-регуляторов для стабилизации вертикального положения маятника и перемещения тележки в заданное положение. В работе [5] на примере объекта второго порядка с ограничением на входе и с запаздыванием сопоставляются критерии устойчивости процедуры оптимизации. В работе [6] проведено моделирование новой структуры ПИД-регулятора.

Синтез нелинейных систем, в отличие от линейных, не так однозначен. Так, существуют системы, в которых нелинейная часть выражена существенными нелинейностями (реле, реле с гистерезисом и так далее) и с нелинейностями, выраженными гладкими функциями. В данной работе рассмотрим объекты с нелинейностями, выраженными гладкими функциями, такими как умножение, деление и взятие корня, причем управление аддитивно (так называемые *аффинные системы*). Эти функции могут связывать как переменные состояния, так и выходные величины.

Для синтеза систем такого вида применима *линеаризация обратной связью* – ЛОС (Linearization by output injection) [7–9], суть которой заключается в том, что нелинейная система, замкнутая искомым управлением, будет вести себя эквивалентно линейной. Линеаризация обратной связью применима для объектов, которые заданы нелинейными дифференциальными уравнениями с аддитивным входным воздействием, или для объектов, выходные величины которых нелинейно связаны с переменными состояния. В первом случае такая линеаризация называется *по состоянию*, а во втором случае – *по выходу*.

Компенсирующие воздействия могут быть в некоторых случаях найдены по структурной схеме модели. Преобразование структурных схем распространено в линейных системах, где они называются эквивалентными структурными преобразованиями. В нелинейных системах также можно преобразовать структурную схему путем переноса нелинейности через интегратор, но новая схема не будет полностью эквивалентна в связи с зависимостью пере-

ходных процессов нелинейных систем от начальных условий. Тем не менее такой подход возможен и рассмотрен в работах.

Рассмотрены модели объектов, имеющих многоканальную структуру с выходными переменными, нелинейно связанными друг с другом. Для такого типа объектов, к которому относится машина переменного тока, осуществлена линеаризация путем дифференцирования выхода и поиска взаимосвязи между управлением и нелинейностью. Данная взаимосвязь найдена, что позволило развязать выходные величины друг от друга и дало возможность применять различные линейные методы синтеза. Ограничения на переменные вызваны структурой самого объекта.

В заключительной части работы рассмотрим нахождение такого управления, которое позволяет линеаризовать исходную нелинейную модель, применяя дифференциально-геометрический подход. Данный подход заключается в использовании производных Ли (скобки Ли, алгебра Ли, группы Ли). Использование этого инструмента позволяет проводить анализ и синтез нелинейных систем. В частности, матрицы наблюдаемости и управляемости похожи на те, что получены от линеаризованного объекта. Также используется понятие о каноническом виде, который аналогичен каноническому виду в линейных системах. Производные Ли особенно удобно использовать для непрерывных дифференцируемых функций, что соответствует нашему классу объектов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим способы нахождения такого управления, которое позволяет линеаризовать исходную нелинейную модель. Эта задача будет выполнена различными способами – структурными преобразованиями и дифференциально-геометрическим подходом. Данный подход заключается в использовании производных Ли (скобки Ли, алгебра Ли, группы Ли) [8]. Для нелинейных объектов, линейных по управлению (*аффинных*) вида

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u,$$

возможно выразить старшую производную через управления (минимально фазовые), что и является критерием применимости этих методов, где u – гладкая функция в некоторой окрестности $\Omega(0)$ начала координат. Начало координат является положением равновесия $f(0, 0) = 0$. Здесь x – вектор состояния, u – управление.

1. СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В линейных системах для удобства применения методов управления используют структурные преобразования. Так, например, регулятор удобнее рассчитывать в управляемой канонической форме, а наблюдатель состояния – в наблюдаемой. В нелинейных системах также есть возможность при определенных ограничениях производить преобразования по структурной схеме модели. Рассмотрим несколько динамически нелинейных объектов, в которых нелинейная часть выражена умножением и делением [10]

$$\dot{x} = ax^3 + u. \quad (1)$$

Структурная схема объекта (1) представлена на рис. 1. При доступности всего вектора состояния для заданных объектов необходимо найти управление, удовлетворяющее критерию асимптотической устойчивости.

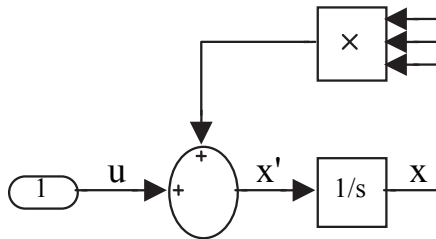


Рис. 1. Структурная схема объекта (1)

На примере объекта (1) ЛОС аналогична методу обратной задачи динамики. Выберем регулятор таким образом, чтобы замкнутая система имела вид

$$\dot{x} = v. \quad (2)$$

Для этого приравняем правые части уравнений (1) и (2):

$$v = ax^3 + u \quad (3)$$

и находим u :

$$u = v - ax^3. \quad (4)$$

Найденное управление (3) линеаризует объект (1) и приводит его к виду (2). Полученная система показана на рис. 2.

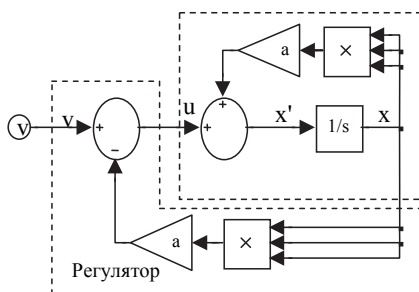


Рис. 2. Система объект–регулятор

Объект, замкнутый управлением (3), имеет линейное поведение, что позволяет для замкнутой системы вида (2) провести синтез управления, основанного на линейных методах.

Рассмотрим **систему второго порядка**:

$$\dot{x}_1 = cx_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \quad (5)$$

Путем структурных преобразований представим уравнение (5) в виде линейной системы с нелинейной старшей производной (рис. 3).

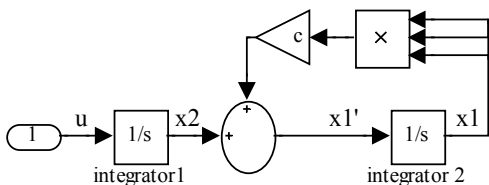


Рис. 3. Структурная схема объекта (3)

Перенесем нелинейные звенья объекта в управление для его последующей компенсации. В данном случае необходимо перенести $c(x_1)^3$ «через» integrator1 (рис. 4).

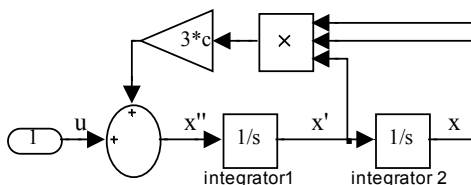


Рис. 4. Структурная схема после преобразования

Уравнение объекта после преобразования

$$\ddot{x} = 3cx^2\dot{x} + u, \quad (6)$$

в новых переменных

$$x = x_1 = z_1,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 = z_2 = cx_1^3 + x_2,$$

$$\ddot{x} = \dot{z}_2 = 3cx^2\dot{x} + u = 3cx_1^2\left(cx_1^3 + x_2\right) + u,$$

далее для компенсации нелинейности выберем управление вида

$$u = -3cx_1^2\left(cx_1^3 + x_2\right) + v. \quad (7)$$

Система, замкнутая обратной связью, имеет вид

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 = v, \quad (8)$$

а в новых переменных

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v.$$

Подставим полученное управление (7) в исходное уравнение объекта (6)

$$\dot{x}_1 = cx_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -3cx_1^2\left(cx_1^3 + x_2\right) + v. \quad (9)$$

Структурная схема системы «объект + регулятор» представлена на рис. 5.

Замкнутая система (9), имея несколько умножений, тем не менее эквивалентна системе «двойной интегратор» (8), где задание v после двойного интегрирования подается на выход объекта (рис. 6).

Рассмотрим следующую **систему третьего порядка**:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3^3 + u, \quad (10)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + cx_3^3.$$

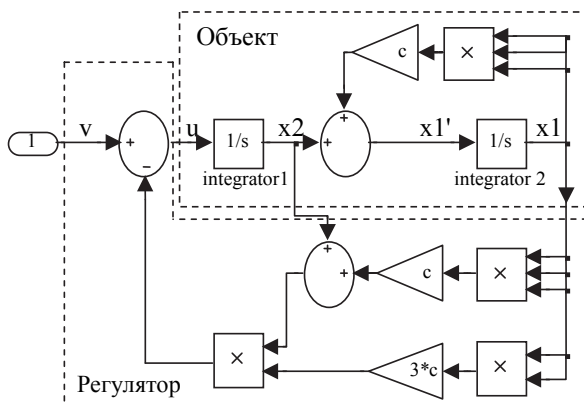


Рис. 5. Структурная схема системы «объект + регулятор»

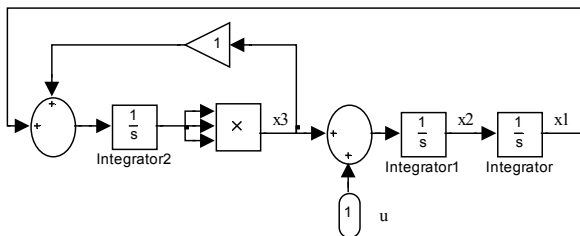


Рис. 6. Структурная схема объекта (8)

Найдем преобразование координат эвристически. Для этого нам необходимо через старшую производную выразить все нелинейности объекта, выразим x_1 из уравнения (8):

$$x_1 = \frac{x_3^3 + u}{p^2},$$

подставим найденный x_1 в уравнение производной \dot{x}_3 :

$$\dot{x}_3 = \frac{x_3^3 + u}{p^2} + cx_3 \Rightarrow \ddot{x}_3 = x_3^3 + 6cx_3\dot{x}_3 + 3cx_3^2\ddot{x}_3 + u.$$

Соответственно управление u , необходимое для компенсации нелинейностей, будет выглядеть так:

$$u = -\left(x_3^3 + 6cx_3(x_1 + cx_3)^2 + 3cx_3^2(x_2 + 3cx_3^2(x_1 + cx_3))\right) + v.$$

Преобразование координат для перехода к линейной модели:

$$z_1 = x_3, \quad z_2 = \dot{x}_3 = x_1 + cx_3^3, \quad z_3 = \ddot{x}_3 = x_2 + 3cx_3^2(x_1 + cx_3).$$

В новых переменных модель объекта примет вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = v.$$

В качестве следующего примера возьмем модель объекта, содержащую **тригонометрическую функцию**:

$$\ddot{y} + (\sin y)' = u. \quad (11)$$

Уравнение (11) было использовано в работе [12], но в данной работе будет рассмотрена та же линеаризация, но на основе структурных преобразований. Также уравнение (11) можно представить в следующем виде

$$\ddot{y} + \sin y = \int u dt.$$

Ниже представлены графики переходных процессов при различных входных воздействиях (рис. 7). Структурная схема объекта представлена на рис. 8.

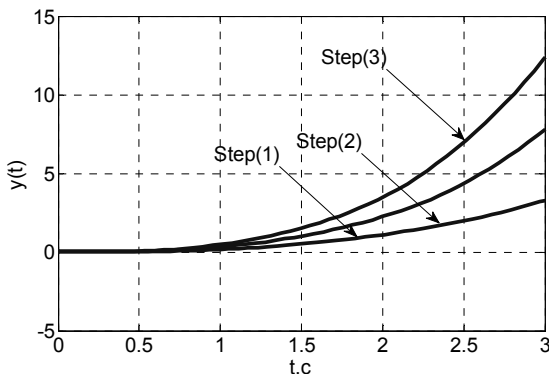


Рис. 7. Графики переходных процессов объекта (11)

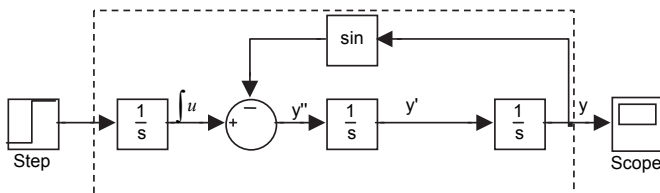


Рис. 8. Структурная схема объекта (11)

Компенсацию нелинейности будем производить через обратную связь. Для этого необходимо найти такое управляющее воздействие, которое в замкнутой системе приведет ее к необходимому нам линейному виду (в нашем случае тройной интегратор). Для этого ниже приведена структурная схема, эквивалентная структурной схеме объекта (рис. 9).

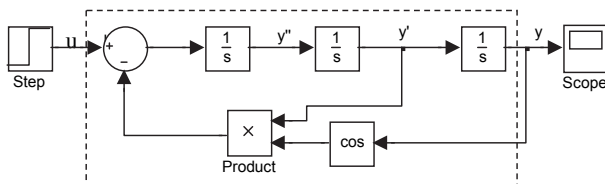


Рис. 9. Эквивалентная схема объекта (11)

Данную структурную схему описывает следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{y} + \cos y \cdot \dot{y} = u.$$

По приведенной структурной схеме наглядно видно, что, прибавив косинус и производную выхода, мы будем иметь линейную систему вида 3 интегратора. На рис. 9, 10 и 11 приведены структурные схемы результирующей системы и эквивалентные ей:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (\sin y)' &= u, \\ u &= \cos y \cdot \dot{y}. \end{aligned} \quad (12)$$

На рис. 11 имеются тригонометрические функции, которые, как известно периодические. Поэтому интересны случаи попадания на их период. Это может возникнуть при выборе начальных условий или при выходе y за какие-то пределы.

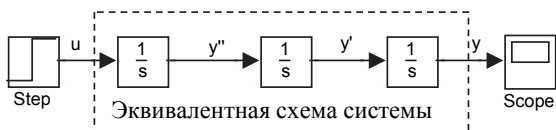


Рис. 10. Эквивалентная схема системы (12)

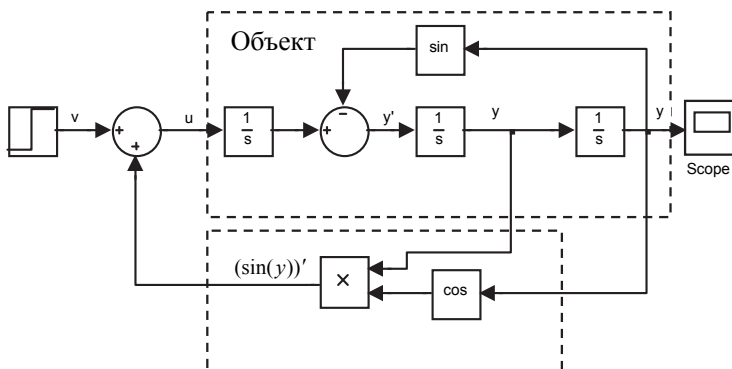


Рис. 11. Структурная схема результирующей системы (12)

Рассмотрим **различные представления** одного объекта. Уравнение объекта [11] описывается уравнением

$$\dot{y}(1+y) = u. \quad (13)$$

Структурная схема этого объекта представлена на рис. 12.

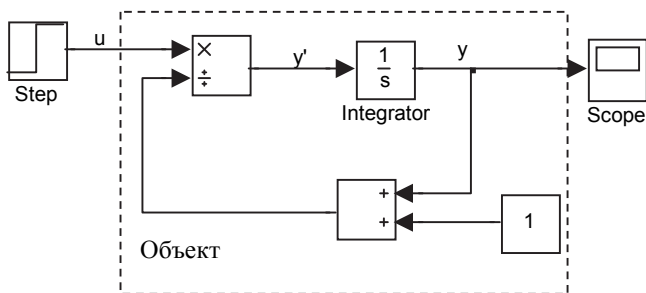


Рис. 12. Структурная схема объекта (13)

Переходные процессы на выходе объекта при подаче различных ступенчатых воздействий на вход показаны на рис. 13.

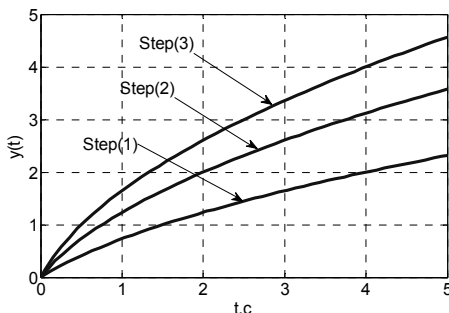


Рис. 13. Переходные процессы объекта (13)

Как видно из рис. 12, нелинейная часть типа деления $\frac{1}{y+1}$ имеет явную зависимость от управления u . Это позволяет нам без применения каких-либо преобразований компенсировать ее за счет нелинейной обратной связи. Очевидно, что компенсация деления будет производиться умножением. Тогда, выбрав управление вида

$$u = (y+1)v, \quad (14)$$

получим замкнутую систему вида «интегратор»:

$$\dot{y} = v.$$

Структурная схема полученной системы представлена на рис. 14, а графики переходных процессов при различных входных ступенчатых воздействиях – на рис. 13.

Заметим, что в структурной схеме объекта имеется деление, и при значении выхода $y = -1$ будет происходить деление на ноль, что говорит о неработоспособности модели в этой точке. Для решения этой проблемы существуют различные методы.

На следующем примере [13] покажем, что модель объекта можно представить в различных вариантах, в зависимости от которых будут различаться линеаризующие обратные связи, что придает конечной системе различные свойства:

$$\dot{y} + y\dot{y} = u, \quad (15)$$

где u является входным воздействием, а y – выходной величиной.

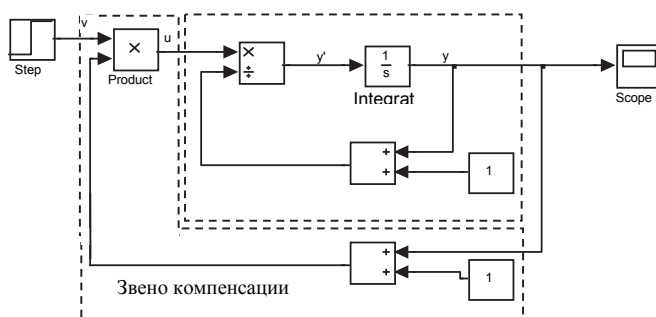


Рис. 14. Структурная схема объекта (13) с управлением (15)

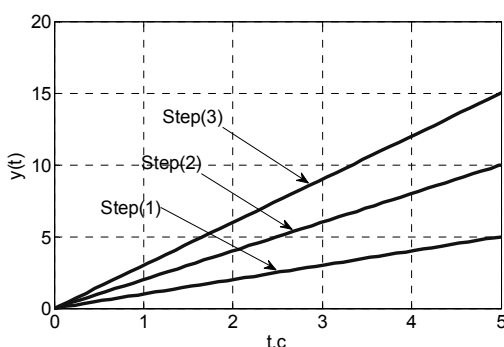


Рис. 15. Переходные процессы результирующей системы

Первый вариант представления модели объекта (12) – выразим производную

$$\dot{y} = \frac{u}{y+1} . \quad (16)$$

Структурная схема показана на рис. 16. Эта схема включает блок деления. Если выбрать управление в виде

$$u = (y+1)v ,$$

где v – задающее воздействие, результирующая система будет следующая:

$$\dot{y} = v . \quad (17)$$

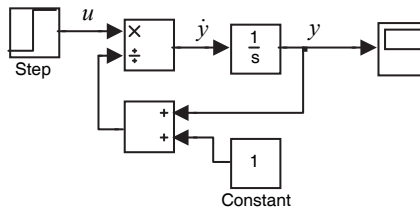


Рис. 16. Структурная схема модели (16)

Система «объект – устройство управления» представлена на рис. 17.

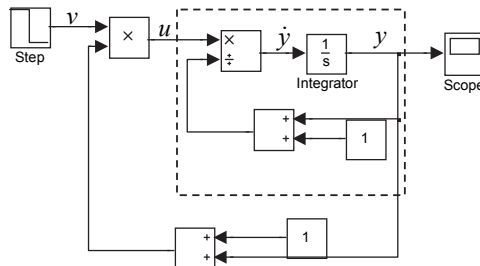


Рис. 17. Структурная схема замкнутой системы

Как видно из (16), при $y = -1$ происходит деление на ноль, и этот случай требует отдельного исследования.

Второй вариант записи объекта (13) следующий:

$$\dot{y} = \frac{u - \dot{y}}{y}. \quad (18)$$

Структурная схема уравнения (18) изображена на рис. 18.

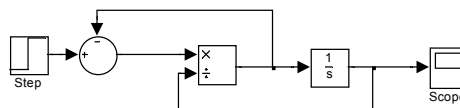


Рис. 18. Структурная схема уравнения (18)

Для компенсации нелинейной части модели (18) введем следующее управление:

$$u = \nu y + \dot{y}. \quad (19)$$

Замкнутая управлением (19) модель (18) будет эквивалентна простому интегратору аналогично (17). Структурная схема полученной системы приведена на рис. 19.

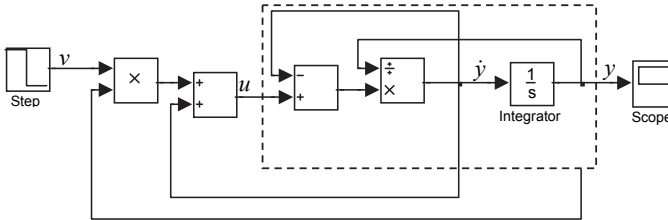


Рис. 19. Структурная схема замкнутой системы

Как видно из (18), при $y = 0$ также происходит деление на ноль, что означает возможные проблемы при моделировании из нулевых начальных условий.

Третий вариант представления модели. Запишем уравнение объекта (13) в следующем виде:

$$\dot{y} = u - y\dot{y}. \quad (20)$$

Компенсирующее управление, приводящее модель (20) к эквивалентной замкнутой системе $\dot{y} = v$:

$$u = y\dot{y} + v. \quad (21)$$

Схема замкнутой системы представлена на рис. 20.

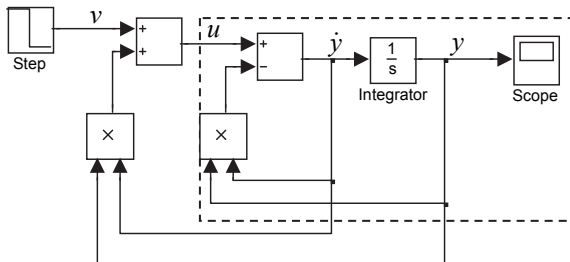


Рис. 20. Структурная схема модели (20), замкнутой управлением (21)

Сформированное управление, как и в предыдущих вариантах, компенсирует нелинейные элементы путем деления, умножения или вычитания.

Четвертый вариант. Если уравнение (13) представить как

$$\frac{d}{dt}\left(y + \frac{1}{2}y^2\right) = u$$

и провести замену переменной

$$y + \frac{1}{2}y^2 = z, \quad (22)$$

то получим

$$\dot{z} = u. \quad (23)$$

Объект (13) в такой записи линейный с нелинейным выходом:

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 2z}. \quad (24)$$

Получено два выхода, это объясняется тем, что график зависимости $z(y)$ схож с параболой, и в зависимости от начальных условий мы будем идти по какой-либо ветви. Из (24) следует, что на z , а следовательно, и на y наложены ограничения:

$$1 + 2z > 0 \Rightarrow z > -0.5 \Rightarrow y_1 > -1, y_2 < -1.$$

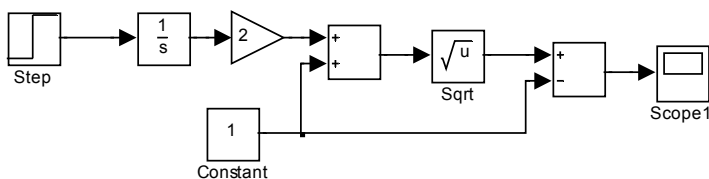


Рис. 21. Структурная схема модели (23)

Для поиска управления, линеаризующего модель (18), найдем производную выхода (22) для случая y_1 :

$$\dot{y} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 + 2z}} = \frac{u}{\sqrt{1 + 2z}}.$$

Управление, приводящее (20) к виду (17), будет следующее:

$$u = v\sqrt{1+2z} = v\sqrt{1+2\left(y + \frac{1}{2}y^2\right)}. \quad (25)$$

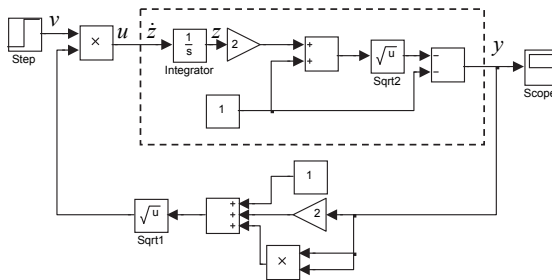


Рис. 22. Структурная схема замкнутой системы

На рис. 22 показана схема модели (20), замкнутой управлением (25). Разная запись исходного нелинейного уравнения (13) позволяет находить различное управление по обратной связи, компенсирующее нелинейности. Также в различных вариантах записи имеются свои ограничения на переменные.

2. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Исходный объект описывается двумя нелинейными дифференциальными уравнениями [14]:

$$\left(1 - \frac{ml}{M_t L} \cos^2 \theta\right) \ddot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{ml}{M_t L} \cos \theta \sin \theta (\dot{\theta})^2 = \frac{1}{M_t L} \cos \theta u, \quad (26)$$

$$\left(1 - \frac{ml}{M_t L} \cos^2 \theta\right) \ddot{s} - \frac{ml}{M_t} \sin \theta (\dot{\theta})^2 + \frac{m l g}{M_t L} \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{M_t} u,$$

где m – масса маятника; mg – вес маятника; M – масса тележки; $M_t = m + M$ – отклонение маятника от вертикали; l – длина звена маятника, $L = (I + ml^2) / ml$; I – момент инерции; s – перемещение тележки.

Под u понимается задание на положение маятника по углу θ . Рассматривается частный случай, когда $M \neq 0, I = 0$, тогда (26) будет иметь вид

$$\ddot{\theta} = \frac{(m+M)g \sin \theta + ml \cos \theta \sin \theta (\dot{\theta})^2 + \cos \theta u}{(M + m \sin^2(\theta))l}, \quad (25)$$

$$\ddot{s} = \frac{mg \cos \theta \sin \theta - ml \sin \theta (\dot{\theta})^2 + u}{M + m \sin^2(\theta)}.$$

Также имеет место другая общепринятая модель перевернутого маятника:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} - ml\dot{s} \cos \theta - mgl \sin \theta = 0,$$

$$(M + m)\ddot{s} - ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml(\dot{\theta})^2 \sin \theta = u.$$

В отличие от (26), в таком представлении модели мы имеем одно управление, но в каждом уравнении мы имеем обе старшие производные.

Для управления перевернутым маятником зачастую используют его линейное представление в нулевой окрестности угла отклонения $\theta = 0$. В этом случае $\dot{\theta}^2 = 0$, $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$. Мы будем рассматривать задачу стабилизации только угла отклонения маятника [15, 16], тогда исходное нелинейное уравнение будет иметь вид

$$(M + m \sin^2(\theta))l \cdot \ddot{\theta} - (m+M)g \sin \theta - ml \cos \theta \sin \theta (\dot{\theta})^2 = \cos \theta u, \quad (28)$$

а в окрестности нуля

$$M\ddot{\theta} - (m+M)g\theta = u. \quad (29)$$

Структурная схема модели подсистемы «маятник» представлена на рис. 23.

Линеаризация. Покажем на примере модели (28) отличия между разными линеаризующими добавками. Далее приведем исходное уравнение объекта (27) к линеаризованному виду (29) путем обратных связей. Для этого будем использовать линеаризующее звено вида

$$\frac{a_1\ddot{\theta} + a_2\dot{\theta} + a_3\theta + u_r}{\cos \theta} = u. \quad (30)$$

Рассмотрим другой способ линеаризации уравнения (28). Для этого запишем его в преобразованном виде

$$a_1(\theta) = (M + m)g \sin \theta - ml \cos \theta \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2,$$

$$a_2(\theta) = (M + m \sin^2 \theta)l,$$

тогда

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1(\theta)}{a_2(\theta)} + \frac{\cos \theta}{a_2(\theta)} u. \quad (33)$$

Далее будем слева направо составлять управление такое, чтобы скомпенсировать нелинейности и привести исходную модель к виду

$$\ddot{\theta} = u_r. \quad (34)$$

или в виде структурной схемы (рис. 24).

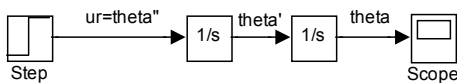


Рис. 24. Желаемая структурная схема после преобразования

Такое преобразование получается исходя из следующих соображений. Необходимо получить уравнение вида (34) из уравнения (33). Тогда, приравняв их правые части, получим

$$u_r = \frac{a_1(\theta)}{a_2(\theta)} + \frac{\cos \theta}{a_2(\theta)} u,$$

или

$$u = \frac{u_r a_2(\theta) - a_1(\theta)}{\cos \theta}. \quad (35)$$

Как видим, такое управление не имеет решения при угле $\pi/2$, так как происходит деление на ноль и управляющий сигнал принимает бесконечные значения. Также заметим, что движение маятника при углах, приближающихся к его горизонтальному положению, требует все больших усилий для придания

Управление сформируем в виде

$$u = -K\tilde{x} + u_r.$$

Вычисление матрицы L удобнее проводить, представляя объект в наблюдаемой канонической форме, а матрицу K – в управляемой.

Расчет матрицы обратной связи будем производить для линеаризованного обратной связью перевернутого маятника. Так как для обоих представлений (30) и (35) синтез регулятора не отличается, рассмотрим его на примере линеаризованной (замкнутой линеаризующей (32) добавкой) системы.

Подставим в уравнение (29) численные значения:

$$M = 30, \quad m = 70, \quad l = 1, \quad g = 10,$$

тогда

$$\ddot{\theta} = 33.3\theta + 0.033u$$

или в переменных состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 33.3x_1 + 0.033u, \\ y &= \theta = x_1. \end{aligned} \tag{36}$$

Уравнение (36) в матричном представлении $\dot{x} = Ax + Bu$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 33.3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.033 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0).$$

Для выбора коэффициентов регулятора смоделируем переходные процессы объекта (рис. 26).

Как видно из графиков, сильное отклонение угла от вертикали «падение маятника» происходит примерно после 1.2...1.6 с. Исходя из этого зададим собственные свойства системы «объект–регулятор» желаемыми полюсами:

$$s_{1,2} = -4; \quad (s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16.$$

Выбор таких полюсов в теории должен дать время переходного процесса системы «объект–регулятор» $t_{\text{пер}} = 1,5$ с.

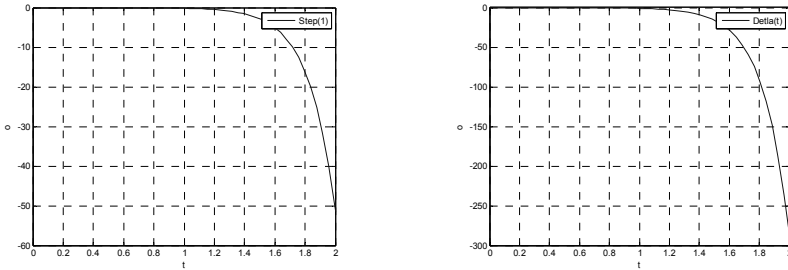


Рис 26. Переходные процессы объекта при различных входных воздействиях

Таким образом, желаемая матрица объекта с регулятором будет выглядеть так:

$$A_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}.$$

Добиваться желаемых полюсов будем введением в обратную связь матрицы $K = (k_1 \ k_2)$:

$$A_d = A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}.$$

Использование модального метода синтеза подразумевает доступность всего вектора состояния объекта. Будем вычислять компоненты вектора x при помощи наблюдателя состояния полного порядка.

Расчет наблюдателя полного порядка будем производить для объекта, представленного в наблюдаемой форме. Для того чтобы исходное уравнение объекта представить в наблюдаемой форме, возьмем за выход объекта переменную x_2 , тогда

$$\dot{x}_1 = 33.3x_2 + 0.033u,$$

$$\dot{x}_2 = x_1,$$

$$y = \theta = x_2.$$

Запишем в матричном виде:

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 33.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_o = \begin{pmatrix} 0.033 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_o = (0 \ 1).$$

Исходя из условий быстродействия наблюдателя выберем собственные числа: $s_{1,2} = -20$; $(s+2)^2 = s^2 + 40s + 400$. Таким образом, желаемая матрица будет выглядеть так:

$$A_{od} = \begin{pmatrix} 0 & -400 \\ 1 & -40 \end{pmatrix}.$$

Наблюдатель с выбранными полюсами будет в пять раз быстрее системы «объект–регулятор». Добиваться этого будем введением в обратную связь $L_o = (l_1 \ l_2)^T$. Динамические свойства наблюдателя описываются уравнением $\dot{\hat{x}} = (A - LC)x$ Таким образом:

$$A_{od} = A_o - L_o C_o = \begin{pmatrix} 0 & -400 \\ 1 & -40 \end{pmatrix},$$

$$L_o = (433.3 \ 40)^T.$$

Таким образом получены два варианта решения задачи линеаризации нелинейной модели перевернутого маятника с последующим синтезом наблюдателя состояния полного порядка и регулятора, рассчитанного модальным методом синтеза. На рис. 27 и 28 представлены структурные схемы.

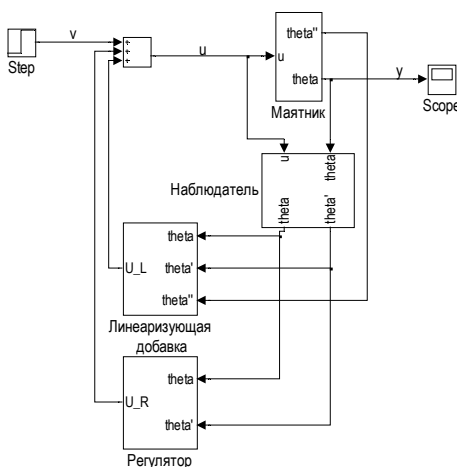


Рис. 27. Структурная схема на основе (30)

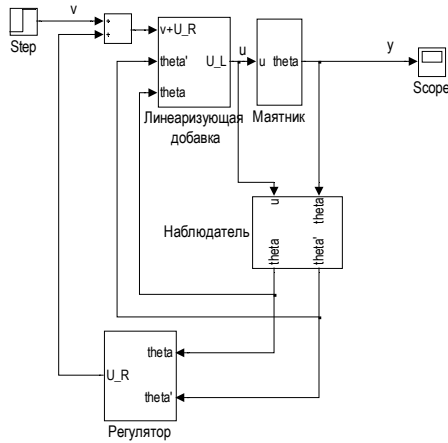


Рис. 28. Структурная схема на основе (35)

По структурным схемам видно, что рис. 28 отличается от рис. 27 тем, что линеаризующая добавка на рис. 28 входит не аддитивно, а на рис. 27 – аддитивно. Также в уравнении (35) не используется старшая производная в отличие от уравнения (30). Сравним качество переходных процессов полученных систем. Вначале сравним систему, построенную на основе уравнения (30), с системой с тем же управлением, но без линеаризующей добавки.

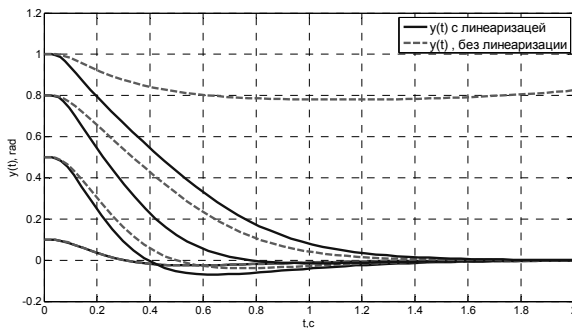


Рис. 29. Графики переходных процессов при различных начальных условиях

На рис. 29 представлены графики переходных процессов системы «объект–линеаризующая добавка–наблюдатель–регулятор» при различных начальных условиях объекта и нулевых начальных условиях наблюдателя состояния.

Перерегулирование у переходных процессов объясняется появившимися нулями в передаточной функции линеаризованной системы. Время переходного процесса по сравнению с системами без наблюдателя существенно не изменилось, это объясняется правильным выбором скорости убывания ошибки оценивания. Но в системах с наблюдателем возрастает сигнал управления, поэтому в системах с сильно ограниченным управляющим сигналом применение наблюдателя состояния ограничивает возможности регулирования.

Далее сравним переходные процессы системы (30) с системой (35)

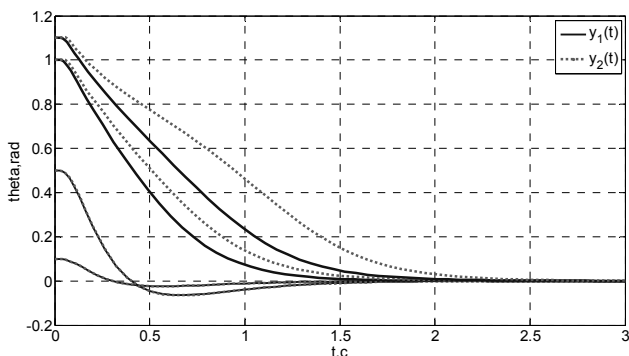


Рис. 30. Графики переходных процессов синтезированной системы (35) $y_1(t)$ и (30) $y_2(t)$

Как видно из рис. 30, при сравнительно небольших углах отклонения графики переходных процессов совпадают, но при увеличении начального угла система (35) работает лучше.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ВЫХОДУ

Предлагается решить задачу линеаризации нелинейной многоканальной системы [17,18]. Эта система описывает большой класс многоканальных объектов, в том числе и электрическую машину переменного тока [19, 20]. Выходные величины рассматриваемой системы нелинейно связаны с переменными состояния. На рис. 31 показана структурная схема объекта электрической машины.

Пусть по аналогии с машиной переменного тока свойства объекта (тепловые потери, реактивная мощность, величина напряжения) зависят от соотно-

шений регулируемых переменных. Эти свойства могут выступать в качестве выходных величин в виде вектора $z(t)$, компоненты $z_i(t)$ которого нелинейно связаны с регулируемыми переменными.

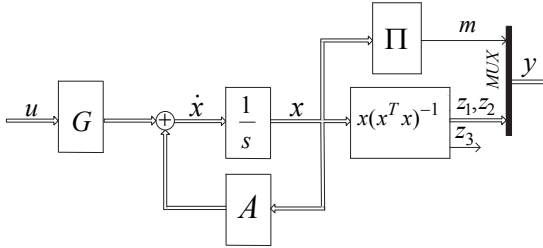


Рис. 31. Структурная схема электрической машины переменного тока

Представим описание объекта моделирования в переменных состояния, в котором $u \in R^3$ – вектор входных воздействий объекта; $x \in R^3$ – вектор состояния; $y \in R^3$ – вектор выходных величин; $A \in R^{3 \times 3}$ – матрица размером 3×3 , состоящая из вещественных чисел; матрица $G \in R^{3 \times 3}$ – единичная матрица; MUX – мультиплексор, T – знак транспонирования, Π – знак умножения компонент вектора. Математическое описание объекта приведено ниже:

$$\dot{x} = Ax + Gu,$$

$$z = (z_1 \quad z_2 \quad z_3)^T,$$

$$m = x_1 x_2 x_3,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T, \quad x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T,$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} & \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \end{pmatrix}^T.$$

Компоненты вектора z связаны между собой следующим уравнением:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1. \quad (37)$$

По аналогии с машиной переменного тока свойства объекта (тепловые потери, реактивная мощность, величина напряжения) зависят от соотношений регулируемых переменных. Эти свойства могут выступать в качестве выходных величин в виде вектора z , компоненты z_i которого нелинейно связаны с регулируемыми переменными. Далее рассмотрим двухканальный вариант, структурная схема которого представлена ниже.

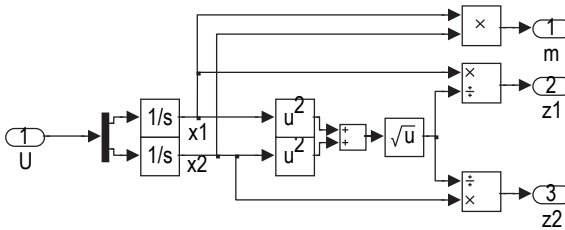


Рис. 32. Структурная схема двухканального объекта

В переменных состояния модель на рис. 32 имеет вид

$$\dot{x} = U,$$

$$m = x_1 x_2, \quad (38)$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 &= 1, \\ U &= (u_1 \quad u_2)^T. \end{aligned} \quad (39)$$

Выходными переменными аналогично (38) и исходя из (39) возьмем

$$Y = \begin{pmatrix} m \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения зависимости между входными и выходными величинами возьмем производную выхода Y :

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 \dot{x}_1 - x_1 x_2 \dot{x}_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \\ x_2 \dot{x}_1 + x_1 \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Так как линейная часть описывается параллельными интеграторами, то исходя из (38) уравнение (40) запишем в виде

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 u_1 - x_1 x_2 u_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \\ x_2 u_1 + x_1 u_2 \end{pmatrix}; \quad (41)$$

$$\dot{Y} = F(x_1, x_2)U = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} & \frac{x_1 x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}} \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Для нахождения такого управления, чтобы полученное линеаризованное уравнение системы имело вид $\dot{Y} = V = (v_1 \quad v_2)^T$, запишем (42) в следующем виде:

$$V = F(x_1, x_2)U,$$

тогда искомое управление имеет вид

$$U = F(x_1, x_2)^{-1} V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}}{2x_2^2} & \frac{1}{2x_2} \\ \frac{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^3}}{2x_1x_2} & \frac{1}{2x_1} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} F_1(x) & F_2(x) \\ F_3(x) & F_4(x) \end{pmatrix} V. \quad (43)$$

Полученное управление (43) будет компенсировать нелинейную зависимость выходных величин и переменных состояния, приводя ее к виду двух независимых друг от друга интеграторов следующего вида:

$$V \frac{1}{p} = Y, \quad (44)$$

тогда решением уравнения (44) будет

$$Y = Vt + C. \quad (45)$$

Из уравнения (45) необходимо найти постоянный вектор C , который определяет начальные условия выходных величин. Выходами объекта являются z_1 и m , а начальные условия, задаваемые на интеграторах, определяют начальное положение вектора x . Для нахождения такого $x(0)$, что будут получены необходимые начальные условия $Y(0)$, выразим вектор переменных состояния x через вектор выхода Y :

$$Y = \begin{pmatrix} m \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m(0)}{\sqrt{\frac{m^2(0)}{z_1^2(0)}(1 - z_1^2(0))}} \\ \sqrt{\frac{m^2(0)}{z_1^2(0)}(1 - z_1^2(0))}} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Используя уравнение (46), можем задавать необходимые начальные условия для m и z_1 и вычислять начальные условия для x . Как видно из (46), $z_1^2(0) < 1$, что соответствует условию (40).

Далее рассмотрим трехканальную модель, в которой динамическая часть описывается тремя параллельными интеграторами без матрицы A . Структурная схема представлена на рис. 33.

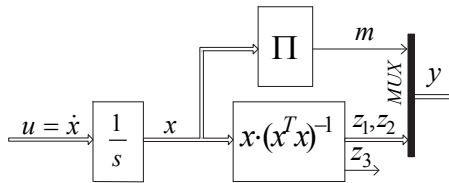


Рис. 33. Структурная схема объекта моделирования

Данный объект имеет векторный вход $u = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ и четыре выходные переменные, это вектор $z = (z_1 \ z_2 \ z_3)^T$ и скалярная величина m . Элементы вектора z связаны соотношением (37), что позволяет при заданных z_1 и z_2 вычислить z_3 из соотношения

$$z_3 = \sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}. \quad (47)$$

Таким образом, составим вектор выходных переменных

$$y = (m \ z_1 \ z_2)^T. \quad (48)$$

С таким выходом модель объекта представляется как система «3 входа – 3 выхода». Очевидно, что (47) вводит ограничение по модулю на изменение элементов вектора z . Поиск управляющих воздействий выполним, считая, что вектор состояния x доступен; при недоступности вектора состояния применяются наблюдатели состояния.

Выходные величины (48) нелинейно связаны с переменными состояния. Для нахождения их линейной зависимости от задания $v = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$ найдем такое управление u по обратной связи, чтобы замкнутая система опи-

сывалась системой линейных дифференциальных уравнений. Для поиска такого управления необходимо найти его прямую зависимость от вектора выходных величин. Возьмем производную выхода, тогда

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 + x_3^2}{\|x\|^3} \dot{x}_1 - \frac{x_1 x_2}{\|x\|^3} \dot{x}_2 - \frac{x_1 x_3}{\|x\|^3} \dot{x}_3 \\ -\frac{x_1 x_2}{\|x\|^3} \dot{x}_1 + \frac{x_1^2 + x_3^2}{\|x\|^3} \dot{x}_2 - \frac{x_2 x_3}{\|x\|^3} \dot{x}_3 \\ x_2 x_3 \dot{x}_1 + x_1 x_3 \dot{x}_2 + x_1 x_2 \dot{x}_3 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ является евклидовой нормой.

Так как линейная часть описывается параллельными интеграторами, то уравнение (49) принимает вид

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 + x_3^2}{\|x\|^3} & -\frac{x_1 x_2}{\|x\|^3} & -\frac{x_1 x_3}{\|x\|^3} \\ -\frac{x_1 x_2}{\|x\|^3} & \frac{x_1^2 + x_3^2}{\|x\|^3} & -\frac{x_2 x_3}{\|x\|^3} \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

В уравнении (48) обозначим множитель перед u через $F(x_1, x_2, x_3)$, тогда

$$\dot{y} = F(x_1, x_2, x_3)u. \quad (51)$$

Так как целью работы является линейная зависимость вектора выходных величин от задания, то, приравняв производную выхода к заданию, получим $\dot{y} = v = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$, тогда уравнение (51) примет вид

$$v = F(x_1, x_2, x_3)u,$$

а искомое управление будет соответствовать

$$u = F(x_1, x_2, x_3)^{-1} v, \quad (52)$$

где

$$F(x_1, x_2, x_3)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2 + 2x_2^2}{3x_3^2} \|x\| & \frac{x_1(x_2^2 - x_3^2)}{3x_2x_3^2} \|x\| & \frac{1}{3x_2x_3} \\ \frac{x_1(x_1^2 - x_3^2)}{3x_1x_3^2} \|x\| & \frac{x_2^2 + 2x_3^2}{3x_3^2} \|x\| & \frac{1}{3x_1x_3} \\ \frac{2x_1^2 + x_3^2}{3x_1x_3^2} \|x\| & \frac{2x_2^2 + x_3^2}{3x_2x_3^2} \|x\| & \frac{1}{3x_1x_2} \end{pmatrix}.$$

На рис. 34 представлена структурная схема полученной системы, которая состоит из модели объекта, представленной на рис. 33, замкнутой компенсирующим сигналом (52).

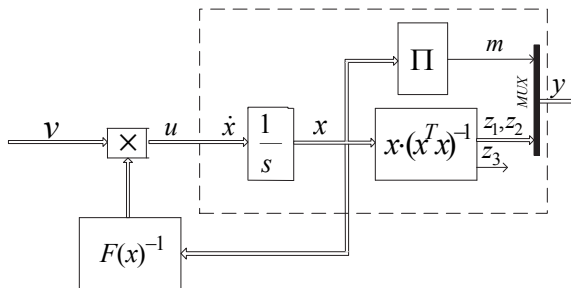


Рис. 34. Структурная схема системы «объект – компенсирующий сигнал»

Задание начальных условий возможно только на интеграторах, т. е. для переменных состояния $x(0)$. Расчет начальных условий вектора выходных величин y необходимо производить заданием определенных значений вектору x .

На рис. 35 представлены графики переходных процессов при $m(0) = z_1(0) = z_2(0) = (0.01, 0.2)$ и $v = (0.5 \ 0.5 \ 0.5)^T$. Как видим, графики

имеют вид прямых, что соответствует интегрированию постоянного входного воздействия v .

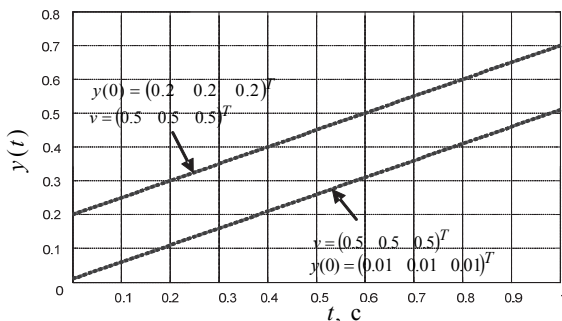


Рис. 35. Переходные процессы выходного вектора y при одинаковых начальных условиях на всех каналах

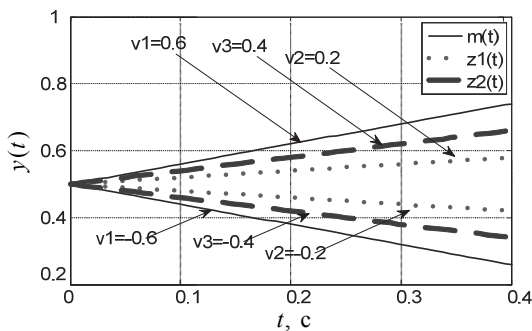


Рис. 36. Переходные процессы выхода при $y(0) = (0.5 \ 0.5 \ 0.5)^T$

Исходя из графиков, представленных на рис. 36, можно сделать вывод, что при различных задающих воздействиях на каждый канал выходные величины изменяются независимо друг от друга и соответствуют интегрированию своего задающего воздействия.

Как видно из рис. 37, все три выходные величины изменяются независимо друг от друга. При $v_2 = v_3 = 0$ и $v_1 = 2$ изменения во времени z_1 и z_2 не происходит, значения остаются равными своим начальным условиям, а компонента m изменяется в соответствии со своим заданием.

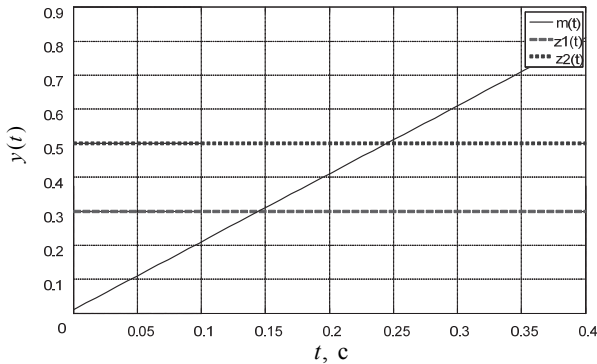


Рис. 37. Переходные процессы выхода при $y(0) = (0.01 \ 0.3 \ 0.5)^T$ и входном воздействии $v(0) = (2 \ 0 \ 0)^T$

Решена задача линеаризации для трехканального объекта с нелинейным выходным вектором. Модель такого объекта описывает электрическую машину переменного тока. Решение заключается в нахождении нелинейной обратной связи такой, что исходный нелинейный объект, представленный на рис. 32, замкнутый компенсирующим сигналом (52), принял вид трехканального интегрирующего звена (рис. 34). На рис. 35 и 36 показано, что выходные переменные в синтезированной системе не связаны друг с другом и могут изменяться отдельно в соответствии со своим задающим воздействием, несмотря на то что в самом объекте выходные величины нелинейно связаны как между собой, так и с переменными состояния. Данный факт позволяет нам формировать управление линейными методами синтеза на каждый канал отдельно в соответствии с желаемой динамикой. Работоспособность синтезированной системы ограничена некоторой областью изменения выходных величин. Для синтеза такого компенсирующего управления необходима известность всего вектора состояния.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Рассмотрим способ нахождения такого управления, которое позволяет линеаризовать исходную нелинейную модель, применяя дифференциально-геометрический подход. Данный подход [21] заключается в использовании

производных Ли (скобки Ли, алгебра Ли, группы Ли). Он применяется для нелинейных объектов, линейных по управлению (*аффинных*):

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u,$$

где u – гладкая функция в некоторой окрестности $\Omega(0)$ начала координат. Начало координат является положением равновесия $f(0, 0) = 0$. Здесь x – вектор состояния, u – управление.

Использование этого инструмента позволяет проводить анализ и синтез нелинейных систем. В частности, матрицы наблюдаемости и управляемости похожи на те, что получены от линеаризованного объекта. Также используется понятие о каноническом виде, который, в общем, аналогичен каноническому виду в линейных системах. Производные Ли особенно удобно использовать для непрерывных дифференцируемых функций, что соответствует нашему классу объектов. Для рассмотрения линеаризации обратной связью нам понадобятся некоторые сведения из дифференциальной геометрии, такие как производная Ли, скобки Ли, матрица управляемости, полученная для нелинейной системы.

Производная по направлению векторного поля является обобщенным понятием производной по направлению. Такая производная от скалярной функции задается формулой

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Такую производную функции по векторному полю называют **производной Ли** ($L_A f(x)$ – «производная функции $f(x)$ по направлению векторного поля \mathbf{A} »).

Если брать производную не от скалярной функции, а от другого векторного поля, то уравнение производной запишется в виде

$$[A, B] = \frac{\partial B(x)}{\partial x} A(x) - \frac{\partial A(x)}{\partial x} B(x). \quad (53)$$

Такую производную векторного поля по векторному полю называют **скобкой Ли (коммутатором)** $[A, B] \equiv ad_A B$ – «производная векторного поля \mathbf{B} по направлению векторного поля \mathbf{A} ». Описание свойств этих производных осуществляется при помощи *алгебры Ли*. Для работы с такими производными существует свой математический аппарат.

Использование производных Ли позволяет приводить аналогии в описании линейных и нелинейных систем. Так, используя производную Ли, удастся

проверить наблюдаемость и управляемость системы, которые проверяются аналогично с линейными системами по матрице наблюдаемости и управляемости, у них также проверяется ранг.

Управляемость нелинейного объекта, как и линейного объекта, определяется при помощи матрицы управляемости, которая в нелинейном случае состоит из коммутаторов векторных полей **A** и **B**:

$$U = \left(B(x), [A, B], \dots, \left[A, \operatorname{ad}_A^{k-1} B \right] \right). \quad (54)$$

Канонические формы в нелинейных системах, как и в линейных, широко используются для анализа и синтеза систем управления. Для нелинейных систем, линейных по управлению (аффинных), представленных в канонической форме, разработаны методы решения задачи стабилизации. Системы, не представленные в канонической форме, возможно преобразовать в каноническую форму. Для этого с использованием алгебры Ли, существует достаточно формализованный подход нахождения преобразования координат.

Система, записанная в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= f(x) + b(x)u, \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (55)$$

называется системой, представленной в *канонической форме*.

Синтез алгоритма управления состоит из пяти этапов:

- 1) найти матрицу управляемости (54);
- 2) найти определитель матрицы управляемости и проверить инвалютивность всех столбцов матрицы управляемости, кроме последнего;
- 3) если определитель матрицы управляемости не равен нулю и проверка на инвалютивность прошла успешно, то определить функцию T_1 из преобразования $z = T(x)$ из условий:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} \operatorname{ad}_A^i B = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} \operatorname{ad}_A^{n-1} B \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2;$$

4) найти преобразование $z = T(x) = [T_1(x), \dots, T_n(x)]^T$, где $T_n(x) = L_A^{n-1}T_1$;

5) управление выберем в виде

$$u = \frac{-L_A^n T_1(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k L_A^k T_1(x)}{L_B L_A^{n-1} T_1(x)}, \text{ которое в переменных } z \text{ запишется в виде}$$

$$u = \frac{-f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k z_k}{g(z)}.$$

Пример нахождения стабилизирующего управления для аффинной управляемой динамической системы при условии доступности всего вектора состояния будет рассмотрен ниже. Пусть АУДС задано уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + cx_1^3, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (56)$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 + cx_1^3 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Найдем матрицу управляемости (54), для чего вычислим ее компоненты (53). Вектор $B(x)$ постоянный, и его производная равна нулю

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а производная от $A(x)$ равна

$$\frac{\partial A(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 3cx_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставив найденные значения в (54), получим

$$[A, B] = ad_A B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + cx_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3cx_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

$$U = [B \quad ad_A B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы (57) отличен от нуля, и ее столбцы образуют инволютивное множество как постоянные векторы.

Найдем преобразование $z = T(x)$:

$$\frac{dT_1}{dx} B = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\frac{dT_1}{dx} ad_A B = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Соответственно T_1 зависит только от x_1 . Пусть $T_1 = x_1 = z_1$.

Найдем T_2 :

$$T_2 = L_A T_1 = z_2 = x_2 + cx_1^3.$$

Найдем $L_A T_2$:

$$L_A T_2 = \dot{z}_2 = \begin{pmatrix} 3cx_1^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + cx_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3cx_1^2 (x_2 + cx_1^3).$$

Управление, приводящее систему (4) к виду $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = v$, имеет вид

$$u = -3cx_1^2 (x_2 + cx_1^3) + v,$$

а управление, стабилизирующее систему (56), имеет вид

$$u = -3cx_1^2 (x_2 + cx_1^3) - c_2 (x_2 + cx_1^3) - c_1 x_1. \quad (58)$$

В переменных z система уравнений (56) с управлением (58) примет вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -c_1 z_1 - c_2 z_2. \quad (59)$$

Для сравнения запишем уравнение (56), линеаризованное в окрестности $x_1 = 0$:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \quad (60)$$

Выберем управление в виде $u = -c_1x_1 - c_2x_2$, тогда система уравнений (60) с выбранным управлением запишется в виде

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -c_1x_1 - c_2x_2. \quad (61)$$

Система уравнений (59) и система уравнений (61) имеют одинаковый вид, но система (59) записана в переменных z , которые получаются путем нелинейного преобразования $z = T(x)$ переменных x . На рис. 37 представлены графики переходных процессов систем (59) и (61) при различных начальных условиях $x_1(0) = 0,4$ и $x_1(0) = 0,83$.

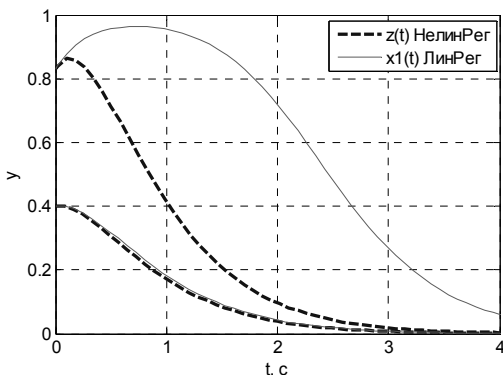


Рис 38. Графики переходных процессов систем (59) и (61)

Моделирование проводилось при $y(0) = 0.4$ и $y(0) = 0.83$, $c_1 = c_2 = 1$. Как видно из рис. 38, при возрастании начальных условий (отдаление от малой окрестности точки линеаризации) качество переходного процесса системы (61) ухудшается, а у системы (59) остается прежним.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение линеаризации по обратной связи придает исходной нелинейной модели линейное поведение. Такой подход дает возможность применять линейные методы синтеза. В работе была показана эквивалентная линеаризация на различных примерах. Рассмотрены модели с нелинейно связанными переменными состояния, модели с нелинейным выходом. Рассмотрен синтез системы управления для подсистемы «маятник» в объекте

«перевернутый маятник на тележке». Также для многоканальных объектов, нелинейных по выходу, показаны эквивалентная линеаризация и применение алгебры и скобок Ли для поиска нелинейных обратных связей. В зависимости от исходного представления модели можно найти разное линеаризующее управление с отличающимися свойствами. Этими свойствами могут быть различные области определения функции, а также использование различных компонент вектора состояния. На примере перевернутого маятника проведен синтез системы управления с модальным регулятором и наблюдателем полного порядка. В одном случае была использована старшая производная, а в другом – нет. Для многоканального объекта применение следующего алгоритма дает определенные преимущества. В модели объекта, нелинейного по выходу, выходные величины были связаны друг с другом, и их удалось их развязать. Замкнутая система получилась эквивалентна трем одноканальным системам вида интегратор с ограничениями на переменные состояния, вызванные структурой самого объекта. Таким образом, в работе выявлена возможность применения линеаризации обратными связями вместо обычной линеаризации, что усложняет алгоритм, но улучшает качество синтезированной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воевода А.А., Вороной В.В. Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов заданной структуры // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2 (51). – С. 214–218.
2. Воевода А.А. Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 1 (38). – С. 195–198.
3. Воевода А.А., Чехонадских А.В., Шоба Е.В. Модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения: разделение движений при стабилизации трехмассовой системы // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2011. – № 2 (43). – С. 39–46.
4. Воевода А.А., Шоба Е.В. Управление перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 3–14.
5. Воевода А.А., Жмудь В.А. Сходимость алгоритмов оптимизации регулятора для объекта с ограничением и с запаздыванием // Научный вестник НГТУ. – 2007. – № 4. – С. 179–184.
6. The modeling tests of the new PID-regulators structures / A.A. Voevoda, V.A. Zhmud, R.Y. Ishimtsev, V.M. Semibalamut // Proceedings of the 18th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling,

ASM 2009, 7–9 September, 2009, Palma de Mallorca, Spain. – [S. l.], 2009. – P. 165–168.

7. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

8. Slotine J.J.E., Li W. Applied nonlinear control. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

9. Marino R., Yomei P. Nonlinear control design: geometric, adaptive, and robust. – London; New York: Prentice Hall, 1995. – 396 p.

10. Филюшов В.Ю. Линеаризация обратной связью: эвристический подход // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 1 (83). – С. 37–46.

11. Филюшов В.Ю. Примеры использования нелинейных обратных связей для нелинейных объектов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 61–70.

12. Воевода А.А., Иванов А.Е. Пример модального синтеза для нелинейного объекта с использованием нелинейных обратных связей // Сборник научных трудов НГТУ. – 2013. – № 2 (72). – С. 3–9.

13. Филюшов В.Ю. Примеры структурных преобразований нелинейного объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 72–82.

14. Воевода А.А., Шоба Е.В. О модели перевернутого маятника // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 1 (67). – С. 3–14.

15. Воевода А.А., Филюшов В.Ю. Линеаризация обратной связью: перевернутый маятник // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 49–60.

16. Воевода А.А., Филюшов В.Ю. Линеаризация обратной связью: перевернутый маятник // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 62–71.

17. Воевода А.А., Филюшов В.Ю. Линеаризация двухканальной системы с нелинейным выходом при помощи обратной связи // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 49–61.

18. Филюшов В.Ю. Линеаризация нелинейного трехканального динамического объекта обратной связью // Научный вестник НГТУ. – 2017. – № 1 (66). – С. 74–85.

19. Онищенко Г.Б. Электрический привод: учебник для вузов. – М.: Академия, 2006. – 288 с.

20. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины. – М.: Энергия, 1980. – 928 с.

21. Воевода А.А., Филюшов В.Ю. Линеаризация обратной связью // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 68–76.

Филишов Владислав Юрьевич, аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – синтез многоканальных нелинейных объектов. Имеет более десяти публикаций. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

DOI: 10.17212/2307-6879-2018-2-36-80

Examples of structural transformation of nonlinear object*

V.Yu. Filiushov

Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, undergraduate of department automatics. E-mail: filiushov.vladislav@gmail.com

At present, nonlinear synthesis methods that use the original nonlinear model are gaining popularity. Such an approach makes it possible to form a control not only in the vicinity of the linearization point, but in a larger domain of change in the state variables, which makes it possible to take into account the behavior of the object most fully in the control law. Linear synthesis methods, such as the modal synthesis method, synthesis methods using polynomial decomposition, optimization algorithms, construction of PID regulators, and others are used for models linearized in the vicinity of a certain point. But this representation does not describe all the properties of the operation of the source object. In order to apply linear synthesis methods for nonlinear objects, it is more appropriate to use feedback linearization, which leads the behavior of the original object to a linear form. The essence of the method lies in the search for such compensating control, in which the behavior of a closed system will correspond to the behavior of the system described by linear differential equations. Then, for the synthesized system, it becomes possible to calculate the regulator by linear synthesis methods. In the present work a review of previous works on this topic was carried out. Various single-channel nonlinear objects are considered; an object containing a trigonometric function; the possibility of obtaining a different solution of the problem of linearization by nonlinear feedbacks for the same object is shown. Using the example of the pendulum subsystem of the object model, an inverted pendulum on the trolley produces a synthesis of the control system with a modal regulator and a full-order observer, where in one case the higher derivative of the output quantity was used, and in the other there is not; the possibility of using this method for multichannel objects (two and three channel), nonlinear on the output, is shown; and also shows a formalized method for finding linearizing controls based on algebra and Lie brackets.

Keywords: nonlinear control, feedback linearization, regulator, state observer, synthesis, multichannel, Lie algebra

* Received 19 February 2018.

REFERENCES

1. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh regulyatorov zadannoi struktury [Polynomial method for calculating multi-channel controllers of a given structure]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (51), pp. 214–218.
2. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya [Stabilisation of two-mass system by a modal method of synthesis with polynomial factorization]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (38), pp. 195–198.
3. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V., Shoba E.V. Modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya: razdelenie dvizhenii pri stabilizatsii trekhmassovoi sistemy [Modal synthesis method using a polynomial decomposition: the separation of motions in the stabilization of the three-mass plant]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 2 (43), pp. 39–46.
4. Voevoda A.A., Shoba E.V. Upravlenie perevernutyim mayatnikom [Management of the inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 3–14.
5. Voevoda A.A., Zhmud V.A. Skhodimost' algoritmov optimizatsii regulyatora dlya ob'ekta sogra-nicheniem i s zapazdyvaniem [The convergence of the algorithms for the optimization of regulator for an object with restriction and delay]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2007, no. 4, pp. 179–184.
6. Voevoda A.A., Zhmud V.A., Ishimtsev R.Y., Semibalamut V.M. The modeling tests of the new PID-regulators structures. *Proceedings of the IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, ASM 2009*, Palma de Mallorca, Spain, 7–9 September, 2009, pp. 165–168.
7. Kim D.P. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 2. Mnogomernyye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnyye sistemy* [The theory of automatic control. Vol. 2. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.
8. Slotine J.J.E., Li W. *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1991.
9. Marino R., Yomei P. *Nonlinear control design: geometric, adaptive, and robust*. London, New York, Prentice Hall, 1995. 396 p.

10. Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: evristicheskii podkhod [Feedback linearization: heuristic approach]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 1 (83), pp. 37–46.
11. Filiushov V.Yu. Primery ispol'zovaniya nelineinykh obratnykh svyazei dlya nelineinykh ob"ektov [Examples of applying of nonlinear output injection for nonlinear objects]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 61–70.
12. Voevoda A.A., Ivanov A.E. Primer modal'nogo sinteza dlya nelineinogo ob"ekta s ispol'zovaniem nelineinykh obratnykh svyazei [Modal synthesis example for nonlinear object using nonlinear feed-backs]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2013, no. 2 (72), pp. 3–9.
13. Filiushov V.Yu. Primery strukturnykh preobrazovaniy nelineinogo ob"ekta [Examples of structural transformation of nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 72–82.
14. Voevoda A.A., Shoba E.V. O modeli perevernutogo mayatnika [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (67), pp. 3–14.
15. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: perevernutyi mayatnik [Feedback linearization: inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 49–60.
16. Voevoda A.A., Filiushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu: perevernutyi mayatnik [Feedback linearization: inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 62–71.
17. Voevoda A.A., Filyushov V.Yu. Linearizatsiya dvukhkanal'noi sistemy s nelineinym vykhodom pri pomoshchi obratnoi svyazi [Linearization by feedback of two channel object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 49–61.
18. Filyushov V.Yu. Linearizatsiya nelineinogo trekhkanal'nogo dinamicheskogo ob"ekta obratnoi svyaz'yu [Linearization of multichannel object by output

injection]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2017, no. 1 (66), pp. 74–85.

19. Onishchenko G.B. *Elektricheskii privod* [Electric drive]. Moscow, Academia Publ., 2006. 288 p.

20. Ivanov-Smolenskii A.V. *Elektricheskie mashiny* [Electric machines]. Moscow, Energiya Publ., 1980. 928 p.

21. Voevoda A.A., Filyushov V.Yu. Linearizatsiya obratnoi svyaz'yu [Feedback linearization]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 68–76.

Для цитирования:

Филиушов В.Ю. Нелинейный объект: линеаризация обратными связями // Сборник научных трудов НГТУ. – 2018. – № 2 (92). – С. 36–80. – doi: 10.17212/2307-6879-2018-2-36-80.

For citation:

Filiushov V.Yu. Nelineinyi ob"ekt: linearizatsiya obratnymi svyazyami [Examples of structural transformation of nonlinear object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 2 (92), pp. 36–80. doi: 10.17212/2307-6879-2018-2-36-80.