СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. – 2014. – № 4(78).** – 7–30

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 62–50

ФУНКЦИОНАЛЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ БОЛЬЦА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ*

А.И. РУБАН

660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, Сибирский федеральный университет, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики Сибирского федерального университета. E-mail: ai-rouban@mail.ru

Развивается вариационный метод расчета функционалов чувствительности (связывающих первую вариацию функционала качества с вариацией переменных параметров) и коэффициентов чувствительности (составляющих градиента от функционала качества к постоянным параметрам) для многомерных нелинейных динамических систем, описываемых обобщенными гладкими интегральными уравнениями Вольтерра второго рода с чистым запаздыванием. Компоненты вектора коэффициентов чувствительности входят в функционал чувствительности. Переменные и постоянные параметры присутствуют также в модели измерительного устройства и в функционале качества работы системы. В основе расчета показателей чувствительности лежит решение интегральных уравнений модели в прямом направлении времени и полученных сопряженных интегральных уравнений для множителей Лагранжа в обратном направлении времени.
Вариационный метод, восходящий к работам Лагранжа, Гамильтона, Эйлера, основан на инвариантном расширении исходного функционала качества системы за счет включения в него динамических уравнений модели с помощью множителей Лагранжа и на получении первой вариации расширенного функционала по фазовым координатам модели и по интересуемым параметрам. Обращение в ноль функций, стоящих перед вариациями фазовых координат, дает сопряженные динамические уравнения для множителей Лагранжа. Упрощенная первая вариация представляет собой искомый функционал чувствительности.
Приводятся примеры получения из итогового результата функционалов чувствительности для объектов, описываемых интегральными уравнениями без запаздывания и дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Указан способ применения результата при построении функционалов чувствительности для динамических систем, описываемых обобщенными интегродифференциальными уравнениями с запаздыванием.
Результаты применимы при проектирования высокоточных систем и приборов.

* Статья получена 10 июля 2014 г.

Ключевые слова: вариационный метод, функционал чувствительности, коэффициент чувствительности, интегральное уравнение, функционал качества работы системы, переменные параметры, постоянные параметры, сопряженное уравнение, множитель Лагранжа, задача Больца, чистое запаздывание

DOI: 10.17212/2307-6879-2014-4-7-30

ВВЕДЕНИЕ

Функционал чувствительности (ФЧ) первого порядка связывает первую вариацию функционала качества с вариациями переменных и постоянных параметров. Коэффициенты чувствительности (КЧ) первого порядка являются компонентами вектора градиента от функционала качества к постоянным параметрам, КЧ входят в состав ФЧ.

Проблема вычисления ФЧ и КЧ для динамических систем является главной при анализе и синтезе законов управления, идентификации, оптимизации [1–8]. Характеристики чувствительности первого порядка используются наиболее часто. Далее мы будем рассматривать только ФЧ и КЧ первого порядка.

Считаем, что векторный выход $y(t)$ модели динамического объекта при непрерывном времени $t \in \left[t_0, t^1\right]$ неявно зависит от векторов переменных и постоянных параметров $\tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}$. Функционал качества работы динамического объекта построен на выходах модели $y(t)$ при $t \in \left[t_0, t^1\right]$.

Первая вариация δI функционала I связана с вариацией переменных параметров $\delta\tilde{\alpha}(t)$ в виде ФЧ первого порядка $\delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} V(t)\delta\tilde{\alpha}(t)dt$; КЧ первого порядка по отношению к постоянным параметрам $\overline{\alpha}$ представляют собой градиент от I по $\overline{\alpha}$: $(dI / d\overline{\alpha})^T \equiv \nabla_{\overline{\alpha}} I$; КЧ – это коэффициенты простейшей связи между первой вариацией функционала качества δI и вариацией постоянных параметров $\delta\overline{\alpha}$: $\delta_{\overline{\alpha}} I = (\nabla_{\overline{\alpha}} I)^T \delta\overline{\alpha} = (dI / d\overline{\alpha})\delta\overline{\alpha} \equiv \sum_{j=1}^{m} (dI / d\overline{\alpha}_j)\delta\overline{\alpha}_j$.

Относительно переменных $\tilde{\alpha}(t)$ и постоянных $\overline{\alpha}$ параметров первая вариация функционала качества равна сумме указанных двух компонент: $\delta_{\tilde{\alpha}(t),\overline{\alpha}} I \equiv \delta I = \int_{t_0}^{t^1} V(t)\delta\tilde{\alpha}(t)dt + (dI / d\overline{\alpha})\delta\overline{\alpha}$.

Прямой метод расчета КЧ (при дифференцировании функционала качества по постоянным параметрам) приводит к необходимости решения громоздкой системы уравнений чувствительности для функций чувствительности

$W(t)$; $W(t)$ – это матрица коэффициентов взаимосвязи (для каждого фиксированного t) между первой вариацией векторного выхода модели и вариацией вектора постоянных параметров: $\delta y(t) = W(t)\delta\overline{\alpha}$. Например, для функционала $I = \int_{t_0}^{t^1} f_0(y(t), \overline{\alpha}, t)dt$ мы имеем следующий вектор (вектор-строку) КЧ: $dI / d\overline{\alpha} = \int_{t_0}^{t^1} [(\partial f_0 / \partial y)\, W(t) + \partial f_0 / \partial\overline{\alpha}]dt$. Для вычисления матрицы $W(t)$ необходимо решить громоздкую систему уравнений – уравнений чувствительности; j-й столбец матрицы $W(t)$ состоит из функций чувствительности $dy(t) / d\overline{\alpha}_j$ выхода по отношению к компоненте $\overline{\alpha}_j$ вектора $\overline{\alpha}$. Эти функции чувствительности удовлетворяют векторному уравнению (если y вектор), получаемому из динамического уравнения для $y(t)$ после дифференцирования его по параметру $\overline{\alpha}_j$ [1, 3–8].

При переменных параметрах такой метод неприменим, ибо функции чувствительности существуют только по отношению к постоянным параметрам.

Для сравнительно простых классов гладких динамических систем показано, что при расчете КЧ можно избавиться от решения громоздких уравнений чувствительности за счет перехода к решению сопряженных уравнений – сопряженных по отношению к исходным динамическим уравнениям объекта. Метод получения сопряженных уравнений (который предложен в 1962 г.), основанный на анализе уравнений чувствительности, развития не получил.

Вариационный метод [2], восходящий к работам Лагранжа, Гамильтона, Эйлера, позволяет существенно упростить процесс нахождения сопряженных уравнений и формул расчета не только КЧ, но и ФЧ. В основе метода лежит инвариантное расширение исходного функционала за счет включения в него динамических уравнений объекта с помощью множителей Лагранжа и получения первой вариации расширенного функционала по фазовым координатам объекта и по интересуемым параметрам.

Динамические уравнения для множителей Лагранжа получают путем обращения в ноль (в первой вариации расширенного функционала) переменных коэффициентов перед вариациями фазовых координат. Данное упрощение первой вариации расширенного функционала приводит к наличию в правой части только вариаций параметров, т. е. в итоге получается ФЧ. Если все параметры постоянны, то вариации параметров выносятся из соответствующих интегралов, и в итоге в получаемой вариации функционала коэффициенты, стоящие перед вариациями параметров, являются искомыми КЧ.

Данный метод использован в [7] для динамических систем, описываемых обыкновенными векторными гладкими интегральными уравнениями.

Общая схема вариационного метода сохраняет вид и при построении ФЧ для динамических систем с переменными параметрами.

Особенности расчета ФЧ и КЧ возникают при наличии в динамических моделях объектов чистых запаздываний и при использовании в показателях качества работы систем как интегрального, так и конечного слагаемых (задача Больца).

В предлагаемой работе получены результаты по расчету ФЧ и КЧ для более общего вида векторных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с чистым запаздыванием (с одновременным присутствием переменных и постоянных параметров) при наличии разрыва выходных переменных, наличии зависимости от постоянных параметров начального и конечного моментов времени, а также запаздывающего аргумента. Переменные и постоянные параметры присутствуют также в модели измерительного устройства и в показателе качества работы системы для задачи Больца. В качестве примеров из общих результатов получены уравнения расчета ФЧ и УЧ для векторного обыкновенного интегрального уравнения и для векторного дифференциального уравнения с запаздыванием. Результаты статьи более общие по отношению к результатам работ [7, 9–13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагаем, что исследуемый оптимизируемый по переменным $\tilde{\alpha}(t)$ и постоянным параметрам $\overline{\alpha}$ динамический объект описывается системой нелинейных интегральных уравнений (ИУ) типа Вольтерра второго рода и с чистым запаздыванием τ [7, p. 75]

$$y(t) = r(\tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^{t} K(t, y(s), \quad y(s-\tau), \tilde{\alpha}(s), \overline{\alpha}, s)\, ds, \quad t_0 \le t \le t^1,$$

$$y(t) = \psi(\tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}, t), \quad t_0 - \tau \le t < t_0, \quad 0 < \tau, \tag{1}$$

$$t_0 = t_0(\overline{\alpha}), \quad t^1 = t^1(\overline{\alpha}), \quad \tau = \tau(\overline{\alpha}).$$

Здесь t_0, t^1, τ – начальный и конечный моменты времени работы системы и чистое запаздывание; они являются известными функциями от вектора параметров $\bar{\alpha}$; y – вектор-столбец фазовых координат; $\tilde{\alpha}(s)$, $\bar{\alpha}$ – векторы-столбцы интересующих нас переменных и постоянных параметров; $r(\cdot)$, $K(\cdot)$, $t_0(\cdot)$, $t^1(\cdot)$, $\tau(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ – известные непрерывно дифференцируемые ограниченные вектор-функции.

Фазовые координаты y в исходной точке могут совершать разрыв:

$$y^+(t_0) \equiv y(t_0+0) = r(\alpha, t_0, t_0) \neq y(t_0-0) \equiv y^-(t_0) = \psi(\alpha(t_0), t_0) .$$

Указанный разрыв (в силу расчета y на основе сглаживающего интегрального преобразования) не оказывает влияния на непрерывность фазовых координат в моменты времени $t_0 + n\tau$, $n = 1, 2, \cdots$.

Переменные $\eta(t)$ (выходы модели измерительного устройства) в каждый текущий момент времени t связаны с фазовыми координатами $y(t)$ известным преобразованием

$$\eta(t) = \eta(y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \qquad t \in [t_0, t^1], \tag{2}$$

где $\eta(\cdot)$ – известная с точностью до параметров непрерывная, непрерывно дифференцируемая, ограниченная (вместе с первыми производными) вектор-функция. В эту модель входят переменные и постоянные параметры $\tilde{\alpha}(t)$, $\bar{\alpha}$. Размерности векторов y и η в общем случае различны.

На переменных $\eta(t)$ построен функционал качества работы системы

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t^1} f_0(\eta(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t)\, dt + I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1), \tag{3}$$

Он явно и неявно зависит от параметров $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$. Условия для функций $f_0(\cdot)$, $I_1(\cdot)$ те же, что и для ранее введенных функций $r(\cdot)$, $K(\cdot)$, $t_0(\cdot)$, $t^1(\cdot)$, $\tau(\cdot)$, $\psi(\cdot)$. При использовании функционала (3) задачу оптимизации в теории оптимального управления называют задачей Больца. Из нее как частные варианты следуют задача Лагранжа (когда присутствует только интегральная компонента, т. е. когда $I_1(\cdot) = 0$) и задача Майера (когда присутствует только вторая компонента – функция от фазовых координат в конечной точке, т. е. когда $f_0(\cdot) = 0$).

С целью упрощения преобразований при сохранении общности во всех уравнениях (1)–(3) используются два вектора параметров $\tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}$. Если, например, в каждом уравнении в (1)–(3) имеются свои параметры, то объединяем их формально в указанные векторы, используем результаты статьи по сопряженным уравнениям и ФЧ, а затем в них проводим упрощения, соответствующие структуре векторов $\tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}$.

При получении результатов используем следующие упрощенные обозначения функций:

$$r(t) \equiv r(\tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}, t_0, t), \;\; K(t,s) \equiv K(t,\, y(s),\, y(s-\tau),\;\, \tilde{\alpha}(s),\;\, \overline{\alpha},\;\, s)$$

$$\psi(\,t) \equiv \psi(\tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha},\, t), \;\; \eta\,(t) \equiv \eta\,(y(t), \tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}, t)\;,$$

$$f_0(t) \equiv f_0(\eta\,(t), \tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}, t), \; I_1(t^1) \equiv I_1(\eta(t^1), \overline{\alpha}, t^1)\;.$$

Вариационным методом получим ФЧ

$$\delta I(\alpha) = \int\limits_{t_0-\tau}^{t^1} V(t)\delta\,\tilde{\alpha}(t)dt + (dI(\alpha)\,/\,d\tilde{\alpha}(t^1))\,\delta\tilde{\alpha}(t^1) + (dI(\alpha)\,/\,d\overline{\alpha})\;\delta\overline{\alpha}$$

по отношению к интересующим нас переменным и постоянным параметрам.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Дополняем функционал качества (3) ограничениями равенствами (1) с использованием множителей Лагранжа $\gamma\,(t)$, $t \in \left[t_0, t^1\right]$; $\overline{\gamma}\,(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ (вектор-столбцов) и переходим к расширенному функционалу

$$I = I(\alpha) + \int\limits_{t_0}^{t^1} \gamma^{\,T}(t) \left[r(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)\; ds - y(t) \right] dt \;\; + \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0} \overline{\gamma}^{T}(t)[\psi(t) - y(t)]\; dt. \quad (4)$$

Он совпадает с $I(\alpha)$, когда уравнения движения объекта (1) выполняются. В двойном интеграле функционала $I(\alpha)$ меняем порядок интегрирования внутри треугольной области (см. рисунок) $\left(\text{т. е.} \int_{t_0}^{t^1}\int_{t_0}^{t} A(t,s)\, ds\, dt = \int_{t_0}^{t^1}\int_{t}^{t^1} A(s,t)\, ds\, dt \right)$

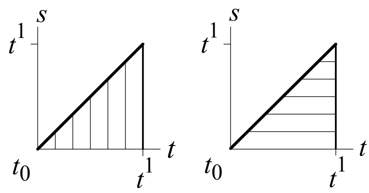
$$\int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) \int_{t_0}^{t} K(t,s)\, ds\, dt = \int_{t_0}^{t^1}\int_{t}^{t^1} \gamma^T(s) K(s,t)\, ds\, dt, \tag{5}$$

и тогда функционал (4) принимает вид

$$I = I_1(t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \left\{ f_0(t) + \gamma^T(t)[r(t) - y(t)] + \int_{t}^{t^1} \gamma^T(s) K(s,t)\, ds \right\} dt +$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \overline{\gamma}^T(t)[\psi(t) - y(t)]\, dt\,. \tag{6}$$

Находим первую вариацию для I по отношению к $\delta y(t)$, $\delta\tilde{\alpha}(t)$, ($t \in [t_0, t^1)$), $\delta\tilde{\alpha}(t^1)$ и $\delta\overline{\alpha}$, принимая во внимание: 1) непрерывность решения ИУ (1) в особых точках: $y(t_0 + n\tau + 0) = y(t_0 + n\tau - 0)$, $n = 1, 2, \ldots$; 2) зависимость правой части ИУ (1) от $y(t)$, $y(t-\tau)$, $\tilde{\alpha}(s)$, $\overline{\alpha}$, а начальной функции – от $\tilde{\alpha}(s)$, $\overline{\alpha}$; 3) зависимость в (3) между $\eta(t)$ и $y(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$, $\overline{\alpha}$; 4) зависимость t_0, t^1, τ, $I_1(t^1)$ от $\overline{\alpha}$ (т. е. $t_0 = t_0(\overline{\alpha})$, $t^1 = t^1(\overline{\alpha})$, $\tau = \tau(\overline{\alpha})$, $I_1(t^1) \equiv I_1(\eta(t^1), \overline{\alpha}, t^1)$):



Треугольная область и порядок интегрирования

$$\delta I = \Phi(t^1)\delta y(t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_{t}^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)} ds - \gamma^T(t) \right] \delta y(t)\, dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t^1}\int_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t-\tau)}ds\;\delta y(t-\tau)dt-\int_{t_0-\tau}^{t_0}\overline{\gamma}^T(t)\delta y(t)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t^1}\left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial\tilde{\alpha}(t)}+\frac{\partial f_0(t)}{\partial\tilde{\alpha}(t)}+\gamma^T(t)\frac{\partial r(t)}{\partial\tilde{\alpha}(t)}+\int_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial\tilde{\alpha}(t)}ds\right]\delta\tilde{\alpha}(t)\;dt\;+$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\overline{\gamma}^T(t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial\tilde{\alpha}(t)}\delta\tilde{\alpha}(t)\;dt+\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial\tilde{\alpha}(t^1)}\delta\tilde{\alpha}(t^1)+$$

$$+\left\{\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial\overline{\alpha}}+\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\overline{\alpha}}+\right.$$

$$+\int_{t_0}^{t^1}\left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial\overline{\alpha}}+\frac{\partial f_0(t)}{\partial\overline{\alpha}}+\gamma^T(t)\frac{\partial r(t)}{\partial\overline{\alpha}}+\int_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial\overline{\alpha}}ds\right]dt+$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\overline{\gamma}^T(t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial\overline{\alpha}}\;dt+\left[-f_0(t_0)+\int_{t_0}^{t^1}\gamma^T(t)\left(\frac{\partial r(t)}{\partial t_0}-K(t,t_0)\right)dt\;+\right.$$

$$\left.+\;1(t^1-t_0-\tau)\int_{t_0+\tau}^{t^1}\gamma^T(t)[K(t,t_0+\tau-0)-K(t,t_0+\tau+0)]dt\right]\frac{dt_0}{d\overline{\alpha}}+$$

$$+\left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial t^1}+\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1}+f_0(t^1)\right]\frac{dt^1}{d\overline{\alpha}}+$$

$$+\left[1(t^1-t_0-\tau)\int_{t_0+\tau}^{t^1}\gamma^T(t)[K(t,t_0+\tau-0)-K(t,t_0+\tau+0)]dt-\right.$$

$$-\int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,s)}{\partial y(s-\tau)} \frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)} ds\, dt \Bigg] \frac{d\tau}{d\bar{\alpha}} \Bigg\} \delta\bar{\alpha} . \qquad (7)$$

Здесь $\dfrac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \dfrac{\partial \eta(t^1)}{\partial y(t^1)} \equiv \Phi(t^1)$; $1(z)$ – единичная функция, она равна нулю при отрицательной величине аргумента и равна единице при положительной величине z. Слагаемые с единичными функциями в (7) отсутствуют, если особая точка $t_0+\tau$ не попадает в интервал $\left[t_0, t^1\right]$. Аргумент $(t_0+\tau-0)$ и $(t_0+\tau+0)$ в вышеприведенной функции означает, что она берется, соответственно, слева от точки $t_0+\tau$ либо справа от нее.

На основе уравнения объекта (1) вычисляем первую вариацию $\delta y(t^1)$ (вариацию, входящую в первое слагаемое уравнения (7)):

$$\delta y(t^1) = \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1,s)}{\partial y(s)} \delta y(s)\, ds + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1,s)}{\partial y(s-\tau)} \delta y(s-\tau)\, ds + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1,s)}{\partial \bar{\alpha}(s)} \delta\bar{\alpha}(s)\, ds +$$

$$+\frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \delta\tilde{\alpha}(t^1) + \Bigg\{ \frac{\partial r(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1,s)}{\partial \bar{\alpha}} ds + \Big[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0} - K(t^1,t_0) +$$

$$+1(t^1-t_0-\tau)(K(t^1,t_0+\tau-0) - K(t^1,t_0+\tau+0)) \Big] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} +$$

$$+\left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1} + K(t^1,t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1,s)}{\partial t^1} ds \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} +$$

$$+\Big[1(t^1-t_0-\tau)(K(t^1,t_0+\tau-0) - K(t^1,t_0+\tau+0)) -$$

$$- \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial y(s-\tau)} \frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)} ds \Bigg] \frac{d\tau}{d\bar{\alpha}} \Bigg\} \delta\bar{\alpha} \,. \tag{8}$$

Тогда первая вариация (7) принимает следующий вид:

$$\delta I = \delta_{y(t)} I + \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\alpha(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I \,; \tag{9}$$

$$\delta_{y(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} \left[\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)} ds - \gamma^T(t) \right] \delta y(t) \, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t^1} \left[\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t-\tau)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t-\tau)} ds \right] \delta y(t-\tau) dt - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) \delta y(t) dt \,; \tag{10}$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \gamma^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \right.$$

$$\left. + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s,t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} ds \right] \delta\tilde{\alpha}(t) \, dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta\tilde{\alpha}(t) \, dt \,; \tag{11}$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I = \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} + \Phi(t^1) \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \right] \delta\tilde{\alpha}(t^1) \,; \tag{12}$$

$$\delta_{\bar{\alpha}} I = \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] + \right.$$

$$+ \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s,t)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] dt +$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0} \overline{\gamma}^T(t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial\overline{\alpha}}\,dt+$$

$$+\left[\Phi(t^1)\left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0}-K(t^1,t_0)+1(t^1-t_0-\tau)(K(t^1,t_0+\tau-0)-K(t^1,t_0+\tau+0))\right]-\right.$$

$$-f_0(t_0)+\int_{t_0}^{t^1}\gamma^T(t)\left(\frac{\partial r(t)}{\partial t_0}-K(t,t_0)\right)dt+$$

$$\left.+\ 1(t^1-t_0-\tau)\int_{t_0+\tau}^{t^1}\gamma^T(t)[K(t,t_0+\tau-0)-K(t,t_0+\tau+0)]dt\right]\frac{dt_0}{d\overline{\alpha}}+$$

$$+\left[\Phi(t^1)\left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1}+K(t^1,t^1)+\int_{t_0}^{t^1}\frac{\partial K(t^1,s)}{\partial t^1}ds\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial t^1}+\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1}+f_0(t^1)\right]\frac{dt^1}{d\overline{\alpha}}+$$

$$+\left[\Phi(t^1)\left[1(t^1-t_0-\tau)(K(t^1,t_0+\tau-0)-K(t^1,t_0+\tau+0))-\right.\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t^1}\frac{\partial K(t^1,s)}{\partial y(s-\tau)}\frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)}ds\right]+$$

$$+1\left(t^1-t_0-\tau\right)\int_{t_0+\tau}^{t^1}\gamma^T(t)(K(t,t_0+\tau-0)-K(t,t_0+\tau+0))dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t^1}\gamma^T(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\partial K(t,s)}{\partial y(s-\tau)}\frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)}ds\,dt\Bigg]\frac{d\tau}{d\overline{\alpha}}\Bigg\}\delta\overline{\alpha}\,. \tag{13}$$

Для объединения интегралов с одинаковыми вариациями δy мы смещаем назад интервал интегрирования на величину τ в интеграле с $\delta y(t-\tau)$ (при этом аргументы в подынтегральной функции возрастают на τ) и получаем следующий результат:

$$\int_{t_0}^{t^1}\left[\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t)}{\partial y(t-\tau)}+\int_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t-\tau)}ds\right]\delta y(t-\tau)d\,t=$$

$$=\int_{t_0}^{t^1}1(t^1-\tau-t)\left[\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)}+\int_{t+\tau}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds\right]\delta y(t)dt+$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0}1(t^1-\tau-t)\left[\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)}+\int_{t+\tau}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds\right]\delta y(t)d\,t\,.$$

Здесь для компактной записи в качестве сомножителей введена единичная функция, которая обращается в ноль при отрицательных значениях аргумента. При этом учитываются случаи, когда момент времени $t^1-\tau$ находится внутри и вне интервала работы системы $\left[t_0,t^1\right]$.

Подставляем это выражение в первую вариацию (7), собираем слагаемые с одинаковыми вариациями и получаем

$$\delta_{y(t)}I=\int_{t_0}^{t^1}\Bigg[\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t)}{\partial y(t)}+\frac{\partial f_0(t)}{\partial\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial y(t)}+\int_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)}ds+ \tag{14}$$

$$+\ 1(t^1-\tau-t)\left[\left[\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)}+\int\limits_{t+\tau}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds\right]-\gamma^T(t)\right]\delta y(t)dt+$$

$$+\int\limits_{t_0-\tau}^{t_0}\left[1(t^1-\tau-t)\left[\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)}+\int\limits_{t+\tau}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds\right]-\overline{\gamma}^T(t)\right]\delta y(t)dt\,.$$

В вариации (14) полагаем нулю переменные перед вариациями фазовых координат δy. Получаем уравнения для векторного множителя Лагранжа $\gamma(t)$

$$\gamma^T(t)=\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t)}{\partial y(t)}+\frac{\partial f_0(t)}{\partial\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial y(t)}+\int\limits_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)}ds+$$

$$+\ 1(t^1-\tau-t)\left[\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)}+\int\limits_{t+\tau}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds\right],\ t_0\le t\le t^1 \qquad (15)$$

и для множителя Лагранжа $\overline{\gamma}(t)$, соответствующего начальной функции в ИУ с чистым запаздыванием (1):

$$\overline{\gamma}^T(t)=1(t^1-\tau-t)\left[\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)}+\int\limits_{t+\tau}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds\right],\ t_0-\tau\le t\le t_0\,. \qquad (16)$$

Эти уравнения решаются в обратном направлении времени (от t^1).

Из сопряженных уравнений (15), (16) можно убрать единичную функцию и придать им более привычный вид.

Если $t_0\le t^1-\tau\le t^1$, т. е. длина интервала $\left[t_0,t^1\right]$ превышает величину времени запаздывания τ, то

$$\gamma^T(t) = \Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)}ds \quad \text{при} \quad t^1 - \tau \le t \le t^1,$$

$$\gamma^T(t) = \Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)}ds +$$

$$+ \Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)} + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le t^1 - \tau,$$

$$\overline{\gamma}^T(t) = \Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)} + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds \quad \text{при} \quad t_0 - \tau \le t \le t_0.$$

Если $t^1 - \tau \le t_0$, т. е. величина запаздывания τ превышает длину интервала времени работы объекта $\left[t_0, t^1\right]$, то (в этом случае величина $t_0 + \tau$ превышает t^1 – выходит за интервал работы объекта):

$$\gamma^T(t) = \Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)}ds \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le t^1,$$

$$\overline{\gamma}^T(t) = 0 \quad \text{при} \quad t^1 - \tau \le t \le t_0,$$

$$\overline{\gamma}^T(t) = \Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t+\tau)}{\partial y(t)} + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t+\tau)}{\partial y(t)}ds \quad \text{при} \quad t_0 - \tau \le t \le t^1 - \tau.$$

В итоге три компоненты первой вариации функционала $\delta I = \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I + \delta_{\overline{\alpha}} I$ по отношению к переменным $\tilde{\alpha}(t)$ и постоянным параметрам $\tilde{\alpha}(t^1)$, $\overline{\alpha}$ представлены соответственно формулами (11), (12) и (13).

Если рассматривается задача Лагранжа, то следует положить $I_1(\cdot)=0$, тогда и $\Phi(t^1)=0$.

3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Считаем, что в модели объекта (1) отсутствует чистое запаздывание:

$$y(t)=r(\tilde{\alpha}(t),\overline{\alpha},t_0,t)+\int\limits_{t_0}^{t} K(t,y(s),\,\tilde{\alpha}(s),\overline{\alpha},s)\,ds,\quad t_0\le t\le t^1\ ,$$

$$t_0=t_0(\overline{\alpha})\,,\ t^1=t^1(\overline{\alpha})\,.$$

Модель измерительного устройства и функционал качества работы системы те же.

Из (15) имеем сопряженное уравнение для множителя Лагранжа $\gamma(t)$:

$$\gamma^T(t)=\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t)}{\partial y(t)}+\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)}+\int\limits_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)}ds\,,\quad t_0\le t\le t^1\,.$$

Множитель Лагранжа $\overline{\gamma}(t)$, соответствующий начальной функции для фазовых координат, отсутствует.

Из уравнений (11), (12), (13) выписываем (с учетом упрощений) ФЧ:

$$\delta I=\delta_{\tilde{\alpha}(t)}I+\delta_{\alpha(t^1)}I+\delta_{\overline{\alpha}}I\ ;$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t)}I=\int\limits_{t_0}^{t^1}\left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}+\frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}+\gamma^T(t)\frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}+\Phi(t^1)\frac{\partial K(t^1,t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial K(s,t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}ds\right]\delta\tilde{\alpha}(t)\,dt\,,$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t^1)}I=\left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)}\frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)}+\Phi(t^1)\frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)}\right]\delta\tilde{\alpha}(t^1)\,,$$

$$\delta_{\overline{\alpha}} I = \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \overline{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \overline{\alpha}} + \Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial \overline{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1,s)}{\partial \overline{\alpha}} ds \right] + \right.$$

$$+ \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \overline{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \overline{\alpha}} + \gamma^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \overline{\alpha}} + \int_{t}^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s,t)}{\partial \overline{\alpha}} ds \right] dt +$$

$$+ \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0} - K(t^1,t_0) - f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) \left(\frac{\partial r(t)}{\partial t_0} - K(t,t_0) \right) dt \right] \frac{dt_0}{d\overline{\alpha}} + \right.$$

$$+ \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1} + K(t^1,t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1,s)}{\partial t^1} ds \right] + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\overline{\alpha}} \right\} \delta\overline{\alpha} .$$

Этот результат более общий по отношению к [8, 9]. Здесь учтено дополнительное слагаемое $I_1(\eta(t^1), \overline{\alpha}, t^1)$ в функционале качества I, зависимость t_0, t^1 от $\overline{\alpha}$ и одновременное присутствие переменных и постоянных параметров в правых частях уравнений модели объекта, модели измерительного устройства и в функционале качества.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматриваем динамический объект, описываемый системой гладких нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, с переменными и постоянными и параметрами $\tilde{\alpha}(t)$, $\overline{\alpha}$:

$$\dot{y}(t) = f(y(t), y(t-\tau), \tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}, t), \quad t_0 \le t \le t^1,$$

$$y(t_0) = y_0(\overline{\alpha}, t_0), \quad y(t) = \psi(\tilde{\alpha}(t), \overline{\alpha}, t), \quad t \in [t_0 - \tau, \ t_0). \qquad (17)$$

В начальный момент времени t_0 фазовые координаты y могут иметь разрыв: $y_0(\bar{\alpha}, t_0) \neq \psi(\tilde{\alpha}(t_0), \bar{\alpha}, t_0)$.

Преобразуем дифференциальную модель (17) в интегральное уравнение Вольтерра второго рода с запаздывающим аргументом (1):

$$y(t) = y_0(\bar{\alpha}, t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(s), y(s-\tau), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s)ds, \quad t_0 \le t \le t^1,$$

$$y(t) = \psi(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0 - \tau,\ t_0) .$$

Здесь

$$r(\cdot) = y_0(\bar{\alpha}, t_0),\ K(t,s) = f(y(s), y(s-\tau), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) \equiv f(s) .$$

Записываем сопряженную систему уравнений (15), (16) для множителей Лагранжа:

$$\gamma^T(t) = \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \left(\Phi(t^1) + \int_t^{t^1} \gamma^T(s)\, ds \right) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} +$$

$$+1(t^1 - \tau - t)\left[\Phi(t^1) + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s) ds \right] \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)}, \quad t_0 \le t \le t^1,$$

$$\bar{\gamma}^T(t) = 1(t^1 - \tau - t)\left[\Phi(t^1) + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s) ds \right] \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)}, \quad t_0 - \tau \le t \le t_0$$

и ФЧ (11), (12), (13):

$$\delta I = \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\alpha(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I ,$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \Phi(t^1) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \right.$$

$$+\int_{t}^{t^1}\gamma^T(s)\frac{\partial f(s)}{\partial\tilde{\alpha}(t)}ds\Bigg]\delta\tilde{\alpha}(t)\,dt+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\overline{\gamma}^T(t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial\tilde{\alpha}(t)}\delta\tilde{\alpha}(t)\,dt\,,$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t^1)}I=\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial\tilde{\alpha}(t^1)}\delta\tilde{\alpha}(t^1)\,,$$

$$\delta_{\overline{\alpha}}I=\left\{\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial\overline{\alpha}}+\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\overline{\alpha}}+\Phi(t^1)\left[\frac{\partial y_0(\overline{\alpha},t_0)}{\partial\overline{\alpha}}+\int_{t_0}^{t^1}\frac{\partial f(s)}{\partial\overline{\alpha}}ds\right]+\right.$$

$$+\int_{t_0}^{t^1}\left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial\overline{\alpha}}+\frac{\partial f_0(t)}{\partial\overline{\alpha}}+\gamma^T(t)\frac{\partial y_0(\overline{\alpha},t_0)}{\partial\overline{\alpha}}+\int_{t}^{t^1}\gamma^T(s)ds\quad\right]\frac{\partial f(t)}{\partial\overline{\alpha}}dt+$$

$$+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\overline{\gamma}^T(t)\;dt\frac{\partial y_0(\overline{\alpha},t_0)}{\partial\overline{\alpha}}+$$

$$+\left[\Phi(t^1)\left[\frac{\partial y_0(\overline{\alpha},t_0)}{\partial t_0}-f(t_0)+1(t^1-t_0-\tau)(f(t_0+\tau-0)-f(t_0+\tau+0))\right]-\right.$$

$$-f_0(t_0)+\int_{t_0}^{t^1}\gamma^T(t)dt\left(\frac{\partial y_0(\overline{\alpha},t_0)}{\partial t_0}-f(t_0)\right)+$$

$$\left.+\;1(t^1-t_0-\tau)\int_{t_0+\tau}^{t^1}\gamma^T(t)dt[f(t_0+\tau-0)-f(t_0+\tau+0)]\right]\frac{dt_0}{d\overline{\alpha}}+$$

$$+\left[\Phi(t^1)f(t^1)+\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial\eta(t^1)}\frac{\partial\eta(t^1)}{\partial t^1}+\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1}+f_0(t^1)\right]\frac{dt^1}{d\overline{\alpha}}+$$

$$+\left[\Phi(t^1)\left[1(t^1-t_0-\tau)(f(t_0+\tau-0)-f(t_0+\tau+0))-\int\limits_{t_0}^{t^1}\frac{\partial f(s)}{\partial y(s-\tau)}\frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)}ds\right]+\right.$$

$$+1(t^1-t_0-\tau)\int\limits_{t_0+\tau}^{t^1}\gamma^T(t)dt[f(t_0+\tau-0)-f(t_0+\tau+0)]-$$

$$\left.-\int\limits_{t_0}^{t^1}\gamma^T(t)dt\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial f(s)}{\partial y(s-\tau)}\frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)}ds\right]\left.\frac{d\tau}{d\overline{\alpha}}\right\}\delta\overline{\alpha}\,.$$

Эти результаты возможно преобразовать к более удобному для дифференциальных моделей виду. После замены переменных (множителей Лагранжа)

$$\Phi(t^1)+\int\limits_{t}^{t^1}\gamma^T(s)ds=\lambda^T(t) \text{ или } -\dot{\lambda}^T(t)=\gamma^T(t)\,,\ \lambda^T(t^1)=\Phi(t^1)\,,$$

получаем сопряженные уравнения в дифференциальной форме

$$-\dot{\lambda}^T(t)=\frac{\partial f_0(t)}{\partial\eta(t)}\frac{\partial\eta(t)}{\partial y(t)}+\lambda^T(t)\frac{\partial f(t)}{\partial y(t)}+$$

$$+1(t^1-\tau-t)\lambda^T(t+\tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)},\quad \lambda^T(t^1)=\Phi(t^1),\quad t_0\le t\le t^1\,,$$

$$\overline{\gamma}^T(t)=1(t^1-\tau-t)\lambda^T(t+\tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)},\ t_0-\tau\le t\le t_0$$

и ФЧ с использованием множителей Лагранжа $\lambda(t)$:

$$\delta I=\delta_{\tilde{\alpha}(t)}I+\delta_{\alpha(t^1)}I+\delta_{\overline{\alpha}}I\,,$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \right] \delta\tilde{\alpha}(t)\ dt\ +$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} 1(t^1 - \tau - t)\lambda^T(t+\tau) \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)} \frac{\partial \psi(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta\tilde{\alpha}(t)\ dt\ ,$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I = \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \delta\tilde{\alpha}(t^1)\ ,$$

$$\delta_{\overline{\alpha}} I = \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \overline{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \overline{\alpha}} + \lambda^T(t_0) \frac{\partial y_0(\overline{\alpha}, t_0)}{\partial \overline{\alpha}} + \right.$$

$$+ \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \overline{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \overline{\alpha}} + \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial \overline{\alpha}} \right] dt +$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} 1(t^1 - \tau - t)\lambda^T(t+\tau) \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)} dt \frac{\partial y_0(\overline{\alpha}, t_0)}{\partial \overline{\alpha}} +$$

$$+ \left[\lambda^T(t_0) \left[\frac{\partial y_0(\overline{\alpha}, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0) + 1(t^1 - t_0 - \tau)(f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) \right] - f_0(t_0) \right] \frac{dt_0}{d\overline{\alpha}} +$$

$$+ \left[\Phi(t^1) f(t^1) + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\overline{\alpha}} +$$

$$+ \left[\lambda^T(t^1) \left[1(t^1 - t_0 - \tau)(f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) - \right. \right.$$

$$-\int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial f(s)}{\partial y(s-\tau)} \frac{dy(s-\tau)}{d(s-\tau)} ds \Bigg]\Bigg] \frac{d\tau}{d\bar{\alpha}} \Bigg\} \delta\bar{\alpha} \, .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в статье сопряженные уравнения для множителей Лагранжа и формулы расчета ФЧ и КЧ для объектов, описываемых достаточно общего вида векторным интегральным уравнением с запаздывающим аргументом, можно распространить на объекты, описываемые интегродифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом и с переменными и постоянными параметрами. Интегродифференциальные модели структурно включают в себя по отдельности интегральные и дифференциальные модели, а также четыре вида более простых интегродифференциальных моделей, которые отличаются характером взаимодействия фазовых координат интегральной и дифференциальной частей. Необходимо осуществить переход от интегродифференциального уравнения к соответствующему ИУ, использовать результаты данной работы и в них выполнить возврат к исходным переменным. Для объектов, описываемых более простыми интегродифференциальными моделями достаточно в полученных сопряженных уравнениях и в ФЧ и КЧ обратить в ноль соответствующие слагаемые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Островский Г.М., Волин Ю.М.* Методы оптимизации химических реакторов. – М.: Химия, 1967. – 248 с.

2. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.

3. *Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж.* Теория управления: идентификация и оптимальное управление. – М.: Мир, 1973. – 248 с.

4. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / под ред. Е.Н. Розенвассера и Р.М. Юсупова. – Л.: Энергия, 1971. – 341 с.

5. *Рубан А.И.* Идентификация нелинейных динамических объектов на основе алгоритма чувствительности. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975. – 270 с.

6. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 464 с.

7. *Рубан А.И.* Идентификация и чувствительность сложных систем. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. – 302 с.

8. *Городецкий Ю.И.* Функции чувствительности и динамика сложных механических систем. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегор. гос. ун-та, 2009. – 236 с.

9. *Рубан А.И.* Коэффициенты и функционалы чувствительности для многомерных систем, описываемых интегральными уравнениями // Сборник научных трудов НГТУ. – 1996. – № 2 (4). – С. 64–72.

10. *Rouban A.I.* Coefficients and functionals of sensitivity for multivariate systems described by integral and integro-differetial equations // Advances in Modeling & Analysis: Series A. Mathematical Problems, General Mathematical Modeling. – 1999. – Vol. 35, iss. 1. – P. 25–34.

11. *Rouban A.I.* Coefficients and functionals of sensitivity for continuous many-dimensional dynamic systems described by integral equations with delay time // 5th International Conference on actual Problems of Electronic Instrument Engineering. Proceedings APEIE-2000. – Novosibirsk: NSTU Publ., 2000. – Vol. 1. – P. 135–140. – doi: 10.1109/APEIE.2000.913105.

12. *Rouban A.I.* Coefficients and functionals of sensitivity for dynamic systems described by integral equations with dead time // Advances in Modelling & Analysis: Series C. System Analysis; Control & Design, Simulation, CAD. – 2002. – Vol. 57, iss. 3. – P. 15–34.

13. *Рубан А.И.* Функционалы чувствительности в задаче Больца для многомерных динамических систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с запаздыванием // Проблемы управления. – 2013. – № 2. – С. 2–8.

Рубан Анатолий Иванович, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, действительный член Международной АН Высшей школы, заведующий кафедрой информатики Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета. Основные направления научных исследований: идентификация, адаптивное оптимальное управление, теория чувствительности, глобальная оптимизация. Имеет более 270 публикаций, в том числе 5 монографий и 8 учебных пособий. E–mail: ai-rouban@mail.ru

The sensitivity functionals in the Bolts's problem for multivariate dynamic systems described by integral equations with dead time*

A.I. Ruban

Siberian Federal University, 79 Prospekt Svobodnij, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, D.Sc. (Eng), professor. E-mail: ai-rouban@mail.ru

The variational method of calculation sensitivity functionals (connecting the first variation of quality functional with a variations of variable parameters) and sensitivity coefficients (components of a gradient from quality functional to constant parameters) for the multivariate nonlinear dynamic systems described by general continuous vectorial Volterra's integral equations of the second genus with dead time is developed. Components of a vector of sensitivity coefficients enter in sensitivity functional. Variables and constant parameters are present also at model of the measuring device and at quality functional for system. In a basis of calculation of sensitivity indexes the decision of the integrated equations of model in a forward direction of time and obtained integrated equations for Lagrange's multipliers in the opposite direction of time lays.

The variational method, which is going back to Lagrange's, Hamilton's, Euler's research, is based on invariant expansion of initial functional for system due to inclusion in it of the dynamic equations of model with the help of Lagrange's multipliers and on computation of the first variation expanded functional on phase coordinates of model and in required parameters. The reference in a zero of the functions facing to variations of phase coordinates gives the dynamic equations for Lagrange's multipliers. The simplified first variation represents required sensitivity functional.

Examples of reception from final result sensitivity functionals for the objects described by the integrated equations without delay and the differential equations with delay are resulted. The way of application of result is specified at construction sensitivity functionals for the dynamic systems described by the generalized integro-differential equations with delay.

Results are applicable at design of high-precision systems and devices.

Keywords: variational method, sensitivity functional, sensitivity coefficient, integral equation, the quality functional for system, variable parameters, constant parameters, conjugate equation, Lagrange's multiplier, the Bolts's problem, dead time

REFERENCES

1. Ostrovskii G.M., Volin Yu.M. *Metody optimizatsii khimicheskikh reaktorov* [Methods of optimization of chemical reactors]. Moscow, Khimiya Publ., 1967. 248 p.

2. Bryson A.E., Ho Ju-Chi. *Applied optimal control. Optimization, estimation and control*. Waltham, Massachusetts, Toronto, London, Blaisdell Publishing Company, 1969 (Russ. ed.: Braison A., Kho Yu-Shi. *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya. Optimizatsiya, otsenka i upravlenie*. Moscow, Mir Publ., 1972. 544 p.).

* *Received 10 July 2014.*

3. Speedy C.B., Brown R.F., Goodwin G.C. *Control theory: identification and optimal control*. Edinburg, Oliverand Boyd, 1970 (Russ. ed.: Spidi K., Braun R., Gudvin Dzh. *Teoriya upravleniya: identifikatsiya i optimal'noe upravlenie*. Moscow, Mir Publ., 1973. 248 p.).

4. Rozenvasser E.N., Yusupov R.M., eds. *Metody teorii chuvstvitel'nosti v avtomaticheskom upravlenii* [Methods of sensitivity theory in automatic control]. Leningrad, Energiya Publ., 1971. 341 p.

5. Ruban A.I. *Identifikatsiya nelineinykh dinamicheskikh ob"ektov na osnove algoritma chuvstvitel'nosti* [Nonlinear dynamic object identification on the base of sensitivity algorithm]. Tomsk, Tomsk University Publ., 1975. 270 p.

6. Rozenvasser E.N., Yusupov R.M. *Chuvstvitel'nost' sistem upravleniya* [Sensitivity of control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 464 p.

7. Ruban A.I. *Identifikatsiya i chuvstvitel'nost' slozhnykh sistem* [Identification and sensitivity of complex systems]. Tomsk, TSU Publ., 1982. 302 p.

8. Gorodetskij Ju.I. Sensitivity functions and dynamic of complex mechanical systems, Nizhnii Novgorod, Nizhnii Novgorod University Press, 2009. 236 p.

9. Ruban A.I. Koeffitsienty i funktsionaly chuvstvitel'nosti dlya mnogomernykh sistem, opisyvaemykh integral'nymi uravneniyami [Coefficients and functionals of sensitivity for multivariate systems described by integral equations] *Sbornik nauchnyh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of Novosibirsk state technical university*, 1996, no. 2 (4), pp. 64–72.

10. Rouban A.I. Coefficients and functionals of sensitivity for multivariate systems described by integral and integro-differetial equations. *Advances in Modeling & Analysis: Series A. Mathematical Problems; General Mathematical Modeling,* 1999, vol. 35, iss. 1, pp. 25–34.

11. Rouban A.I. Coefficients and functionals of sensitivity for continuous many-dimensional dynamic systems described by integral equations with delay time. *5th International Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering Proceedings, 2000 APEIE-2000*. Novosibirsk, NSTU Publ., 2000, vol. 1, pp. 135–140. doi: 10.1109/APEIE.2000.913105

12. Rouban A.I. Coefficients and functional of sensitivity for dynamic systems described by integral equations with dead time. *Advances in Modelling & Analysis: Series C. System Analysis; Control & Design; Simulation, CAD*, 2002, vol. 57, iss. 3, pp. 15–34.

13. Ruban A.I. Funktsionaly chuvstvitel'nosti v zadache Bol'tsa dlya mnogomernykh dinamicheskikh sistem, opisyvaemykh integro-differentsial'nymi urav-

neniyami s zapazdyvaniem [Sensitivity functionals in Bolza problem for the multivariate dynamic systems described by integro-differential equations with delay]. *Problemy upravleniya – Cotrol Sciences*, 2013, no. 2, pp. 2–8.