

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
И УСТРОЙСТВ

УДК 519.633.2

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ГЕОРАЗВЕДКИ***

Д.С. КИСЕЛЕВ

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, магистрант ФПМИ. E-mail: harlequin_00@mail.ru

В работе рассматривается проблема разработки ПО моделирования процесса распространения упругих волн. Несмотря на то что на практике довольно часто вместо упругих волн рассматривается распространение акустических, моделирование, основанное на распространении упругих волн, является более адекватным. Такое моделирование требует сравнительно больше вычислительных ресурсов, чем при использовании акустических волн, но позволяет получить картину истинного поведения упругого тела. Модель, основанная на теории упругости, хорошо подходит для моделирования распространения сейсмических волн, поскольку смещения, вызванные ими, настолько малы, что верхние слои земли реагируют на них как упругое тело. В геофизических исследованиях с использованием методов сейсморазведки картина верхних слоев земли восстанавливается по замерам смещений на поверхности. Поэтому отдельный интерес представляет отражение волн от границы раздела сред и выход их на поверхность. Процесс распространения волны является нестационарным, в зависимости от способа решения задачи он моделируется в частотной либо временной области. В данном случае процесс моделируется во временной области. Пространственная аппроксимация выполняется на основе метода конечных элементов (МКЭ) с использованием вариационной постановки в форме Галеркина. При этом используются базисные функции первого порядка. Для аппроксимации решения по времени используется неявная четырехслойная схема. Реализовано решение задачи в двумерной области в цилиндрической системе координат (для задачи с осевой симметрией) и в трехмерной области в декартовой системе координат (для задач без осевой симметрии). В работе приведено сравнение точности 2D- и 3D-моделирования распространения упругой волны, порожденной точечным источником, в горизонтально слоистой среде. Это сравнение также является верификацией разработанных подходов к моделированию распространения упругих волн.

Ключевые слова: сейсморазведка, осесимметричная среда, уравнения равновесия, упругое тело, упругая волна, смещение, поверхностная сила, вариационная постановка, метод Галеркина

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-1-45-54

* Статья получена 30 января 2015 г.

ВВЕДЕНИЕ

Сейсморазведка является основным из методов геофизического исследования верхних слоев Земли [1–5]. В этом методе изучается реакция геологических тел на искусственно вызванные упругие колебания [6–8]. Эти колебания фиксируются на различных удалениях от источника с помощью сейсмоприемников.

Когда волна, распространяющаяся от источника, попадает на границу, на которой скачкообразно изменяются упругие свойства среды, она разделяется как минимум на две – отраженную и проходящую. Отраженные волны возвращаются к земной поверхности, а проходящие продолжают двигаться вперед до тех пор, пока не встретят на своем пути новую границу. На этой границе процесс повторится. Таким образом, к земной поверхности будут возвращаться все новые и новые волны.

Данная работа заключается в разработке программы для моделирования такого процесса. В статье представлены результаты сравнения решения задачи распространения упругой волны в осесимметричной среде в двумерной (2D) и трехмерной (3D) постановках.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Данная работа посвящена разработке ПО решения системы уравнений, описывающей поведение упругого тела в двумерной области в цилиндрической системе координат и в трехмерной области в декартовой системе координат. На сегодняшний день широко используется аппроксимация упругих волн акустическими [9–10]. В нашем случае волна моделируется как упругая. Поведение упругого тела в декартовой системе координат для трехмерного случая описывается системой уравнений равновесия [11]:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}) + \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = F_x, \\ -\operatorname{div}(\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{zy}) + \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = F_y, \\ -\operatorname{div}(\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = F_z, \end{cases} \quad (1)$$

где напряжения определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon) \right], \quad \sigma_y = \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon) \right], \quad \sigma_z = \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon) \right], \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = G\gamma_{zx}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность среды. Деформации определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u = (u_x, u_y, u_z)^T$ – вектор смещения среды (искомая величина).

Постановка для случая цилиндрической системы координат рассмотрена в [12].

Скорости поперечной и продольной волн в однородной среде вычисляются по формулам (4) и (5) соответственно [11]:

$$V_s = \sqrt{G/\rho}, \quad (4)$$

$$V_p = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}, \quad (5)$$

$$\lambda = 2\nu G/(1 - 2\nu). \quad (6)$$

2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Так как уравнения системы (1) имеют одинаковую структуру, их преобразование будут одинаковы. Поэтому рассмотрим первое уравнение равновесия (для оси X). Воспользуемся методом Галеркина [13, 14] и получим следующую вариационную постановку для данного уравнения. Умножим первое уравнение системы (1) на пробную функцию ψ и проинтегрируем по расчетной области:

$$-\int_{\Omega} \text{div}(\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx})\psi d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \psi d\Omega - \int_S P_x \psi dS = \int_{\Omega} \psi F^x d\Omega. \quad (7)$$

Первое слагаемое уравнения (7) имеет вторые производные смещения по пространству. Для того чтобы понизить порядок производных, воспользуемся формулой Грина. Тогда уравнение (7) примет вид

$$-\int_{\Omega} (\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}) \text{grad} \psi d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \psi d\Omega - \int_S P_x \psi dS = \int_{\Omega} \psi F^x d\Omega, \quad (8)$$

где ψ – пробная функция из пространства H_0^1 (пространство функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные), S – граница расчетной

области со вторыми краевыми условиями, P_x – поверхностная сила, приложенная к границе S .

Представив смещение по каждой координате в виде линейной комбинации базисных функций, получим аппроксимацию решения по пространству:

$$u_x = \sum q_j^x \psi_j, \quad u_y = \sum q_j^y \psi_j, \quad u_z = \sum q_j^z \psi_j. \quad (9)$$

Для аппроксимации процесса по времени используется четырехслойная неявная схема по времени [8]. Решение в таком случае представляется в следующем виде:

$$u(x, y, z, t) = u^{j-3} \eta_3^j(t) + u^{j-2} \eta_2^j(t) + u^{j-1} \eta_1^j(t) + u^j \eta_0^j(t), \quad (10)$$

где η_k^j – это полиномы 3-го порядка от t на временном слое j , принимающие значение 1 на временных слоях с номером $j-k$.

3. ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Задача решалась в горизонтальнослоистой среде, имеющей два слоя с разными параметрами. Толщина каждого слоя равна 20 м. Параметры первого слоя: $G = 10^9$ Па, $\nu = 0.4$, $\rho = 800$ кг/м³. Параметры второго слоя: $G = 10^8$ Па, $\nu = 0.25$, $\rho = 1200$ кг/м³.

Поле смещения создается точечным источником, расположенным в начале координат. Удаленная по латерали граница расчетной области расположена в 80 м от источника. Граница нижнего слоя расположена на глубине 40 м.

Время работы источника равно 0.02 с. Источник оказывает воздействие вдоль оси Z . На интервале работы источника ($t \leq 0.02$) зависимость его плотности от времени задается в виде $f(t) = A \sin(\omega t)$, $\omega = 50$.

Измерения проводились в двух приемниках на поверхности Земли, расположенных на удалении 20 м и 40 м от источника.

4. СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ В ДВУМЕРНОЙ И ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТЯХ

Для начальных вычислений взята сетка (mesh 1), имеющая следующие характеристики: $hx = hy = hz = 2.0$ м, $ht = 0.0005$ с.

После получения первых результатов сетку сгустили по пространству, получив вторую (mesh 2), после чего, сгустив вторую сетку по времени, получили третью (mesh 3).

Далее приведены графики искомого смещения u_z (рис. 1), полученного на самых подробных сетках в 2D- и 3D-моделях для приемника 1. Также для этого приемника приведены графики относительной разницы (относительно 2D) полученных решений на трех сетках, описанных выше.

Так как волна приходит в приемник 1 в момент времени $t = 22$ мс, а в момент времени $t = 50$ мс начинает оказывать влияние удаленная граница расчетной области, графики построены для интервала времени $t \in [22; 50]$.

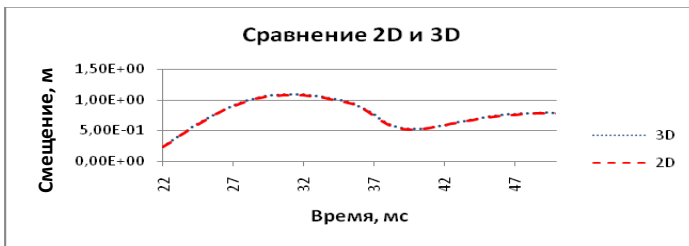


Рис. 1. График зависимости смещения u_z от времени в приемнике 1

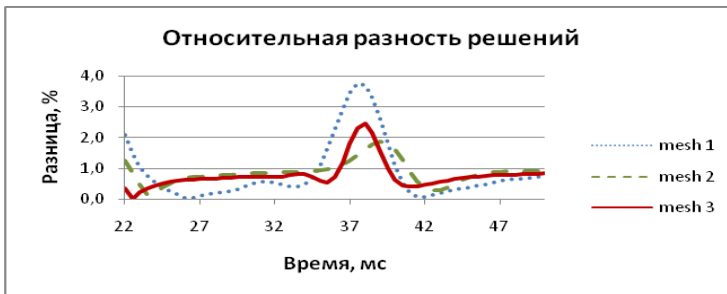


Рис. 2. График зависимости разности решений от времени в приемнике 1

Результаты сравнения времени решения задачи в 2D- и 3D-постановках приведены в таблице.

Время, затраченное на решение задачи, с

Сетка	Размерность	
	3D	2D
mesh 1	174.8	1.4
mesh 2	1533.2	7.0
mesh 3	2591.1	13.2

5. ОТРАЖЕНИЕ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Источник создает две волны – продольную (движется вдоль оси Z) и поперечную (распространяется радиально). При этом каждый момент времени поперечная волна при отражениях может породить продольную, и наоборот. Скорость движения продольной волны легко вычислить по формуле (5). Для верхнего слоя она равна 2738.61 м/с. Для нижнего слоя скорость продольной волны слишком мала, чтобы мы успели увидеть отражение.

Приход волны в приемник можно отследить по всплеску на графике смещения. Согласно скорости движения волны, расстояние между всплесками должно составлять 14.6 мс. Однако, время работы источника (20 мс) не позволит точно оценить время прихода волны. На рис. 3 приведен график зависимости смещения вдоль оси Z от времени. На графике отчетливо видно два максимума в моменты времени 32 и 48 мс. Интервал между всплесками составляет примерно 16 мс, что можно объяснить отражением волны от границы между слоями.



Рис. 3. График смещения u_z от времени в приемнике 1.
Наблюдение отражения

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны программы для моделирования распространения упругой волны в трехмерной и осесимметричной постановке с использованием технологии OpenMP [15, 16] для ускорения процесса решения СЛАУ. Проведено моделирование отражения упругой волны от границы раздела двух сред и ее выход на поверхность.

Также проведено сравнение решений осесимметричной и трехмерной задач, что подтвердило правильность полученных результатов. При этом время счета при моделировании распространения осесимметричной упругой волны в 3D-постановке на порядки больше, чем решение этой же задачи в 2D-постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Применение МКЭ для расчета трехмерных гармонических электромагнитных полей в задачах каротажа и аэроразведки полезных ископаемых / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, С.Х. Рояк, Г.М. Тригубович // Научный вестник НГТУ. – 1998. – № 1. – С. 146–160.

2. Соловейчик Ю.Г., Персова М.Г., Абрамов М.В. Конечноэлементное моделирование геоэлектромагнитных полей, возбуждаемых горизонтальной электрической линией // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 106–119.

3. Соловейчик Ю.Г., Токарева М.Г., Персова М.Г. Решение трехмерных стационарных задач электроразведки на нерегулярных параллелепипеидальных сетках // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2004. – № 1 (17). – С. 22–33.

4. Конечноэлементное моделирование трехмерных магнитотеллурических полей с применением технологии деревьев-кодеревьев и постановки с совместным использованием векторного и скалярного потенциалов / П.А. Домников, С.В. Киреева, М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик // Научный вестник НГТУ. – 2011. – № 3. – С. 45–52.

5. Конечноэлементное моделирование электромагнитного кругового электрического диполя в трехмерных средах / Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Персова, М.Э. Рояк, Г.М. Тригубович // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7, № 1. – С. 114–129.

6. Урунов А.К. Основы трехмерной сейсморазведки: учебное пособие для высших учебных заведений / РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. – М.: Нефть и газ, 2004. – 582 с.

7. Уайт Дж.Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн: пер. с англ. – М.: Недра, 1986. – 262 с.

8. Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной земле / А.Л. Левшин, Т.Б. Яновская, А.В. Ландер, Б.Г. Букчин, М.П. Бармин, Л.И. Ратникова, Е.Н. Итс. – М.: Наука, 1987. – 278 с.

9. Modelling seismic wave propagation for geophysical imaging / J. Virieux, R. Brossier, E. Chaljub, O. Coutant, S. Garambois, V. Etienne, D. Mercerat, V. Prioux, S. Operto, A. Ribodetti, V. Cruz-Atienza, J. Tago // Seismic Waves – Research and Analysis. – Rijeka, Croatia: InTech, 2012. – Ch. 13. – P. 253–304. – doi: 10.5772/30219. – URL: <http://cdn.intechopen.com/pdfs-wm/26255.pdf> (accessed: 02.03.2015).

10. Nak B., Mulder W.A. Seismic attenuation imaging with causality // Geophysical Journal International. – 2011. – Vol. 184, iss. 1. – P. 439–451. – doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04848.x.

11. Треффц Е. Математическая теория упругости: пер. с нем. – Изд. 2-е, испр. – Л.; М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. – 172 с. – (Механика упругого тела, вып. 1).

12. Кошкина Ю.И. Моделирование процесса распространения упругих волн в осесимметричной среде // Материалы XI международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП–2012), 2–4 октября 2012 г.: в 7 т. – Новосибирск, 2012. – Т. 6. – С. 89–93.

13. Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 895 с.

14. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

15. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP: учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 76 с.

16. Parallel programming in OpenMP / R. Chandra, L. Dagum, D. Kohr, D. Maydan, J. McDonald, R. Menon. – San Francisco: Morgan Kaufmann Publ.: Academic Press, 2000. – 230 p.

Киселев Дмитрий Сергеевич, бакалавр прикладной математики и информатики (магистрант прикладной математики и информатики) Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – конечно-элементное моделирование физических процессов. Количество публикаций – 1. E-mail: harlequin_00@mail.ru

Solving elasticity problem in 2D and 3D space: seismic wave propagation*

D.S. Kiselev

Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, undergraduate student of FAMI. E-mail: harlequin_00@mail.ru

The problem of developing software for elastic wave propagation modeling is considered in this article. Acoustic approximation of seismic waves is widely used. However, the model that used in this research is based on the elasticity theory. This model requires much more computer resource than the acoustic approximation does. But it allows to obtain true elastic body behavior. This model is quite good for modeling a seismic wave propagation, because the wave causes so small displacements that the upper layers of the earth react on it as elastic body. The image of the upper layers of the earth is recovered in geophysical researches with seismic exploration methods using measurements of the displacement on the ground surface. So the reflection of the wave and its return to the surface are of particular interest. The process of the wave propagation is nonstationary. It is modeled in the frequency domain or in the time domain depending on method of solving the problem. In this case the process is modeled in the time domain. Spatial approxima-

* Received 30 January 2015.

tion is based on finite element method using variation formulation of Galerkin. First order basis functions are. To approximate solution in the time domain we use implicit four-layer scheme. Solving the problem in 2D space using cylindrical coordinate system (for domains have axial symmetry) and in 3D space using Cartesian coordinate system (for domains without axial symmetry) are implemented. The accuracy of the modeling elastic wave, caused by point source, by 2D and 3D solvers are given in this work. This comparison is also a verification of developed approaches to modeling the elastic wave propagation.

Keywords: seismic exploration, axial symmetry domain, balance equations, elastic body, elastic wave, displacement, surface force, variation formulation, Galerkin method

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-1-45-54

REFERENCES

1. Soloveichik Yu.G., Royak M.E., Royak S.Kh., Trigubovich G.M. Prime-nenie MKE dlya rascheta trekhmernykh garmonicheskikh elektromagnitnykh polei v zadachakh karotazha i aerorazvedki poleznykh iskopaemykh [Applying FEM to calculation of 3D harmonic electromagnetic fields in well logging and aerial exploring problems]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science Bulletin of the Novosibirsk State Technical University*, 1998, no. 1, pp. 146–160.

2. Soloveichik Yu.G., Persova M.G., Abramov M.V. Konechnoelementnoe modelirovanie geoelektromagnitnykh polei, vzbuzhdaemykh gorizont'noi elektricheskoi liniiei [Finite elements modeling of geoelectromagnetic fields excited by a horizontal charged rod]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2009, vol. 12, no. 4, pp. 106–119.

3. Soloveichik Yu.G., Tokareva M.G., Persova M.G. Reshenie trekhmernykh statsionarnykh zadach elektrorazvedki na neregulyarnykh parallelepipedal'nykh setkakh [The solution of 3D stationary problems of electrical survey on irregular parallelepiped meshes]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Irkutsk state technical university*, 2004, no. 1 (17), pp. 22–33.

4. Domnikov P.A., Kireeva S.V., Persova M.G., Soloveychik Y.G. Konechnoelementnoe modelirovanie trekhmernykh magnitotelluricheskikh poley s primeneniem tehnologii derevov-koderevov i postanovki s sovmestnyim ispolzovaniem vektornogo i skalyarnogo potentsialov [Finite element modeling of three dimensional magnetotellurics using tree-cotree technique and joint vector and scalar potentials]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science Bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 3, pp. 45–52.

5. Soloveichik Yu.G., Persova M.G., Royak M.E., Trigubovich G.M. Konechnoelementnoe modelirovanie elektromagnitnogo krugovogo elektricheskogo dipolya v trekhmernykh sredakh [Finite-element modelling of an electromagnetic field for a round electric dipole in three-dimensional media]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 114–129.

6. Urupov A.K. *Osnovy trekhmernoï seismorazvedki* [Basic 3D seismic]. Moscow, Gubkin Russian State University of Oil & Gas Publ. House, 2004. 582 p.
7. White J.E. *Underground sound: application of seismic waves*. Amsterdam, Oxford, New York, Elsevier, 1983. 270 p. (Russ. ed.: Uait Dzh.E. *Vozbuzhdenie i rasprostraneniye seismicheskikh voln*. Translated from English). Moscow, Nedra Publ., 1986. 262 p.
8. Levshin A.L., Yanovskaya T.B., Lander A.V., Bukchin B.G., Barmin M.P., Ratnikova L.I., Its E.N. *Poverkhnostnye seismicheskie volny v gorizontallye neodnorodnoi zemle* [Surface seismic waves in horizontally layered ground]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 278 p.
9. Virieux J., Brossier R., Chaljub E., Coutant O., Garambois S., Etienne V., Mercierat D., Prieux V., Operto S., Ribodetti A., Cruz-Atienza V., Tago J. Modeling seismic wave propagation for geophysical imaging. *Seismic Waves – Research and Analysis*. Rijeka, Croatia: InTech, 2012, ch. 13, pp. 253–304. doi: 10.5772/30219. Available at: <http://cdn.intechopen.com/pdfs-wm/26255.pdf> (accessed 02.03.2015)
10. Hak B., Mulder W.A. Seismic attenuation imaging with causality. *Geophysical Journal International*, 2011, vol. 184, iss. 1, pp. 439–451. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04848.x
11. Angenheister G., Busemann A., Föppl O., Geckeler J.W., Nadai A., Pfeiffer F., Pöschl T., Riekert P., Trefftz E., Grammel R. *Handbuch der physik. Bd. 6. Mechanik der elastischen körper*. Berlin, Springer, 1928. doi: 10.1007/978-3-642-48543-5 (Russ. ed.: Trefftz E. *Matematicheskaya teoriya uprugosti*. Translated from German. Izd. 2-e, ispr. Leningrad, Moscow, ONTI GTTI Publ., 1934. 172 p.).
12. Koshkina Yu.I. [The modeling of elastic waves propagation in an axisymmetric medium]. *Materialy XI mezhdunarodnoi konferentsii «Aktual'nye problemy elektronnoogo priborostroeniya» APEP–2012* [11th International conference on Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE 2012), 2–4 October 2012: proceedings]. Novosibirsk, 2012, vol. 6, pp. 89–93. (In Russian)
13. Soloveichik Yu.G., Royak M.E., Persova M.G. *Metod konechnykh elementov dlya resheniya skalyarnykh i vektornykh zadach* [The finite element method for solving scalar and vector problems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007. 895 p.
14. Fletcher C.A.J. *Computational Galerkin methods*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1984. 320 p. (Russ. ed.: Fletcher K. *Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina*. Moscow, Mir Publ., 1988. 352 p.).
15. Antonov A.S. *Parallelnoe programmirovaniye s ispol'zovaniem tekhnologii OpenMP* [Parallel programming using OpenMP technology]. Moscow, MSU Publ., 2009. 76 p.
16. Chandra R., Dagum L., Kohr D., Maydan D., McDonald J., Menon R. *Parallel programming in OpenMP*. San Francisco, Morgan Kaufmann Publ., Academic Press, 2000. 230 p.