

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЫБОРА НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ СЛАУ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА СТАНОВЛЕНИЯ ПОЛЯ*

Н.В. СИМАНКОВИЧ

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, магистрант кафедры прикладной математики. E-mail: nadyasimankovich@gmail.com

Реальные природные среды в зонах месторождений полезных ископаемых являются гетерогенными и имеют сложную трехмерную структуру. Для восстановления параметров таких сред по данным электроразведки проводится 3D-интерпретация, которая включает в себя решение множества прямых трехмерных задач. В качестве метода решения такого рода задач наиболее эффективным является метод конечных элементов (МКЭ). При численном моделировании электромагнитного поля в трехмерной среде большая доля вычислительных затрат приходится на решение СЛАУ, полученной в результате конечно-элементной аппроксимации. Снижение этих затрат позволит существенно сократить время решения задачи на каждом из слоев по времени и в целом. При конечно-элементном моделировании процесса становления поля в трехмерных средах применение технологии выделения поля позволяет получать решение с требуемой точностью, но при этом в разы снизить вычислительные затраты. Для решения конечно-элементной СЛАУ трехмерной задачи была использована локально-оптимальная схема с диагональным предобуславливанием. В статье приведена математическая модель для реализации технологии выделения осесимметричной части электромагнитного поля от круглой генераторной петли в горизонтально-слоистой среде. В качестве способа сокращения времени решения СЛАУ трехмерной задачи рассматривается задание начального приближения, получаемого в результате минимизации соответствующего функционала невязки на каждом из временных слоев. В статье рассматриваются четыре варианта формирования начального приближения с включением в функционал решений с предыдущих слоев по времени. Проведено сравнение вычислительных затрат и изменения точности решения при выборе различных начальных приближений.

Ключевые слова: конечно-элементная аппроксимация, метод конечных элементов, процесс становления поля, конечно-элементное моделирование, технология выделения части поля, нестационарное электромагнитное поле, итерационные методы решения СЛАУ, минимизация функционала невязки, гетерогенная среда, горизонтально-слоистая среда, неявные схемы аппроксимации по времени

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-1-55-64

* Статья получена 19 января 2015 г.

ВВЕДЕНИЕ

При интерпретации электроразведочных данных большую роль играет точность определения удельной проводимости среды [1, 2]. Наиболее эффективным способом восстановления структуры среды и ее параметров является 3D-моделирование [3]. По сравнению с другими методами численного моделирования МКЭ при решении реальных геофизических задач позволяет учитывать сложную геометрию расчетных областей [4, 5]. А за счет применения технологии выделения нормального поля (поля вмещающей среды) удается получать решение с высокой точностью из осесимметричной задачи меньшей размерности [6, 7]. В ситуациях, когда среда содержит неоднородности с измененными электрическими или магнитными свойствами, модель электромагнитного поля корректно описывается векторной постановкой для вектор-потенциала \vec{A} [8].

Применение 3D-интерпретации данных электроразведки для подбора структуры среды наиболее эффективно в случае, если соответствующее программное обеспечение, реализующее расчет трехмерных полей, работает достаточно быстро [9, 10]. При решении конечно-элементных СЛАУ, полученных после аппроксимации нестационарных трехмерных задач электромагнетизма, выбор локально-оптимальной схемы дает хорошую скорость сходимости [11]. Для увеличения скорости сходимости решения СЛАУ существует несколько приемов: можно использовать предобуславливание, проводить распараллеливание алгоритма и др. [8]. В данной работе наряду с этими приемами рассматривается задание начального приближения.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим необходимые для моделирования процесса становления поля дифференциальные уравнения. Распределение нестационарного электромагнитного поля в трехмерной неоднородной по удельной проводимости среде описывается векторным параболическим уравнением [8]

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}^{CT}, \quad (1)$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума; σ – удельная электрическая проводимость среды; \vec{J}^{CT} – вектор плотностей токов, возбуждающих электромагнитное поле; \vec{A} – вектор-потенциал. Уравнение (1) получается из системы уравнений Максвелла с помощью замены:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (2)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3)$$

где \vec{B} – индукция магнитного поля; \vec{E} – напряженность электрического поля. Представим поле \vec{A} в виде суммы:

$$\vec{A} = \vec{A}^0 + \vec{A}^+, \quad (4)$$

где \vec{A}^0 – нормальное поле, порожденное генераторной петлей в горизонтально-слоистой среде; \vec{A}^+ – аномальное поле от трехмерных объектов [7]. Тогда задача поиска нормального поля сводится к решению осесимметричной задачи

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rotrot} A_\phi^0 + \sigma_0 \frac{\partial A_\phi^0}{\partial t} = J_\phi^{CT}, \quad (5)$$

где σ_0 – проводимость горизонтально-слоистой среды. После чего распределение аномального поля находится из уравнения

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rotrot} \vec{A}^+ + \sigma \frac{\partial \vec{A}^+}{\partial t} = (\sigma_0 - \sigma) \frac{\partial \vec{A}^0}{\partial t}. \quad (6)$$

Решение уравнения (5) будем искать с помощью скалярного МКЭ на прямоугольной сетке с использованием билинейных базисных функций [8]. Для решения уравнения (6) использован векторный МКЭ на параллелепипедальной сетке с базисными функциями первого порядка [8].

2. ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для аппроксимации по времени уравнения (6) была применена неявная трехслойная схема [8]. В качестве начального приближения q_0 для решения СЛАУ будем рассматривать поочередно следующие векторы:

1. $q_0 = 0$;
2. $q_0 = q_{s-1}$;
3. $q_0 = \alpha q_{s-1}$;
4. $q_0 = \alpha_1 q_{s-1} + \alpha_2 q_{s-2}$,

где q_{s-1} , q_{s-2} – векторы решения на предыдущих слоях по времени. Коэффициенты α , α_1 , α_2 определим из условия минимизации следующего функционала:

$$\min \|G_s q_0 - f_s\|^2, \quad (7)$$

где G_s – конечно-элементная матрица СЛАУ, собранная на текущем слое по времени s , f_s – соответствующий вектор правой части. Таким образом, для нахождения коэффициента α необходимо минимизировать функционал

$$\min_{\alpha} \|G_s \alpha q_{s-1} - f_s\|^2. \quad (8)$$

В результате получим соотношение

$$\alpha = (f_s, G_s q_{s-1}) / (G_s q_{s-1}, G_s q_{s-1}). \quad (9)$$

Для поиска коэффициентов α_1, α_2 необходимо минимизировать функционал

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2} \|G_s (\alpha_1 q_{s-1} + \alpha_2 q_{s-2}) - f_s\|^2, \quad (10)$$

после чего коэффициенты могут быть определены из системы:

$$\begin{pmatrix} (G_s q_{s-1}, G_s q_{s-1}) & (G_s q_{s-1}, G_s q_{s-2}) \\ (G_s q_{s-1}, G_s q_{s-2}) & (G_s q_{s-2}, G_s q_{s-2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_s, G_s q_{s-1}) \\ (f_s, G_s q_{s-2}) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проведем исследование влияния выбора начального приближения на сходимость решения СЛАУ. В качестве метода решения СЛАУ трехмерной векторной задачи была выбрана локально-оптимальная схема с диагональным предобуславливанием. Предварительно была выполнена параллельная реализация локально-оптимальной схемы с использованием технологии OpenMP [12, 13], вычисления производились на процессоре Intel Core i7-3820 CPU 3.6GHz.

Для проведения исследований рассмотрим задачу, схематически изображенную на рис. 1. Моделирование проводилось в однородном полупространстве с проводимостью $\sigma_{cp} = 0.01$ См/м, проводимость объекта $\sigma_{об} = 0.2$ См/м, радиус генераторной петли $r = 564$ м, ток в петле $I = 1$ А [14, 15]. Положение системы наблюдений представлены на рис. 2.

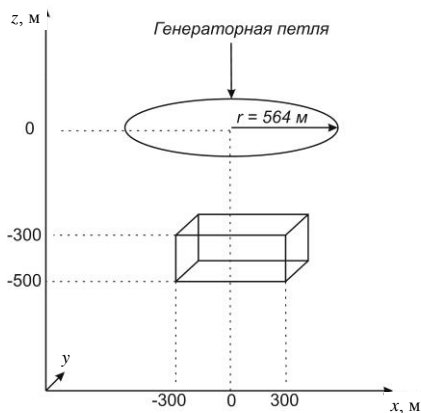


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области с объектом

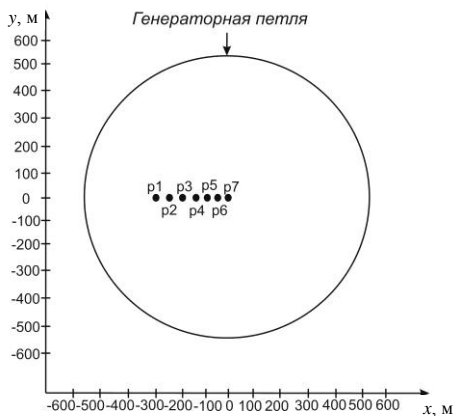


Рис. 2. Схематическое изображение системы наблюдений относительно генераторной петли

Приведем время решения СЛАУ и количество итераций суммарно по всем временным слоям (табл. 1). Размерность конечноэлементной СЛАУ равна 226525.

Таблица 1

Зависимость времени решения СЛАУ и количества итераций от начального приближения

Начальное приближение	Время, с	Количество итераций
$q_0 = 0$	219.7	18 224
$q_0 = q_{s-1}$	100.2	8211
$q_0 = \alpha q_{s-1}$	96.1	7775
$q_0 = \alpha_1 q_{s-1} + \alpha_2 q_{s-2}$	33.6	2985

В табл. 2 приведены отличия значений z -компоненты добавочного поля $\vec{B}^+ = rot \vec{A}^+$ в точках приемников $p1-p7$ (рис. 2) для предложенных начальных приближений. Эти отличия рассчитывались по следующей формуле:

$$\delta(B_z^+(t)^0, B_z^+(t)) = 100 \sqrt{\sum_{s=1}^T \left(\frac{B_z^+(t_s)^0 - B_z^+(t_s)}{B_z^+(t_s)^0} \right)^2} / T, \quad (12)$$

где T – количество слоев по времени.

Таблица 2

Отличие $B_z^+(t)$ при выборе различных начальных приближений от решения, полученного при нулевом начальном приближении

N	Координаты точки			Отличие от решения с начальным приближением $q_0 = 0$, %		
	x, м	y, м	z, м	$q_0 = q_{s-1}$	$q_0 = \alpha q_{s-1}$	$q_0 = \alpha_1 q_{s-1} + \alpha_2 q_{s-2}$
p1	-300	0	0	0.6	1.35	2.5
p2	-250	0	0	0.44	0.96	1.73
p3	-200	0	0	0.33	0.67	1.1
p4	-150	0	0	0.3	0.59	0.86
p5	-100	0	0	0.3	0.57	0.81
p6	-50	0	0	0.31	0.56	0.76
p7	0	0	0	0.31	0.56	0.77

На рис. 3 приведены кривые изменения B_z^+ от времени t в точках p1, p4, p7. Видим, что кривые очень хорошо совпадают.

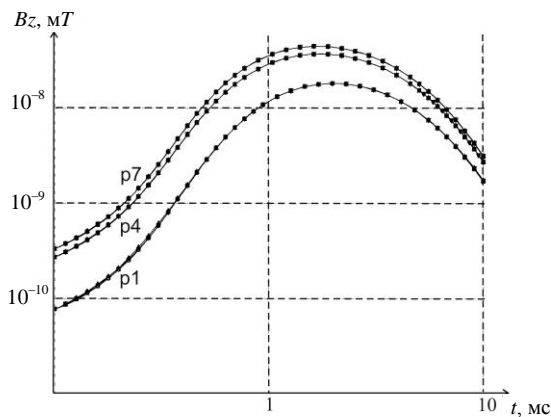


Рис. 3. Графики аномального поля $B_z^+(t)$ в точках p1, p4, p7

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Было рассмотрено четыре варианта выбора начального приближения. С включением в минимизируемый функционал большего количества решений с предыдущих временных слоев скорость решения СЛАУ значительно увеличивается. Таким образом, за счет выбора начального приближения, включающего решения с двух предыдущих слоев по времени, время решения СЛАУ снижается до шести раз (по сравнению с нулевым начальным приближением).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризации в геофизике: пер. с англ. – М.: Научный мир, 2007. – 712 с.
2. *Тригубович Г.М., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г.* 3D-электроразведка становлением поля: монография. – Новосибирск: Наука, 2009. – 218 с.
3. *Жданов М.С.* Быстрые методы решения трехмерных обратных электромагнитных задач / Университет штата Юта, Солт Лейк сити, США // Электромагнитные исследования земных недр. – М.: Научный мир, 2005. – С. 76–90.
4. *Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Тригубович Г.М.* Компьютерное моделирование геоэлектромагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов // Физика Земли. – 2011. – № 2. – С. 3–14.
5. *Шурина Э.П., Штабель Н.В.* Анализ векторных конечноэлементных аппроксимаций уравнений Максвелла в анизотропных средах // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 4. – С. 91–104.
6. *Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Абрамов М.В.* Конечноэлементное моделирование геоэлектромагнитных полей, возбуждаемых горизонтальной электрической линией // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 106–119.
7. *Симанкович Н.В.* Моделирование трехмерного нестационарного электромагнитного поля от круглой генераторной петли с применением технологии выделения части поля / Научный руководитель Ю.Г. Соловейчик // Инновации и научно-техническое творчество молодежи: российская научно-техническая конференция (Новосибирск, 24–25 апреля 2014 г.): материалы конференции. – Новосибирск: Изд-во СибГУТИ, 2014. – С. 362–365.
8. *Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г.* Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с. – (Серия «Учебники НГТУ»).
9. *Kamenetsky F.M., Stettler E.H., Trigubovich G.M.* Transient geo-electromagnetics / Ludwig-Maximilian-University of Munich, Department of the Earth and Environmental Sciences, Section Geophysics. – Munich, 2010. – 296 p.
10. Применение площадных технологий и трехмерной интерпретации данных зондирования становлением поля при построении объемных геоэлек-

трических моделей сложнопостроенных сред / Г.М. Тригубович, М.Г. Персова, Е.В. Крупнов, Ю.Г. Соловейчик // Записки Горного института. – 2009. – Т. 183. – С. 277–280.

11. *Soloveichik Y.G.* Iterative method for solving finite element systems of algebraic equations // *Computers & Mathematics with Applications*. – 1996. – Vol. 33, iss. 6. – P. 87–90. – doi:10.1016/S0898-1221(97)00035-7.

12. OpenMP application program interface. Version 3.0 [Electronic resource]. – [s. l.], May 2008. – 318 p. – URL: <http://www.openmp.org/mp-documents/spec30.pdf> (accessed: 10.02.2015).

13. *Антонов А.С.* Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP: учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 76 с.

14. Transient electromagnetic modelling of an isolated wire loop over a conductive medium / M.G. Persova, Y.G. Soloveichik, G.M. Trigubovich, D.V. Vagin, P.A. Domnikov // *Geophysical Prospecting*. – 2014. – Vol. 62, iss. 5. – P. 1193–1201. – doi: 10.1111/1365-2478.12122.

15. *Могилатов В.С.* О влиянии геомагнитного поля на процесс установления токов в земле // *Геофизика*. – 2013. – № 4. – С. 70–75.

Симанкович Надежда Валерьевна, магистрант кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета по направлению «Прикладная математика и информатика». Имеет 8 публикаций. E-mail: nadyasimankovich@gmail.com

Research on the influence of initial approximation choice on solution convergence of the finite element SLAE in modeling transient electromagnetic field*

N.V. Simankovich

Novosibirsk State Technical University, 20 Karl Marks Avenue, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, undergraduate student of department of Applied Mathematics. E-mail: nadyasimankovich@gmail.com

Environments in zones of mineral deposits are heterogeneous and have complex three-dimensional structure. 3D-interpretation of EM data is used to determine the parameters of the medium. It includes the solution of multiple direct three-dimensional problems. Finite element method is the most efficient one for solving such problems. The solution of the SLAE of the finite element approximation occupies most of the computational resources while modeling the electromagnetic field in a three-dimensional medium. Decreasing of that cost allows reducing about the time of the solution of problems on each time layer and in general. Use of

* Received 10 January 2015.

field allocation technology allows obtaining an accurate enough solution with low computational cost while modeling the TEM process in a three-dimensional medium with finite element method. A mathematical model for the implementation of the technology of axisymmetric part of the circular transmission loop electromagnetic field allocation in horizontally layered medium is given. For solving finite element SLAE of the three-dimensional problem locally optimal scheme with diagonal preconditioning are used. To reduce the time of solving of the SLAE of a three-dimensional problem different initial approximations computed as a result of minimization of residual functional on each time layer is used. Four methods of obtaining of the initial approximation with inclusion of solutions from previous time layers into the functional are considered in the work. Computational cost and solution accuracy with different initial approximations were compared.

Keywords: finite element approximation, finite element method, TEM process, finite element modeling, field allocation technology, time-dependent electromagnetic field, iterative methods for SLAE, minimization of residual functional, heterogeneous medium, horizontally layered medium, approximation implicit time-stepping schemes

DOI: 10.17212/2307-6879-2015-1-55-64

REFERENCES

1. Zhdanov M.S. *Geophysical inverse theory and regularization problems*. Amsterdam, Elsevier, 2002. 609 p. (Russ. ed.: Zhdanov M.S. *Teoriya obratnykh zadach i regulyazatsii v geofizike*. Translated from English. Moscow, Scientific World Publishing House, 2007. 712 p.).
2. Trigubovich G.M., Persova M.G., Soloveichik Yu.G. *3D-elektrozvedka stanovleniem polya* [3D transient electromagnetic survey]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009. 218 p.
3. Zhdanov M.S. Bystrye metody resheniya trekhmernykh obratnykh elektromagnitnykh zadach [Rapid solutions of 3-D EM inverse problems]. *Elektromagnitnye issledovaniya zemnykh nedr* [Electromagnetic Study of the Earth's Interior]. Moscow, Scientific World Publishing House, 2005, pp. 76–90.
4. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Trigubovich G.M. Komp'yuternoe modelirovanie geoelektromagnitnykh polei v trekhmernykh sredakh metodom konechnykh elementov [Computer modeling of geoelectromagnetic fields in three-dimensional media by the finite element method]. *Fizika Zemli – Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2011, no. 2, pp. 3–14. (In Russian)
5. Shurina E.P., Shtabel' N.V. Analiz vektornykh konechnoelementnykh apksimatsii uravnenii Maksvella v anizotropnykh sredakh [Analysis of vector finite element approximations of Maxwell's equations in anisotropic media]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 91–104.
6. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Abramov M.V. Konechnoelementnoe modelirovanie geoelektromagnitnykh polei, vzbuzhdaemykh gorizontnoi el-

ektricheskoi linii [Finite elements modeling of geoelectromagnetic fields excited by a horizontal charged rod]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2009, vol. 12, no. 4, pp. 106–119. (In Russian)

7. Simankovich N.V., Soloveichik Yu.G. (scientific adviser) [Modeling of three-dimensional non-stationary electromagnetic field from the circular transmission loop using technology highlight of the field]. *Innovatsii i nauchno-tehnicheskoe tvorchestvo molodezhi: Rossiiskaya nauchno-tehnicheskaya konferentsiya* (Novosibirsk, 24–25 aprelya 2014 g.): materialy konferentsii. [Innovation and scientific and technical creativity of youth: the Russian Scientific and Technical Conference (Novosibirsk, April 24–25, 2014): proceedings of the conference]. Novosibirsk, SibGUTI Publ., 2014, pp. 362–365.

8. Soloveichik Yu.G., Royak M.E., Persova M.G. *Metod konechnykh elementov dlya resheniya skalyarnykh i vektornykh zadach* [The finite element method for solving scalar and vector problems]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2007. 896 p.

9. Kamenetsky F.M., Stettler E.H., Trigubovich G.M. *Transient geo-electromagnetics*. Ludwig-Maximilian-University of Munich, Department of the Earth and Environmental Sciences, Section Geophysics. Munich, 2010. 296 p.

10. Trigubovich G.M., Persova M.G., Krupnov E.V., Soloveichik Yu.G. Primenenie ploshchadnykh tekhnologii i trekhmernoi interpretatsii dannykh zondirovaniya stanovleniem polya pri postroenii ob'emnykh geoelektricheskikh modelei slozhnopostroennykh sred [The application of areal technology and 3D data interpretation tem sounding when constructing the volume geoelectrical model of compound medium]. *Zapiski Gornogo instituta – Proceedings of the Mining Institute*, 2009, vol. 183, pp. 277–280.

11. Soloveichik Y.G. Iterative method for solving finite element systems of algebraic equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 1996, vol. 33, iss. 6, pp. 87–90. doi:10.1016/S0898-1221(97)00035-7

12. *OpenMP application program interface. Version 3.0*. Submitted on May 2008. 318 p. Available at: <http://www.openmp.org/mp-documents/spec30.pdf> (accessed 10.02.2015)

13. Antonov A.S. *Parallel'noe programmirovaniye s ispol'zovaniem tekhnologii OpenMP* [Parallel programming with OpenMP technology]. Moscow, MSU Publ., 2009. 76 p.

14. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Trigubovich G.M., Vagin D.V., Domnikov P.A. Transient electromagnetic modelling of an isolated wire loop over a conductive medium. *Geophysical Prospecting*, 2014, vol. 62, iss. 5, pp. 1193–1201. doi: 10.1111/1365-2478.12122

15. Mogilatov V.S. O vliyaniy geomagnitnogo polya na protsess ustanovleniya tokov v zemle [Influence geomagnetic field on the transient process of the secondary currents in earth]. *Geofizika – Russian Geophysics*, 2013, no. 4, pp. 70–75.