ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 63, № 2, 2016, с. 35–48

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 63, No. 2, 2016, pp. 35–48

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ
И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

AUTOMATIC CONTROL
AND IDENTIFICATION

УДК 621.391.24.001.57, 681.5.013

Оптимизация систем АПЧ в режиме слежения*

А.Р. ГАЙДУК[1], В.С. ПЛАКСИЕНКО[2], Е.А. ПЛАКСИЕНКО[3]

[1] *347928, РФ, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, Институт радиотехнических систем и управления, Южный федеральный университет; 357700, РФ, г. Кисловодск, пр. Победы, 37а, Кисловодский гуманитарно-технический институт, доктор технических наук, профессор. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru*
[2] *347928, РФ, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, Институт радиотехнических систем и управления, Южный федеральный университет, доктор технических наук, профессор. E-mail: vsp46@mail.ru*
[3] *347900, РФ, г. Таганрог, ул. Петровская, 45, Таганрогский институт управления и экономики, доцент. E-mail: pumkad@mail.ru*

Системы автоподстройки частоты находят широкое применение в радиотехнических системах различного назначения. Их основное назначение − согласование частоты следящего генератора системы с частотой полезной составляющей принимаемого сигнала. Так как последний всегда содержит случайные помехи, то система автоподстройки частоты должна оптимальным образом выделять полезный сигнал и подавлять случайные и другие помехи. В статье рассматривается аналитический метод синтеза систем АПЧ, которые выделяют полезные регулярную (детерминированную) и случайную составляющие и подавляют случайные помехи оптимально в смысле минимума среднеквадратической ошибки. Этот метод позволяет, в отличие от известного метода частотной оптимизации Н. Винера, обеспечить физическую реализуемость систем АПЧ при известных моделях регулярных сигналов и спектральных характеристиках нормально распределенных случайных сигналов. Физическая реализуемость как системы АПЧ в целом, так и цепей оптимизации осуществляется в данном методе путем добавления функционала сложности к дисперсии случайной ошибки. Подавление ошибок, вызванных регулярными сигналами, достигается учетом их $K(p)$-изображений, введенных В.С. Кулебакиным. Рассматриваемая задача оптимизации формально решается частотным методом Н. Винера, но аналитические соотношения этого метода переносятся в область полиномиальных уравнений с последующим переходом к эквивалентным системам линейных алгебраических уравнений. Тем самым исключается применение частотных характеристик и обеспечивается аналитический характер метода оптимизации. В результате определяется физически реализуемая передаточная функция оптимизируемой системы, зависящая от параметров функционала сложности.

Теоретические результаты статьи фактически являются алгоритмическим обеспечением аналитического метода синтеза радиотехнических систем, оптимальных в смысле минимума СКО. Этот метод может применяться для решения задач синтеза систем фазовой автоподстройки частоты, следящих измерителей дальности, систем измерения угловых координат или

* *Статья получена 28 января 2016 г.*
Исследование выполнено в ЮФУ при поддержке РФФИ, грант № 16-08-00013.

линейных координат и скоростей подвижных объектов, систем синхронизации и других. Эффективность предложенного подхода иллюстрируется численным примером.

Ключевые слова: радиотехническая система, система АПЧ, спектральная плотность, СКО, частотная оптимизация, функционал сложности, физическая реализуемость, аналитический синтез, цепи оптимизации

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-2-35-48

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных бытовых, производственных и специальных устройствах широко используются радиотехнические системы для радио и телевещания, передачи и приема данных, осуществления связи, телеуправления различными устройствами и т. п. [1–6]. Важное место среди этих систем занимают системы автоподстройки частоты (АПЧ), которые предназначены для обеспечения согласования частоты следящих генераторов (гетеродинов) радиотехнических систем с частотой полезных сигналов [7–9]. Полезные детерминированные и случайные сигналы радиотехнических систем часто сопровождаются регулярными (детерминированными) и случайными помехами, шумами. Поэтому системы АПЧ в режиме слежения должны обеспечивать эффективное (полное) подавление ошибок, вызванных регулярными сигналами, и оптимальное подавление ошибок, вызванных случайными составляющими полезных сигналов, помех и других мешающих внешних воздействий. В связи с этим основным показателем качества систем АПЧ в режиме слежения является среднеквадратическая ошибка (СКО), характеризующая степень подавления случайных ошибок. Наиболее эффективными системами АПЧ, очевидно, являются оптимальные в смысле минимума СКО [2, 9, 12–14].

Такие элементы системы АПЧ, как частотный дискриминатор, следящий генератор и ряд других элементов, в режиме слежения можно считать линейными безынерционными звеньями с заданными параметрами [3, 4, 7, 8]. Их совокупность часто называется неизменяемой частью [10]. При этих условиях СКО традиционных систем АПЧ определяется спектральными характеристиками случайных составляющих сигналов (полезного и помехи), а также структурой и параметрами фильтра нижних частот (ФНЧ), который формирует сигнал управления, поступающий на следящий генератор [3, 4, 8]. Очень часто в процессе проектирования систем АПЧ структурой, т. е. видом передаточной функции ФНЧ, задаются априори на основе опыта разработки аналогичных систем, а его параметры выбираются исходя из условий устойчивости замкнутой системы и требуемого качества [1, 4, 10, 11]. Такой подход очень часто оказывается неэффективным из-за нерационального выбора структуры ФНЧ. Очевидно, более эффективными являются аналитические методы синтеза, которые позволяют найти и структуру, и параметры ФНЧ путем решения некоторой системы уравнений. К этим методам, в частности, относится метод частотной оптимизации Н. Винера [2, 10, 13]. Задача оптимизации систем, функционирующих в условиях влияния регулярных и случайных сигналов, впервые была поставлена и решена Л. Заде и Дж. Рагаццини, которые применяли метод Н. Винера [15].

Однако на практике этот метод часто приводит к физически нереализуемым результатам, что обусловливает необходимость их аппроксимации физически реализуемыми цепями. Как известно, этот недостаток метода Н. Винера обусловлен условием физической реализуемости, принятым в виде: $k(t) = 0$ при $t < 0$, где $k(t)$ – импульсная переходная характеристика оптимизируемой системы. При этом условии в класс допустимых оптимальных систем попадают и системы, импульсные переходные характеристики которых $k^\circ(t) = \alpha_0\delta(t) + \alpha_1\dot{\delta}(t) + \dots$, т. е. содержат дельта-функции или их производные по времени. Такие системы, естественно, не являются физически реализуемыми, что и приводит к необходимости аппроксимации оптимальных характеристик физически реализуемыми. Поэтому системы, получаемые на основе такого подхода, практически являются неоптимальными [9, 12].

Данная работа посвящена решению задачи Л. Заде и Дж. Рагаццини аналитическим методом структурной оптимизации применительно к одномерным (SISO) системам АПЧ. Этот метод является оригинальной модификацией метода частотной оптимизации Н. Винера в плане обеспечения физической реализуемости как системы АПЧ в целом, так и добавляемых цепей оптимизации, с учетом неизменяемой части системы [9, 12]. Отличительной особенностью данного метода является применение $K(p)$-изображений регулярных воздействий, которые были введены академиком В.С. Кулебакиным. Реализуемость оптимизируемой системы минимальной сложности обеспечивается выбором оптимизируемого функционала в виде суммы дисперсии случайной ошибки и функционала сложности. Расчетные аналитические соотношения метода составляют операция факторизации и полиномиальные уравнения, решения которых сводятся к решениям систем линейных алгебраических уравнений [16–18].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СКО

Функциональная схема традиционных SISO систем АПЧ приведена на рис. 1 [1, 2, 4]. На этом рисунке используются следующие обозначения: $f_\text{с}, f_\text{г}$ – частоты входного сигнала и гетеродина; $f_\text{п}, f_0$ – промежуточная частота и ее номинальное значение, $\Delta f_\text{п} = f_\text{п} - f_0$; $\Delta f = f_\text{с} - (f_\text{г} + f_\text{п})$ – частот-ная расстройка; $U(\Delta f)$ – характеристика частотного дискриминатора; $n(t, \Delta f)$ – помеха, действующая на выходе дискриминатора; $K_\text{ф}(p)$ – передаточная функция фильтра низкой частоты (ФНЧ); $f_\text{г}(u)$ – характеристика следящего генератора; $u = U_\text{у}$ – управляющее напряжение, формируемое ФНЧ.

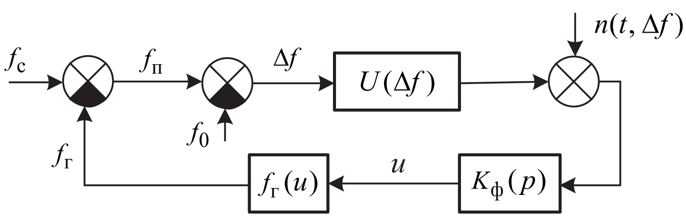

Рис. 1. Структурная схема традиционной системы АПЧ

В режиме слежения расстройка Δf мала, что позволяет линеаризовать характеристики частотного дискриминатора и следящего генератора, полагая $U(\Delta f)=k_д \Delta f$ и $f_г(u)=f_{г0}+k_г u$, где $k_д$ и $k_г$ – коэффициенты передачи дискриминатора и следящего генератора В/Гц, Гц/В соответственно; $\Delta f_г = f_г - f_{г0}$ отклонение частоты генератора от номинального значения $f_{г0}$. При этом структурную схему линеаризованной системы АПЧ в отклонениях можно представить в виде, приведенном на рис. 2.

В общем случае отклонение входного сигнала $\Delta f_с$ и помеха $n(t)$ могут иметь регулярные и случайные составляющие. В связи с этим положим: $\Delta f_с = \varphi + g$, $\tilde{n}=\tilde{n}+v$, где $\varphi=\varphi(t)$, $g=g(t)$ – случайная и регулярная составляющие полезного сигнала $\Delta f_с$; $\tilde{n}=\tilde{n}(t)$, $v=v(t)$ – приведенные ко входу системы случайная и регулярная составляющие помехи $n(t)$ [1, 7, 10].

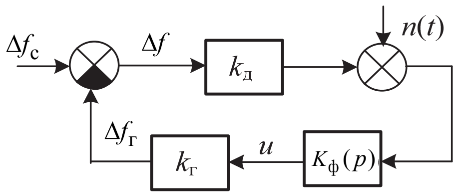

Рис. 2. Структурная схема линеаризованной системы АПЧ

Предположим, регулярные составляющие заданы своими $K(p)$-изображениями – полиномами $G(p)$ и $V(p)$, а случайные составляющие – своими спектральными плотностями

$$S_{\varphi\varphi}(\omega)=\left|\frac{\Phi_0(j\omega)}{\Phi(j\omega)}\right|^2, \quad S_{\tilde{n}\tilde{n}}(\omega)=\left|\frac{N_0(j\omega)}{N(j\omega)}\right|^2, \tag{1}$$

где $\Phi_0(j\omega)$, $\Phi(j\omega)$, $N_0(j\omega)$, $N(j\omega)$ – некоторые полиномы [12, 18] с известными числовыми коэффициентами. Ограничимся здесь случаем не коррелированных случайных сигналов φ и $\tilde{n}$ и обозначим $D_{\Delta f}$ дисперсию отклонения Δf случайной составляющей частотной расстройки. Тогда условиями синтеза рассматриваемой системы АПЧ являются равенства

$$\lim_{t\to\infty} \Delta_{fg}(t)=0, \quad \lim_{t\to\infty} \Delta_{fv}(t)=0 \tag{2}$$

и задача минимизации СКО $\sigma=\sqrt{D_{\Delta f}}$, т. е.

$$D_{\Delta f}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\Delta\Delta}(\omega)d\omega \to \min_u . \tag{3}$$

В равенствах (2) и (3): $\Delta_{fg}(t)$ и $\Delta_{fv}(t)$ – динамические ошибки, вызванные регулярными составляющими $g=g(t)$ и $v=v(t)$; $S_{\Delta\Delta}(\omega)$ – спектральная плотность отклонения Δf случайной составляющей частотной расстройки.

Отметим, что $K(p)$-изображение некоторого регулярного воздействия $g(t)$ можно определить как знаменатель изображения данного воздействия по Лапласу. Например, если $g(t) = g_m \sin(\omega_g t + \phi_g)$, а $v(t) = v_0 \exp(-\alpha_v t)$, то $K(p)$-изображения этих воздействий в соответствии с таблицей изображений по Лапласу [19, с. 397] равны полиномам $G(p) = p^2 + \omega_g^2$ и $V(p) = p + \alpha_v$. Основным свойством $K(p)$-изображения является следующее: если передаточная функция некоторой устойчивой системы по воздействию, например $v(t)$, содержит в виде множителя $K(p)$-изображение этого воздействия, т. е. $K_{yv}(p) = \tilde{H}(p)\,(p + \alpha_v)\,/\,D(p)$, то реакция этой системы на это воздействие в установившемся режиме равна нулю.

Действительно, в этом случае $y(p) = K_{yv}(p) \cdot v(p)$. Пусть $L^{-1}\{.\}$ – обратное преобразование Лапласа. Учитывая, что в рассматриваемом случае изображение по Лапласу воздействия $v(t)$ имеет вид $v(p) = v_0\,/\,(p + \alpha_v)$, находим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} L^{-1}\{v_0 \tilde{H}(p)\,/\,D(p)\} = 0$ в силу устойчивости системы. Именно это свойство $K(p)$-изображений регулярных воздействий используется ниже при решении поставленной задачи.

Таким образом, задачей синтеза системы АПЧ в данном случае является определение структуры и параметров корректирующего устройства (аналога ФНЧ), которое обеспечивает нулевые значения ошибок, вызванных регулярными составляющими, а также выполнение условия (3).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Воспользуемся корректирующим устройством (КУ), которое реализует принцип управления по выходу и воздействиям и описывается уравнением «вход–выход» следующего вида:

$$R(p)u = Q(p)\Delta f - L(p)\Delta f_{\text{г}}, \tag{4}$$

где $R(p)$, $Q(p)$, $L(p)$ – полиномы общего вида, степени и коэффициенты которых подлежат определению в результате решения поставленной задачи синтеза [18, 19]. При этом в соответствии со схемой, приведенной на рис. 2, передаточная функция замкнутой системы АПЧ определяется следующим выражением:

$$K_{\text{АПЧ}}(p) = \frac{\Delta f_{\text{г}}(p)}{\Delta f_{\text{с}}(p)} = \frac{k_{\text{г}} k_{\text{д}} Q(p)}{R(p) + k_{\text{г}} L(p) + k_{\text{г}} k_{\text{д}} Q(p)}. \tag{5}$$

Условие физической реализуемости КУ (4) имеет вид

$$\mu_{\text{КУ}} = \max\{r - q,\ r - l\} \ge \mu_{\text{КУ}}^*, \tag{6}$$

где $\mu_{\text{КУ}}$ – относительный порядок КУ; $\mu_{\text{КУ}}^*$ – заданный относительный порядок КУ, обусловленный техническими средствами, на основе которых предполагается реализация этого устройства [16–18]; $r = \deg R(p)$, $q = \deg Q(p)$, $l = \deg L(p)$.

Как известно, относительный порядок SISO звена или системы равен разности степеней знаменателя и числителя их передаточной функции. Обозначим $\mu_{\text{НЧ}}$ – относительный порядок неизменяемой части системы АПЧ. В случае системы, схема которой приведена на рис. 2, неизменяемая часть включает частотный дискриминатор и следящий генератор, которые описываются коэффициентами передачи $k_{\text{д}}$ и $k_{\text{г}}$. Следовательно, $\mu_{\text{НЧ}} = 0$.

Для того чтобы оптимальное корректирующее устройство могло удовлетворять условию (6), критерий оптимальности (3) заменяется следующим функционалом:

$$J = D_{\Delta \text{f}} + \int_0^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{\chi} \lambda_i \frac{d^i k(t)}{dt^i} \right|^2 dt \to \min_{k(t)}, \tag{7}$$

Здесь λ_i – неопределенные множители Лагранжа, причем $\lambda_\chi \neq 0$, а остальные $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{0, \chi - 1}$; i – порядок производной по времени от импульсной переходной функции $k(t)$ оптимизируемой системы (рис. 2); χ – старший порядок производных, учитываемых в функционале (7).

Интеграл в (7) называется функционалом сложности, так как при увеличении значения χ увеличивается порядок оптимизируемой системы, т. е. возрастает ее сложность. Фактически за счет повышения сложности системы и обеспечивается физическая реализуемость цепи оптимизации при заданных условиях оптимизации $\mu_{\text{НЧ}}$, $\mu^*_{\text{КУ}}$ и характеристиках случайных сигналов (1). В рассматриваемом случае значение χ, при котором обеспечивается реализуемость минимальной сложности оптимальной системы, определяется выражением

$$\chi = \mu_{\text{НЧ}} + \mu^*_{\text{КУ}} + \deg[G(p)V(p)] - 1. \tag{8}$$

Проведя минимизацию функционала (6) методом Н. Винера (например, следуя [10, 13 и 9, 18]), получим оптимальную передаточную функцию системы АПЧ в виде

$$K_{\text{АПЧ}}(p, \bar{\lambda}) = \frac{Z(p, \bar{\lambda}) N(p) V(p)}{D^-(p, \bar{\lambda})}, \tag{9}$$

где $\bar{\lambda} = [\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_\chi]$ – вектор коэффициентов λ_i из выражения (7); $D^-(p)$ – полином, имеющий только левые корни и являющийся результатом факторизации полинома

$$|\Phi_0(p)N(p)|^2 + |\Phi(p)N_0(p)|^2 + |\Lambda(p, \bar{\lambda})\Phi(p)N(p)|^2 = D^-(p, \bar{\lambda}) D^+(p, \bar{\lambda}). \tag{10}$$

Здесь $\Lambda(p, \bar{\lambda}) = \lambda_0 + \lambda_1 p + \ldots + \lambda_\chi p^\chi$, $D^+(p, \bar{\lambda})$ – полином, имеющий только правые корни.

Система АПЧ (рис. 2), фактически является следящей, так как в идеале необходимо, чтобы $\Delta f_{\text{г}}(p) \equiv \Delta f_{\text{c}}(p)$, поэтому в выражении (9) полином $Z(p,\, \bar{\lambda})$ определяется как минимальное решение полиномиального уравнения

$$N(p)V(p)Z(p,\, \bar{\lambda}) + \Phi(p)G(p)P(p,\, \bar{\lambda}) = D^{-}(p,\, \bar{\lambda}) \qquad (11)$$

относительно полиномов $Z(p,\, \bar{\lambda})$ и $P(p,\, \bar{\lambda})$ [18].

Выражения (1)–(11) являются расчетными соотношениями алгоритма синтеза оптимальной SISO системы АПЧ (рис. 2) минимальной сложности. При этом выражения (9)–(11) определяют физически реализуемую передаточную функцию этой системы. От передаточных функций, получаемых частотным методом оптимизации Н. Винера, она отличается тем, что всегда является реализуемой и зависит от коэффициентов функционала сложности, значения которых определяются путем параметрической оптимизации по условию (3).

После определения передаточной функции (9) полиномы из уравнения КУ (4) находятся путем приравнивания правых частей выражений (4) и (9). В некоторых случаях корректирующее устройство получается не с двумя входами, как это следует из уравнения (4), а с одним входом, т. е. КУ (4) вырождается в обычный SISO ФНЧ [3, 4]. Для реализации КУ от уравнения (4) или от передаточной функции ФНЧ целесообразно перейти к соответствующим уравнениям в переменных вектора состояния, воспользовавшись соотношениями канонической наблюдаемой формы, которые приводятся в работе [18, с. 346, 347].

Рассмотрим на примере порядок синтеза оптимальной системы АПЧ.

3. ПРИМЕР

Найти уравнение КУ при $\mu^{*}_{\text{КУ}} = 1$ системы АПЧ (рис. 2), если регулярная составляющая входного сигнала $g(t) = g_0 1(t)$, а регулярная составляющая помехи отсутствует, т. е. $v(t) = 0$. Случайные воздействия $\varphi(t)$ и $\tilde{n}(t)$ независимы, т. е. $S_{\varphi\tilde{n}}(j\omega) \equiv 0$, а их спектральные плотности определяются выражениями $S_{\varphi\varphi}(\omega) = \varphi_0^2 \big/ (1 + T^2\omega^2)$, $S_{\tilde{n}\tilde{n}}(\omega) = \tilde{\eta}_0^2$.

Переходя к решению, отметим, что в данном случае неизменяемая часть, к которой относятся частотный дискриминатор и следящий генератор, описывается произведением $k_{\text{д}} k_{\text{г}}$, т. е. относительный порядок неизменяемой части $\mu_{\text{НЧ}} = 0$. $K(p)$-изображение воздействия $g(t) = g_0 1(t)$ – это полином $G(p) = p$, а так как регулярная помеха $v(t)$ отсутствует, то $V(p) = 1$, т. е. $\deg G(p) = 1$, $\deg V(p) = 0$. Далее, представляя заданные выражения для $S_{\varphi\varphi}(\omega)$ и $S_{\tilde{n}\tilde{n}}(\omega)$ в виде (1) и заменяя в полученных выражениях $j\omega$ на p, будем иметь: $\Phi_0(p) = \varphi_0$, $\Phi(p) = 1 + Tp$, $N_0(p) = \tilde{\eta}_0$, $N(p) = 1$. Поэтому по формуле (7) имеем $\chi = 0 + 1 + 1 + 0 - 1 = 1$, т. е. $\bar{\lambda} = [\lambda_0 \quad \lambda_1]$. Для простоты примем $\lambda_0 = 0$. Тогда уравнения (10) и (11) с учетом указанных полиномов принимают вид

$$\varphi_0^2 + |(1+Tp)\tilde{\eta}_0|^2 + |\lambda_1 p(1+Tp)|^2 = D^-(p,\lambda_1)D^+(p,\lambda_1), \quad (12)$$

$$Z(p,\lambda_1) + (1+Tp)pP(p,\lambda_1) = D^-(p,\lambda_1). \quad (13)$$

Для проведения факторизации равенство (12) записывается следующим образом:

$$\varphi_0^2 + \tilde{\eta}_0^2(1+Tp)(1-Tp) + \lambda_1^2(p+Tp^2)(-p+Tp^2) =$$

$$= [\delta_0(\lambda_1) + \delta_1(\lambda_1)p + \delta_2(\lambda_1)p^2] \times [\delta_0(\lambda_1) - \delta_1(\lambda_1)p + \delta_2(\lambda_1)p^2]. \quad (14)$$

Перемножая полиномы и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в левой и правой частях выражения (14), получим уравнения относительно коэффициентов $\delta_i(\lambda_1),\ i = \overline{0,1,2}$:

$$\delta_0^2(\lambda_1) = \varphi_0^2 + \tilde{\eta}_0^2, \quad \delta_2^2(\lambda_1) = \lambda_1^2 T^2, \quad \delta_1^2(\lambda_1) = 2\delta_0\delta_2 + \tilde{\eta}_0^2 T^2 + \lambda_1^2. \quad (15)$$

Решив эти уравнения при условии $\delta_i(\lambda_1) > 0,\ i = \overline{0,1,2}$, найдем

$$\delta_0 = \sqrt{\varphi_0^2 + \tilde{\eta}_0^2}, \quad \delta_1(\lambda_1) = \sqrt{2\delta_0\lambda_1 T + \tilde{\eta}_0^2 T^2 + \lambda_1^2}, \quad \delta_2(\lambda_1) = \lambda_1 T. \quad (16)$$

Таким образом, полином $D^-(p,\lambda_1) = \delta_0 + \delta_1(\lambda_1)p + \lambda_1 Tp^2$, а уравнение (13) принимает вид

$$Z(p,\lambda_1) + (p+Tp^2)P(p,\lambda_1) = \delta_0 + \delta_1(\lambda_1)p + \lambda_1 Tp^2. \quad (17)$$

В этом уравнении неизвестными являются коэффициенты полиномов $Z(p,\lambda_1)$ и $P(p,\lambda_1)$. Как известно, полиномиальное уравнение типа (17) удобнее решать путем перехода к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений [16, 18]. В этой системе, эквивалентной уравнению (17), число уравнений $N_y = \deg D^-(p,\lambda_1) + 1 = 2 + 1 = 3$, а число неизвестных $N_k = \deg Z(p,\lambda_1) + 1 + \deg P(p,\lambda_1) + 1$. Но из условия равенства степеней полиномов в левой и правой части (17) следует равенство $\deg P(p,\lambda_1) = 0$. Так как указанная система линейных алгебраических уравнений имеет решение, если только $N_k = N_y$, отсюда имеем $\deg Z(p,\lambda_1) = 3 - 2 = 1$. Следовательно, полином $P(p,\lambda_1) = \pi_0$, а полином $Z(p,\lambda_1) = \zeta_0 + \zeta_1 p$, где π_0, ζ_0, ζ_1 – некоторые коэффициенты, подлежащие определению. В случае полиномиального уравнения (17) соответствующая система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_0(\lambda_1) \\ \zeta_1(\lambda_1) \\ \pi_0(\lambda_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1(\lambda_1) \\ \lambda_1 T \end{bmatrix}.$$

Решение этой системы дает следующее: $\zeta_0(\lambda_1) = \zeta_0 = \delta_0$, $\pi_0(\lambda_1) = \lambda_1$, $\zeta_1(\lambda_1) = \delta_1(\lambda_1) - \lambda_1$. Таким образом, передаточная функция (9) оптимальной системы АПЧ (рис. 2) имеет вид

$$K^{\circ}_{\text{АПЧ}}(p,\lambda_1) = \frac{\delta_0 + [\delta_1(\lambda_1) - \lambda_1]p}{\delta_0 + \delta_1(\lambda_1)p + \lambda_1 T p^2}, \tag{18}$$

а по ошибке Δf от отклонения входного сигнала $\Delta f_{\text{с}}$ определяется выражением

$$K^{\circ}_{\Delta f}(p,\lambda_1) = \frac{\Delta f(p)}{\Delta f_{\text{с}}(p)} = 1 - K^{\circ}_{\text{АПЧ}}(p,\lambda_1) = \frac{\lambda_1(1+Tp)p}{\delta_0 + \delta_1(\lambda_1)p + \lambda_1 T p^2}. \tag{19}$$

В числителе передаточной функции $K_{\Delta f}(p,\lambda_1)$ имеется множитель p, поэтому ошибка системы АПЧ, вызванная постоянной составляющей $g(t) = g_0 1(t)$ сигнала $\Delta f_{\text{с}}$, будет, как показано выше, равна нулю в установившемся режиме, что соответствует условию (2) [18, 19].

Оптимальная система АПЧ, соответствующая передаточной функции (18), имеет относительный порядок $\mu_{\text{сис}} = 1$ и удовлетворяет условию $\mu_{\text{сис}} = \mu_{\text{НЧ}} + \mu_{\text{КУ}}$, так как в рассматриваемом случае $\mu_{\text{НЧ}} = 0$, а $\mu_{\text{КУ}} = 1$. Это позволяет найти полиномы из уравнения «вход–выход» КУ (4). С этой целью приравняем передаточные функции (5) и (18). В результате получаем два уравнения:

$$k_{\text{г}} k_{\text{д}} Q(p) = \delta_0 + [\delta_1(\lambda_1) - \lambda_1]p,$$

$$R(p) + k_{\text{г}} L(p) + k_{\text{г}} k_{\text{д}} Q(p) = \delta_0 + \delta_1(\lambda_1)p + \lambda_1 T p^2.$$

Отсюда выводим

$$Q(p) = \{\delta_0 + [\delta_1(\lambda_1) - \lambda_1]p\} / k_{\text{г}} k_{\text{д}}, \qquad R(p) + k_{\text{г}} L(p) = \lambda_1 (Tp+1)p. \tag{20}$$

Решение второго уравнения (20) удовлетворяет условию физической реализуемости (6) при $L(p) \equiv 0$. Таким образом, в данном случае уравнение КУ (4) вырождается в уравнение

$$(\lambda_1(Tp+1)p)u(p) = (\{\delta_0 + [\delta_1(\lambda_1) - \lambda_1]p\} / k_{\text{г}} k_{\text{д}})\Delta f(p)$$

или

$$(\lambda_1(Tp+1)p)u(p) = \left(\left\{k_{\text{д}}^{-1}\delta_0 + [\delta_1(\lambda_1) - \lambda_1]p\right\} \Big/ k_{\text{г}}\right) u_{\text{д}}(p), \tag{21}$$

где $u_{\text{д}}(p) = k_{\text{д}} \Delta f(p)$ – сигнал на выходе частотного дискриминатора.

Отсюда следует, что оптимальная передаточная функция АПЧ (18) может быть реализована с применением обычного ФНЧ, передаточная функция которого с учетом выражений (16), (21) имеет следующий вид:

$$K_{\text{КУ}}(p) = \frac{u(p)}{u_{\text{д}}(p)} = \frac{\vartheta_0 + \vartheta_1 p}{p + Tp^2}, \tag{22}$$

где $\vartheta_0 = \sqrt{\varphi_0^2 + \tilde{\eta}_0^2} \Big/ k_{\text{г}} k_{\text{д}} \lambda_1$, $\vartheta_1 = \left[\sqrt{2\delta_0 \lambda_1 T + \tilde{\eta}_0^2 T^2 + \lambda_1^2} - \lambda_1 \right] \Big/ k_{\text{г}} \lambda_1$.

Оптимальное значение параметра λ_1 можно найти по условию (2) с учетом заданных спектральных плотностей $S_{\varphi\varphi}(\omega)$ и $S_{\tilde{n}\tilde{n}}(\omega)$ случайных составляющих полезного сигнала и помехи и выражения (19). В аналитической форме это приводит к довольно сложным выкладкам из-за сложного выражения (16) для $\delta_1(\lambda_1)$, поэтому параметрическую оптимизацию по параметру λ_1 целесообразнее проводить в численной форме. Например, если $T = 10$, $\Phi_0^2 = 1000$, $\tilde{N}_0^2 = 0{,}05$, то зависимость дисперсии случайной ошибки системы АПЧ от параметра λ_1 имеет вид, приведенный на рис. 3.

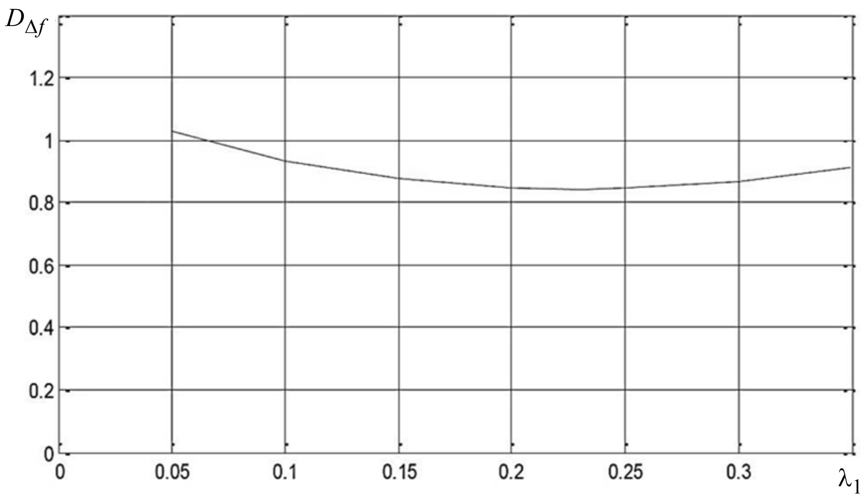

Рис. 3. Зависимость дисперсии случайной ошибки системы АПЧ от параметра функционала сложности

На основе рис. 3 заключаем, что существует оптимальное значение параметра λ_1, при котором дисперсия случайной ошибки имеет минимальное значение. Численные расчеты показывают, что оптимальное значение этого параметра $\lambda_1^\circ = 0{,}2311$, а соответствующее значение СКО равно $\sigma^\circ = \sqrt{0{,}84168} = 0{,}91743$.

Подчеркнем, что отклонение $\Delta f = \Delta f(t)$ в установившемся режиме является центрированным процессом, т. е. ошибка, вызванная постоянными отклонениями частоты принимаемого полезного сигнала от расчетного значения, действительно равна нулю и соответствует первому условию (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в статье подход к синтезу оптимальных SISO радиотехнических систем с применением функционала сложности позволяет обеспечить физическую реализуемость оптимальных решений. Вытекающий из приведенных в статье соотношений метод синтеза является полностью аналитическим, может быть реализован на ЭЦВМ и применим в случаях более сложных как неизменяемых частей радиотехнических систем, так и регулярных и случайных составляющих сигналов и помех. В частности, на его основе можно синтезировать радиотехнические системы, измеряющие угловые или линейные координаты, а также скорости подвижных объектов, системы фазовой автоподстройки частоты, следящие измерители дальности, системы синхронизации, и т.п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лёзин Ю.С.* Введение в теорию и технику радиотехнических систем: учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1986. – 187 с.

2. *Гуткин Л.С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств. – М.: Советское радио, 1975. – 368 с.

3. *Бесекерский В.А.* Радиоавтоматика. – М.: Высшая школа, 1985. – 366 с.

4. *Бондаренко В.Н.* Радиоавтоматика / Сибирский федеральный университет. – Красноярск: КГТУ, 2008. – 160 с.

5. Разработка системы позиционирования и контроля объектов с помощью беспроводной технологии Wi-Fi / И.Ю. Кучин, Ш.Ш. Иксанов, С.К. Рождественский, А.Н. Коряков // Научный вестник НГТУ. – 2015. – № 3 (60). – С. 130–146.

6. *Сонькин М.А., Ямпольский В.З.* Обобщенные свойства специальных систем связи и мониторинга для труднодоступных и подвижных объектов // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312, № 2. – С. 154–156.

7. *Плаксиенко В.С., Кравченко Д.А., Сучков П.В.* Дискриминаторы с управляемой характеристикой в системах частотной автоподстройки // Электротехнические и информационные комплексы и системы. – 2010. – Т. 6, № 2. – С. 34–36.

8. *Плаксиенко В.С., Бондарь П.А.* Балансные дискриминаторы с управляемой характеристикой // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2009. – № 3. – С. 12–14.

9. *Gaiduk A.R.* Polynomial design of the stochastic optimal, minimal complication systems // System Modelling and Optimization: Proceedings of the 14th IFIP-Conference, Leipzig, 3–7 July 1989. – Leipzig, 1989. – P. 611–615.

10. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. – СПб.: Профессия, 2004. – 752 с.

11. *Нейдорф Р.А., Сашенко Д.С.* Параметрический синтез законов управления на основе обобщенных корневых ограничений // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-16: сборник трудов международной научной конференции / под ред. В.С. Балакирева. – СПб., 2003. – Т. 2. – С. 67–69.

12. *Gaiduk A.R., Vershinin Y.A.* Computer aided optimal system design // Proceedings IEEE CACSD-2002. – Glasgow, UK, 2002. – P. 471–877.

13. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С., III.* Оптимальное управление системами: пер. с англ. Б.Р. Левиной. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.

14. *Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.* Оптимальное по квадратичному критерию управление нелинейными системами // Научный вестник НГТУ. – 2014. – № 4 (57). – С. 7–18.

15. *Zade L.A., Ragazzini J.R.* Optimum filters for the detection of signals in noise // Proceedings of the IRE. – 1952. – Vol. 40. – P. 1223–1231.

16. *Гайдук А.Р.* Математические методы анализа и синтеза динамических систем. – Saarbrücken: Lap Lambert Academic Publ., 2015. – 251 с. – ISBN 978-3-659-69911-5.

17. *Stojković N.M., Gaiduk A.R.* Formation of transfer function for control systems under implementation conditions // Facta Universitatis. Series: Automatic Control and Robotics. – 2014. – Vol. 13, N 1. – P. 15–25.

18. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с. – ISBN 978-5-9221-1424-0.

19. *Гайдук А.Р.* Теория автоматического управления: учебник. – М.: Высшая школа, 2010. – 415 с.

Гайдук Анатолий Романович, доктор технических наук, профессор Южного федерального университета и Кисловодского гуманитарно-технического института, действительный член Академии инженерных наук имени А.М. Прохорова. Основное направление научных исследований – теория систем автоматического управления, анализ и синтез. Имеет более 300 публикаций, в том числе 17 монографий. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Плаксиенко Владимир Сергеевич доктор технических наук, профессор Южного федерального университета, действительный член Академии инженерных наук имени А.М. Прохорова. Основное направление научных исследований – синтез и анализ систем и устройств формирования и обработки сигналов. Имеет более 200 публикаций, в том числе 5 монографий. E-mail: vsp46@mail.ru

Плаксиенко Елена Анатольевна, кандидат технических наук, доцент Таганрогского института управления и экономики. Основное направление научных исследований – управление в технических и экономических системах. Имеет более 40 публикаций, в том числе 2 монографии. E-mail: pumkad@mail.ru

Optimization of FLL systems in the steady-state mode[*]

A.R. GAIDUK[1], *V.S. PLAKSIENKO*[2], *E.A. PLAKSIENKO*[3]

[1] *Southeren Federal University, 44, Nekrasovskiy Lane, Taganrog, 347928; Kislovodsk Liberal-Technical Institute, 37a, Pobedy Prospekt., Russian Federation, D.Sc.(Eng), professor. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru*

[2] *Southeren Federal University, 44, Nekrasovskiy lane, Taganrog, 347928, Russian Federation, D.Sc.(Eng).professor. E-mail: vsp46@mail.ru*

[3] *Taganrog Institute of Management and Economy, 45, Petrovskaya Street, Taganrog, 347900, Russian Federation, PhD, (Eng), associate professor. E-mail: pumkad@mail.ru*

The frequency-locked loop systems (FLL) find wide application in radio engineering systems of various purposes. Their main function is to match the frequency of the system tracking oscillator with the useful component frequency of a received signal. Since this signal always contains random noises, the FLL system should therefore separate a useful signal and suppress random and other noises in an optimal way. The article considers an analytical method of designing an FLL system which separates useful regular (deterministic) and random components and suppresses random noises in an optimal way, in terms of the mean square error (MSE) minimum. This method makes it possible, in contrast to the known N. Wiener method of frequency optimization, to provide physical realizability of the FLL systems using the known models of regular signals and spectral density of the normally distributed random signals. Physical realizability of both the entire FLL system and its optimization circuits is carried out in the considered method by adding the complexity functional to random error dispersion. The suppression of errors caused by regular signals is achieved by taking into account their $K(p)$-images proposed by V.S. Kulebakin. The considered optimization problem is formally solved by N. Wiener's frequency method, but analytical expressions of this method are transferred to the poly-

[*] *Received 28 January 2016.*

nomial equation domain with the subsequent transition to equivalent systems of the linear algebraic equations. Thus the use of frequency characteristics is excluded, and an analytical character of the optimization method is provided. As a result a physically realizable transfer function of the optimal system depending on the parameters of the complexity functional is determined.

In fact, theoretical results obtained are an algorithmic support of the analytical method of designing radio engineering systems, optimum in terms of an MSE minimum. This method can be applied to the solution of design problems of PLL systems, tracking distance meters, measuring systems of angular or linear coordinates and speeds of mobile objects, synchronizing systems and others. The efficiency of the proposed approach is illustrated by a numerical example.

Keywords: radio engineering system, FLL system, spectral density, root-mean-square error, frequency optimization, complexity functional, physical realizability, analytical synthesis, optimization circuits

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-2-35-48

REFERENCES

1. Lyozin Yu.S. *Vvedenie v teoriyu i tekhniku radiotekhnicheskikh sistem* [Introduction in theory of radioengineering systems]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1986. 187 p.

2. Gutkin L.S. *Optimizatsiya radioelektronnykh ustroistv* [Optimization of radio-electronic devices]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1975. 368 p.

3. Besekerskii V.A. *Radioavtomatika* [Radioautomatics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1985. 366 p.

4. Bondarenko V.N. *Radioavtomatika* [Radioautomatics]. Siberian Federal University. Krasnoyarsk, KSTU Publ., 2008. 160 p.

5. Kuchin I.Yu., Iksanov Sh.Sh., Rozhdestvenskiy S.K., Koryakov A.N. Razrabotka sistemy pozitsionirovaniya i kontrolya ob"ektov s pomoshch'yu besprovodnoi tekhnologii Wi-Fi [Development of positioning and object’s control facilities Wi-Fi technologies]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 3 (60), pp. 130–146.

6. Son'kin M.A., Yampol'skii V.Z. Obobshchennye svoistva spetsial'nykh sistem svyazi i monitoringa dlya trudno-dostupnykh i podvizhnykh ob"ektov [Generalized properties of the special systems of communicationand monitoring for remote and mobile objects]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2008, vol. 312, no. 2, pp. 154–156.

7. Plaksienko V.S., Kravchenko D.A., Suchkov P.V. Diskriminatory s upravlyaemoi kharakteristikoi v sistemakh chastotnoi avtopodstroiki [Discriminators with the controlled characteristic in systems of the frequency autofine tuning]. *Elektrotekhnicheskie i informatsionnye kompleksy i sistemy – Elektrical and data processing facilities and systems*, 2010, vol. 6, no. 2, pp. 34–36.

8. Plaksienko V.S., Bondar' P.A. Balansnye diskriminatory s upravlyaemoi kharakteristikoi [Balancing discriminators with the controlled characteristic]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii Rossii. Radioelektronika – Proceedings of the Russian Universities: Radioelectronics*, 2009, no. 3, pp. 12–14.

9. Gaiduk A.R. Polynomial design of the stochastic optimal, minimal complication systems. *System Modelling and Optimization*. Proceedimgs of the 14th IFIP-Conference, Leipzig, 3–7 July 1989, pp. 611–615.

10. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automatic control systems]. St. Petersburg, Professiya Publ., 2004. 752 p.

11. Neydorf R.A., Sashenko D.S. [Parametrical synthesis of control laws on the basis of the generalized roots restrictions]. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh – MMTT-16*: sbornik trudov mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii. Ed. by V.S. Balakirev [Mathematical Methods in Engineering and Technology – MMET-16: proceedings of the International Conference]. St. Petersburg, 2003, vol. 2, pp. 67–69.

12. Gaiduk A.R., Vershinin Y.A. Computer aided optimal system design. *Proceedings IEEE CACSD-2002,* Glasgow, UK, pp. 471–877.

13. Sage A.P., White Ch.C., III. *Optimum systems control*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977 (Russ. ed.: Seidzh E.P. Uait Ch.S., III. *Optimal'noe upravlenie sistemami*. Translated from English by B.R. Levina. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982. 392 p.).

14. Gaiduk A.R., Plaksienko E.A. Optimal'noe po kvadratichnomu kriteriyu upravlenie nelineinymi sistemami [Optimal control of nonlinear systems in terms of a quadratic criterion], *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 4 (57), pp. 7–18.

15. Zade L.A., Ragazzini J.R. Optimum filters for the detection of signals in noise. *Proceedings of the IRE*, 1952, vol. 40, pp. 1223–1231.

16. Gaiduk A.R. *Matematicheskie metody analiza i sinteza dinamicheskikh sistem* [Mathematical methods of the analysis and synthesis of dynamic systems]. Saarbrücken, Lap Lambert Academic Publ., 2015. 251 p. ISBN 978-3-659-69911-5

17. Stojković N.M., Gaiduk A.R. Formation of transfer function for control systems under implementation conditions. *Facta Universitatis. Series: Automatic Control and Robotics*, 2014, vol. 13, no. 1, pp. 15–25.

18. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of analytical design of automatic control systems (polynomial the approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p. ISBN 978-5-9221-1424-0

19. Gaiduk A.R. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automatic control]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2010. 415 p.