ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 63, № 2, 2016, с. 49–60

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 63, No. 2, 2016, pp. 49–60

УДК 519.21

О гауссовской аппроксимации процессов с памятью специального вида*

Н.С. АРКАШОВ

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: nicky1978@mail.ru

В работе построен случайный процесс, который позволяет моделировать процессы аномальной диффузии таким образом, чтобы учитывать одновременно структуру последействия, определяемую канторовым множеством, и корреляционные свойства процесса. Представленный процесс представляет собой нормированный процесс частных сумм скользящих средних, построенных по стационарной последовательности случайных величин, при этом неслучайная последовательность этих скользящих средних определяет структуру последействия. Отметим, что форма зависимости упомянутой стационарной последовательности, вообще говоря, не укладывается в общепринятые схемы. В частности, классическое сильное (или равномерно сильное) перемешивание здесь уже может не иметь места. Стало быть, в данном случае далеко не всегда могут быть использованы классические результаты по асимптотическому анализу сумм стационарно связанных случайных величин. Получена аппроксимация этого процесса в виде гауссовского процесса, обладающего свойством самоподобия. В частности, в предельных случаях этим гауссовским процессом является винеровский процесс или фрактальное (дробное) броуновское движение. Мотивацией для рассмотрения таких процессов является то, что разнообразные методы моделирования аномальной диффузии связаны со следующими свойствами соответствующих процессов: «сильная форма» зависимости приращений; нестационарность приращений (см., например, [1–4]). Известными примерами таких процессов являются модели блуждания в непрерывном времени (общепринятая аббревиатура CTRW), фрактальное (дробное) броуновское движение (см, например, [4–7]). На сегодняшний день, по всей видимости, не существует форматов моделирования (см. [3, 8]), охватывающих все указанные свойства, подобно тому как винеровский процесс является классическим форматом броуновского движения.

Ключевые слова: множество Кантора, фрактальное броуновское движение, винеровский процесс, скользящие средние, принцип инвариантности, гауссовский процесс, самоподобие, аномальная диффузия, предельные теоремы

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-2-49-60

* *Статья получена 24 февраля 2016 г.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Напомним, что множество Кантора S_q определяется двумя преобразованиями подобия $T_0(x) = \frac{1}{q}x$ и $T_1(x) = \frac{1}{q}x + \frac{q-1}{q}$, такими что S_q является неподвижной точкой оператора Хатчинсона H, сопоставляющего каждому непустому компактному множеству A непустое компактное множество $H(A) = \bigcup_{i=0}^{1} T_i(A)$, т. е. $S_q = T_0(S_q) \cup T_1(S_q)$ (см. [9, п. 3.1]).

Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна $d = \ln 2 / \ln q$ (см., например, [10]). Множество S_3 – классическое канторово множество, множество же S_2 совпадает с отрезком $[0,\ 1]$. В дальнейшем за буквой d закрепим обозначение размерности Хаусдорфа множества S_q.

Каждому множеству $S_q, 2 < q < \infty$ соответствует непрерывная на отрезке $[0,\ 1]$ функция C_q, называемая канторовой лестницей.

Обозначим единичный отрезок $[0,\ 1]$ через I. На интервале $I \setminus T_0(I) \cup T_1(I)$ значение C_q равно $1/2$ и, далее на интервалах

$$T_{i_1}...T_{i_k}(I) \setminus (T_{i_1}...T_{i_k}T_0(I) \cup T_{i_1}...T_{i_k}T_1(I)),$$

где $i_1,...,i_k \in \{0,1\}$, значение C_q равно

$$\frac{1 + \sum_{i=1}^{k} 2^i i_{k-i+1}}{2^{k+1}}.$$

Отметим, что $C_2(t) = t$ для всех $t \in [0,\ 1]$ и $C_\infty(t) = 1/2$ при всех $t \in (0,1)$, кроме того, $C_\infty(0) = 0$ и $C_\infty(1) = 1$ (см., например, [11]). Для $C_q(t)$, $2 \le q < \infty$ выполняется следующее равенство:

$$C_q(t) = 2C_q(t/q) \tag{1}$$

при всех $t \in [0,\ 1]$ (см., например, [11]).

Теперь перейдем к постановке основной задачи для одномерного случайного блуждания материальной частицы.

Пусть для начала $(X_1, X_2, \ldots)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Скорость некоторой частицы в моменты времени k/n, $k = 1,2,\ldots,n$, $n = 1,2,...$ обозначим через $v_n(k/n)$, положим $v_n(0) = 0$. Пусть закон изменения скорости частицы в зависимости от времени имеет вид:

$$v_n(k/n) = \sqrt{n}\sum_{i=0}^{k-1} X_{k-i}\Delta C_{q,n}(i/n), k = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

где $\Delta v_n(t) = v_n(t+1/n) - v_n(t)$. Правая часть (2) является скользящим средним порядка k (см., например, [12]). Далее определим следующий процесс частных сумм:

$$R_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} v_n(i/n), \quad t \in [0,\, 1], \quad n = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Значение $R_n(t)$ представляет собой положение точки в момент времени $[nt]/n$ (через $[\cdot]$ мы обозначаем целую часть числа). Случайная координата частицы $R_n(t)$ – обычный нормированный процесс частных сумм одинаково распределенных случайных величин.

Приведем два предельных случая:

1) $q = \infty$;

2) $q = 2$.

1) Закон изменения скорости имеет вид

$$v_n(k/n) = \frac{\sqrt{n}}{2} X_k, \; k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{4}$$

и

$$v_n(1) = \frac{\sqrt{n}}{2}(X_n + X_1). \tag{5}$$

Заметим, что $R_n(t)$ сходится при $n \to \infty$ к $\frac{1}{2}W(t)$, где $W(\cdot)$ – стандартный винеровский процесс.

2) Закон изменения скорости имеет вид

$$v_n(k/n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{k} X_i, \; k = 0,1,\ldots. \tag{6}$$

Случайный процесс $R_n(t)$ (определяется соотношением (3)) в этом случае сходится при $n \to \infty$ к $\int_0^t (t-s)dW(s)$ (см. теорему 1). Отметим, что интеграл $\int_0^t (t-s)dW(s)$ описывает положение материальной точки с единичной массой, движущейся под действием «белого шума» $\dot{W}(t)$.

Пусть в выражении (2) значение $q \geq n$, тогда $v_n(k/n) = \frac{\sqrt{n}}{2} X_k$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ и $v_n(1) = \frac{\sqrt{n}}{2}(X_n + X_1)$. Если n достаточно велико, то можно предположить, что $R_n(t)$ ведет себя как $\frac{1}{2}W(t)$ (см. случай 1), тем не менее предельное поведение процесса $R_n(t)$ при $n \to \infty$ отличается от винеровского процесса (см. теорему 1).

Следующий раздел посвящен формулировке основных результатов работы. Отметим, что в дальнейшем вместо последовательности $(X_1, X_2, \ldots)$ независимых случайных величин мы рассмотрим более общий случай стационарной последовательности случайных величин, имеющих вид скользящих средних (см. соотношение (7)). Основной же целью является получение теоремы об аппроксимации процесса $R_n(t)$ гауссовским процессом, представляющим собой функционал памяти от фрактального броуновского движения. Эти результаты представлены в теореме 1.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, где $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел. В дальнейшем будем предполагать, что последовательность $\{X_j; j \in \mathbb{Z}\}$ определяется по формуле

$$X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}\xi_k, \tag{7}$$

элементы которой являются скользящими средними исходной последовательности $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ (см. [12]). Следующее хорошо известное условие гарантирует сходимость с вероятностью 1-го ряда в правой части формулы (7):

$$0 < \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 < \infty. \tag{8}$$

Всюду в дальнейшем условие (8) предполагается выполненным. Заметим, что если $a_0 = 1$ и $a_j = 0$ при всех $j \neq 0$, то последовательность $\{X_j\}$ становится последовательностью $\{\xi_j\}$.

Определим процесс частных сумм скользящих средних из (7):

$$S_0 := 0, S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, n = 1, 2, ...$$

Через $B_H(t)$ обозначим так называемое фрактальное броуновское движение (см. [5]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right),\ 0 < H < 1. \tag{9}$$

Легко видеть, что случай $H = 1/2$ соответствует стандартному винеровскому процессу. Отметим известное свойство H-однородности фрактального броуновского движения (см. [5]): для любого $\lambda > 0$ конечномерные распределения случайных процессов $\{B_H(\lambda t)\}$ и $\left\{\lambda^H B_H(t)\right\}$ совпадают. Кроме того, случайный процесс B_H имеет стационарные приращения.

Обозначим

$$A_m = a_0 + \ldots + a_m\ ,\ m \ge 0, A_{-1} := 0,$$
$$A_m = -(a_{m+1} + \ldots + a_{-1})\ ,\ m < -1. \tag{10}$$

Заметим, что S_n, $n \ge 0$, можно представить в виде $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{n-k} - A_{-k})\xi_k$.

Введем в рассмотрение условие, связывающие между собой последовательность $\{a_i\}$ и параметр $H \in (0,1)$:

(I_H). *Пусть для некоторых постоянных* $c \neq 0$ *и* $0 < \delta < H$ *при* $n \to \infty$ *выполняются следующие соотношения* :

$$\left|A_n - cn^{H-1/2}\right| = O(n^{H-1/2-\delta}), \tag{11}$$

$$\left|a_n - c(H-1/2)n^{H-3/2}\right| = O(n^{H-3/2-\delta}) \tag{12}$$

и, кроме того,

$$a_n = 0,\ \ n < 0. \tag{13}$$

Скажем, последовательность $a_i = (i+1)^{H-1/2} - i^{H-1/2}$, $i > 0$, $a_0 = 1$ и $a_i = 0$, $i < 0$, удовлетворяет условию I_H (более подробно см. в [13]).

Замечание 1. Пусть выполнено условие (I_H). Тогда $\lim_{n\to\infty}\dfrac{DS_n}{n^{2H}} = \sigma_0^2$, причем константа σ_0^2 имеет вид c^2L_H, где $L_H = \dfrac{1}{2H} + \int_0^\infty((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\, ds$, а константа c определена в условии (I_H) (см. [13]).

Определим последовательность $v_n(k/n)$, $k = 0,1,\ldots$, $n = 1,2,\ldots$:

$$v_n(k/n) = \frac{n^{1-H}}{\sigma_0}\sum_{i=0}^{k} X_{k-i}\Delta C_{q,n}(i/n),$$

где константа σ_0 определена в замечании 1. Соответственно, ломаная $R_n(t)$ по-прежнему определяется следующим образом:

$$R_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} v_n(i/n),\ \ t \in [0,1],\ \ n = 1,2,\ldots.$$

В дальнейшем гауссовский процесс $\int_0^t B_H(t-s)dC_q(s)$ будем обозначать через $Z_{q,H}(t)$.

Замечание 2. Пусть $\lambda = q^l$, где $l-$ некоторое целое число, в таком случае конечномерные распределения случайных процессов $\{Z_{q,H}(\lambda t)\}$ и $\left\{\lambda^{H+d} Z_{q,H}(t)\right\}$ совпадают. Этот факт является прямым следствием Н-однородности фрактального броуновского движения, а также того, что $C_q(q^l s) = 2^l C_q(s)$ при всех $s \geq 0$ (см. формулу (1)). Отметим, что указанное свойство позволяет причислить процесс $Z_{q,H}$ к классу объектов, называемых фракталами, у которых любой вырезанный фрагмент в известном смысле подобен целому объекту. Отметим, что, если $q = \infty$, то $Z_{q,H}(t) = \frac{1}{2} B_H(t),\ 0 \leq t \leq 1$, при этом равенств конечномерных распределений процессов $\{Z_{q,H}(\lambda t)\}$ и $\left\{\lambda^H Z_{q,H}(t)\right\}$ выполняется для любой отличной от нуля постоянной λ (а не только для степеней q). Если $q = 2$, то $Z_{q,H}(t) = \int_0^t B_H(t-s)ds$ и, аналогично предыдущему случаю, равенство конечномерных распределений процессов $\{Z_{q,H}(\lambda t)\}$ и $\left\{\lambda^{H+1} Z_{q,H}(t)\right\}$ выполняется для любой отличной от нуля постоянной λ.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (I_H), *причем коэффициенты* a_i *монотонны в зоне* $i \geq N$, *где* N *– некоторое натуральное число. Тогда если* $E|\xi_0|^\alpha < \infty$ *для некоторого* $\alpha > 1/H'$, $H' = \min\{H, 1/2\}$, *то существует вероятностное пространство, на котором для любых* $m \in \mathbb{Z}$, $2 \leq q \leq \infty$

$$\sup_{t\in[0,1]} |R_n(t) - Z_{q,H}(t)| \to 0 \text{ (по вероятности)}$$

при $n \to \infty$.

Замечание 3. Отметим, что утверждение теоремы 1 не изменится, если функцию C_q заменить на t^α, $0 < \alpha \leq 1$ (при этом d заменится на α). Последовательность $v_n(k/n)$, $k = 1,2,\ldots$, $n = 1,2,\ldots$ будет в этом случае иметь вид:

$$v_n(k/n) = \frac{n^{1-H}}{\sigma_0} \sum_{i=0}^{k-1} X_{k-i} \left(\left(\frac{i+1}{n} \right)^\alpha - \left(\frac{i}{n} \right)^\alpha \right).$$

В этом случае $R_n(t)$ аппроксимируется процессом $\alpha \int_0^t B_H(t-s) s^{\alpha-1} ds$ или, что то же самое,

$$\alpha \Gamma(\alpha) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t B_H(s)(t-s)^{\alpha-1} ds \right),$$

где выражение в скобках является фрактальным интегралом от B_H порядка α (см., например, [14]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем обозначение: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ при $n \geq 1$, $S_0 = 0$. В виде леммы 1 сформулируем утверждение из [10, теорема 3].

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (I_H), *причем коэффициенты* a_i *монотонны в зоне* $i \geq N$. *Тогда если* $E|\xi_0|^{\alpha} < \infty$ *для некоторого* $\alpha > 2$, *то существует вероятностное пространство, на котором при всех достаточно больших* n, *любых* $x > 0$ *и* $y > 0$

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]} |S_{[nt]} \Big/ \left(\sigma_0 n^H\right) - B_H([nt]/n)| > x + y\right) \leq$$

$$\leq K_1 n^{-(\alpha H' - 1)} x^{-\alpha} + K_1 n e^{-\lambda_1 y^2 n^{2\delta}},$$

где λ_1, K_1, L_1 *– некоторые положительные постоянные,* $H' = \min\{H, 1/2\}$.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *имеет место следующее утверждение*: *если* $E|\xi_0|^{\alpha} < \infty$ *для некоторого* $\alpha > 2$, *то существует вероятностное пространство, на котором при всех достаточно больших* n, *любых* $x > 0$ *и* $y > 0$

$$P(\sup_{t\in[0,1]} |R_n(t) - \int_0^t B_H\left(\frac{[nt]-[ns]}{n}\right) dC_q(s)| > x + y) \leq$$

$$\leq K_1 n^{-(\alpha H' - 1)} x^{-\alpha} + K_1 n e^{-\lambda_1 y^2 n^{2\delta}},$$

где λ_1, K_1, L_1 *– некоторые положительные постоянные,* $H' = \min\{H, 1/2\}$.

Доказательство. Прежде всего имеют место следующие очевидные равенства:

$$\sigma_0 n^H R_n(t) = \sum_{i=0}^{[nt]-1} S_{[nt]-i}(C_q((i+1)/n) - C_q(i/n)) =$$

$$= \int_0^t S_{[nt]-[ns]} dC_q(s). \tag{14}$$

Далее из выражения (14) следует, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |R_n(t) - \int_0^t B_H\left(\frac{[nt]-[ns]}{n}\right) dC_q(s) \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \left| S_{[nt]} \Big/ \left(\sigma_0 n^H\right) - B_H([nt]/n) \right|.$$

Из последнего неравенства и леммы 1 и следует утверждение леммы.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение из [15].

Лемма 3. *Пусть* $\{\xi(t); 0 \leq t \leq 1\}$ *– центрированный гауссовский процесс, причем* $\xi(0) = 0$ *и* $E(\xi(t) - \xi(s))^2 \leq C\,|\,t - s\,|^\beta$ *для некоторого* $\beta > 0$. *Тогда для всех* $y \geq 0$

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]} |\,\xi(t)\,| > y \right) \leq 4\exp\left\{ -C_\beta y^2 C^{-1} \right\},$$

где C_β *– постоянная, зависящая только от* β.

Лемма 4. *Для любого* $y > 0$ *имеет место неравенство*

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t B_H(t-s)\,dC_q(s) - \int_0^t B_H\left(\frac{[nt]-[ns]}{n}\right) dC_q(s) \right| > y \right) \leq$$
$$\leq 2n\exp\left(-C_H y^2 n^{2H} \right),$$

где C_H *– константа, зависящая только от* H .

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t B_H(t-s)\,dC_q(s) - \int_0^t B_H\left(\frac{[nt]-[ns]}{n}\right) dC_q(s) \right| \leq$$
$$\leq \sup_{|t-s|\leq 2/n} |\,B_H(t) - B_H(s)\,|.$$

Далее обозначим $2/n$ через δ и рассмотрим следующие события:

$$A_t = \left\{ \sup_{t\leq s\leq t+\delta} |\,B_H(s) - B_H(t)\,| > y/3 \right\}.$$

Заметим, что s и t лежат в интервалах вида $[i\delta, (i+1)\delta]$, $i < \delta^{-1}$, и если $|\,s - t\,| \leq \delta$, то эти интервалы либо совпадают, либо примыкают друг к другу. Отсюда выводим следующее (см., также [16]):

$$P\left(\sup_{|t-s|\leq 2/n} |\,B_H(t) - B_H(s)\,| > y \right) \leq P\left(\bigcup_{i<\delta^{-1}} A_{i\delta} \right). \qquad (15)$$

Используя стационарность приращений процесса B_H, получаем

$$P(A_t) = P\left(\sup_{0\le s\le \delta} |B_H(s)| > y/3\right).$$

Следовательно, из выражения (15) вытекает неравенство

$$P\left(\sup_{|t-s|\le 2/n} |B_H(t) - B_H(s)| > y\right) \le \frac{1}{2} nP\left(\sup_{0\le s\le 2/n} |B_H(s)| > y/3\right). \qquad (16)$$

Правую часть неравенства (16) можно переписать в виде $\frac{1}{2} nP\left(\sup_{0\le s\le 1} |B_H(2s/n)| > y/3\right)$; применяя к ней лемму 3, получаем утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть выполнено условие* (I_H)*, причем коэффициенты* a_i *монотонны в зоне* $i \ge N$*, где* N *– некоторое натуральное число. Тогда если* $E|\xi_0|^\alpha < \infty$ *для некоторого* $\alpha > 2$*, то существует вероятностное пространство, на котором при всех достаточно больших* n

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]} |R_n(t) - Z_{q,H}(t)| > K\left(n^{-\frac{\alpha H'-1}{\alpha+1}} + n^{-\delta}\sqrt{\ln n}\right)\right) \le$$

$$\le K\left(n^{-\frac{\alpha H'-1}{\alpha+1}} + n^{-\delta}\sqrt{\ln n}\right),$$

где K *– некоторая положительная постоянная, зависящая только от распределения* ξ_0 *и коэффициентов* $\{a_i\}$*,* $H' = \min\{H, 1/2\}$.

Доказательство. Из лемм 2 и 4 сразу получаем, что существует вероятностное пространство, на котором при всех достаточно больших n, любых $x > 0$ и $y > 0$

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]} |R_n(t) - \int_0^t B_H(t-s)dC_q(s)| > x + y\right) \le Kn^{-(\alpha H'-1)}x^{-\alpha} + Kne^{-\lambda y^2 n^{2\delta}},$$

где λ, K, L – некоторые положительные постоянные. Далее, положив $x = n^{-\frac{\alpha H'-1}{\alpha+1}}$ и $y = \sqrt{\frac{1+\delta}{\lambda}\frac{\sqrt{\log n}}{n^\delta}}$, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Полагая $\alpha > 1/H'$ в лемме 5, получаем утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркашов Н.С., Селезнев В.А.* О модели случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 1216–1236.

2. *Зеленый Л.М., Милованов А.В.* Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 809–852.

3. *Заславский Г.М.* Гамильтонов хаос и фрактальная динамика: пер. с англ. – М.: Регулярная и хаотическая динамика; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 472 с.

4. *Учайкин В.В.* Дробно-дифференциальная феноменология аномальной диффузии космических лучей // Успехи физических наук. – 2013. – Т. 183, № 11. – С. 1175–1223.

5. *Mandelbrot B., Van Ness **J.*** Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // SIAM Review. – 1968. – Vol. 10. – P. 422–437.

6. *Аркашов Н.С., Селезнев В.А.* О модели суб- и супердиффузии на топологических пространствах с самоподобной структурой // ТВП. – 2015. – Т. 60, № 2. – С. 209–226.

7. *Milovanov A., Lomin A.* Topological approximation of the nonlinear Anderson model // Physical review E. – 2014. – Vol. 89, iss. 6. – P. 062921.

8. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives / W. Chena, H. Suna, X. Zhanga, D Korošak // Computers & Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59, iss. 7. – P. 1754–1758.

9. *Hutchinson J.* Fractals and self similarity // Indiana University Mathematics Journal. – 1981. – Vol. 30, N 5. – P. 713–747.

10. *Edgar G.* Measure, topology, and fractal geometry. – New York: Springer, 2008. – 268 p.

11. *Горин Е.А., Кукушкин Б.Н.* Интегралы, связанные с канторовой лестницей // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 3. – С. 188–220.

12. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 574 с.

13. *Аркашов Н.С., Борисов И.С.* Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1221–1255.

14. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

15. *Leadbetter M., Rotsen H., Lindgren G.* Extremes and related properties of random sequences and processes. – New York: Springer, 1983. – 392 p.

16. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. – New York: Wiley, 1999. – 296 p.

Аркашов Николай Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Новосибирского государственного технического университета. Основное научное направление исследований – случайные процессы. Имеет 20 публикаций. E-mail: nicky1978@mail.ru

Gaussian approximation of special memory processes *

N.S. ARKASHOV

Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, Ph.D., Head of the Higher Mathematics Department. E-mail: nicky1978@mail.ru

We construct a stochastic process which makes it possible to simulate anomalous diffusion processes in such a way as to take into account both the structure of the aftereffect determined by the Cantor set, and the correlation properties of the process. The proposed process is a normalized process of partial sums of moving averages constructed from a stationary sequence of random variables, with the non-random sequence of moving averages determining the structure of the aftereffect. Let us note that the dependence form of the mentioned stationary sequence, generally speaking, does not fit into the conventional scheme. In particular, a strong classical (or uniformly strong) mixing here may not take place. Therefore, in this case, it cannot always be used for the classical asymptotic analysis of stationary random variable sums. We obtain approximation of this process in the form of the Gaussian process having the property of self-similarity. In extreme cases, this process is the Wiener process or the fractional Brownian motion. The motivation for the consideration of such processes is that various methods of anomalous diffusion modeling are based on the following properties of the corresponding processes: "a strong form" of increment dependence and increment unsteadiness (see [1] – [4].). The well-known examples of such processes are continuous time random walk model (CTRW) and the fractional Brownian motion (see [4] – [7]). Today, apparently, there are no modeling formats (see. [3], [8]) covering all of these properties, just as the Wiener process is the classical format of the Brownian motion.

Keywords: cantor set, fractional Brownian motion, Wiener process, moving averages, invariance principle, Gaussian process, self-similarity, anomalous diffusion, limiting theorems

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-2-49-60

REFERENCES

1. Arkashov N.S., Seleznev V.A. On a random walk model on sets with self-similar structure. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 968–983. Translated from *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 1216–1236.

2. Zelenyi L.M., Milovanov A.V. Fraktal'naya topologiya i strannaya kinetika: ot teorii perkolyatsii k problemam kosmicheskoi elektrodinamiki [Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Physics-Uspekhi*, 2004, vol. 174, no. 8, pp. 809–852. (In Russian)

3. Zaslavsky G.M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. New York, Oxford University Press, 2005. 421 p. (Russ. ed.: Zaslavsky G. *Gamil'tonov haos i fraktal'naja dinamika*. Moscow, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2010. 472 p.).

4. Uchaikin V. Drobno-differentsial'naya fenomenologiya anomal'noi diffuzii kosmicheskikh luchei [Fractional phenomenology of cosmic ray anomalous diffusion]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Physics-Uspekhi*, 2013, vol. 183, no. 11, pp. 1175–1223. (In Russian)

5. Mandelbrot B., Van Ness J. Fractional Brownian motions, fractional noise and applications. *SIAM Review*, 1968, vol. 10, pp. 422–437.

6. Arkashov N.S., Seleznev V.A. O modeli sub- i superdiffuzii na topologicheskikh prostranstvakh s samopodobnoi strukturoi [On one model of sub- and superdiffusion on topological spaces with a self-similar structure]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications,* 2015, vol. 60, no. 2, pp. 209–226. (In Russian)

7. Milovanov A., Lomin A. Topological approximation of the nonlinear Anderson model. *Physical review E*, 2014, vol. 89, iss. 6, p. 062921.

* *Received 24 February 2016.*

8. Chena W., Suna H., Zhanga X., Korošak D. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, vol. 59, iss. 7, pp. 1754–1758.

9. Hutchinson J. Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 1981, vol. 30, no. 5, pp. 713–747.

10. Edgar G. *Measure, topology, and fractal geometry*. New York, Springer, 2008. 268 p.

11. Gorin E.A., Kukushkin B.N. Integrals related to the Cantor ladder. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, iss. 3, pp. 449–468. Translated from *Algebra i analiz*, 2003, vol. 15, no. 3, pp. 188–200.

12. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 581 p.

13. Arkashov N.S., Borisov I.S. Gaussian approximation to the partial sum processes of moving averages. *Siberian Mathematical Journal*, 2004, vol. 45, iss. 6, pp. 1000–1030. Translated from *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 2004, vol. 45, iss. 6, pp. 1221–1255.

14. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 272 p.

15. Leadbetter M., Rotsen H., Lindgren G. *Extremes and related properties of random sequences and processes*. New York, Springer, 1983. 392 p.

16. Billingsley P. *Convergence of probability measures*. New York, Wiley, 1999. 296 p.

ISSN 1814-1196, http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 63, No 2, 2016, pp. 49–60