ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 64, № 3, 2016, с. 106–116

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 64, No. 3, 2016, pp. 106–116

АВИАЦИОННАЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

AVIATION, ROCKET AND SPACE TECHNOLOGY

УДК 539.3

Термонапряженное состояние многослойного полиармированного однополостного гиперболоида вращения*

Ю.В. НЕМИРОВСКИЙ[1], А.И. БАБИН[2], Е.А. САЛЬСКИЙ[3]

[1] *630090, РФ, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1, Институт теоретической и прикладной механики имени С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник. E-mail: yur.nemirowscky@yandex.ru*
[2] *650000, РФ, г. Кемерово, ул. Весенняя, 28, Кузбасский государственный технический университет, старший преподаватель. E-mail: anbabin@yandex.ru*
[3] *650043, РФ, г. Кемерово, ул. Красная, 6, Кемеровский государственный университет, аспирант. E-mail: e_s_@mail.ru*

Получены физические составляющие тензоров эффективных тангенциальных жесткостей и температурных напряжений для многослойного полиармированного композитного материала в системе координат, не связанной с микроструктурой материала. При определении физико-механических свойств композита был использован структурный подход, в основе которого лежит допущение о существовании характерного размера неоднородности гетерогенной среды регулярной структуры, позволяющее выделить представительный элемент композита и описать процедуру осреднения. Например, в случае волокнистых композитов таким характерным размером служит расстояние между армирующими волокнами. Физические составляющие тензоров эффективных тангенциальных жесткостей и температурных напряжений для однонаправленно армированного слоя в системе координат, связанной с микроструктурой материала, были выведены при следующих допущениях.

1. Полиармированный слой представляет собой упругое изотропное однородное связующее, в которое внедрена регулярная сеть однонаправленных упругих изотропных волокон. Армирующие волокна воспринимают как растягивающие, так и сжимающие усилия.

2. Число армирующих волокон достаточно велико, так что полиармированный слой можно считать квазиоднородным.

3. Градиенты внешних силовых и тепловых полей «не слишком велики», так что изменением характеристик теплового поля и напряженно-деформированного состояния в пределах представительного объема можно пренебречь.

4. Материалы обеих фаз композиции подчиняются закону Дюамеля–Неймана для изотропного тела.

5. Приращение температуры невелико и не приводит к существенным изменениям упругих и теплофизических характеристик материалов композиции, которые будем считать не зависящими от температуры.

* *Статья получена 09 сентября 2016 г.*
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №15-01-00825.

6. В каждой из фаз композиции связь между вектором теплового потока и градиентом температуры следует линейному закону теплопроводности Фурье.

7. Армирующие волокна имеют прямоугольное поперечное сечение и находятся в условиях идеального контакта со связующим. Вектор напряжений на поверхности раздела фаз гетерогенной сплошной среды непрерывен при переходе через нее, а поле температур удовлетворяет на этой поверхности условиям идеального теплового контакта.

Приведена замкнутая система уравнений статики многослойных гиперболических оболочек вращения с учетом внешних термосиловых полей, порядок которой не зависит от количества слоев и схем армирования.

Ключевые слова: однонаправленно армированный слой, полиармированный слой, закон Дюамеля–Неймана, закон теплопроводности Фурье, идеальный тепловой контакт, гетерогенная среда, многослойная оболочка, однополостной гиперболоид вращения, несвязанная задача термоупругости

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-3-106-116

ВВЕДЕНИЕ

Практика проектирования ответственных инженерных конструкций и сооружений современной техники, выдвигая многочисленные сложные проблемы их термопрочности, термовыпучивания и динамики, активно стимулирует дальнейшую разработку теории термоупругости.

В последние десятилетия усилиями ученых и специалистов в ее развитии достигнут существенный прогресс: четко сформулированы исходные положения связанной термоупругости, составлены основные дифференциальные уравнения, сформулированы соответствующие им начально-краевые задачи, разработан ряд методов их решения, решены разнообразные прикладные задачи. Укажем здесь на фундаментальные монографии [1–6], в которых эти вопросы получили всестороннее освещение.

В то же время следует отметить, что большинство глубоких результатов относится к однородным изотропным и анизотропным массивным упругим средам.

Отметим также специфические особенности оболочек из композитных материалов: резко выраженную анизотропию их деформативных свойств, ослабленное сопротивление поперечным деформациям, существенное различие механических и теплофизических характеристик слоев. Эти факторы имеют принципиальное значение [7–14] при определении полей напряжений тонкостенных слоистых элементов конструкций.

Проблема термоупругости тонкостенных слоистых композитных оболочек и пластин разработана с существенно меньшей полнотой. Ввиду актуальности этой проблемы необходимы дальнейшие исследования в данной области механики деформируемого твердого тела.

Целью работы является постановка задачи несвязанной термоупругости для слоистых полиармированных оболочек в форме однополостного гиперболоида вращения и получение основных разрешающих уравнений.

Градирни подобной формы, выполненные из металлопроката или сборного железобетона, армированного в направлении меридианов и параллелей, широко используются в атомной энергетике, химической и металлургической промышленности.

Градирни из стеклопластика находят применение на сахарных заводах, заводах по переработке мяса, рыбы, фруктов и овощей, молокозаводах, пивоварнях и других предприятиях. Стеклопластик проявляет высокую устойчивость к высоким температурам, ультрафиолетовому излучению и истиранию, что позволяет использовать градирни даже в самых тяжелых условиях эксплуатации.

Проектирование конструкций из армированных материалов сдерживается отсутствием достаточно разработанных методик расчета таких конструкций, учитывающих широкие возможности варьирования внутренней структуры.

В данной работе предложена методика расчета термонапряженного состояния гиперболических оболочек, учитывающая реальную структуру армирования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим основные геометрические характеристики поверхности однополостного гиперболоида вращения. Уравнение поверхности в декартовой системе координат $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Расстояние точки на меридиональной образующей до оси вращения z

$$r=\frac{a}{c}(c^2+z^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Радиусы главных кривизн поверхности и коэффициенты Ламе

$$R_1=-\frac{1}{ac^2}\left[(a^2+c^2)z^2+c^4\right]^{\frac{3}{2}};\ R_2=-\frac{a}{c^2}\left[c^4+z^2(c^2+a^2)\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$A_1=\sqrt{1+r'^2};\ A_2=r. \tag{2}$$

Угол между осью вращения z и касательной, проведенной к меридиану

$$\vartheta=\begin{cases}\varphi, & z\in[-\infty;\ 0],\\ \pi-\varphi, & z\in[0;\ \infty],\end{cases}\qquad \varphi=\arcsin\frac{r}{R_2}. \tag{3}$$

В общем случае оболочечная конструкция может состоять из большого количества армирующих слоев, различающихся составами связующего, материалами армирующих волокон и схемами армирования.

Компоненты тензоров напряжений, деформаций и температура для k-го слоя связаны законом Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{(11)}^{(k)}=\overline{A}_{(1111)}^{(k)}\varepsilon_{(11)}^{(k)}+2\overline{A}_{(1112)}^{(k)}\varepsilon_{(12)}^{(k)}+\overline{A}_{(1122)}^{(k)}\varepsilon_{(22)}^{(k)}-\overline{\beta}_{t(11)}^{(k)}T^{(k)},$$

$$\sigma_{(22)}^{(k)}=\overline{A}_{(2211)}^{(k)}\varepsilon_{(11)}^{(k)}+2\overline{A}_{(2212)}^{(k)}\varepsilon_{(12)}^{(k)}+\overline{A}_{(2222)}^{(k)}\varepsilon_{(22)}^{(k)}-\overline{\beta}_{t(22)}^{(k)}T^{(k)},$$

$$\sigma_{(12)}^{(k)} = \sigma_{(21)}^{(k)} = \overline{A}_{(1211)}^{(k)}\varepsilon_{(11)}^{(k)} + 2\overline{A}_{(1212)}^{(k)}\varepsilon_{(12)}^{(k)} + \overline{A}_{(1222)}^{(k)}\varepsilon_{(22)}^{(k)} - \overline{\beta}_{t(12)}^{(k)}T^{(k)}. \quad (4)$$

Физические составляющие тензоров эффективных тангенциальных жесткостей и температурных напряжений для k-го армированного слоя в системе координат, связанной с микроструктурой материала, определяются равенствами [15, с. 13]:

$$\overline{A}_{(\alpha\beta\lambda\mu)}^{(k)} = \frac{\left(1-\varpi_z^{(k)}\right)E_c^{(k)}}{1-\nu_c^{2(k)}}\left[\nu_c^{(k)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu} + \frac{1-\nu_c^{(k)}}{2}(\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda})\right] +$$
$$+ \varpi_z^{(k)}E_{(\alpha\beta\lambda\mu)}^{(k)}; \quad (5)$$

$$\overline{\beta}_{t(\alpha\beta)}^{(k)} = \frac{\left(1-\varpi_z^{(k)}\right)E_c^{(k)}\alpha_c^{(k)}}{1-\nu_c^{(k)}}\delta_{\alpha\beta} + \varpi_z^{(k)}E_{(\alpha\beta\lambda\mu)}^{(k)}\alpha_{(\lambda\mu)}^{t(k)},\ \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases}0, & \text{если } \alpha \neq \beta,\\ 1, & \text{если } \alpha = \beta;\end{cases} \quad (6)$$

$$E_{(1111)}^{(k)} = \varpi^{(k)}E_a^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})E_c^{(k)} +$$
$$+ \frac{E_a^{(k)}E_c^{(k)}\left[\varpi^{(k)}\nu_a^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})\nu_c^{(k)}\right]^2}{\varpi^{(k)}\left(1-\nu_a^{(k)2}\right)E_c^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})\left(1-\nu_c^{(k)2}\right)E_a^{(k)}}; \quad (7)$$

$$E_{(1122)}^{(k)} = \frac{E_a^{(k)}E_c^{(k)}\left[\varpi^{(k)}\nu_a^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})\nu_c^{(k)}\right]}{\varpi^{(k)}\left(1-\nu_a^{(k)2}\right)E_c^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})\left(1-\nu_c^{(k)2}\right)E_a^{(k)}},$$
$$E_{(1212)}^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{E_a^{(k)}E_c^{(k)}}{\varpi^{(k)}\left(1+\nu_a^{(k)}\right)E_c^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})\left(1+\nu_c^{(k)}\right)E_a^{(k)}}; \quad (8)$$

$$E_{(2222)}^{(k)} = \frac{E_c^{(k)}E_a^{(k)}}{\varpi^{(k)}\left(1-\nu_a^{(k)2}\right)E_c^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})\left(1-\nu_c^{(k)2}\right)E_a^{(k)}},$$
$$E_{(1122)}^{(k)} = 0,\ E_{(1222)}^{(k)} = 0; \quad (9)$$

$$\alpha_{(11)}^{t(k)} = \frac{\varpi^{(k)}E_a^{(k)}\alpha_a^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})E_c^{(k)}\alpha_c^{(k)}}{\varpi^{(k)}E_a^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})E_c^{(k)}},\quad \alpha_{(12)}^{t(k)} = \alpha_{(21)}^{t(k)} = 0,$$
$$\alpha_{(22)}^{t(k)} = \left[\varpi^{(k)}E_a^{(k)}\alpha_a^{(k)}\left(1+\nu_a^{(k)}\right) + (1-\varpi^{(k)})\left(1+\nu_c^{(k)}\right)\alpha_c^{(k)}\right] - \quad (10)$$
$$-\left[\varpi^{(k)}\nu_a^{(k)} + (1-\varpi^{(k)})\nu_c^{(k)}\right]\alpha_{(11)}^{t(k)}.$$

В соотношениях (5)–(10) приняты следующие обозначения:

$E_n^{(k)}$, $\nu_n^{(k)}$, $\alpha_n^{(k)}$ – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и температурного расширения для арматуры $(n=a)$ и связующего $(n=c)$; $\varpi^{(k)}$, $\varpi_z^{(k)}$ – интенсивности армирования в плоскости и по толщине k-го слоя.

На практике оболочка нередко изготовлена из материалов, однонаправленно армированных, оси симметрии которых не совпадают с линиями главных кривизн исходной поверхности. Такая ситуация имеет место, например, в перекрестно армированных (под углами $\pm\psi_k$ к направлению меридиана) оболочках.

Преобразование физических компонентов эффективных механических (5) и температурных (6) жесткостей осуществляется по известным формулам [16, с. 32]:

$$A^{(k)}_{(\pi\omega\rho\delta)} = \overline{A}^{(k)}_{(\alpha\beta\lambda\mu)} \cdot m_\pi^{(k)\alpha} \cdot m_\omega^{(k)\beta} \cdot m_\rho^{(k)\lambda} \cdot m_\delta^{(k)\mu}, \quad \beta^{(k)}_{t(11)} = \overline{\beta}^{(k)}_{t(11)} \cdot m_\lambda^{(k)\alpha} \cdot m_\mu^{(k)\beta}. \quad (11)$$

Здесь $m_1^{(k)1} = m_2^{(k)2} = \cos\psi_k$, $m_2^{(k)1} = -m_1^{(k)2} = \sin\psi_k$.

При расчете армированного однополостного гиперболоида вращения возникает необходимость учитывать переменность удельной интенсивности армирующих волокон $\varpi^{(k)}$ вдоль меридионального направления.

Принимая гипотезу о непрерывности волокон в каждом слое, потребуем, чтобы волокна вдоль своих траекторий сохраняли площади поперечных сечений. Из последнего требования вытекает, что в любом сечении однонаправленно армированного слоя суммарная площадь поперечных сечений остается величиной постоянной: $\iint\limits_{\Sigma} \omega \cdot \omega_z d\Sigma = \mathrm{const}$, где интегрирование производится по всей площади Σ поверхности сечения.

Из последнего условия следует

$$\omega^{(k)}(z) = \omega_0^{(k)} \frac{A_2(z_0)\cos\psi_k(z_0)}{A_2(z)\cos\psi_k(z)}, \quad (12)$$

где $A_2(z)$ – коэффициент Ламе, $\omega_0^{(k)}$ – начальные значения интенсивности армирования для k-го слоя на кромке $z = z_0$.

Соотношение (12) приводит к переменности компонент тензоров эффективных механических и температурных жесткостей (11).

Выражения для физических составляющих обобщенных усилий и моментов через физические составляющие напряжений имеют вид

$$T_{(\alpha\alpha)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma^{(k)}_{(\alpha\alpha)} dz, \quad M_{(\alpha\alpha)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma^{(k)}_{(\alpha\alpha)} z dz, \quad (\alpha = 1,2). \quad (13)$$

Далее будем считать, что температурное поле известно из решения нестационарной задачи теплопроводности по методике, подробно изложенной в работе [17, с. 19].

Рассмотрим технологически осуществимые варианты укладки армирующих волокон. Стенка конструкции состоит из четырех $(k=\overline{1,4})$ слоев. В первом (внутреннем) слое волокна уложены в окружном направлении $(\psi_1 = \pi/2)$, во втором и третьем слоях армирование осуществляется под углами $\psi_2 = -\psi_3 = \psi(z)$ к меридиональному направлению, в четвертом слое – вдоль меридиана $(\psi_4 = 0)$.

Частным случаем углового армирования является укладка волокон вдоль асимптотических направлений однополостного гиперболоида вращения. При этом

$$\psi(z) = \arccos\left[\left(\frac{a^2z^2}{c^4} + \frac{z^2}{c^2} + 1\right)\left[\left(\frac{a^2z^4}{c^6} + \frac{a^2z^2}{c^4} + \frac{z^4}{c^4} + 2\frac{z^2}{c^2} + 1\right)\left(\frac{a^2}{c^2} + 1\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right]. \quad (14)$$

Дифференциальные уравнения равновесия оболочки в виде однополостного гиперболоида вращения, находящейся под действием осесимметричного нагружения, имеют вид [16, с. 83]

$$\frac{dT_{(11)}}{dz} = -\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{dz}\left(T_{(11)} - \mathrm{T}_{(22)}\right) - \frac{A_1}{R_1}Q_{(11)} - A_1q_1,$$

$$\frac{dS_1}{dz} = -2\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{dz}S_1,$$

$$\frac{dQ_{(11)}}{dz} = -\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{dz}Q_{(11)} + A_1\left(\frac{\mathrm{T}_{(11)}}{R_1} + \frac{\mathrm{T}_{(22)}}{R_2}\right) - A_1q_n,$$

$$\frac{dM_{(11)}}{dz} = -\frac{1}{A_2}\frac{dA_2}{dz}\left(M_{(11)} - M_{(22)}\right) + A_1Q_{(11)}, \quad (15)$$

где q_1, q_n – проекции внешней распределенной нагрузки на касательное и нормальное направления к меридиану оболочки. Входящие в систему уравнений (15) геометрические параметры определяются выражениями (1)–(3).

Компоненты вектора $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{22} & M_{11} & M_{22} & S & H \end{bmatrix}^T$ обобщенных усилий в координатной поверхности оболочечного элемента связаны с компонентами вектора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{22} & K_{11} & K_{22} & E_{12} & 2K_{12} \end{bmatrix}^T$ этой поверхности соотношением

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{11}^{(0)} & C_{12}^{(0)} & C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(0)} & C_{13}^{(1)} \\ C_{12}^{(0)} & C_{22}^{(0)} & C_{12}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & C_{23}^{(0)} & C_{23}^{(1)} \\ C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{13}^{(2)} \\ C_{12}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & C_{12}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{23}^{(2)} \\ \left(C_{13}^{(0)}-\frac{C_{13}^{(1)}}{R_2}\right) & \left(C_{23}^{(0)}-\frac{C_{23}^{(1)}}{R_2}\right) & \left(C_{13}^{(1)}-\frac{C_{13}^{(2)}}{R_2}\right) & \left(C_{23}^{(1)}-\frac{C_{23}^{(2)}}{R_2}\right) & \left(C_{33}^{(0)}-\frac{C_{33}^{(1)}}{R_2}\right) & \left(C_{33}^{(1)}-\frac{C_{33}^{(2)}}{R_2}\right) \\ C_{13}^{(1)} & C_{23}^{(1)} & C_{13}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & C_{33}^{(1)} & C_{33}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} D_{11}^{(0)} & D_{22}^{(0)} & D_{11}^{(1)} & D_{22}^{(1)} & D_{12}^{(0)}-\frac{1}{R_2}D_{12}^{(1)} & D_{12}^{(1)} \end{pmatrix}^T;$$

$$C_{11}^{(0)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1111)}^{(k)}dz,\quad C_{11}^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1111)}^{(k)}zdz,\quad C_{11}^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1111)}^{(k)}z^2dz;$$

$$C_{12}^{(0)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1122)}^{(k)}dz,\quad C_{12}^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1122)}^{(k)}dz,\quad C_{12}^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1122)}^{(k)}z^2dz;$$

$$C_{13}^{(0)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1112)}^{(k)}dz,\quad C_{13}^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1112)}^{(k)}zdz,\quad C_{13}^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1112)}^{(k)}z^2dz;$$

$$C_{22}^{(0)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(2222)}^{(k)}dz,\quad C_{22}^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(2222)}^{(k)}zdz,\quad C_{22}^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(2222)}^{(k)}z^2dz;$$

$$C_{23}^{(0)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(2212)}^{(k)}dz,\quad C_{23}^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(2212)}^{(k)}zdz,\quad C_{23}^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(2212)}^{(k)}z^2dz;$$

$$C_{33}^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1212)}^{(k)}zdz\ ,\quad C_{33}^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}A_{(1212)}^{(k)}z^2dz\ ;$$

$$D_{11}^{(0)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}\beta_{t(11)}^{(k)}T^{(k)}dz,\quad D_{11}^{(1)}=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3}\beta_{t(11)}^{(k)}T^{(k)}zdz;$$

$$D_{22}^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3} \beta_{t(22)}^{(k)} T^{(k)} dz\,, \quad D_{22}^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3} \beta_{t(22)}^{(k)} T^{(k)} z dz\,;$$

$$D_{12}^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3} \beta_{t(12)}^{(k)} T^{(k)} dz\,, \quad D_{12}^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k^3}^{x_{k+1}^3} \beta_{t(12)}^{(k)} T^{(k)} z dz\,, \; x_k^3 = z_k\,.$$

Для определения произволов, содержащихся в общем решении системы уравнений (15), описывающих термонапряженное состояние оболочки, необходимо задать граничные условия. Сформулируем эти условия, считая, что граничный контур очерчен вдоль координатных линий $z = \mathrm{const}$.

$$T_{(11)} = T_{11}^0, \; S_1 = S_1^0, \; Q_{(11)} = Q_{11}^0, \; M_{(11)} = M_{11}^0. \qquad (17)$$

Граничные условия в перемещениях могут быть заданы с помощью линейных комбинаций следующих величин:

$$u_{(1)} = u_1^0, \; u_{(2)} = u_2^0, \; w = w^0, \; \theta_{(1)} = \theta_1^0. \qquad (18)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получена замкнутая система уравнений (4)–(18) статики многослойных гиперболических оболочек вращения с учетом внешних термосиловых полей, порядок которой не зависит от количества слоев и схем армирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели термомеханики. – М.: Физматлит, 2002. – 168 с.

2. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.

3. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.

4. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.

5. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наукова думка, 1976. – 310 с.

6. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лозбень. – Киев: Наукова думка, 1977. – 160 с.

7. *Муц А.В.* Выбор переменных проектирования при оптимизации последовательности укладки конструкций из слоистых композитов // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 305–324.

8. *Мис А., Ulatowska A.* Design of plates with curved fiber format // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92, N 7. – P. 1728–1733.

9. *Мис А., Мис-Wersgon M.* An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94, N 4. – P. 1461–1470.

10. *Джагангиров А.А.* Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, защемленной по краям // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 385–392.

11. *Немировский Ю.В., Мищенко А.В.* Динамический расчет систем профилированных композитных стержней // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 188–200.

12. *Емельянов И.Г., Кузнецов А.В.* Применение виртуальных элементов при определении напряженного состояния оболочек вращения // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 245–252.

13. *Баженов В.Г., Павленкова Е.В., Артемьева А.А.* Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упруго-пластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 427–434.

14. *Киреев И.В., Немировский Ю.В.* Консервативный численный метод решения линейных краевых задач статики упругих оболочек вращения // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 85–99.

15. *Бабин А.И., Немировский Ю.В.* Термонапряженное состояние многослойного однополостного гиперболоида вращения, армированного в асимптотических и геодезических направлениях // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XVIII Межреспубликанской конференции, Кемерово, 1–3 июля 2003 г. / под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: Нонпарель, 2003. – С. 5–20.

16. *Андреев А.Н., Немировский Ю.В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.

17. *Бабин А.И., Немировский Ю.В.* Термоупругость узлов с полимерными подшипниками скольжения // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XXI Всероссийской конференции, Кемерово, 30 июня – 2 июля 2009 г. / под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: Параллель, 2009. – С. 19–32.

Немировский Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник института теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, профессор кафедры «Прочность летательных аппаратов» НГТУ, профессор кафедры «Строительная механика» НГАСУ, академик Академии Военных наук РФ, академик Академии Транспорта РФ, член Национального комитета РФ по теоретической и прикладной механики. Основное направление научных исследований – механика композиционных материалов. Имеет более 540 публикаций, в том числе 11 монографий.

Бабин Анатолий Иванович, старший преподаватель кафедры математики КузГТУ. Основное направление научных исследований – термоупругость оболочек. Имеет 23 публикации.

Сальский Евгений Алексеевич, аспирант КемГУ. Основное направление научных исследований – теория оболочек. Имеет 3 публикации.

Thermoelastic state of multilayer one-sheeted hyperboloid of revolution reinforced in different directions[*]

Iu.V. NEMIROVSKY[1], *A.I. BABIN*[2], *E.A. SAL'SKII*[3]

[1] *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, D. Sc. (Phys. & Math., professor.) 4/1, Institutskaya Street, Novosibirsk, 630090, Russian Federation. E-mail: yur.nemirowscky@yandex.ru*

[2] *Kuzbass State Technical University, senior lecturer, 28 Spring Street, Kemerovo, 650000, Russian Federation. E-mail: anbabin@yandex.ru*

[3] *Kemerovo State University, graduate student, 6 Krasnaya Street, Kemerovo, 650043, Russian Federation. E-mail: e_s_@mail.ru*

Physical components of effective tangential stiffness and temperature stress tensors of a multilayer reinforced in different directions composite were obtained in the coordinate system not related to the material microstructure. The structural approach was used in estimating its physical and mechanical properties. It is based on the assumption that there exists a characteristic environment heterogeneity dimension of a regular structure which makes it possible to de-

[*] *Received 09 September 2016.*

fine the representative element and to describe the averaging procedure. For example, in a fiber composite the representative length equals the distance between fibers. Physical components of effective tangential stiffness and thermal stresses tensors for one-directional reinforced layer were obtained in the coordinate system related to the material microstructure based on the following assumptions:

1. A multireinforced layer constitutes an elastic isotropic homogenous matrix and a regular grid of one-directional elastic fibers is incorporated into the matrix. Reinforcing fibers sustain both stretching and compression.

2. The number of reinforcing fibers is big enough to assume that the multireinforced layer is quasihomogenous.

3. The external force and heat field gradients are "not too big" and we can consider that there is no variation of the thermal field and stress-strain behavior of the representative volume.

4. Both the matrix and reinforcing material follow Duhamel-Neumann's law.

5. The increment of temperature is small enough not to affect the elastic and thermophysical properties of composite compounds. We will assume that they do not depend on temperature.

6. The heat flux vector and temperature gradient follow the Fourier law in both composite compounds.

7. The reinforcing fiber cross-section is rectangular and has an ideal heat contact with the matrix. The stress vector on the phase division surface of the heterogeneous mediun is continuous and the heat field follows the ideal heat contact law.

A closed system of equations of multilayer hyperboloid shells of revolution statics, the order of which does not depend on the number of layers or the method of reinforcement, is given.

Keyowrds: One-directional reinforced layer, multireinforced layer, Duhamel-Neumann's la, Fourier law of heat transfer, ideal heat contac, heterogeneous environment, multilayered shell, one-sheeted hyperboloid of revolution, non-coupled thermoelastic problem

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-3-106-116

REFERENCES

1. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli termomekhaniki* [Thermomechanics mathematical models]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 168 p.

2. Kovalenko A.D. *Termouprugost'* [Thermoelastisity]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1975. 216 p.

3. Novatskii V. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Thermoelasticity dynamic problems]. Moscow, Mir Publ., 1970. 256 p.

4. Parkus H. *Instationäre Wärmespannungen*. Wien, Shpringer, 1959 (Russ. ed.: Parkus G. *Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 252 p.).

5. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. *Obobshchennaya termomekhanika* [Generalized thermomechanics]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1976. 310 p.

6. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M., Gromovyk V.I., Lozben' V.L. *Termouprugost' tel pri peremennykh koeffitsientakh teplootdachi* [Bodies with varied heat-exchange coefficient thermoelasticity]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1977. 160 p.

7. Muc A. Choice of design variables in the stacking sequence optimization for laminated structures. *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, iss. 2, pp. 211–224. Translated from *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 305–324.

8. Muc A., Ulatowska A. Design of plates with curved fiber format. *Composite Structures*, 2010, vol. 92, no. 7, pp. 1728–1733.

9. Muc A., Muc-Wersgon M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, no. 4, pp. 1461–1470.

10. Jagangirov A.A. Load-carrying capacity of a fiber-reinforced annular tree-layer composite plate clamped on its external and internal contours. *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, iss. 2, pp. 271–280. Translated from *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 385–392.

11. Nemirovskii Yu.V., Mishchenko A.V. Dinamicheskii raschet sistemy profilirovannykh kompozitnykh sterzhnei [Dynamic analysis of composite rods with variable cross-section]. *Vychislit-el'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 188–200.

12. Emel'yanov I.G., Kuznetsov A.V. Primenenie virtual'nykh elementov pri opredelenii naprya-zhennogo sostoyaniya obolochek vrashcheniya [Application of virtual elements for determination of stress state of rotational shells]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 245–252.

13. Bazhenov V.G., Pavlenkova E.V., Artem'eva A.A. Chislennoe reshenie obobshchennykh osesimmet-richnykh zadach dinamiki uprugo-plasticheskikh obolochek vrashcheniya pri bol'shikh deformatsiyakh [Numerical solution of generalized dynamic axisymmetric problems for elastoplastic shells of revolution under large deformations]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 427–434.

14. Kireev I.V., Nemirovskii Yu.V. Konservativnyi chislennyi metod resheniya lineinykh kraevykh zadach statiki uprugikh obolochek vrashcheniya [Conservative numerical method for solving static linear boundary value problems of elastic shells of revolution]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 85–99.

15. Babin A.I., Nemirovskii Yu.V. [One-sheeted multilayered reinforced towards asymptotical and geodesic direction hyperboloid of revolution thermoelastic state]. *Chislennye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti: trudy XVIII Mezhrespublikanskoi konferentsii* [Theory of elasticity and plasticity problems numerical methods: proceedings of XVIII Inter-republican conference], Kemerovo, 1–3 July 2003, pp. 5–20. (In Russian)

16. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogosloinye anizotropnye obolochki i plastiny: izgib, ustoichivost', kolebaniya* [Multilayered anisotropic shells and plates: bend, stability, vibration]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2001. 288 p.

17. Babin A.I., Nemirovskii Yu.V. [Bush bearing polymeric knot thermoelasticity]. *Chislennye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti: trudy XXI Vserossiiskoi konferentsii* [Theory of elasticity and plasticity problems numerical methods: proceedings of XXI All-Russian conference], Kemerovo, 30June – 2 July 2009, pp. 19–32. (In Russian)

ISSN 1814-1196, http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 64, No 3, 2016, pp. 106–116