

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

AUTOMATIC CONTROL  
AND IDENTIFICATION

УДК 681.5.01:681.51.013

## Синхронизация сети линейных динамических объектов с распределенным запаздыванием\*

А.В. ИМАНГАЗИЕВА

414056, г. Астрахань, ул. Татищева, 16, Астраханский государственный технический университет, канд. техн. наук, доцент. E-mail: aliya111@yandex.ru.

Предлагается робастная система управления сетью объектов, динамические процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями с распределенным запаздыванием. Математические модели, включающие распределенное запаздывание, используются в таких областях, как биология, нейрология, в теории вязкоупругости и экономике. Учет распределенного запаздывания позволяет сделать модели этих систем соответствующими реальности. Робастный алгоритм управления, предложенный автором ранее для объекта с распределенным запаздыванием, дополнительно рассмотрен для формирования управляющего воздействия в каждой из локальных подсистем сети объектов. Компенсация действия внешних и внутренних возмущений осуществляется с помощью вспомогательного контура и наблюдателей переменных. В алгоритме управления использование наблюдателей переменных обусловлено необходимостью получения оценок переменных системы, измерение которых недоступно. Таким образом, выбранная схема формирования управляющего воздействия позволяет выделить сигнал, который несет информацию о неизвестных параметрах математической модели и распределенном запаздывании. Для решения задачи синхронизации в каждой из локальных подсистем применяются специальным образом выбранные вспомогательный контур и наблюдатели переменных, что позволяет обеспечить выполнение цели управления с заданной динамической точностью. Важно отметить, что измерению доступны только скалярные вход и выход. Для иллюстрации полученного результата приведен числовой пример системы управления синхронизацией сети динамических объектов с распределенным запаздыванием. Рассмотрена сеть, состоящая из трех подсистем, для которой применен предложенный алгоритм управления. Произведено моделирование в Simulink MatLab. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и показали работоспособность предложенной системы управления в условиях постоянно действующих внешних и внутренних возмущений.

**Ключевые слова:** синхронизация сети, робастное управление, динамический объект, внешние и внутренние возмущения, динамическая точность, распределенное запаздывание, алгоритм управления, наблюдатели переменных, вспомогательный контур

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-4-19-32

---

\* Статья получена 28 ноября 2016 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач современной теории управления является синтез управления объектами, динамические процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями с распределенным запаздыванием. Подтверждением этому является огромное количество публикаций в ведущих изданиях по теории управления, к числу которых можно отнести работы [1–5]. Важность решения этой задачи обусловлена прежде всего ее новизной и практической значимостью. Практика показывает, что в ряде случаев линеаризация систем с различными видами запаздывания позволяет относительно адекватно описывать реальные процессы, но, например, в теории колебаний, биологии, нейрологии, в теории вязкоупругости [6–8] такой подход является недопустимым, поскольку он приводит к достаточно грубым или ошибочным результатам. Так, в работе [9] показано, что исключение даже малого запаздывания в системе дифференциальных уравнений может существенно изменить картину поведения решений.

Проблема синтеза управления с учетом распределенного запаздывания усугубляется условиями неполной информации о параметрах математической модели. Одним из подходов для решения этой проблемы является робастное управление, которое позволяет обеспечить полную или частичную компенсацию возмущений при неизменной структуре управления. В связи с этим особый интерес у исследователей вызывают различные задачи робастного управления объектами с распределенным запаздыванием [2–5, 10, 11]. Так, в работе [2], с помощью метода инвариантных эллипсоидов строится робастно-оптимальное управление нестационарными дискретными объектами с распределенным запаздыванием, а в [3], используя вспомогательный контур и наблюдателя переменных для локальных подсистем, решена задача робастной синхронизации сети объектов с распределенным запаздыванием. На основе теории  $H_\infty$  в работе [5] синтезируется алгоритм адаптивной синхронизации для объекта с нестационарным дискретным и распределенным запаздыванием по состоянию. Для нелинейного объекта с запаздыванием и для нейтрального типа соответственно решена задача робастного управления в работе [11]. Одной из главных проблем в этих исследованиях является построение робастного регулятора, учитывающего влияние распределенно-запаздывающей составляющей в модели объекта и обеспечивающего достижимость цели управления. И тем не менее, несмотря на большое количество предложенных решений проблемы робастного управления объектами с распределенным запаздыванием, на сегодняшний день задача построения простых в реализации алгоритмов остается актуальной.

В настоящей работе в классе задач по робастному управлению объектами с распределенным запаздыванием предложено решение задачи синхронизации сети динамических объектов. В основу алгоритмов управления для локальных синхронизируемых взаимосвязных подсистем, в отличие от изложенных в работе [10], взят алгоритм управления [12]. Для каждого из локальных объектов с помощью введения вспомогательного контура [13] и двух наблюдателей [14] переменных решена задача компенсации влияния распределенного запаздывания как внутреннего возмущения. Для иллюстрации полученного результата приведен числовой пример системы управления синхронизацией сети динами-

ческих объектов с распределенным запаздыванием. Показано, что синтезированное управление в условиях параметрической неопределенности обеспечивает синхронизацию сети объектов с заданной точностью.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сеть, состоящую из  $r$  связанных объектов, математической моделью которой является следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + D_i \int_{-h}^0 x_i(t+\theta) d\theta + \sum_{j=1, i \neq j}^r D_{ij} y_j(t-h_j) + B_i u_i(t) + \Gamma_i f_i(t), \\ y_i(t) &= C_i x_i(t),\end{aligned}\tag{1}$$

$$x_i(\theta) = \varphi_i(\theta), \quad \theta \in [-h_i; 0], \quad i = \overline{1, r},$$

где  $x_i \in R^{n_i}$ ,  $y_i(t)$  и  $u_i(t)$  – скалярные регулируемые выходные переменные локальных объектов и управляющие воздействия;  $\varphi_i(\theta)$  – непрерывные векторные начальные функции;  $f_i(t)$  – внешние возмущающие воздействия;  $A_i, D_i, B_i, \Gamma_i, C_i, D_{ij}$  – числовые матрицы соответствующих порядков.

Требуемое качество переходных процессов в локальных объектах задается уравнением ведущей подсистемы

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + D_m \int_{-h}^0 x_m(t+\theta) d\theta + B_m g_m(t), \\ y_m(t) &= C_m x_m(t),\end{aligned}\tag{2}$$

$$x_m(\theta) = \varphi_m(\theta), \quad \theta \in [-h_m; 0], \quad i = \overline{1, r},$$

где  $x_m \in R^{n_m}$ ,  $y_m(t)$  и  $g(t)$  – скалярные выход эталонной модели и задающее воздействие;  $A_m, D_m, B_m, L_m$  – числовые матрицы соответствующих порядков, начальные условия нулевые.

Требуется получить алгоритмы синхронизации, обеспечивающие выполнение следующих целевых условий:

$$|y_i(t) - y_m(t)| < \delta \quad \text{при} \quad t \geq T_0, \quad i = \overline{1, r},\tag{3}$$

где  $\delta$  – некоторое достаточно малое число;  $T_0$  – время, по истечении которого с начала функционирования системы должно выполняться целевое условие.

### Предположения

1. Локальные подсистемы являются управляемыми.
2. Известны диапазоны возможных значений элементов матриц  $A_i, D_i, B_i, \Gamma_i, L_i, D_{ij}$ .
3. Уравнения (1) являются минимально-фазовыми, т. е. полином  $L_i \left( I_{n_i} \lambda - A_i - D_i \int_{-h_i}^0 e^{\lambda \theta} d\theta \right)^+ B_i$  – гурвицев, где  $\lambda$  – комплексная переменная в преобразовании Лапласа;  $\left( I_{n_i} \lambda - A_i - D_i \int_{-h_i}^0 e^{\lambda \theta} d\theta \right)^+$  – транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы  $\left( I_{n_i} \lambda - A_i - D_i \int_{-h_i}^0 e^{\lambda \theta} d\theta \right)$ .
4. Внешнее возмущение  $f_i(t)$  и задающее воздействие  $g_m(t)$  являются гладкими ограниченными функциями.
5. Производные регулируемой переменной и управляющего воздействия не измеряются.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Преобразуем уравнения (1) и (2) в форму «вход-выход» и применим преобразование Лапласа ( $i = \overline{1, r}$ ):

$$Q_{in_i}(\lambda) y_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{n_i-1} Q_{ik}(\lambda) \sigma_i^{n_i-k}(\lambda) y_i(\lambda) + \sum_{k=0}^{m_i} R_{ik}(\lambda) \sigma_i^{m_i-k}(\lambda) u_i(\lambda) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \sum_{k=0}^{n_i-1} G_{ijk}(\lambda) \sigma_i^{n_i-1-k}(\lambda) e^{-\lambda h_j} y_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{n_i-1} S_{ik}(\lambda) \sigma_i^{n_i-k}(\lambda) f_i(\lambda) + K_i(\lambda); \quad (4)$$

$$Q_m(\lambda) y_m(\lambda) = \sum_{k=1}^{n_m-1} Q_{mk}(\lambda) \sigma_m^{n_m-k}(\lambda) y_m(\lambda) + \sum_{k=0}^{m_i} R_{mk}(\lambda) \sigma_m^{m-k}(\lambda) g_m(\lambda), \quad (5)$$

где  $Q_{in}(\lambda), R_{ik}(\lambda), G_{ijk}(\lambda), \Gamma_{ik}(\lambda)$  – полиномы, у которых последний индекс означает их порядок; многочлены  $Q_{in_i}(\lambda)$  и  $Q_m(\lambda)$  нормированы;

$$Q_{in_i}(\lambda) y_i(\lambda) - \sum_{k=1}^{n_i-1} Q_{ik}(\lambda) \sigma_i^{n_i-k}(\lambda) y_i(\lambda) = \det(I_{n_i} \lambda - A_i - D_i \sigma_i(\lambda)),$$

$$\sum_{k=0}^{m_i} R_{ik}(\lambda) \sigma_i^{m_i-k}(\lambda) = C_i (I_{n_i} \lambda - A_i - D_i \sigma_i(\lambda))^+ B_i,$$

$$\sum_{j=1, i \neq j}^r \sum_{k=0}^{n_i-1} G_{ijk}(\lambda) \sigma_i^{n_i-1-k}(\lambda) e^{-\lambda h_j} = C_i (I_{n_i} \lambda - A_i - D_i \sigma_i(\lambda))^+ D_{ij} e^{-\lambda h_j},$$

$$\sum_{k=1}^{n_i-1} S_{ik}(\lambda) \sigma_i^{n_i-k}(\lambda) = C_i (I_{n_i} \lambda - A_i - D_i \sigma_i(\lambda))^+ \Gamma_i,$$

$$Q_m(\lambda) - \sum_{k=1}^{n_m-1} Q_{mk}(\lambda) \sigma_m^{n_m-k}(\lambda) = \det(I_{nm} \lambda - A_m - D_m \sigma_m(\lambda)),$$

$$\sum_{k=0}^{m_m} R_{mk}(\lambda) \sigma_m^{m_m-k}(\lambda) = C_m (I_{nm} \lambda - A_m - D_m \sigma_m(\lambda))^+ B_m.$$

Применим к полиномам  $Q_{in_i}(\lambda)$  и  $Q_{i(n_i-1)}(\lambda)$  алгоритм деления Евклида:

$$Q_{in_i}(\lambda) = M_{i\gamma_i}(\lambda) R_{im}(\lambda) + N_{il_i}(\lambda),$$

$$Q_{i(n_i-1)}(\lambda) = W_{i(\gamma_i-1)}(\lambda) R_{im}(\lambda) + J_{ia_i}(\lambda),$$

где  $\gamma_i = n_i - m_i$ ,  $a_i < m_i$ ,  $l_i < m_i$ . Разложим многочлены  $M_{i\gamma_i}(\lambda)$  и  $W_{i(\gamma_i-1)}(\lambda)$  на сумму двух составляющих:  $M_{i\gamma_i}(\lambda) = M_{0\gamma_i}(\lambda) + \Lambda_{\gamma_i-1}(\lambda)$ ,  $W_{i(\gamma_i-1)}(\lambda) = W_{0(\gamma_i-1)}(\lambda) + \Psi_{\gamma_i-1}(\lambda)$ . Требования к выбору многочленов  $M_{0\gamma_i}(\lambda)$  и  $W_{0(\gamma_i-1)}(\lambda)$  будут приведены ниже. Подставим полученные разложения  $Q_{in_i}(\lambda) = (M_{0\gamma_i}(\lambda) + \Lambda_{\gamma_i-1}(\lambda)) R_{im}(\lambda) + N_{il_i}(\lambda)$ ,  $Q_{i(n_i-1)}(\lambda) = (W_{0(\gamma_i-1)}(\lambda) + \Psi_{\gamma_i-1}(\lambda)) R_{im}(\lambda) + J_{ia_i}(\lambda)$  в уравнение (4) и разделим левые и правые части полученных уравнений на многочлены  $\bar{R}_{im}(\lambda) = \frac{1}{r_i} R_{im_i}(\lambda)$ . В результате получим

$$M_{0\gamma_i}(\lambda) y_i(\lambda) = W_{0(\gamma_i-1)}(\lambda) \sigma_i(\lambda) y_i(\lambda) + r_i u_i(\lambda) + \psi_i(\lambda), \quad i = \overline{1, r}, \quad (6)$$

где  $r_i$  – коэффициенты при старших членах полиномов  $R_{im_i}(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned} \psi_i(\lambda) = & \frac{1}{\bar{R}_{im}(\lambda)} \left( \sum_{k=1}^{n_i-2} Q_{ik}(\lambda) \sigma_i^{n_i-k}(\lambda) y_i(\lambda) + \sum_{k=0}^{m_i-1} R_{ik}(\lambda) \sigma_i^{m_i-k}(\lambda) u_i(\lambda) + \right. \\ & + \sum_{j=1, i \neq j}^r \sum_{k=0}^{n_i-1} G_{ijk}(\lambda) \sigma_i^{n_i-1-k}(\lambda) e^{-\lambda h_j} y_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{n_i-1} S_{ik}(\lambda) \sigma_i^{n_i-k}(\lambda) f_i(\lambda) + K_i(\lambda) \Big) + \\ & + \frac{\Lambda_{\gamma_i-1}(\lambda) \bar{R}_{im}(\lambda) + N_{il_i}(\lambda)}{\bar{R}_{im}(\lambda)} y_i(\lambda) + \frac{\Psi_{\gamma_i-1}(\lambda) \bar{R}_{im}(\lambda) + J_{ia_i}(\lambda)}{\bar{R}_{im}(\lambda)} \sigma_i(\lambda) y_i(\lambda). \end{aligned}$$

Составим уравнение для ошибки  $e_i(\lambda) = y_i(\lambda) - y_m(\lambda)$ :

$$M_{0\gamma_i}(\lambda)e_i(\lambda) = W_{0(\gamma_i-1)}(\lambda)\sigma_i(\lambda)e_i(\lambda) + r_i u_i(\lambda) + \varphi_i(\lambda), \quad i = \overline{1, r}. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda) = & \psi_i(\lambda) - M_{0\gamma_i}(\lambda)e_i(\lambda) - \\ & - \left( W_{0(\gamma_i-1)}(\lambda)\sigma_i(\lambda) + Q_m(\lambda) - \sum_{k=1}^{n_m-1} Q_{mk}(\lambda)\sigma_m^{n_m-k}(\lambda) \right) y_m(\lambda) - \\ & - \sum_{k=0}^{m_m} R_{mk}(\lambda)\sigma_m^{m-k}(\lambda)g(\lambda). \end{aligned}$$

Преобразуем уравнение (7) в операторную форму:

$$M_{0\gamma_i}(p)\bar{e}_i(t) = W_{0(\gamma_i-1)}(p) \int_{-h_i}^0 e(t+\theta)d\theta + r_i u_i(t) + \bar{\varphi}_i(t), \quad i = \overline{1, r}, \quad (8)$$

где  $\bar{e}_i(t) = L^{-1}\{e_i(\lambda)\}$  – оригиналы от изображений Лапласа;  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования.

В случае доступности измерения  $\gamma_i - 2$  производных управляющих воздействий  $v_i(t)$  зададим законы управления  $u_i(t)$  в виде

$$u_i(t) = T(p)v_i(t). \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) примет следующий вид:

$$M_{0\gamma_i}(p)e_i(t) = W_{0(\gamma_i-1)}(p) \int_{-h_i}^0 e(t+\theta)d\theta + r_i T(p)v_i(t) + \bar{\varphi}_i(t), \quad i = \overline{1, r}. \quad (10)$$

В случае невозможности измерения производных управляющих воздействий зададим законы управления в виде

$$u_i(t) = T(p)\bar{v}_i(t), \quad (11)$$

где  $\bar{v}_i(t)$  – оценка сигнала  $v_i(t)$ , получаемая с наблюдателя [14];

$$\dot{\zeta}_i(t) = F_{0i}\zeta_i(t) + B_{0i}(v_i(t) - \bar{v}_i(t)), \quad \bar{v}_i(t) = L\zeta_i(t). \quad (12)$$

Здесь  $\zeta_i(t) \in R^{\gamma_i}$ ,  $F_{0i}$  – матрица в форме Фробениуса с нулевой нижней строкой,  $L = [1, 0, \dots, 0]$ ,  $B_{0i}^T = \left[ \frac{b_{1i}}{\mu}, \dots, \frac{b_{\gamma_i i}}{\mu^{\gamma_i}} \right]$ . Параметры  $b_{1i}, \dots, b_{\gamma_i i}$  выбираются так, чтобы матрицы  $F_i = F_{0i} + B_i L$  были гурвицевыми,  $B_i^T = [b_{1i}, \dots, b_{\gamma_i i}]$ .

Подставив (11) в (8), получим уравнение

$$M_{0\gamma_i}(p)e_i(t) = \beta r_i T(p)v_i(t) + \tilde{\varphi}_i(t) + \beta r_i T(p)(\bar{v}_i(t) - v_i(t)), \quad (13)$$

где  $\tilde{\varphi}_i(t) = \bar{\varphi}_i(t) + W_{0(\gamma_i-1)}(p) \int_{-h_i}^0 e(t+\theta)d\theta$ .

Выберем полиномы  $r_i T_i(\lambda)$  так, чтобы передаточные функции  $\frac{r_i T_i(\lambda)}{M_{0\gamma_i}(\lambda)} = \frac{1}{\lambda + a_m}$ . Тогда уравнение (13) преобразуется к виду

$$(p + a_m)e_i(t) = \beta v_i(t) + \tilde{\psi}_i(t), \quad (14)$$

где  $\tilde{\psi}_i(t) = \frac{1}{r_i T_i(p)} \tilde{\varphi}_i(t) + \beta(\bar{v}_i(t) - v_i(t))$ . В сигнале  $\tilde{\psi}_i(t)$  сконцентрировалась вся неопределенность  $i$ -го объекта управления и внешних возмущений.

Введем вспомогательные контуры

$$(p + a_m)\bar{e}_i(t) = \beta v_i(t) \quad (15)$$

и, принимая во внимание (14) и (15), составим уравнения для рассогласований  $\zeta_i(t) = e_i(t) - \bar{e}_i(t)$ :

$$(p + a_m)\zeta_i(t) = \tilde{\psi}_i(t).$$

Таким образом, если измерению доступны  $\gamma_i - 2$  производные сигнала  $v_i(t)$  и первая производная регулируемой величины  $e_i(t)$ , то, сформировав  $v_i(t)$  в виде

$$v_i(t) = -\frac{1}{\beta}(p + a_m)\zeta_i(t), \quad (16)$$

получим, что закон управления (11) и (16) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (8), (11) и (16) по переменной  $e_i(t)$ , а уравнение замкнутой системы будет иметь вид  $(p + a_m)e_i(t) = 0$ .

В случае невозможности измерять необходимые производные сигналов  $\zeta_i(t)$  вместо (16), сигналы  $v_i(t)$  формируем в виде

$$v_i(t) = -\frac{1}{\beta}(p + a_m)\bar{\zeta}_i(t),$$

где  $\bar{\zeta}_i(t)$  – оценка сигнала  $\zeta_i(t)$ , получаемая с наблюдателя [14]:

$$\dot{z}_i(t) = \frac{b_1}{\mu}(\zeta_i(t) - z_i(t)), \quad \bar{\zeta}_i(t) = z_i(t). \quad (17)$$

**Утверждение.** Пусть выполнены условия предположений 1–5, тогда для любого  $\delta > 0$  в выражении (1) существуют числа  $\mu > 0$ ,  $T > 0$  такие, что для  $\mu \leq \mu_0$  и  $t \geq T$  для системы (1), (12), (13) и (16), (17) выполнено целевое условие (3) и все переменные в системе ограничены.

Доказательство утверждения аналогично доказательству утверждения, которое приведено в работе [3].

### ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Рассмотрим объект управления, состоящий из трех динамических подсистем. Математическими моделями подсистем являются дифференциальные уравнения с распределенным запаздыванием:

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \int_{-3}^0 x_1(t+\theta) d\theta + \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{bmatrix} (y_2(t-1) + y_3(t-3)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} f_1,$$

$$y_1 = [1 \ 0 \ 0] x_1,$$

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \int_{-3}^0 y_2(t+\theta) d\theta + \begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{bmatrix} (y_1(t-2) + y_3(t-3)) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} f_2,$$

$$y_2 = [1 \ 0 \ 0] x_2,$$

$$\dot{x}_3 = \begin{bmatrix} a_4 & 1 & 0 \\ a_5 & 0 & 1 \\ a_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \int_{-3}^0 y_3(t+\theta) d\theta + \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{bmatrix} (y_1(t-2) + y_2(t-1)) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} f_3,$$

$$y_3 = [1 \ 0 \ 0] x_3.$$



Поставленная задача синхронизации трех подсистем, как отмечено в предположении 2, решается в условиях параметрической неопределенности. Класс неопределенности задан неравенствами

$$\begin{aligned} 1 \leq a_{ij} \leq 3, \quad i \neq j, \quad -3 \leq a_{11} \leq 1, \quad -3 \leq a_{22} \leq 1, \\ -3 \leq a_{33} \leq 2, \quad -3 \leq d_{ij} \leq 3, \quad 1 \leq b \leq 8, \quad -5 \leq a_i \leq 5, \\ -5 \leq q_i \leq 5, \quad -3 \leq d_{ij} \leq 3, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\ 2 \leq b_k \leq 5, \quad k = \overline{1, 3}, \quad -4 \leq q_l \leq 5, \quad l = \overline{1, 6}. \end{aligned}$$

Уравнение ведущей подсистемы имеет следующий вид:

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -15 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{-3}^0 x_m(t+\theta) d\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} g_m, \quad y_m = [1 \ 0 \ 0] x_m.$$

Следуя схеме формирования управляющего воздействия, предложенной в данной работе, выберем полином  $T(\lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\mu = 0,01$ ,  $a_m = 3$ . Вспомогательные контуры вводятся в виде  $(p+3)\bar{e}_i(t) = \beta v_i(t)$ , а уравнения наблюдателей (12) и (17) имеют вид ( $i = \overline{1, r}$ )

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_{1i}(t) = \varsigma_{2i}(t) + \frac{6}{\mu}(v_i(t) - \varsigma_{1i}(t)), \\ \dot{\varsigma}_{2i}(t) = \frac{8}{\mu^2}(v_i(t) - \varsigma_{1i}(t)), \\ \bar{v}_i(t) = \varsigma_{1i}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_i(t) = \frac{a_m}{\mu}(\zeta_i(t) - z_i(t)), \\ \bar{\zeta}_i(t) = z_i(t). \end{cases}$$

Управляющие воздействия формируются в виде ( $i = \overline{1, r}$ )

$$u_i(t) = 4\varsigma_{1i}(t) + 4\varsigma_{2i}(t) + \dot{\varsigma}_{2i}(t),$$

$$v_i(t) = -\frac{1}{10}(3\zeta_i(t) + \dot{z}_i(t)).$$

Будем моделировать следующую математическую модель в пакете Simulink среды MatLab:

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \int_{-3}^0 x_1(t+\theta) d\theta + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} (y_2(t-1) + y_3(t-3)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} f_1,$$

$$y_1 = [1 \ 0 \ 0] x_1,$$

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \int_{-3}^0 y_2(t+\theta) d\theta + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} (y_1(t-2) + y_3(t-3)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} f_2,$$

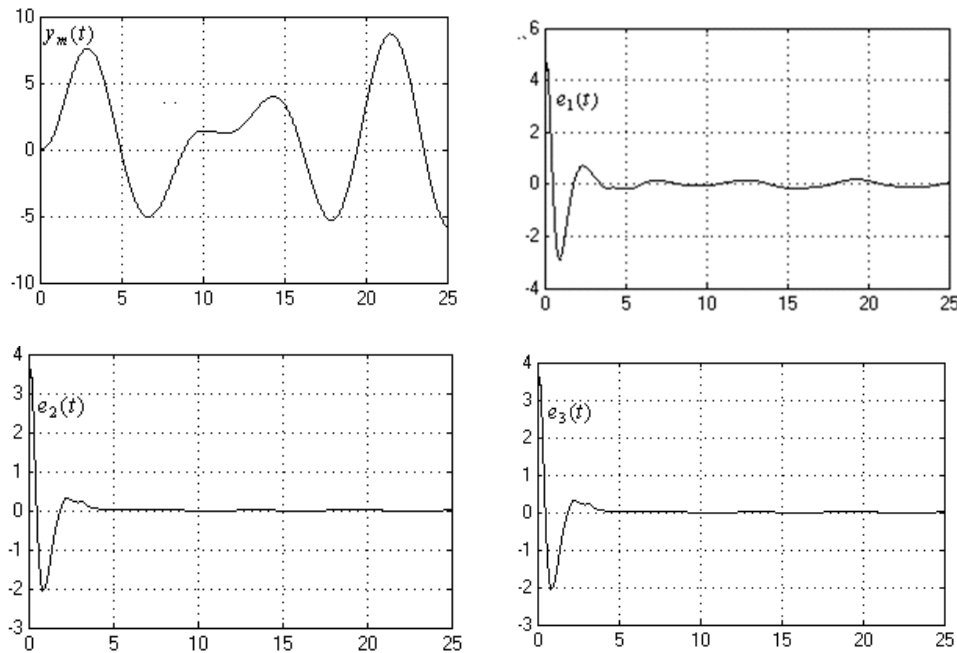
$$y_2 = [1 \ 0 \ 0] x_2,$$

$$\dot{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \int_{-3}^0 y_3(t+\theta) d\theta + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} (y_1(t-2) + y_2(t-1)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} f_3,$$

$$y_3 = [1 \ 0 \ 0] x_3.$$

На рисунке представлены переходные процессы по выходу ведущей подсистемы управления и ошибкам синхронизации.



Переходные процессы по выходу ведущей системы и ошибкам синхронизации

Начальные условия:  $x_1(\theta) = [-2, -2, -2]^T$ ,  $x_2(\theta) = [1, 1, 1]^T$ ,  $x_3(\theta) = [1, 1, 1]^T$ ,  $\theta \in [-3, 0]$ . В системах управления  $\beta_i = 10$ ,  $\mu = 0,01$ ,  $g_m = 10 + 5 \sin t + 5 \sin 0,7t$ ,  $f_2 = f_3 = 2 \sin 0,2t + 2 \sin 0,7t$ .

Таким образом, для объектов, рассмотренных в данном примере, предложенная схема формирования управляющих воздействий обеспечивают выполнение цели управления (3) с точностью, не превышающей значения 0,05 момента времени 5 с.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При создании систем управления динамическими объектами часто возникают дополнительные трудности, связанные с наличием в математическом описании запаздывания. Запаздывание может быть обусловлено самыми различными причинами: ограниченностью скорости распространения сигнала, наличием инерционности некоторых элементов и т. д. Как правило, динамика подобных систем в пространстве и времени описывается уравнением с запаздыванием. Задача управления линейным объектом с запаздыванием по состоянию решена в работе [15]. Одним из типов уравнений с запаздыванием является уравнение с распределенным запаздыванием (для него также используется название «интегродифференциальные уравнения»). Учет распределенного запаздывания в математической модели объекта позволяет сделать модели этих систем соответствующими реальности.

Следует отметить, что работ по управлению объектами с распределенным запаздыванием в нашей стране достаточно мало. В основном исследуют-

ся системы с запаздывающим управлением, в то время как в зарубежных изданиях их опубликовано большое количество [1–5].

В предложенной работе решена задача робастной синхронизации сети объектов управления, динамические процессы в которых описываются уравнениями с распределенным запаздыванием. Алгоритм, предложенный для линейных объектов с распределенным запаздыванием [12], рассмотрен с целью его использования для синхронизации сети объектов управления.

При решении задачи синхронизации, в отличие от [3], в основу алгоритмов управления для локальных взаимосвязных подсистем, взят алгоритм управления [12]. В предложенной робастной системе используются два наблюдателя [14] производных переменных так, что второй фильтр позволяет скомпенсировать погрешность наблюдения первого из них.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stabilization of nonlinear systems nonlinearly depending on fast time-varying parameters: an immersion and invariance approach / L. Wang, H. Su, Z. Liu, R. Ortega // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2015. – Vol. 60, N 2. – P. 559–564.
2. Constrained control of uncertain, time-varying linear discrete-time systems subject to bounded disturbances / H.-N. Nguyen, P.O. Gutman, S. Oлару, M. Hovd // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2015. – Vol. 60, N 3. – P. 831–836.
3. Цыкунов А.М. Робастная синхронизация сети объектов с распределенным запаздыванием // *Автоматика и телемеханика*. – 2015. – № 11. – С. 60–75.
4. Robust  $H_\infty$  finite-horizon control for a class of stochastic nonlinear time-varying systems subject to sensor and actuator saturations / Z. Wang, D.W.C. Ho, H. Dong, H. Gao // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2010. – Vol. 55, N 7. – P. 1716–1722.
5. Karimi H.R. Robust adaptive  $H_\infty$  synchronization of master-slave systems with discrete and distributed time-varying delays and nonlinear perturbations // *Preprints of the 18<sup>th</sup> IFAC World Congress*. – Milano, 2011. – P. 302–307.
6. Gouzé J.L., Rapaport A., Hadj-Sadok M.Z. Interval observers for uncertain biological systems // *Ecological Modelling*. – 2000. – Vol. 133, iss. 1–2. – P. 45–56.
7. Zitek P., Hlava J. Anisochronic internal model control of time-delay systems // *Control Engineering Practice*. – 2001. – Vol. 9, N 5. – P. 501–516.
8. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
9. Fridman E. Effects of small delays on stability of singularly perturbed systems // *Automatica*. – 2002. – Vol. 38, N 5. – P. 897–902.
10. Цыкунов А.М. Робастное управление объектами с последействием. – М.: Физматлит, 2014. – 264 с.
11. On delay dependent stability for linear neutral systems / D. Ivanescu, S.I. Niculescu, L. Dugard, J.M. Dion, E.I. Verriest // *Automatica*. – 2003. – Vol. 39, N 2. – P. 255–261.
12. Имангазиева А.В. Робастная система слежения за эталонным сигналом линейного динамического объекта с распределенным запаздыванием // *Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2015. – № 4. – С. 7–13.
13. Цыкунов А.М. Робастное управление с компенсацией возмущений. – М.: Физматлит, 2012. – 300 с.
14. Atassi A.N., Khalil H.K. Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1999. – Vol. 44, N 9. – P. 1672–1687.
15. Имангазиева А.В., Цыкунов А.М. Робастное управление линейным динамическим объектом с запаздыванием по состоянию // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2007. – № 12. – С. 2–6.

Имангазиева Алия Владимировна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Математика» Института информационных технологий и коммуникаций Астраханского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – синтез робастных систем автоматического управления. Имеет 15 публикаций. E-mail: aliya111@yandex.ru.

### ***Synchronization of a linear dynamic plant network with a distributed lag\****

**A.V. IMANGAZIEVA**

*Astrakhan State Technical University, 16 Tatishcheva Street, Astrakhan, 414056, Russian Federation, PhD (Eng.), assistant professor. E-mail: aliya111@yandex.ru*

A robust control system of an object networks is proposed. Dynamic processes in these networks are described by differential equations with a distributed lag. Mathematical models incorporating a distributed lag are used in such areas as biology, neuroscience, the theory of viscoelasticity and economics. Taking a distributed lag into account allows making real-life models of these systems. In addition, a robust control algorithm proposed by the author earlier for a plant with a distributed lag is considered to generate a control action in each of the local subsystems of the network of plants. Compensation of external and internal perturbations is carried out using an auxiliary circuit and variable observers. The use of variable observers in the control algorithm is caused by the need to estimate variables of the system whose measurement is impossible. Thus, the selected scheme of generating a control action makes it possible to choose a signal that carries information about unknown parameters of the mathematical model and a distributed lag. To solve the problem of synchronization, an auxiliary circuit and variable observers chosen in a special way are used in each of the local subsystems, which ensures attaining control objectives with a desired dynamic accuracy. It is important to note that only scalar input and output can be measured. To illustrate the results obtained a numerical example of a control system of dynamic plant network synchronization with a distributed lag is given. A network of three subsystems for which the proposed control algorithm is used is studied. Modeling is carried out in Simulink Matlab. The simulation results confirmed theoretical findings and showed the efficiency of the proposed control system in the conditions of permanent external and internal perturbations.

**Keywords:** network synchronization, robust control, dynamic plant, external and internal perturbations, dynamic accuracy, distributed lag, control algorithm, variable observers, auxiliary circuit

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-4-19-32

### **REFERENCES**

1. Wang L., Su H., Liu Z., Ortega R. Stabilization of nonlinear systems nonlinearly depending on fast time-varying parameters: an immersion and invariance approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, vol. 60, no. 2, pp. 559–564.
2. Nguyen H.-N., Gutman P.O., Olaru S., Hovd M. Constrained control of uncertain, time-varying linear discrete-time systems subject to bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, vol. 60, no. 3, pp. 831–836.
3. Tsykunov A.M. Robastnaya sinkhronizatsiya seti ob"ektov s raspredelennym zapazdyvaniem [Robust synchronization of the network plants with distributed delay]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2015, no. 11, pp. 60–75. (In Russian)

---

\* Received 28 November 2016.

4. Wang Z., Ho D.W.C., Dong H., Gao H. Robust  $H_\infty$  finite-horizon control for a class of stochastic nonlinear time-varying systems subject to sensor and actuator saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, vol. 55, no. 7, pp. 1716–1722.
5. Karimi H.R. Robust adaptive  $H_\infty$  synchronization of master-slave systems with discrete and distributed time-varying delays and nonlinear perturbations. *Preprints of the 18<sup>th</sup> IFAC World Congress*. Milano, 2011, pp. 302–307.
6. Gouzé J.L., Rapaport A., Hadj-Sadok M.Z. Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological Modelling*, 2000, vol. 133, iss. 1–2, pp. 45–56.
7. Zitek P., Hlava J. Anisochronic internal model control of time-delay systems. *Control Engineering Practice*, 2001, vol. 9, no. 5, pp. 501–516.
8. Volterra V. *Theory of functionals and of integrals and integro-differential equations*. New York, Dover, 1959 (Russ. ed.: Vol'terra V. *Teoriya funktsionalov, integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravnenii*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 304 p.).
9. Fridman E. Effects of small delays on stability of singularly perturbed systems. *Automatica*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 897–902.
10. Tsykunov A.M. *Robastnoe upravlenie ob"ektami s posledeystviem* [Robust control of plants with residual effect]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 264 p.
11. Ivanescu D., Niculescu S.I., Dugard L., Dion J.M., Verriest E.I. On delay dependent stability for linear neutral systems. *Automatica*, 2003, vol. 39, no. 2, pp. 255–261.
12. Imangazieva A.V. Robastnaya sistema slezheniya za etalonnyim signalom lineinogo dinamicheskogo ob"ekta s raspredelennym zapazdyvaniem. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*, 2015, no. 4, pp. 7–13.
13. Tsykunov A.M. *Robastnoe upravlenie s kompensatsiei vozmushchenii* [Robust control with compensation of disturbances]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 300 p.
14. Atassi A.N., Khalil H.K. Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, vol. 44, no. 9, pp. 1672–1687.
15. Imangazieva A.V., Tsykunov A.M. *Robastnoe upravlenie lineinym dinamicheskim ob"ektom s zapazdyvaniem po sostoyaniyu* [Robust control of linear dynamic plant with state lag]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie – Mechatronics, Automation, Control*, 2007, no. 12, pp. 2–6.