ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 65, № 4, 2016, с. 68–79

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 65, No. 4, 2016, pp. 68–79

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УСТРОЙСТВ

MODELLING OF PROCESSES AND DEVICES

УДК 519.872.7

Исследование циклической системы с обслуживанием до полного исчерпания методом «прогулок»*

Д.М. СОНЬКИН[1], А.А. НАЗАРОВ[2], С.В. ПАУЛЬ[3]

[1] *634050, РФ, г. Томск, пр. Ленина, 30, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, кандидат технических наук, заместитель директора по развитию Института кибернетики. E-mail: sonkind@tpu.ru*
[2] *634050, РФ, г. Томск, пр. Ленина, 36, Национальный исследовательский Томский государственный университет, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, профессор, доктор технических наук. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com*
[3] *634050, РФ, г. Томск, пр. Ленина, 36, Национальный исследовательский Томский государственный университет, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики, кандидат физико-математических наук. E-mail: paulsv82@mail.ru*

В работе рассматривается циклическая система массового обслуживания с одним обслуживающим прибором, на вход которой поступает два независимых пуассоновских потока заявок с обслуживанием до полного исчерпания заявок, при котором прибор, подключенный к первой очереди, обслуживает все заявки этой очереди до полного исчерпания, затем переключается на вторую очередь. После исчерпания заявок второй очереди прибор вновь переключается на первую очередь. Для переключения прибора с одной очереди на другую требуется затратить время на переналадку прибора, в течение которого прибор недоступен для обслуживания заявок. Ставится задача исследования времени ожидания заявок в каждой очереди. Методом исследования циклической системы до полного исчерпания является метод системы с «прогулками» прибора. Прибор, подключенный к этой очереди, обслуживает все ее заявки до полного исчерпания. В момент окончания обслуживания последней из заявок прибор уходит на «прогулку». Во время «прогулки» заявки в систему поступают, накапливаются, но не обслуживаются. Если в момент возвращения с «прогулки» в системе нет заявок, то прибор повторно уходит на «прогулку». В том случае, когда в момент возвращения прибора с «прогулки» в системе накоплены заявки, прибор приступает к их обслуживанию. Применение метода «прогулки» прибора для исследования циклических систем реализуется в два этапа, первым из которых является исследование системы с «прогулками» прибора, заданной параметром входящего потока, функцией распределения времени обслуживания заявок и функцией распределения продолжительности «прогулок» прибора. Второй этап метода заключается в нахождении функции распределения времени «прогулки» для каждой очереди либо их основных характеристик. А далее результаты, полученные на первом этапе, применяются к каждой из очередей системы с двумя входящими потоками.

* *Статья получена 30 августа 2016 г.*

Ключевые слова: циклическая система, обслуживание до полного исчерпания, система с «прогулками» прибора, время ожидания, уравнение Колмогорова, характеристическая функция, преобразование Лапласа–Стилтьеса

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-4-68-79

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время важным направлением развития телекоммуникационных систем становятся беспроводные сети передачи информации [1]. Широкополосные беспроводные решения позволяют экономично и оперативно создавать телекоммуникационную инфраструктуру. Применение беспроводной технологии позволяет объединить локальные сети и рабочие станции в единую сеть передачи данных, экономя при этом средства и время.

Для адекватной оценки характеристик беспроводных сетей широко применяются стохастические модели поллинга (циклические системы). Результаты в данной области до 1985 года были систематизированы и обобщены Х. Такаги [2]. Далее исследования в этой области проводились такими учеными как Borst S. [3], Boxma O. [4], Levy H. [5], Вишневский В.М. [6]. Классификация систем поллинга представлена в работах [1, 3, 5]. Основные методы анализа поллинг-систем изложены в [7].

Стремительное развитие телекоммуникационных систем и сетей [8–10] стимулирует разработку новых методов анализа и синтеза циклических систем. В связи с этим в последнее десятилетие появилось достаточное количество работ в этом направлении.

Системы упорядоченного опроса, или циклические системы, являются разновидностью систем массового обслуживания с несколькими очередями и общим обслуживающим прибором или несколькими приборами. В каждую очередь поступает свой поток заявок. Обслуживающий прибор по определенному правилу посещает очереди и обслуживает находящиеся в них заявки.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором, на вход которой поступает два независимых пуассоновских потока заявок с интенсивностью λ_k для k-го потока ($k = 1, 2$).

Продолжительность обслуживания заявок k-й очереди случайная с функцией распределения $B_k(x)$, $k = 1, 2$. Рассматривается циклическая система с обслуживанием до полного исчерпания заявок, при котором прибор, подключенный к первой очереди, обслуживает все заявки этой очереди до полного исчерпания, затем переключается на вторую очередь. После исчерпания заявок второй очереди прибор вновь переключается на первую очередь.

Для переключения прибора с одной очереди на другую требуется затратить время γ_k, $k = 1, 2$, на переналадку прибора, в течение которого прибор недоступен для обслуживания заявок.

Ставится задача исследования времени ожидания заявок в каждой очереди.

МЕТОД «ПРОГУЛКИ» ПРИБОРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методом исследования циклической системы до полного исчерпания является метод системы с «прогулками» прибора [11–13], заключающийся в том, что рассматривается выделенная очередь, например, первая с интенсивностью λ_1 поступления заявок и функцией распределения $B_1(x)$ их времени обслуживания.

Прибор, подключенный к этой очереди, обслуживает все ее заявки до полного исчерпания. В момент окончания обслуживания последней из заявок прибор уходит на «прогулку», продолжительность которой определяется функцией распределения $T_k(x)$, здесь k указывает номер очереди, от которой прибор ушел на «прогулку». Во время «прогулки» заявки в систему поступают, накапливаются, но не обслуживаются. Если в момент возвращения с «прогулки» в системе нет заявок, то прибор повторно уходит на «прогулку». В том случае, когда в момент возвращения прибора с «прогулки» в системе накоплены заявки, прибор приступает к их обслуживанию, а также обслуживает все заявки, которые поступают в течение всего текущего режима доступности до полного исчерпания всех заявок. Естественно, что продолжительность «прогулки» для исходной циклической системы с двумя входящими потоками определяется временем обслуживания заявок очереди системы, кроме выделенной, и суммарным временем переключения прибора между очередями.

Применение метода «прогулки» прибора для исследования циклических систем реализуется в два этапа, первым из которых является исследование системы с «прогулками» прибора, заданной параметром λ входящего потока, функцией распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок и функцией распределения $T(x)$ продолжительности «прогулок» прибора. Заметим, что здесь рассматривается система с обслуживанием до полного исчерпания очереди.

Второй этап метода заключается в нахождении функции распределения $T_k(x)$ для каждой очереди либо их основных характеристик. А далее результаты, полученные на первом этапе, применяются к каждой из очередей системы с двумя входящими потоками.

Недостатком метода прогулок является предположение о независимости продолжительностей «прогулок» прибора в циклах обслуживания, что требует дополнительных исследований для установления области значений исходных параметров и распределений в циклической системе, при которых погрешность метода считается приемлемой. Эти исследования можно выполнить, например, имитационным моделированием.

Рассмотрим заявку, поступившую в систему с «прогулками» прибора в некоторый момент времени t. Обозначим $W(t)$ – ее время ожидания в системе до начала обслуживания и обозначим характеристическую функцию этого времени ожидания

$$F(\alpha) = Me^{-\alpha W(t)}. \tag{1}$$

Можно показать, что $F(\alpha)$ имеет вид

$$F(\alpha)=\frac{1-\tau(\alpha)}{\alpha T_1}\frac{1-\lambda b_1}{1+\frac{\lambda}{\alpha}(\beta(\alpha)-1)}, \tag{2}$$

где $\tau(\alpha)$, $\beta(\alpha)$ – преобразования Лапласа–Стилтьеса функций $T(x)$, $B(x)$ соответственно;

$$\tau(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dT(x),\quad \beta(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dB(x),$$

$T_1=\int_0^\infty xdT(x)$ – среднее значение продолжительности «прогулки» прибора; $b_1=\int_0^\infty xdB(x)$ – среднее время обслуживания. Из вида (1) характеристической функции $F(\alpha)$ следует, что время $W(t)$ ожидания заявки в системе с «прогулками» прибора и обслуживанием до полного исчерпания заявок является суммой двух независимых случайных величин, первая из которых является остаточным временем «прогулки» с характеристической функцией $\frac{1-\tau(\alpha)}{\alpha T_1}$, а вторая – виртуальным временем ожидания заявки с характеристической функцией $\frac{1-\lambda b_1}{1+\frac{\lambda}{u}(\beta(u)-1)}$ в классической системе M|GI|1|∞.

Найдем первые два момента W_1, W_2 времени $W(t)$ ожидания в системе с «прогулками» прибора. Продифференцируем равенство (2), учитывая, что

$$-M\{x\}=\tau'(\alpha)\big|_{\alpha=0},\quad M\{x^2\}=\tau''(\alpha)\big|_{\alpha=0},\quad M\{x^3\}=-\tau'''(\alpha)\big|_{\alpha=0}.$$

Имеем

$$T_1\left[\lambda(1-\beta(\alpha))-\alpha\right]F(\alpha)=\left(1-\lambda b_1\right)\left[\tau(\alpha)-1\right],$$

$$T_1\left[-\lambda\beta'(\alpha)-1\right]F(\alpha)+T_1\left[\lambda(1-\beta(\alpha))-\alpha\right]F'(\alpha)=\left(1-\lambda b_1\right)\tau'(\alpha),$$

$$T_1\left[-\lambda\beta''(\alpha)\right]F(\alpha)+2T_1\left[-\lambda\beta'(\alpha)-1\right]F'(\alpha)+T_1\left[\lambda(1-\beta(u))-u\right]F''(u)=$$

$$=\left(1-\lambda b_1\right)\tau''(u).$$

В последнем равенстве положим $\alpha=0$, получим

$$M\{W(t)\}=\frac{(1-\lambda b_1)T_2+\lambda b_2T_1}{2T_1\left[1-\lambda b_1\right]}=\frac{T_2}{2T_1}+\lambda\frac{b_2}{2\left[1-\lambda b_1\right]},$$

$$T_1\left[-\lambda\beta'''(\alpha)\right]F(\alpha)+3T_1\left[-\lambda\beta''(\alpha)\right]F'(\alpha)+3T_1\left[-\lambda\beta'(\alpha)-1\right]F''(\alpha)+$$

$$+T_1\left[\lambda(1-\beta(\alpha))-\alpha\right]F'''(\alpha)=\left(1-\lambda b_1\right)\tau'''(\alpha).$$

В последнем равенстве положим $\alpha=0,$ получим

$$\lambda b_3T_1+3\lambda b_2T_1M\left\{W(t)\right\}+3T_1\left[\lambda b_1-1\right]M\left\{W^2(t)\right\}=\left(\lambda b_1-1\right)T_3,$$

$$M\left\{W^2(t)\right\}=\frac{\left(\lambda b_1-1\right)T_3-\lambda b_3T_1-3\lambda b_2T_1M\left\{W(t)\right\}}{3T_1\left[\lambda b_1-1\right]}=$$

$$=\frac{T_3}{3T_1}+\lambda\frac{b_3+3b_2M\left\{W(t)\right\}}{3\left[1-\lambda b_1\right]}.$$

Здесь b_m и T_m при m = 1, 2, 3 – это первые три момента времени обслуживания заявки и продолжительности «прогулки» прибора в рассматриваемой системе.

При исследовании циклической системы с двумя входящими потоками определяющее значение будет иметь продолжительность η периода занятости прибора для каждой очереди в системе с «прогулками» прибора и обслуживанием до полного исчерпания заявок. Найдем характеристическую функцию

$$\Phi(\alpha)\ =M\exp\{-\alpha\eta\}$$

величины η продолжительности периода занятости. Так как в системе с обслуживанием до полного исчерпания «прогулка» начинается в тот момент времени, когда в системе нет заявок, то в момент окончания «прогулки» в системе накапливается такое количество заявок $n(t),$ производящая функция которых имеет вид

$$My^{n(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}P(n(t)=n)y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda x)^n}{n!}y^ne^{-\lambda x}dT(x)=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{\lambda x[y-1]}dT(x)=\int_0^{\infty}e^{-x[\lambda-\lambda y]}dT(x)=\tau(\lambda-\lambda y),$$

т. е.

$$My^{n(t)}=\tau(\lambda-\lambda y).$$

Достаточно очевидно, что продолжительность η периода занятости в системе с «прогулками» прибора, когда в начале периода занятости накоплено n заявок, равна сумме n независимых продолжительностей η_k периодов занятости в классической системе M|GI|1|∞ с характеристической функцией $\varphi(\alpha),$ которая является корнем уравнения [14]

$$\varphi(\alpha)=\beta(\lambda+\alpha-\lambda\varphi(\alpha)),\quad 0\le\varphi(\alpha)\le 1.$$

Применяя формулу полной вероятности для математических ожиданий, получим равенство

$$\Phi(\alpha) = Me^{-\alpha\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Me^{-\alpha\eta} \middle| n(t) = n \right\} P\{n(t) = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\alpha) P\{n(t) = n\} = \tau(\lambda - \lambda\varphi(\alpha)).$$

Таким образом, характеристическая функция $\Phi(\alpha)$ продолжительности η периода занятости в системе с «прогулками» прибора определяется равенствами

$$\Phi(\alpha) = \tau(\lambda - \lambda\varphi(\alpha)), \tag{3}$$

$$\varphi(\alpha) = \beta(\lambda + \alpha - \lambda\varphi(\alpha)), \quad 0 \le \varphi(\alpha) \le 1, \tag{4}$$

второе из которых является нелинейным уравнением относительно неизвестной характеристической функции $\varphi(\alpha)$ и, как правило, аналитически не решается, за исключением экспоненциального времени обслуживания.

Найдем первые три момента φ_m при $m = \overline{1,3}$, определяемые характеристической функцией $\varphi(\alpha)$ из (4). Применяя равенство (4), нетрудно показать, что значения моментов φ_m определяются равенствами

$$\varphi_1 = \frac{b_1}{1 - \lambda b_1}, \quad \varphi_2 = \frac{(1 + \lambda\varphi_1)^2 b_2}{1 - \lambda b_1},$$

$$\varphi_3 = \frac{(1 + \lambda\varphi_1)^3 b_3 + 3(1 + \lambda\varphi_1) b_2 \lambda\varphi_2}{1 - \lambda b_1},$$

где b_m при $m = \overline{1,3}$ – моменты m-го порядка времени обслуживания.

ЦИКЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

В циклических системах время прогулки прибора от каждой одной очереди складывается из суммы $\gamma = \sum_{v=1}^{2} v_v$ всех времен γ_k переналадки прибора от первой ко второй очереди и от второй к первой и суммы продолжительностей периодов занятости прибора обслуживанием заявок всех очередей, кроме заявок выделенной очереди, поэтому характеристическая функция $\tau_k(\alpha)$ продолжительности прогулки прибора от выделенной очереди (в предположении независимости длительностей занятости прибора заявками разных потоков) имеет вид произведения

$$\tau_1(\alpha) = A(\alpha)\Phi_2(\alpha), \; \tau_2(\alpha) = A(\alpha)\Phi_1(\alpha), \tag{5}$$

где аналогично (3) и (4) характеристическая функция $\Phi_v(\alpha)$, $v=1,2$ продолжительности периода занятости определяется равенствами

$$\Phi_k(\alpha)=\tau_k(\lambda_k-\lambda_k\varphi_k(\alpha)), \qquad \varphi_k(\alpha)=\beta_k(\lambda_k+\alpha-\lambda_k\varphi_k(\alpha)),$$

а функция $A(\alpha)$ является характеристической функцией величины γ. Из этих равенств следует, что функции $\tau_k(\alpha)$ являются решением системы

$$\tau_1(\alpha)=A(\alpha)\tau_2(\lambda_2-\lambda_2\kappa_2(\alpha)), \;\; \tau_2(\alpha)=A(\alpha)\tau_1(\lambda_1-\lambda_1\varphi_1(\alpha)), \tag{6}$$

$$\varphi_v(\alpha)=\beta_v(\lambda_v+\alpha-\lambda_v\varphi_v(\alpha)), \tag{7}$$

а характеристическая функция $F_k(\alpha)$ времени $W(t)$ ожидания заявки в выделенной очереди в силу (2) определяется равенством

$$F_k(u)=\frac{1-\tau_k(u)}{uT_k^{(1)}}\frac{1-\lambda_k b_k^{(1)}}{1+\dfrac{\lambda_k}{u}(\beta_k(u)-1)}, \tag{8}$$

где $T_k^{(1)}$ – среднее значение продолжительности «прогулки» от выделенной очереди. Так как решение системы (6) вызывает определенные затруднения, то применяя полученные равенства (6) и (7) найдем первые два момента $W_k^{(1)}$, $W_k^{(2)}$, $k=\overline{1,2}$.

В силу указанных равенств для этих моментов можно записать

$$\begin{aligned} W_k^{(1)}&=\frac{T_k^{(2)}}{2T_k^{(1)}}+\lambda_k\frac{b_k^{(2)}}{2\left[1-\lambda b_k^{(1)}\right]},\\ W_k^{(2)}&=\frac{T_k^{(3)}}{3T_k^{(1)}}+\lambda_k\frac{b_k^{(3)}+3b_k^{(2)}W_k^{(1)}}{3\left[1-\lambda_k b_k^{(1)}\right]}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $b_k^{(m)}$ при $m=\overline{1,3}$, $k=\overline{1,2}$ – первые три момента времени обслуживания заявок выделенного потока, которые определяются заданием либо функцией распределения $B_k(x)$ либо их характеристической функцией Лапласа $\beta_k(\alpha)$.

Моменты $T_k^{(m)}$, $k=\overline{1,2}$, $m=\overline{1,3}$ найдем из системы (6), (7), записав систему (6) для кумулятивных функций

$$a(\alpha)=\ln A(\alpha), \quad l_k(\alpha)=\ln\tau_k(\alpha)$$

в виде

$$l_k(\alpha)=a(\alpha)+l_v(\lambda_v-\lambda_v\varphi_v(\alpha)), v\neq k \tag{10}$$

Так как производные от кумулятивных функций определяют семиинварианты $l_k^{(m)}$, $k=\overline{1,2}$, $m=\overline{1,3}$, которые определяют моменты $T_k^{(m)}$, то не трудно показать, что значения семиинвариантов $l_k^{(m)}$ являются решением следующих трех систем уравнений:

$$l_k^{(1)} - l_v^{(1)}\lambda_v\varphi_v^{(1)} = a^{(1)},$$

$$l_k^{(2)} - l_v^{(2)}\left(\lambda_v\varphi_v^{(1)}\right)^2 = a^{(2)} + l_v^{(1)}\left(\lambda_v\varphi_v^{(2)}\right), \tag{11}$$

$$l_k^{(3)} - l_v^{(3)}\left(\lambda_v\varphi_v^{(1)}\right)^3 = a^{(3)} + l_v^{(1)}\left(\lambda_v\varphi_v^{(3)}\right) + 3\left(\lambda_v\varphi_v^{(1)}\right)\left(\lambda_v\varphi_v^{(2)}l_v^{(2)}\right),$$

где $a^{(m)}$ при $m=\overline{1,3}$ – первые три семиинварианта суммарного времени γ переналадок прибора, их значения заданной кумулятивной функцией $a(\alpha)$, а значения величин $\varphi_k^{(m)}$ определяются аналогично

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{b_k^{(1)}}{1-\lambda_k b_k^{(1)}},$$

$$\varphi_k^{(2)} = \frac{\left(1+\lambda\varphi_k^{(1)}\right)^2 b_k^{(2)}}{1-\lambda_k b_k^{(1)}},$$

$$\varphi_k^{(3)} = \frac{\left(1+\lambda_k\varphi_k^{(1)}\right)^3 b_k^{(3)} + 3\left(1+\lambda_k\varphi_k^{(1)}\right)b_k^{(2)}\lambda_k\varphi_k^{(k)}}{1-\lambda_k b_k^{(1)}},$$

В силу известных выражений начальных моментов через семиинварианты можно записать следующие равенства, определяющие моменты $T_k^{(m)}$, $k=\overline{1,2}$, $m=\overline{1,3}$:

$$T_k^{(1)} = l_k^{(1)}, \quad T_k^{(2)} = l_k^{(2)} + \left(l_k^{(1)}\right)^2, \quad T_k^{(3)} = l_k^{(3)} + 3l_k^{(1)}l_k^{(2)} + \left(l_k^{(1)}\right)^3, \tag{12}$$

где значения $l_k^{(m)}$ являются решениями систем (11). Получив значения (12) для моментов $T_k^{(m)}$, в силу равенств (9) найдем значения первых двух моментов $W_k^{(1)}$, $W_k^{(2)}$ времени $W_k(t)$ ожидания заявок в каждой очереди из $k=\overline{1,2}$ очередей в рассматриваемой циклической системе.

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ПО ДВУМ МОМЕНТАМ

Для аппроксимации распределения вероятностей $F(x) = P\{W(t) < x\}$ времени $W(t)$ ожидания заявки в любой очереди циклической системы применим гамма-аппроксимацию [15] с параметрами формы s_k и масштаба μ_k для каждой очереди

$$s_k = \frac{\left(W_k^{(1)}\right)^2}{W_k^{(2)} - \left(W_k^{(1)}\right)^2}, \qquad \mu_k = \frac{W_k^{(1)}}{W_k^{(2)} - \left(W_k^{(1)}\right)^2}. \tag{13}$$

Таким образом, можно получить аппроксимацию распределения времени ожидания в циклической системе.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим систему, на вход которой поступает два простейших потока с интенсивностью $\lambda_1 = 0,3$ и $\lambda_2 = 0,5$. Функция распределения времени обслуживания заявок каждого потока является гамма-функцией распределения с параметрами формы α_k и масштаба $\beta_k = \alpha_k = 0.5$, $k = \overline{1,2}$. Для данных функций распределения времени обслуживания заявок каждого потока найдены значения начальных моментов $b_k^{(m)}$, $m = \overline{1,3}$, семиинварианты $a^{(m)}$, $m = \overline{1,3}$, суммарного времени переключения прибора.

Находим значения моментов $\varphi_k^{(m)}$ продолжительности периодов занятости прибора обслуживанием заявок выделенного потока и решаем четыре системы уравнений (10) относительно $l_k^{(m)}$, $k = \overline{1,2}$, $m = \overline{1,3}$. По формулам (12) находим значения $T_k^{(m)}$, $k = \overline{1,2}$, $m = \overline{1,3}$. Получаем значения первого и второго моментов $W_k^{(1)}$, $W_k^{(2)}$ времени $W_k(t)$ ожидания заявок в k-й очереди, $k = \overline{1,2}$. Далее строим гамма-аппроксимацию времени ожидания в циклической системе с параметрами формы s_k и масштаба μ_k для каждой очереди, полученными по моментам $W_k^{(1)}$, $W_k^{(2)}$.

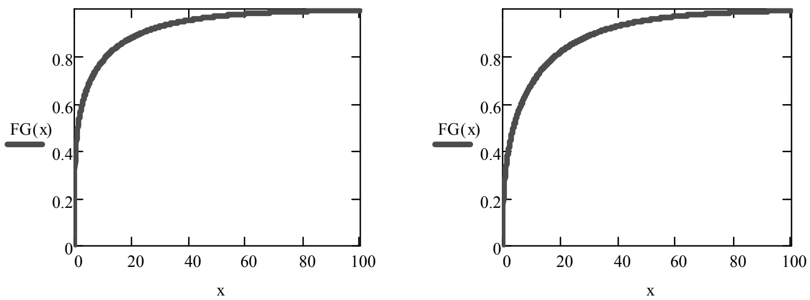
Таблица 1

Номер очереди	W_1	W_2
1	11.350	447.991
2	7.980	322.509

Таблица 2

Гамма-аппроксимация
$s = 0.369$ и $\mu = 0.033$
$s = 0.239$ и $\mu = 0.030$

Графики функции распределения полученной аппроксимации для двух очередей при заданных параметрах представлены на рисунке.



На графиках функции $FG(x)$ – функция распределения гамма-аппроксимации для первой и второй очередей соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных формул для нахождения начальных моментов продолжительности времени ожидания W_1, W_2 в циклической системе распределение вероятностей времени ожидания аппроксимируется гамма-распределением с параметрами формы s_k и масштаба μ_k для каждой очереди.

В случае циклической системы с $K > 2$ входящими потоками применение данного метода для исследования времени ожидания в очередях возможно, но стандартное предположение о независимости периодов занятости для каждой очереди в этом случае дает большую погрешность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В., Семенова О.* Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. – М.: Техносфера, 2007. – 312 с.

2. *Takagi H.* Analysis of polling systems. – Cambridge, MA: MIT Press, 1986. – 175 p.

3. *Borst S.C.* Polling system. – Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1996. – 232 p.

4. *Boxma O.J.* Analysis and optimization of polling systems // Queueing Performance and Control of ATM. – Amsterdam; New York: North-Holland, 1991. – P. 173–183.

5. *Levy H., Sidi M., Boxma O.J.* Dominance relations in polling systems // Queueing Systems. – 1990. – Vol. 6. – P. 155–172.

6. *Вишневский В.М., Семенова О.В.* Математические методы исследования систем поллинга // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 2. – С. 3–56.

7. *Yechiali U.* Analysis and control of polling systems // Performance Evaluation of Computer and Communication Systems / ed. by L. Donatielo, R. Nelson. – Berlin; New York: Springer-Verlag, 1993. – P. 630–650.

8. *Сонькин М.А., Ямпольский В.З.* Обобщенные свойства специальных систем связи и мониторинга для труднодоступных и подвижных объектов // Известия ТПУ. – 2008. – Т. 312, № 2. – С. 154–156.

9. *Сонькин М.А., Погребной В.К., Погребной А.В.* Оптимизация использования ресурсов связи в наземной метеорологической наблюдательной сети // Известия ТПУ. – 2008. – Т. 313, № 5. – С. 46–50.

10. *Сонькин М.А., Ямпольский В.З.* Навигационные системы мониторинга подвижных объектов, мобильных групп и центров управления // Проблемы информатики. – 2011. – № 2 (10). – С. 4–10.

11. *Nazarov A.A., Paul S.V.* A number of customers in the system with server vacations // Communications in Computer and Information Science. – Switzerland: Springer, 2016. – Vol. 601: Distributed Computer and Communication Networks. – P. 334–343.

12. *Назаров А.А., Пауль С.В.* Исследование системы массового обслуживания с «прогулками» прибора, управляемой *T*-стратегией // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 февраля 2015 г. – Минск, 2015. – С. 202–207.

13. Исследование математической модели циклической сети связи множественного доступа / А.А. Назаров, В.З. Ямпольский, С.В. Пауль, Д.М. Сонькин // Материалы Десятой Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». – Ростов н/Д., 2015. – Т. 1. – С. 204–214.

14. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: учебное пособие. – Томск: НТЛ, 2004. – 228 с.

15. *Назаров А.А., Бронер В.И.* Метод R-аппроксимации для системы с релейным управлением // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием, Москва, 18–22 апреля 2016 г. – М., 2016. – С. 40–42.

Study of a cyclic system with servicing to complete exhaustion by the 'vacation' method[*]

D.M. SONKIN[1], *A.A. NAZAROV*[2], *S.V. PAUL*[3]

[1] *30, Lenina Avenue, Tomsk, 634050, National Research Tomsk Polytechnic University, Institute of Cybernetics, Vice director for institute development. E-mail: sonkind@tpu.ru*

[2] *36, Lenina Avenue, Tomsk, 634050, National Research Tomsk State University, the department of Probability Theory and Mathematical Statistics; head of the department. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com*

[3] *36, Lenina Avenue, Tomsk, 634050, National Research Tomsk State University, PhD (Phys. & Math.). E-mail:paulsv82@mail.ru*

This paper considers the cyclic queuing system with one server to whose input two independent Poisson flows of requests are supplied. We consider a cyclic system with service to the complete exhaustion of requests in which the device after connecting to the first queue serves all requests in that queue until complete exhaustion, and then switches to the second queue. After the exhaustion of the second queue of requests, the device switches back to the first queue. To switch the device from one line to another some time is required to changeover the unit during which the unit is unavailable for servicing requests. The task is to study the waiting time of requests in each queue. The device 'vacation' method is used to investigate a cyclic system to complete exhaustion. After connecting to the queue, the device serves all requests to complete exhaustion. At the end of servicing the last request the device goes to "vacation" During vacations requests come into the system and are accumulated, but not served. If at the time of the device return from 'vacation' there are no requests in the system, the unit go to vacation again. However if at the time of the device return from 'vacation' requests have been accumulated in the system, the device starts to service them, with due regard to all requests that are received during the operation. The 'vacations' method to study cyclic systems is implemented in two phases. The first phase is to study the system with the device 'vacation' set by the input inflow parameter, the distribution function of the request servicing and the distribution function of the length of the device 'vacation'. The second stage of the method is to find the distribution function time for each queue 'vacation' or their essential characteristics. And then the results obtained in the first stage are applied to each of the system queue with two input flows.

Keywords: cyclic system, service to complete exhaustion, system with device walking, waiting time, the Kolmogorov equation, the characteristic function, Laplace-Stieltjes transform

DOI: 10.17212/1814-1196-2016-4-68-79

[*] *Received 30 August 2016.*

REFERENCES

1. Vishnevskii V., Semenova O. *Sistemy pollinga: teoriya i primenenie v shirokopolosnykh besprovodnykh setyakh* [Polling systems: theory and applications in broadband wireless networks]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2007. 312 p.

2. Takagi H. *Analysis of polling systems*. Cambridge, MA, MIT Press, 1986. 175 p.

3. Borst S.C. *Polling system*. Amsterdam, Stichting Mathematisch Centrum, 1996. 232 p.

4. Boxma O.J. Analysis and optimization of polling systems. *Queueing Performance and Control of ATM*. Amsterdam, New York, North-Holland, 1991, pp. 173–183.

5. Levy H., Sidi M., Boxma O.J. Dominance relations in polling systems. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 155–172.

6. Vishnevskii V.M., Semenova O.V. Matematicheskie metody issledovaniya sistem pollinga [Mathematical methods of research polling systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2006, no. 2, pp. 3–56. (In Russian)

7. Yechiali U. Analysis and control of polling systems. *Performance Evaluation of Computer and Communication Systems*. Ed. by L. Donatielo, R. Nelson. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1993, pp. 630–650.

8. Sonkin M.A., Yampol'skii V.Z. Obobshchennye svoistva spetsial'nykh sistem svyazi i monitoringa dlya trudnodostupnykh i podvizhnykh ob"ektov [Generalized properties of special communication and monitoring systems for remote and mobile objects]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2008, vol. 312, no. 2, pp. 154–156. (In Russian)

9. Sonkin M.A., Pogrebnoi V.K., Pogrebnoi A.V. Optimizatsiya ispol'zovaniya resursov svyazi v nazemnoi meteorologicheskoi nablyudatel'noi seti [Optimizing the use of communication resources in a surface weather observation network]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2008, vol. 313, no. 5, pp. 46–50. (In Russian)

10. Sonkin M.A., Yampol'skii V.Z. Navigatsionnye sistemy monitoringa podvizhnykh ob"ektov, mobil'nykh grupp i tsentrov upravleniya [The navigation of mobile objects monitoring system, mobile units and control centers]. *Problemy informatiki – Problems of Informatics*, 2011, no. 2 (10), pp. 4–10.

11. Nazarov A.A., Paul S.V. A number of customers in the system with server vacations. *Communications in Computer and Information Science*. Vol. 601. *Distributed Computer and Communication Networks*. Switzerland, Springer, 2016, pp. 334–343.

12. Nazarov A.A., Paul S.V. [Research queuing system with the "walking" of the device controlled by T Strategy]. *Teoriya veroyatnostei, sluchainye protsessy, matemati-cheskaya statistika i prilozheniya*: materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, posvyashchennoi 80-letiyu prof., d-ra fiz.-mat. nauk G.A. Medvedeva [Probability theory, stochastic processes, mathematical statistics and applications: proceedings of the International Scientific Conference dedicated to the 80th anniversary of Professor, Dr. Sci. Sciences G.A. Medvedev], Minsk, 23–26 February 2015, pp. 202–207.

13. Nazarov A.A., Yampol'skii V.Z., Paul S.V, Sonkin D.M. [A study of mathematical model of cyclic communication network multiple access]. *Materialy Desyatoi Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Perspektivnye sistemy i zadachi upravleniya"* [Proceedings of the Tenth All-Russian scientific-practical conference "Advanced Systems and Control Problems"]. Rostov-on-Don, 2015, vol. 1, pp. 204–214.

14. Nazarov A.A., Terpugov A.F. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Tomsk, NTL Publ., 2004. 228 p.

15. Nazarov A.A., Broner V.I. [R-approximation method for a relay control system]. *Informatsionno-telekommunikatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnykh sistem*: materialy Vserossiiskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem [Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems: proceedings of All-Russian conference with international participation]. Moscow, 18–22 April 2016, pp. 40–42.

ISSN 1814-1196, http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 64, No 3, 2016, pp. 68–79