ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 66, № 1, 2017, с. 26–40

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 66, No. 1, 2017, pp. 26–40

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

AUTOMATIC CONTROL AND IDENTIFICATION

УДК 681.5.013

Синтез систем автоматического управления неустойчивыми многомерными объектами*

А.Р. ГАЙДУК[1], К.В. КОЛОКОЛОВА[2]

[1] *347900, РФ, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, Южный федеральный университет, доктор технических наук, профессор. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru*
[2] *347900, РФ, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, Южный федеральный университет, аспирант. E-mail: kbesklubova@mail.ru*

В статье ставится задача синтеза многомерных систем автоматического управления (МСАУ) для неустойчивых многомерных объектов. Для решения поставленной задачи разработан метод синтеза МСАУ с согласованными полюсами, позволяющий осуществлять связное или автономное (независимое) управление выходными переменными объекта с желаемыми показателями качества. При этом согласование корней характеристического полинома системы с нулями и полюсами объекта управления позволяет снизить порядок синтезируемой системы и тем самым улучшить ее характеристики. Решение поставленной задачи синтеза достигается методом динамической декомпозиции с учетом только устойчивой части характеристического полинома объекта. Доказана теорема, доставляющая решение предлагаемым методом для задачи синтеза МСАУ неустойчивым объектом. В общем случае многомерный объект может иметь неполную часть, и если он задан передаточной матрицей, то соответствующие ей полиномы в этой матрице сократятся и не будут учитываться при синтезе устройства управления. Однако полюсы неполной части будут входить в состав корней характеристического полинома реальной замкнутой системы, поэтому если эти полюсы являются неустойчивыми, то в результате синтеза неявно будет получена неустойчивая МСАУ. Поэтому условием обеспечения устойчивости замкнутой системы является полная информация о характеристическом полиноме объекта и устойчивость его неполной части. Приводится численный пример синтеза МСАУ неустойчивым многомерным объектом управления. На примере показаны основные этапы разработанного метода синтеза, в частности, расчет декомпозирующей матрицы, построение желаемых передаточных функций каналов синтезируемой системы и расчет регулятора. В результате моделирования получены переходные характеристики синтезированной МСАУ, подтверждающие устойчивость и желаемый характер переходных процессов.

Ключевые слова: многомерный объект, неустойчивость, многосвязная система, задача автономности, динамическая декомпозиция, синтез, качество переходных процессов

DOI: 10.17212/1814-1196-2017-1-26-40

* *Статья получена 04 октября 2016 г.*
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-58-00226 Бел)

ВВЕДЕНИЕ

Современные технические объекты управления характеризуются значительной сложностью и часто имеют несколько взаимосвязанных регулируемых переменных. Связность регулируемых переменных обусловливает некоторые трудности синтеза многомерных систем автоматического управления (МСАУ). Эти трудности связаны, прежде всего, с устранением взаимовлияния или с обеспечением необходимой связности каналов МСАУ, а также с определением структуры регулятора минимальной сложности, придающего системе управления устойчивость и требуемые динамические свойства. Многомерные системы управления имеют чрезвычайно широкое распространение во всех технических сферах. Эти системы состоят из многомерного объекта управления (МОУ) и многомерного устройства управления (регулятора) [1–9].

Выбор структуры многомерного устройства управления (МУУ) зависит, в частности, от свойства устойчивости объекта управления. Известные методы синтеза МСАУ с применением П, ПИ, ПИД-регуляторов предполагают априорный выбор структуры многомерного регулятора. Синтез на основе моделей МОУ в переменных состояния в случае неустойчивого объекта управления часто предполагает введение дополнительных устройств стабилизации [10, 11]. Это значительно усложняет структуру МУУ, поэтому целесообразной является разработка методов синтеза МУУ, которые бы позволяли компенсировать влияние неустойчивых полюсов объекта без введения дополнительных устройств стабилизации.

В случае неустойчивых одномерных объектов удобно использовать метод аналитического синтеза систем с управлением по выходу и воздействиям (АСС УВВ) [12]. Этот метод позволяет включить в число корней характеристического полинома замкнутой системы достаточно устойчивые нули и полюсы объекта управления, а влияние неустойчивых полюсов устранить с помощью устройства управления. Этот же метод может применяться и для синтеза МСАУ, но только при устойчивом или стабилизированном (например, с помощью обратных связей) МОУ.

В данной работе для синтеза МСАУ неустойчивым многомерным объектом предлагается метод динамической декомпозиции, обеспечивающий связное или автономное (независимое) управление выходными переменными объекта. Практическое значение предложенного метода синтеза обусловлено тем, что для придания устойчивости замкнутой системы не требуется введение специальных устройств стабилизации объекта, что позволяет упростить структуру синтезированной системы. Кроме того, разработанный метод обеспечивает желаемое качество процессов управления. Эффективность метода иллюстрируется на примере синтеза МСАУ двухмерным неустойчивым объектом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель данной работы заключается в разработке метода синтеза МСАУ с согласованными полюсами для неустойчивых объектов, позволяющего осуществлять связное или автономное по И.Н. Вознесенскому управление выходными переменными объекта с желаемыми показателями качества.

Рассмотрим полный многомерный объект с одинаковым числом управлений и управляемых переменных, описываемый уравнениями в переменных состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ – n-вектор состояния; $\mathbf{u}$ и $\mathbf{y}$ – q-векторы управлений и управляемых переменных; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – числовые матрицы соответствующих размерностей.

Передаточная матрица объекта (1) имеет следующий вид:

$$\mathbf{W}_{yu}(p) = A^{-1}(p)\mathbf{C}(p). \tag{2}$$

где $A(p) = \det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ – характеристический полином объекта; $\mathbf{C}(p)$ – $q \times q$-полиномиальная матрица.

Пусть Ω – область допустимого по условиям устойчивости расположения корней характеристического полинома синтезируемой системы. Имея в виду неустойчивый объект, его характеристический полином $A(p)$ представим следующим образом:

$$A(p) = A_{\Omega}(p)A_{\overline{\Omega}}(p), \tag{3}$$

где полином $A_{\Omega}(p)$ степени n_{Ω} имеет корни p_i^{Ω}, принадлежащие области Ω, а полином $A_{\overline{\Omega}}(p)$ степени $n_{\overline{\Omega}}$ – корни $p_i^{\overline{\Omega}}$, значения которых лежат за пределами этой области (как правило, $\operatorname{Re} p_i^{\overline{\Omega}} \geq 0$, $i = \overline{1, n_{\overline{\Omega}}}$). При $A_{\overline{\Omega}}(p) \neq 1$ многомерный объект (1), очевидно, является неустойчивым.

2. МЕТОД СИНТЕЗА

Решение поставленной задачи синтеза достигается путем модификации метода динамической декомпозиции (МДД), предложенного в [13–16] для случая многомерных объектов управления. В этом методе используется декомпозирующая матрица вида $\boldsymbol{\Pi}_{yu}(p) = A(p)\operatorname{adj}\mathbf{W}_{yu}(p)$, поэтому этот метод может применяться, если только МОУ является устойчивым или стабилизируемым, т. е. если только полином $A(p)$ – гурвицев. Здесь и далее $\operatorname{adj}(*)$ – присоединная матрица, обладающая свойством $\mathbf{H}\operatorname{adj}\mathbf{H} = \mathbf{E}\det\mathbf{H}$.

Чтобы обойти указанное ограничение, применим для синтеза декомпозирующего управления матрицу $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{yu}(p)$, которую определим следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{yu}(p) = A_{\Omega}(p)\operatorname{adj}\mathbf{W}_{yu}(p). \tag{4}$$

В этом случае декомпозирующие свойства матрицы $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{yu}(p)$ сохраняются за счет множителя $\operatorname{adj}\mathbf{W}_{yu}(p)$. Это следует из произведения матриц $\mathbf{W}_{yu}(p)$ и $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{yu}(p)$ (4), которое имеет вид:

$$\mathbf{W}_{yu}(p)\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{yu}(p) = A_{\Omega}(p)\mathbf{E}_q\det\mathbf{W}_{yu}(p). \tag{5}$$

Здесь матрица $\mathbf{E}_q$ – $q \times q$-единичная матрица, т. е. матрица в правой части приведенного равенства является диагональной.

При использовании декомпозирующей матрицы (4) уравнение «вход–выход» МУУ имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}(p) = A_{\Omega}(p)\mathrm{adj}\mathbf{W}_{yu}(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\left[\mathbf{Q}(p)\mathbf{g} - \mathbf{L}(p)\mathbf{y}(p)\right], \qquad (6)$$

где $\mathbf{R}(p) = \mathrm{diag}[R_1(p), R_2(p), ..., R_q(p)]$, $\mathbf{L}(p) = \mathrm{diag}[L_1(p), L_2(p), ..., L_q(p)]$, $\mathbf{Q}(p)$ – произвольная $q \times q$-матрица.

Уравнение «вход–выход» замкнутой системы управления объектом (1) с передаточной матрицей (2) и МУУ (6) имеет вид

$$\mathbf{y}(p) = A_{\Omega}(p)\mathbf{W}_{yu}(p)\mathrm{adj}\mathbf{W}_{yu}(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\left[\mathbf{Q}(p)\mathbf{g}(p) - \mathbf{L}(p)\mathbf{y}(p)\right],$$

или с учетом свойства присоединенной матрицы

$$\mathbf{y}(p) = A_{\Omega}(p)\det \mathbf{W}_{yu}(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\left[\mathbf{Q}(p)\mathbf{g}(p) - \mathbf{L}(p)\mathbf{y}(p)\right].$$

Раскрыв скобки, приведем подобные члены. В результате получим уравнение замкнутой системы (2), (6):

$$[\mathbf{E}_q + A_{\Omega}(p)\det \mathbf{W}_{yu}(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{L}(p)]\mathbf{y}(p) =$$

$$= A_{\Omega}(p)\det \mathbf{W}_{yu}(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{Q}(p)\mathbf{g}(p). \qquad (7)$$

Так как матрицы $\mathbf{L}(p)$ и $\mathbf{R}(p)$ являются диагональными, то матрица в левой части выражения (7) также является диагональной.

Сформулируем теорему, доставляющую решение поставленной задачи синтеза МСАУ неустойчивым объектом.

Теорема об управлении неустойчивым многомерным объектом. Если многомерный объект управления определяется передаточной матрицей (2) с характеристическим полиномом (3) и уравнения в переменных состояния регулятора (6) реализованы так, что выполняется условие

$$R(p)\det[\mathbf{E}_q + A^{-1}(p)R^{-1}(p)A_{\Omega}(p)B_{yu}(p)\mathbf{R}_{\partial}(p)\mathbf{L}(p)] =$$

$$= A_{\bar{\Omega}}^{-1}(p)\prod_{i=1}^{q}[A_{\bar{\Omega}}(p)R_i(p) + B_{yu}(p)L_i(p)], \qquad (8)$$

а матрица $\mathbf{Q}$ в (6) является диагональной, то МСАУ (1), (6) является устойчивой и автономной по И.Н. Вознесенскому.

Доказательство. Для этой цели найдем выражение для характеристического полинома замкнутой системы (2) и (6). Согласно [12], характеристический полином многомерной системы, где $\mathbf{y}(p) = \mathbf{W}_{yu}(p)\mathbf{u}(p)$, а $\mathbf{u}(p) = \mathbf{Q}_{\mathbf{ug}}(p)\mathbf{g}(p) - \mathbf{L}_{\mathbf{uy}}(p)\mathbf{y}(p)$, определяется выражением

$$D_{\text{сис}}(p) = A(p)R(p)\det[\mathbf{E}_q + \mathbf{W}_{yu}(p)\mathbf{L}_{uy}(p)]. \qquad (9)$$

В соответствии с выражениями (2) и (6) в рассматриваемом случае матрицы и полиномы из этого выражения имеют вид

$$\mathbf{W}_{yu}(p) = A^{-1}(p)\mathbf{C}(p)\,; \quad \mathbf{L}_{uy}(p) = R^{-1}(p)\tilde{\mathbf{\Pi}}_{yu}(p)\mathbf{R}_{\partial}(p)\mathbf{L}(p)\,,$$

где

$$\mathbf{R}_{\partial}(p) = \mathrm{diag}[R_{\partial 1}(p), R_{\partial 2}(p), \ldots, R_{\partial q}(p)]\,, \quad R(p) = \det \mathbf{R}(p) = \prod_{i=1}^{q} R_i(p)\,,$$

$$R_{\partial i}(p) = R(p) / R_i(p)\,.$$

Подставляя эти выражения с учетом (4) в формулу (9), получим

$$D_{\text{сис}}(p) = A(p)R(p)\det[\mathbf{E}_q + A^{-1}(p)R^{-1}(p)\mathbf{C}(p)\tilde{\mathbf{\Pi}}_{yu}(p)\mathbf{R}_{\partial}(p)\mathbf{L}(p)]\,. \quad (10)$$

Принимая во внимание, что с учетом (3) произведение $\mathbf{C}(p)\tilde{\mathbf{\Pi}}_{yu}(p) = A_{\Omega}(p)B_{yu}(p)\mathbf{E}_q$, найдем

$$D_{\text{сис}}(p) = A(p)R(p)\det[\mathbf{E}_q + A^{-1}(p)R^{-1}(p)A_{\Omega}(p)B_{yu}(p)\mathbf{R}_{\partial}(p)\mathbf{L}(p)]\,. \quad (11)$$

Отсюда с учетом условия (8) теоремы следует выражение

$$D_{\text{сис}}(p) = A_{\Omega}(p)\prod_{i=1}^{q}[A_{\bar{\Omega}}(p)R_i(p) + B_{yu}(p)L_i(p)]\,. \quad (12)$$

Обозначим

$$D_i(p) = A_{\bar{\Omega}}(p)R_i(p) + B_{yu}(p)L_i(p)\,, \quad i = \overline{1,n}\,. \quad (13)$$

Тогда из выражений (12) и (13) следует искомое выражение для характеристического полинома системы (2), (6)

$$D_{\text{сис}}(p) = A_{\Omega}(p)\tilde{D}_{\text{сис}}(p)\,, \quad (14)$$

где

$$\tilde{D}_{\text{сис}}(p) = \prod_{i=1}^{q} D_i(p)\,. \quad (15)$$

Выражения (13) являются полиномиальными уравнениями относительно полиномов $R_i(p)$ и $L_i(p)$. В этих уравнениях полиномы $D_i(p)$ задаются устойчивыми в соответствии с требованиями к качеству замкнутой системы. Таким образом, в соответствии с равенством (14) характеристический полином замкнутой системы содержит в качестве множителя только устойчивые полиномы, т. е. при выполнении условия (8) теоремы система является устойчивой.

Так как по условию теоремы матрица $\mathbf{Q}(p)$ является диагональной, то в правой части уравнения (7) замкнутой системы матрица также является диагональной. Как показано выше, матрица в левой части этого уравнения является диагональной, следовательно, каналы $g_i \to y_i$ замкнутой системы являются независимыми. *Теорема доказана.*

Равенство (8), т. е. наличие множителя $A_{\Omega}^{-1}(p)$ в его правой части, является основным условием обеспечения устойчивости замкнутой системы, так как полиномы $D_i(p)$ всегда берутся устойчивыми. Это условие практически обеспечивается соответствующим выбором матриц $\mathbf{R}(p)$ и $\mathbf{L}(p)$ и применением минимальной реализации МУУ (6).

Как известно, в общем случае

$$\det \mathbf{W}_{yu}(p) = \tilde{B}_{yu}(p) / \tilde{A}(p),$$

где $\tilde{B}_{yu}(p)$ и $\tilde{A}(p)$ − полиномы с постоянными коэффициентами степеней $\tilde{m}$ и $\tilde{n} < n$, не имеющие общих множителей. В этом случае

$$A(p) = \theta_{yu}(p)\tilde{A}(p), \quad B_{yu}(p) = \theta_{yu}(p)\tilde{B}_{yu}(p).$$

Здесь $\theta_{yu}(p)$ − некоторый полином степени $n - \tilde{n}$, который является характеристическим полиномом неполной части объекта [17–19]. Тогда выражение для определителя передаточной матрицы (1) МОУ принимает вид

$$\det \mathbf{W}_{yu}(p) = \frac{\theta_{yu}(p)\tilde{B}_{yu}(p)}{\theta_{yu}(p)\tilde{A}(p)} = \frac{\tilde{B}_{yu}(p)}{\tilde{A}(p)}. \tag{16}$$

Таким образом, в общем случае передаточная матрица $\mathbf{W}_{yu}(p)$ многомерного объекта может не содержать множителя $\theta_{yu}(p)$, соответствующего неполной части МОУ [18, 19]. Поэтому если объект задан только матрицей $\mathbf{W}_{yu}(p)$, а полином $\theta_{yu}(p)$ не является гурвицевым, то в результате синтеза может быть получена неустойчивая МСАУ [20, 21].

Отметим, что в условиях теоремы передаточные функции многомерной системы управления (2), (6) по задающим воздействиям определяются следующими выражениями:

$$W_{ii}(p) = \frac{B_{yu}(p)Q_i(p)}{D_i(p)}, \quad W_{ij}(p) \equiv 0, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,q}. \tag{17}$$

Здесь полиномы $D_i(p)$ определяются выражениями (13).

МУУ (6) можно представить в виде двух блоков: декомпозирующего с матрицей $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{yu}(p)$ и формирующего, реализующего управление по выходу и воздействиям. Для этого примем, что матрица $\mathbf{R}(p)$ является произведением двух диагональных матриц, т. е. $\mathbf{R}(p) = \mathbf{R}_1(p)\mathbf{R}_2(p)$. Тогда указанные блоки в случае МУУ (6) будут описываться уравнениями

$$\mathbf{u} = \tilde{\Pi}_{yu}(p)\mathbf{R}_1^{-1}(p)\varsigma, \quad \varsigma = \mathbf{R}_2^{-1}(p)\left[\mathbf{Q}(p)\mathbf{g} - \mathbf{L}(p)\mathbf{y}\right], \tag{18}$$

где ς – вектор выходных переменных формирующего блока УУ.

С тем чтобы снизить степени знаменателей передаточных функций (17) прямых и перекрестных каналов замкнутой системы, как и в [12], проведем редукцию управления (6) путем согласования части корней характеристического полинома замкнутой системы с многомерным объектом управления. Для этого проведем факторизацию полинома $B_{yu}(p)$ относительно области Ω:

$$B_{yu}(p) = B_{\Omega}(p) B_{\overline{\Omega}}(p),$$

где $B_{\Omega}(p)$ – нормированный полином или единица, $B_{\overline{\Omega}}(p)$ – некоторый полином или константа.

В этом случае будем полагать, что полиномы $D_i(p)$ и $R_i(p)$ определяются следующим образом:

$$D_i(p) = B_{\Omega}(p)\tilde{D}_i(p), \; R_i(p) = \Phi_i(p) B_{\Omega}(p)\tilde{R}_i(p), \; i = \overline{1,q}, \tag{19}$$

где $\Phi_i(p) = p^{\nu_g}$ – полином, обеспечивающий астатизм желаемого порядка ν_g к задающему воздействию $g_i(t)$; $\tilde{D}_i(p)$, $\tilde{R}_i(p)$ – соответствующие полиномы более низкой степени. Тогда полином $\tilde{D}_i(p)$ определяется выражением

$$\tilde{D}_i(p) = A_{\overline{\Omega}}(p)\Phi_i(p)\tilde{R}_i(p) + B_{\overline{\Omega}}(p) L_i(p). \tag{20}$$

Степени полиномов $\tilde{D}_i(p)$, $\tilde{R}_i(p)$, $L_i(p)$ выбираются в соответствии с условиями разрешимости полиномиальных уравнений (20) и условиями физической реализуемости МУУ [12]. Полиномы $\tilde{D}_i(p) \in \Omega$ и $Q_{ij}(p)$ назначаются исходя из требуемых свойств прямых и перекрестных каналов синтезируемой системы. При этом целесообразно использовать стандартные передаточные функции [12], причем выбором матрицы $\mathbf{Q}(p)$ можно задать требуемую связность каналов синтезируемой МСАУ. Коэффициенты полиномов $\tilde{R}_i(p)$ и $L_i(p)$ определяются путем решения систем алгебраических уравнений, соответствующих полиномиальным уравнениям (20).

Предложенный метод синтеза МСАУ неустойчивыми объектами покажем на конкретном примере.

3. ПРИМЕР

Синтезировать многомерную систему управления многомерным объектом, который описывается передаточной матрицей

$$\mathbf{W}_{yu}(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{(p+10{,}96)(p-0{,}46)} & \dfrac{2{,}5}{(p+10{,}96)(p-0{,}46)} \\ \dfrac{0{,}28(p+12{,}50)}{(p+10)(p+0{,}5)} & \dfrac{10}{(p+10)(p+0{,}5)} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Требуется синтезировать автономную МСАУ данным объектом, имеющую длительность переходных процессов по каналам $g_i \to y_i$, $i=1,2$, не более 2,5 с; перерегулирование отсутствует. Относительный порядок МУУ $\mu^*_{\text{уу}} \ge 0$.

Так как объект задан передаточной матрицей, можно сразу найти ее определитель:

$$\det \mathbf{W}_{yu}(p) = \frac{B_{yu}(p)}{A(p)} = \frac{\beta B_0(p)}{A(p)}, \tag{22}$$

где $\beta = -0{,}7$, а полиномы $A(p) = p^4 + 21p^3 + 110{,}25p^2 - 25$, $B_0(p) = = p - 58{,}93$.

Так как заданный объект является полным, то характеристическим полиномом заданного объекта является указанный выше полином $A(p)$. Определим область Ω условием $\operatorname{Re} p \le -0{,}15$ и представим полином $A(p)$ в виде (3). Тогда $A_\Omega(p) = (p+10{,}96)(p+10)(p+0{,}5)$, $A_{\bar\Omega}(p) = p - 0{,}46$. Следовательно, заданный объект является неустойчивым.

Матрица $\mathbf{C}(p)$ из выражения (2) определяется выражением

$$\mathbf{C}(p) = \begin{bmatrix} 5p^2 + 52{,}5p + 25 & 2{,}5p^2 + 26{,}25p + 12{,}5 \\ 0{,}28p^3 + 6{,}44p^2 + 35{,}35p - 17{,}5 & 10p^2 + 105p - 50 \end{bmatrix}.$$

По (4) находим, что соответствующая декомпозирующая матрица

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}_{yu}(p) = \begin{bmatrix} 10(p+10{,}96) & -2{,}5(p+10)(p+0{,}5)/(p-0{,}46) \\ -0{,}28(p+12{,}5)(p+10{,}96) & 5(p+10)(p+0{,}5)/(p-0{,}46) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Отметим, что в данном случае, в отличие от метода [12–16], не все элементы декомпозирующей матрицы являются полиномами, а два из них являются дробно-рациональными функциями.

Проведем факторизацию полинома $B_0(p)$ относительно области Ω: $B_{\bar\Omega}(p) = \beta B_0(p) = -0{,}7p + 41{,}25$ и $B_\Omega(p) = 1$, $\deg B_{\bar\Omega}(p) = 1$, $\deg B_\Omega(p) = 0$.

Примем полиномы $\Phi_i(p) = 1$, $\deg \Phi_i(p) = 0$. Учитывая, что $\mu_{\text{об}} = 1$, в соответствии с уравнением (6) и условиями физической реализуемости МУУ примем относительную степень УУ $\mu^*_{yy} = 1$. Тогда степени полиномов равны: $\deg \tilde{D}_1(p) = 3$, $\deg \tilde{D}_2(p) = 2$, $\deg Q_{ij}(p) = 0$, $\deg \tilde{R}_1(p) = 2$, $\deg \tilde{R}_2(p) = 1$, $\deg L_i(p) = 0$. С учетом требуемых показателей качества найдем с помощью таблиц стандартных передаточных функций [12] следующие выражения для желаемых ПФ:

$$W^*_{11}(p) = \frac{\beta_{10}}{p^3 + 10p^2 + 40p + 60}, \quad W^*_{22}(p) = \frac{\beta_{20}}{p^2 + 8p + 15}, \quad W^*_{ij}(p) = 0,$$

где β_{i0} – некоторые коэффициенты. Значения коэффициентов полиномов $Q_{ij}(p)$, $\tilde{R}_i(p)$, $L_i(p)$ определяются решениями уравнений (20). Положим

$\delta_{ik} = \delta^*_{ik}$, где δ_{ik} – коэффициенты полиномов $\tilde{D}_i(p)$, δ^*_{ik} – коэффициенты знаменателей желаемых передаточных функций $W^*_{ij}(p)$. Полиномиальным уравнениям (20) в данном случае соответствуют следующие системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} b_0 & \bar{a}_{10} & 0 & 0 \\ b_1 & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{10} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{10} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{10} \\ \rho_{10} \\ \rho_{11} \\ \rho_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{13} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_0 & \bar{a}_{10} & 0 \\ b_1 & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{10} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{20} \\ \rho_{20} \\ \rho_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{20} \\ \delta_{21} \\ \delta_{22} \end{bmatrix},$$

где $\bar{a}_{i0,1}$, $b_{0,1}$ – коэффициенты полиномов соответственно $\bar{A}_i(p) = \Phi_i(p)A_{\bar{\Omega}}(p)$ и $B_{\bar{\Omega}}(p)$; λ_{i0}, λ_{21}, ρ_{i0}, ρ_{11}, ρ_{12} – коэффициенты полиномов $L_i(p)$ и $\tilde{R}_i(p)$. В результате решения этой системы уравнений получим: $\lambda_{10} = 1{,}97$, $\lambda_{20} = 0{,}46$, $\rho_{10} = 46{,}15$, $\rho_{20} = 8{,}78$, $\rho_{11} = 10{,}46$, $\rho_{12} = \rho_{21} = 1$. Так как требуется обеспечить автономность, положим $Q_{ij}(p) = 0$, $i \neq j$, а $Q_{ii}(p)B_{\bar{\Omega}}(p) = \beta_{i0}$, где $\beta_{i0} = \delta_{i0}$. Отсюда найдем коэффициенты полиномов $Q_{ii}(p)$.

Чтобы получить выражение для управления в виде (18), в соответствии с (19) запишем полиномы $R_i(p)$:

$$R_1(p) = B_\Omega(p)\tilde{R}_1(p) = \rho_{12}p^2 + \rho_{11}p + \rho_{10} = p^2 + 10{,}46p + 46{,}15,$$

$$R_2(p) = B_\Omega(p)\tilde{R}_2(p) = \rho_{21}p + \rho_{20} = p + 8{,}78.$$

С учетом полученных результатов уравнения МУУ (18) принимают вид:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{R_1(p)R_2(p)} \begin{bmatrix} 10(p+10{,}96) \\ -0{,}28(p+12{,}5)(p+10{,}96) \end{bmatrix} \varsigma_1,$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{(p-0{,}46)R_1(p)R_2(p)} \begin{bmatrix} -2{,}5(p+10)(p+0{,}5) \\ 5(p+10)(p+0{,}5) \end{bmatrix} \varsigma_2,$$

$$\varsigma = \begin{bmatrix} 1{,}45 & 0 \\ 0 & 0{,}36 \end{bmatrix} (\mathbf{g} - \mathbf{y}).$$

Переходя в этих уравнениях к отклонению $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g} - \mathbf{y}$, исключая вектор ς и выделяя в дробях целые части, получим векторно-матричное уравнение «вход–выход» искомого МУУ:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{14{,}55p + 159{,}37}{p^2 + 10{,}46p + 46{,}15} \\ -0{,}41 - \dfrac{5{,}29p + 36{,}98}{p^2 + 10{,}46p + 46{,}15} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \begin{bmatrix} -0{,}91 - \dfrac{1{,}98p + 8{,}19}{p^2 + 8{,}32p - 4{,}01} \\ 1{,}82 + \dfrac{3{,}96p + 16{,}38}{p^2 + 8{,}32p - 4{,}01} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_2. \quad (24)$$

Для записи уравнений МУУ (24) в переменных состояния воспользуемся функцией *minreal* из пакета MATLAB. В результате получим

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{z}}_1 = \begin{bmatrix} -10,46 & -5,77 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}_1 + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \dot{\mathbf{z}}_2 = \begin{bmatrix} -8,32 & 2,003 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}_2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}, \\
&\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3,64 & 4,98 & -0,49 & -1,02 \end{bmatrix}\mathbf{z}_1 + \begin{bmatrix} 0 & -0,91 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}, \\
&\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1,32 & -1,16 & 0,99 & 2,05 \end{bmatrix}\mathbf{z}_2 + \begin{bmatrix} -0,41 & 1,82 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}.
\end{aligned}\right\}, \tag{25}$$

Полученные уравнения (25) являются уравнениями в переменных состояния искомого многомерного регулятора для объекта (21). Вычисление левой части условия (8) по этим уравнениям свидетельствует, что полученный регулятор удовлетворяет этому условию.

Для оценки устойчивости синтезированной МСАУ найдем ее характеристический полином. С этой целью с помощью MATLAB запишем уравнения в переменных состояния многомерного объекта управления (21):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -10,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -10,5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3,5 & 10 \\ 0,28 & 0 \\ 5 & 2,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}. \tag{26}$$

Характеристический полином $D_{\text{сис}}(p)$ замкнутой системы управления, состоящей из объекта (26) и МУУ (24), находится по выражению [12]

$$D_{\text{сис}}(p) = \det\begin{bmatrix} p\mathbf{E} - A + \mathbf{B}\bar{\mathbf{L}}\mathbf{C} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & p\mathbf{E} - \mathbf{R} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

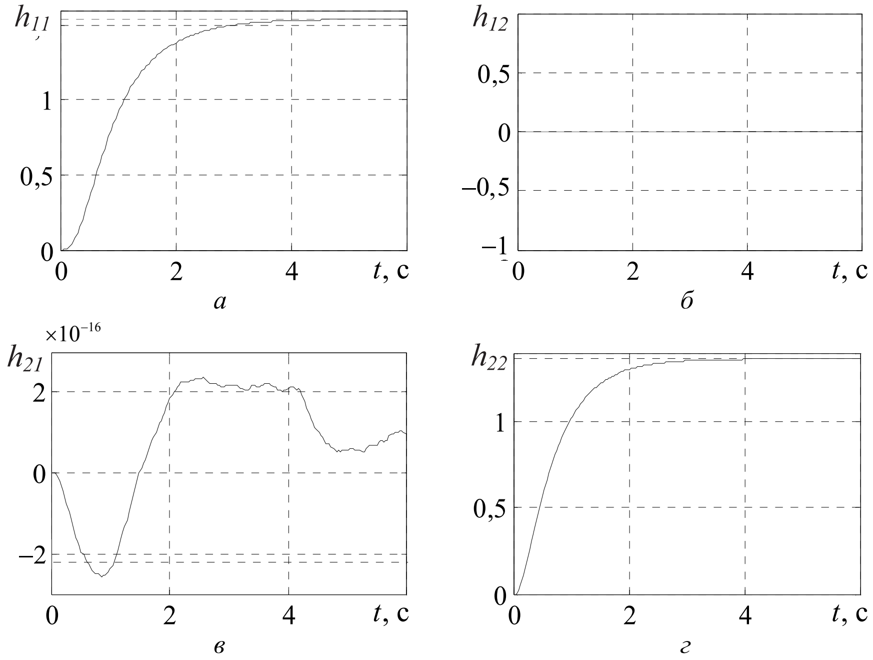
Подставляя в (27) матрицы из выражений (25) и (26), получим следующее выражение для $D_{\text{сис}}(p)$:

$$D_{\text{сис}}(p) = p^8 + 39,52p^7 + 639,75p^6 + 5531,08p^5 + 27777,48p^4 + 80879,04p^3 +$$

$$+126151,60p^2 + 92905,93p + 23452,01. \tag{28}$$

Легко убедиться, что полученный полином является гурвицевым, т. е. синтезированная предложенным методом МСАУ (21), (24) является устойчивой, несмотря на неустойчивость МОУ и отсутствие стабилизирующих обратных связей. Последнее позволяет значительно упростить структуру синтезированной МСАУ, к тому же согласование части корней характеристического полинома замкнутой системы с объектом управления позволяет снизить степени знаменателей передаточных функций отдельных каналов синтезируемой системы. При этом многомерное управление (18) придает синтезированной МСАУ свойство автономности по И.Н. Вознесенскому, что обеспечивается предложенной в данной работе декомпозирующей матрицей (4).

Графики переходных функций $h_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, каналов синтезированной замкнутой системы (26), (25), полученные путем моделирования в MATLAB, представлены на рисунке.



Переходные процессы автономной системы

Как видно, переходные функции $h_{ii}(t)$ сепаратных каналов $g_i \rightarrow y_i$ имеют показатели качества, удовлетворяющие поставленным требованиям. Переходные функции перекрестных каналов близки к нулю, т. е. условия автономности практически выполняются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, использование предложенного в работе метода позволяет синтезировать устойчивые МСАУ с согласованными полюсами для неустойчивых объектов без применения стабилизирующих обратных связей. При этом автономность каналов системы управления неустойчивым объектом обеспечивается применением предложенной декомпозирующей матрицы. Требуемая связность может обеспечиваться выбором недиагональной матрицы $\mathbf{Q}(p)$. Метод динамической декомпозиции, рассмотренный в данной работе, позволяет аналитически синтезировать эффективную, физически реализуемую многомерную систему управления с заданными показателями качества в переходном режиме. Он может применяться при создании систем управления различными техническими объектами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивановский Р.И.*, *Нестеров А.В.* Синтез многомерных систем управления. Проблема устойчивости // Гироскопия и навигация. – 2011. – № 1 (72). – С. 90–94.

2. *Ким П.Д.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

3. *Буков В.Н.*, *Максименко И.М.*, *Рябченко В.Н.* Регулирование многосвязных систем // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 6. – С. 97–110.

4. *Куцый Н.Н.*, *Лукьянов Н.Д.* Синтез системы управления многосвязным объектом с помощью генетического алгоритма на примере прямоточного котла // Научный вестник НГТУ. – 2014. – № 2 (55). – С. 36–42.

5. *Ильясов Б.Г., Саитова Г.А., Халикова Е.А.* Управление неустойчивыми объектами в составе многосвязной автоматической системы // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1/2. – С. 90–101.

6. *Ильясов Б.Г.*, *Саитова Г.А.*, *Сабитов И.И.* Применение логического регулятора для управления авиационным газотурбинным двигателем // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2015. – Т. 19, № 4 (70). – С. 132–137.

7. *Тян В.К.* Редукция процедуры синтеза многомерных линейных систем управления к синтезу одномерных с типовыми объектами // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 4. – С. 2–7.

8. *Morgan B.S.* The synthesis of linear multivariable systems by state variable feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1964. – Vol. AC-9, N 4. – P. 405–411.

9. *Chen C.-T.* Linear system theory and design. – New York: Holt, Reinhart and Winston, 1984. – 635 p.

10. *Сорокин А.В.* Стабилизация системы управления заданием ее конечных и бесконечных нулей и увеличением коэффициента обратной связи // Труды конференции МОНА-2001. – Барнаул, 2001. – С. 1–5.

11. Методы классической и современной теории автоматического управления. В 5 т. Т. 3. Синтез регуляторов систем автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 616 с.

12. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2011.

13. *Гайдук А.Р.* Об управлении многомерными объектами // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 12. – С. 22–37.

14. *Gaiduk A.R.* Synthesis of control systems of multivariable objects // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 1998. – Vol. 37, N 1. – P. 5–13.

15. *Gaiduk A.R., Vershinin Y.A., Jawaid A.* A method of synthesis of a multivariable system with decoupled and interconnected channels // Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control. – Houston, TX, 2003. – P. 548–552.

16. *Gaiduk A.R., Plaksienko E.A., Besklubova K.V.* Analytical design of multivariable control systems by dynamical decomposition method // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2014. – N 3 (4). – P. 325–332.

17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1988.

18. *Смагина Е.М.* Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы. – Томск: Изд-во ТГУ, 1990. – 160 с.

19. *Смагина Е.М.* Нули линейных многомерных систем. Определения, классификация, применение (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 12. – С. 5–33.

20. *Воевода А.А.*, *Шоба Е.В.* О разрешимости задачи автономизации многоканальной системы // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 2 (60). – С. 9–16.

21. *Колоколова К.В.* Исследование влияния изолированных полюсов на свойства управляемости и наблюдаемости многомерных объектов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2016. – № 5 (178). – С. 51–60.

Гайдук Анатолий Романович, доктор технических наук, профессор Южного федерального университета, действительный член Академии инженерных наук имени А.М. Прохорова. Основное направление научных исследований – теория систем автоматического управления, анализ и синтез. Имеет более 300 научных публикаций, в том числе 16 монографий. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Колоколова Ксения Валериевна, аспирант Южного федерального университета. Основное направление научных исследований – теория многомерных систем управления, анализ и синтез. Имеет более 20 научных публикаций. E-mail: kbesklubova@mail.ru

Synthesis of Control Systems by Unstable Multivariable Plants[*]

A.R. GAIDUK[1], *K.V. KOLOKOLOVA*[2]

[1] *Southern Federal University, 44, Nekrasovsky Lane, Taganrog, 347900, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), professor. E-mail: gaiduk_2003@mail.ru*

[2] *Southern Federal University, 44, Nekrasovsky Lane, Taganrog, 347900, Russian Federation postgraduate student. E-mail: kbesklubova@mail.ru*

The paper raises the problem of the synthesis of multivariable automatic control systems (MACS) for unstable multivariable plants. To solve this problem the MACS' synthesis method has been developed which implements coherent and autonomous (independent) control of the output variables of the plant with the desired quality characteristics. In this case including stable zeros and poles of the plant in the number of roots of the system's characteristic polynomial reduces the order of the system to be synthesized and thereby improves its performance. The solution to the synthesis problem is achieved by the method of dynamic decomposition in which only a stable part of the plant's characteristic polynomial is taken into account. The theorem giving solution to the MACS' synthesis problem by the method of dynamic decomposition is proved. In general, a multivariable plant can have an unstable incomplete (uncontrollable or unobservable) subsystem. If this plant is described by the transfer matrix, the incomplete subsystem's polynomials will be reduced and will not be taken into account when calculating the multivariable control unit. But poles of the incomplete subsystem will still be parts of roots of the characteristic polynomial of the real closed-loop system. Therefore, if these poles are unstable, unstable MSAU is implicitly obtained as a result of synthesis. So the availability of full information about the plant's characteristic polynomial and stability of its incomplete subsystem is the necessary condition of the stability of the closed-loop system. A numerical example of the MACS' synthesis by using an unstable multivariable plant is given. The example shows the main stages of the developed synthesis method, in particular, the calculation of the decomposing matrix, the construction of the desired transfer functions of the closed-loop multivariable system and the calculation of the control unit. As a result of simulation transient responses of the synthesized system are obtained which confirm stability and the desired character of transients.

Keywords: multivariable plant, instability, multivariable system, autonomy problem, dynamic decomposition, synthesis, quality of transients performance.

DOI: 10.17212/1814-1196-2017-1-26-40

REFERENCES

1. Ivanovskii R.I., Nesterov A.V. Sintez mnogomernykh sistem upravleniya. Problema ustoichivosti [Synthesis of multivariable control systems. The problem of stability]. *Giroskopiya i navigatsiya – Gyroscopy and Navigation*, 2011, no. 1 (72), pp. 90–94. (In Russian)

[*] *Received 04 October 2016.*
The paper is supported by the grant of RFBR № 16-58-00226 Bel.

2. Kim P.D. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya*. T. 2. *Mnogomernye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [Automatic control theory. Vol. 2. Multivariable, nonlinear, optimal and adaprtive systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.

3. Bukov V.N., Maksimenko I.M., Ryabchenko V.N. Regulirovanie mnogosvyaznykh sistem [Multidimentional systems control]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1998, no. 6, pp. 97–110. (In Russian)

4. Kutsyi N.N., Lukyanov N.D. Sintez sistemy upravleniya mnogosvyaznym ob"ektom s pomoshch'yu geneticheskogo algoritma na primere pryamotochnogo kotla [Control system synthesis by a multivariable object using the genetic algorithm (on the example of the once-through boiler)]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 2 (55), pp. 36–42.

5. Ilyasov B.G., Saitova G.A., Khalikova E.A. Upravlenie neustoichivymi ob"ektami v sostave mnogosvyaznoi avtomaticheskoi sistemy [Control of unstable plants as part of a multivariable automatic system]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya – Modern problems of science and education*, 2015, no. 1–2, pp. 90–101.

6. Il'yasov B.G., Saitova G.A., Sabitov I.I. Primenenie logicheskogo regulyatora dlya upravleniya aviatsionnym gazoturbinnym dvigatelem [Application of the logic controller for aviation gas turbine engines' control]. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik UGATU*, 2015, vol. 19, no. 4 (70), pp. 132–137.

7. Tyan V.K. Reduktsiya protsedury sinteza mnogomernykh lineinykh sistem upravleniya k sintezu odnomernykh s tipovymi ob"ektami [Reduction of synthesis process of manydimensional linear control systems to synthesis of onedemensional linear control systems with standart]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie – Mechatronics, Automation, Control*, 2008, no. 4, pp. 2–7.

8. Morgan B.S. The synthesis of linear multivariable systems by state variable feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1964, vol. AC-9, no. 4, pp. 405–411.

9. Chen C.-T. *Linear system theory and design*. New York, Holt, Reinhart and Winston, 1984. 635 p.

10. Sorokin A.V. [Stabilization of the control system by specifying its finite and infinite zeros and increasing the feedback factor]. *Trudy konferentsii MONA-2001* [Proceedings of MONA-2001]. Barnaul, 2001, pp. 1–5. (In Russian)

11. Pupkov K.A., Egupov N.D., eds. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravleniya*. T. 3. *Sintez regulyatorov sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Methods of classical and modern control theory. In 5 vol. Vol. 3. Synthesis of regulators of automatic control systems]. 2nd ed. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004. 616 p.

12. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [The theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011.

13. Gaiduk A.R. Ob upravlenii mnogomernymi ob"ektami [On multivariable plants' control]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1998, no. 12, pp. 22–37. (In Russian)

14. Gaiduk A.R. Synthesis of control systems of multivariable objects. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1998, vol. 37, no. 1, pp. 5–13.

15. Gaiduk A.R., Vershinin Y.A., Jawaid A. A method of synthesis of a multivariable system with decoupled and interconnected channels. *Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Houston, TX, 2003, pp. 548–552.

16. Gaiduk A.R., Plaksienko E.A., Besklubova K.V. Analytical design of multivariable control systems by dynamical decomposition method. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, no. 3 (4), pp. 325–332.

17. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Theory of matrices]. 4th ed. Moscow, Nauka Publ., 1988.

18. Smagina E.M. *Voprosy analiza lineinykh mnogomernykh ob"ektov s ispol'zovaniem ponyatiya nulya sistemy* [Problems of linear multivariate objects analysis using the concept of system's zero]. Tomsk, TSU Publ., 1990. 160 p.

19. Smagina E.M. Nuli lineinykh mnogomernykh sistem. Opredeleniya, klassifikatsiya, primenenie (obzor) [Zeros of linear multivariable systems. Definitions, classification, application (review)]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1985, no. 1, pp. 5–33. (In Russian)

20. Voevoda A.A., Shoba E.V. O razreshimosti zadachi avtonomizatsii mnogokanal'noi sistemy [About diagonally decoupling for multi-input multi-output systems]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 2 (60), pp. 9–16.

21. Kolokolova K.V. Issledovanie vliyaniya izolirovannykh polyusov na svoistva upravlyaemosti i nablyudaemosti mnogomernykh ob"ektov [Research of the influence of isolated poles on the-controllability and observability of multivariable plants]. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Southem Federal University. Engineering sciences*, 2016, no. 5 (178), pp. 51–60.