

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

AUTOMATIC CONTROL  
AND IDENTIFICATION

УДК 681: 513

## **О структурных преобразованиях многоканальных линейных систем в матричном полиномиальном представлении\***

**К.М. БОБОБЕКОВ**

630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. Email: [kurbon\\_111@mail.ru](mailto:kurbon_111@mail.ru)

При анализе и синтезе линейных систем автоматического управления активно используют формулы сворачивания для типового соединения звеньев и эквивалентные преобразования структурных систем – перенос узла ветвления и сумматора через звено. В многоканальных системах также используют формулы сворачивания для типовых соединений звеньев – последовательное соединение, параллельное соединение и соединение типа обратной связи. Но в отличие от одноканальных систем здесь возникают дополнительные сложности, связанные с размерностью векторов задающего воздействия, выходного сигнала и сигнала управления. В отличие от одноканальных систем обращение передаточной функции не всегда возможно. Кроме того, отдельно необходимо рассматривать случаи матричного и полиномиального матричного представления передаточных функций. В многоканальных системах имеется возможность эквивалентного преобразования как матричной передаточной функции, так и матричного полиномиального представления. Примером таких преобразований может быть использование унимодальных матриц. В данной работе предлагаются такие преобразования, которые дают новые возможности при решении задач анализа, синтеза и моделирования многоканальных систем. Применение введенных эквивалентных структурных преобразований проиллюстрировано на примерах.

**Ключевые слова:** многоканальные линейные системы автоматического управления, эквивалентные преобразования, матричное полиномиальное разложение, унимодальная матрица, реализация структурной схемы

DOI: 10.17212/1814-1196-2017-2-7-25

## **ВВЕДЕНИЕ**

При анализе и синтезе линейных систем автоматического управления активно используются эквивалентные преобразования структурных систем. В данной работе обобщаются структурные преобразования одноканальных систем в многоканальные.

---

\* Статья получена 22 декабря 2016.

В **одноканальных** системах, в отличие от многоканальных, где при последовательном соединении звеньев, параллельном соединении звеньев и соединении типа обратной связи (*типовое соединение*), можно не обращать внимание на очередность передаточных функций. В формулах, например, справедливо

$$w_1(s)w_2(s) = w_2(s)w_1(s), \quad w_1(s)(1 + w_1(s)w_2(s))^{-1} = (1 + w_2(s)w_1(s))^{-1}w_1(s),$$

где  $w_1(s)$  и  $w_2(s)$  – передаточные функции с одним входом и одним выходом, в многоканальных системах это не так. *Эквивалентные преобразования* одноканальных систем (перенос узла ветвления и перенос сумматора) легко переносятся на многоканальные системы. Кроме того, можно ввести эквивалентные преобразования в многоканальных системах, которые в одноканальных системах вырождаются в «тавтологию».

Для **многоканальных** систем соединение типа обратной связи может быть записано несколькими способами [1–4]. Запишем передаточную функцию замкнутой системы, состоящей, например, из объекта  $W_2(s)$  и регулятора  $W_1(s)$ , охваченных отрицательной обратной связью:

$$\left\{ \begin{aligned} W_{\text{зам}} &= (I + W_2(s)W_1(s))^{-1}W_2(s)W_1(s) = (I + W_2(s)W_1(s))^{-1}W_2(s)W_1(s) = \\ &= \left( (W_2(s)W_1(s))^{-1}(I + W_2(s)W_1(s)) \right)^{-1} = \left( (W_2(s)W_1(s) + I)(W_2(s)W_1(s))^{-1} \right)^{-1} = (1) \\ &= W_2(s)W_1(s)(I + W_2(s)W_1(s))^{-1}. \end{aligned} \right.$$

При эквивалентных преобразованиях следует не забывать, что деление  $1/w(s)$  в одноканальных системах заменяется в многоканальных системах на  $W^{-1}(s)$ , где  $W(s)$  – передаточная функция многоканальной системы.

В случае использования матричного полиномиального описания

$$W(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s), \quad (2)$$

где  $N_r(s)$  и  $D_r(s)$  – «числитель» и «знаменатель» матричной передаточной функции при правом матричном полиномиальном представлении;  $N_l(s)$  и  $D_l(s)$  – при левом представлении; эквивалентные формулы и структурные преобразования усложняются.

Ниже приводятся соотношения и структуры, формализующие и обобщающие структурные преобразование многоканальных линейных систем автоматического управления. Использование новых структурных преобразований продемонстрировано на решении задачи формализованного структурного моделирования многоканальных линейных систем в матричном полиномиальном виде. При формальном подходе к решению последней задачи может быть получено нереализуемое решение. Последняя проблема иногда может быть устранена предварительными структурными преобразованиями.

## 1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим подробнее структурные преобразования для многоканальных систем для случая полиномиального представления. Структурные схемы, соответствующие разложениям (2), представлены на рис. 1, где  $u$ ,  $y$  – вход и выход системы.

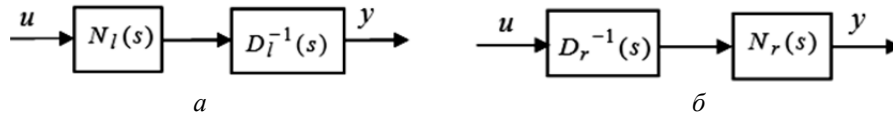


Рис. 1. Левое (а) и правое (б) матричные полиномиальные разложения

Для типового соединения звеньев следует проявлять внимательность при переходе к эквивалентным схемам. Например, для последовательного соединения звеньев  $W_1(s) = N_{1r}(s)D_{1r}^{-1}(s)$  и  $W_2(s) = N_{2r}(s)D_{2r}^{-1}(s)$  в структурной схеме «числители» и «знаменатели» идут в следующем порядке:

$$D_{1r}^{-1}(s) \rightarrow N_{1r}(s) \rightarrow D_{2r}^{-1}(s) \rightarrow N_{2r}(s),$$

а передаточная функция

$$W(s) = N_{2r}(s)D_{2r}^{-1}(s)N_{1r}(s)D_{1r}^{-1}(s).$$

При перемещении звена  $W(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s)$  через узел ветвления появляется звено  $W^{-1}(s) = D_r(s)N_r^{-1}(s)$ , реализация которого может быть затруднительна при  $\det N_r^{-1}(s) = 0$ . Аналогичная проблема возникает при перемещении звена через сумматор.

В случае соединения типа обратной связи, например, если «регулятор – объект» охвачены отрицательной обратной связью, передаточная функция может быть записана в нескольких вариантах [2, 3]:

$$\begin{aligned} W_{\text{зам}} &= \left( X^{-1}(s)Y(s)D(s)N^{-1}(s) + I \right)^{-1} = \\ &= \left( X^{-1}(s)(Y(s)D(s) + X(s)N(s))N^{-1}(s) \right)^{-1} = \\ &= N(s)(Y(s)D(s) + X(s)N(s))^{-1}X(s), \end{aligned}$$

что подтверждает многообразие эквивалентных преобразований многоканальных систем. Здесь  $\{X(s), Y(s)\}$  – левое полиномиальное представление регулятора;  $\{N(s), D(s)\}$  – правое полиномиальное представление объекта.

К преобразованиям многоканальных систем в первую очередь можно отнести преобразования, эквивалентные преобразования одноканальных систем. Кроме того, можно добавить преобразования, сводящиеся к введению единичной матрицы между полиномиальными матрицами. Далее, единичная матрица заменяется произведением унимодальной матрицы на ее обратную. Суть структурных преобразований в данном случае сводится к объединению

полиномиальных матриц исходной системы с введенными новыми матрицами. Взаимная однозначность будет обеспечена, если вводить унимодальные матрицы, т. е. полиномиальные матрицы  $Q(s)$  такие, что  $\det Q(s) \in \mathbb{R}$  – вещественное число.

Использование эквивалентных преобразований продемонстрируем на конкретной задаче – задаче матричного моделирования многоканальной системы, аналогичного моделированию одноканальной системы. Дадим пояснение на примере. Пусть дано колебательное звено

$$(d_2 s^2 + d_1 s + d_0) y = k u.$$

Для моделирования перепишем его в виде

$$y = (d_2 s)^{-1} (-d_1 y + s^{-1} (-d_0 y + k u)),$$

а далее составляется схема моделирования, включающая два интегратора, четыре коэффициента усиления и два сумматора.

Точно так же можно моделировать и многоканальные системы:

$$y = D_2^{-1} s^{-1} (-D_1 y + s^{-1} (-D_0 y + K u)), \quad (3)$$

где  $D_0, D_1, D_2, K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbb{R}^{m \times m}$  – вещественные матрицы размером  $m \times m$ ,  $m$  – число входов и выходов системы. Эта система включает два векторных интегратора, четыре матричных коэффициента усиления и два векторных сумматора. По количеству элементов скалярная и матричная системы совпадают. При реализации системы (3) могут возникнуть проблемы: например, при  $\det D_2(s) = 0$  эта схема не реализуемая. Предлагается осуществить эквивалентные структурные преобразования с целью устранения вырождения матрицы  $D_2(s)$ .

Покажем применение предлагаемого эквивалентного преобразования на примерах.

## 2. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УНИМОДАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Пусть дан объект в виде левого полиномиального разложения [1]:

$$D_I(s) y(s) = N_I(s) u(s). \quad (4)$$

Для упрощения рассмотрим двухканальную систему

$$\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ s^2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Перейдем от матричного описания (5) к *скалярному* [5]:

$$\begin{cases} (s+1)y_1 + y_2 = u_1, \\ s^2 y_1 + 2y_2 = u_2. \end{cases} \quad (6)$$

Найдем  $y_1$  из первого уравнения (6) и  $y_2$  из второго уравнения (6):

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{s}(-2y_2 + u_2), \\ y_2 = -y_1 s - y_1 + u_1. \end{cases} \quad (7)$$

Приведем структурную схему уравнений (7) для пакета Matlab [6] (рис. 2).

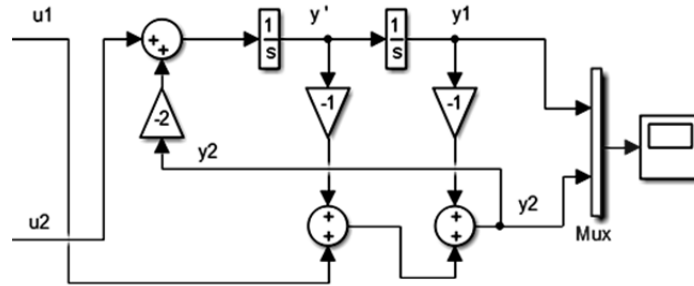


Рис. 2. Структурная схема системы (1)

Для удобства будем называть такие структурные схемы скалярными. «Вертикальная черта» в правой части рис. 2 обозначает мультиплексор (Mux), формирующий вектор  $y = (y_1 \ y_2)^T$ .

Попытаемся реализовать эту систему в *матричном виде*. Уравнение (5) в виде матричного полинома запишется так:

$$(D_2 s^2 + D_1 s + D_0)y = N_0 u,$$

где

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор  $y$  аналогично скалярному случаю:

$$y = D_2^{-1} s^{-1} (-D_1 y + s^{-1} (-D_0 y + N_0 u)). \quad (8)$$

Структурная схема дана на рис. 3.

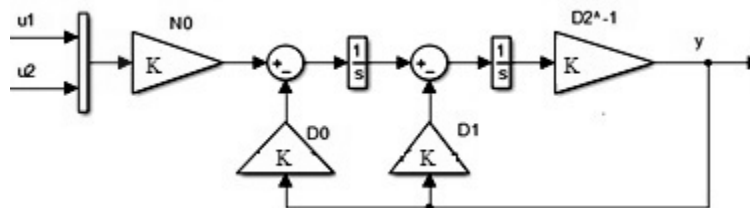


Рис. 3. Структурная схема системы (8)

Эта схема компактная, но не работоспособна, так как  $\det D_2 = 0$ . Произведем эквивалентное преобразование, а именно: в структурной схеме (рис. 1, а) между блоками  $N_I(s)$  и  $D_I^{-1}(s)$  вставим единичную матрицу  $I = L^{-1}(s)L(s)$  (рис. 4а), которая эквивалентна рис. 4, б. Для сохранения эквивалентности матрицу  $L(s)$  нужно выбирать унимодальной, т. е.  $\det L(s) \in \mathfrak{R}$ .

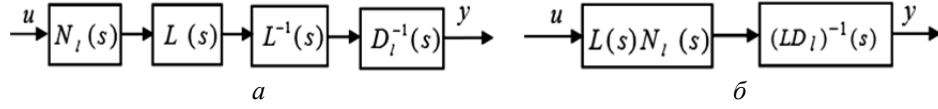


Рис. 4. Структурная схема после введения блока  $I = L^{-1}(s)L(s)$  (а); свернутая структурная схема (б)

Данное структурное преобразование соответствует умножению левой части выражения (4) на  $L(s)$ :

$$L(s)D_I(s)y(s) = L(s)N_I(s)u(s).$$

Остается подобрать такую унимодальную матрицу  $L(s)$ , чтобы у матричного полинома  $L(s)D_I(s)$  детерминант старшего матричного «коэффициента» был не вырожден. Но умножение матрицы слева на унимодальную матрицу равносильно преобразованию строк, а именно: перестановке строк, умножению одной строки на полином и сложению с другой строкой. Из уравнения (5) очевидно, что следует первую строку матрицы умножить на « $-s$ » и прибавить к второй строке:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ s^2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -s & -s+2 \end{pmatrix}}_{\hat{D}_I(s)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{N}_I(s)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Уравнение (9) можно писать в следующем виде:

$$\hat{D}_I(s)y(s) = \hat{N}_I(s)u(s) \quad (10)$$

Для проверки справедливости данного преобразования промоделируем эту систему в скалярном виде: развернем предыдущее уравнение

$$\begin{cases} (s+1)y_1 + y_2 = u_1, \\ -sy_1 + (-s+2)y_2 = -u_1s + u_2 \end{cases} \quad (11)$$

и выразим  $y_1$  и  $y_2$  из первого и второго уравнений (11):

$$y_1 = \frac{1}{s}(-y_1 - y_2 + u_1), \quad (12a)$$

$$y_2 = u_1 - y_1 + \frac{1}{s}(2y_2 - u_2). \quad (12б)$$

Соответствующая (скалярная) структурная схема приведена на рис. 5.

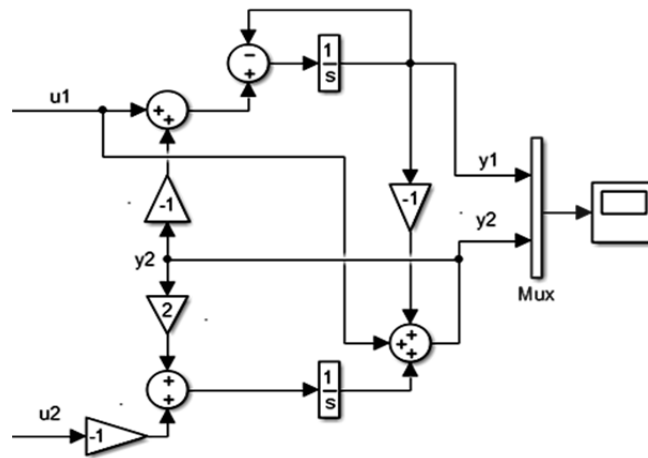


Рис. 5. Структурная схема системы (11)

Переходные процессы систем рис. 2 и 5 совпадают.

Матричная структурная схема также может быть получена из уравнения (10). Выполним простейшие преобразования:

$$\hat{D}_l(s) = (\hat{D}_1 s + \hat{D}_0), \quad \hat{N}_l(s) = (\hat{N}_1 s + \hat{N}_0).$$

Найдем вектор  $y$  из уравнения (10):

$$y = \hat{D}_l^{-1}(s) \hat{N}_l(s) u(s), \quad (13)$$

где

$$\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В структурной схеме рис. 6, которая получена аналогично структурной схеме рис. 3, использованы один векторный интегратор и четыре матричных коэффициента.

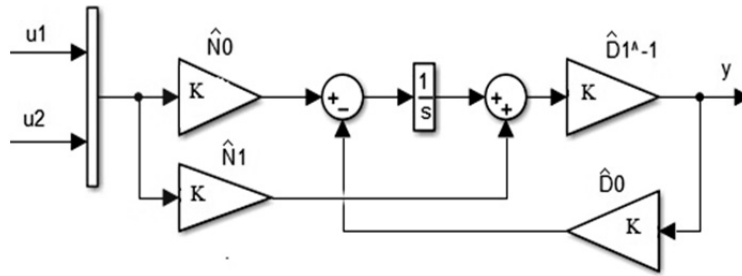


Рис. 6. Структурная схема в матричном виде после преобразований

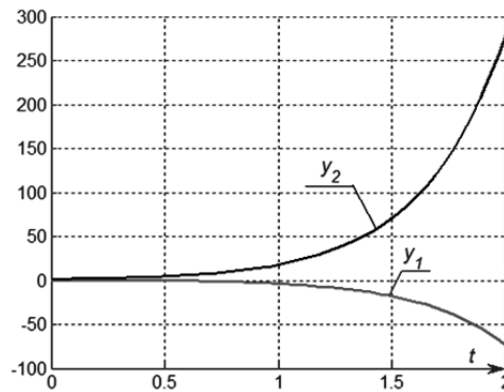


Рис. 7. Переходные процессы системы, представленной на рис. 2, 5 и 6

В данной структурной схеме все матрицы не вырождены. Переходные процессы при  $u = (1, -1)^t$  для структур рис. 2, 5, 6 совпадают и приведены на рис. 7, что подтверждает эквивалентность структурных преобразований.

### 3. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ЦЕЛЬЮ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ОБЪЕКТА В МАТРИЧНОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ВИДЕ

Рассмотрим модель трехмассовой системы в линейном приближении [4, 7–9]:

$$\begin{pmatrix} s^2 + 4 & -2 \\ -2s^2 - 8 & s^4 + 10s^2 + 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

что соответствует левому полиномиальному матричному описанию многоканального объекта (4). Уравнение (14) может быть записано в виде матричного полинома четвертой степени:

$$(D_4 s^4 + D_2 s^2 + D_0) y = (N_2 s^2 + N_0) u,$$



где

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для моделирования предыдущее уравнение преобразуем:

$$y = D_4^{-1} s^{-2} \left( -D_2 y + N_2 u + s^{-2} (-D_0 y + N_0 u) \right).$$

Тогда структурная схема модели может быть изображена в виде цепочки векторных интеграторов и матричных коэффициентов (рис. 8).

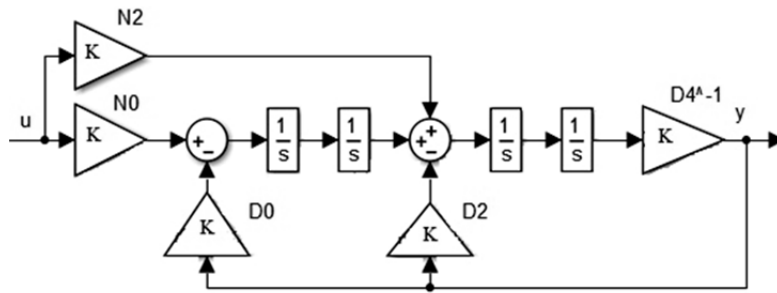


Рис. 8. Структурная схема системы (14) в матричном виде

Модель системы на рис. 8 неработоспособна ввиду вырожденности матрицы  $D_4$ , т. е. в полиномиальном матричном виде система нереализуема. Перейдем к скалярному моделированию.

Реализуем модель (14) в скалярном виде:

$$\begin{cases} s^2 y_1 + 4y_1 - 2y_2 = u_1, \\ -2s^2 y_1 - 8y_1 + s^4 y_2 + 10s^2 y_2 + 8y_2 = s^2 u_2 + 4u_2. \end{cases} \quad (15)$$

Из уравнений (15) найдем  $y_1$  и  $y_2$ :

$$\begin{cases} y_1 = s^{-2} (-4y_1 + 2y_2 + u_1), \\ y_2 = s^{-2} (2y_1 - 10y_2 + u_2 + s^{-2} (8y_1 - 8y_2 + 4u_2)). \end{cases}$$

Структурная схема системы, приведенная на рис. 9, включает шесть интеграторов, семь усилителей и три сумматора.

Преобразуем уравнения (14) с целью исключения вырожденной матрицы  $D_4$ . Для этого между матрицами  $N_I(s)$  и  $D_I^{-1}(s)$  (рис. 1, а) вставим две матрицы  $L_1^{-1}(s)L_1(s) (= I)$ , где  $L_1(s)$  – унимодальная матрица:

$$L_1(s)D_I(s)y(s) = L_1(s)N_I(s)u(s).$$

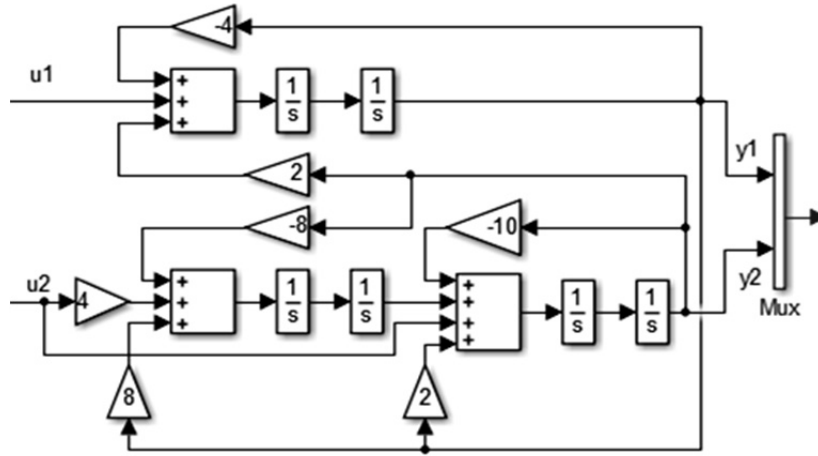


Рис. 9. Структурная схема системы (15) в скалярном виде

Соответствующая структурная схема показана на рис. 4, а и в свернутом виде – на рис. 4, б, где  $L(s)$  заменено на  $L_1(s)$ . После умножения левой части уравнения (14) на  $L_1(s)$  получим

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 + 4 & -2 \\ -2s^2 - 8 & s^4 + 10s^2 + 8 \end{pmatrix}}_{L_1 D_l} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{L_1 N_l} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрица  $L_1(s)$  соответствует сложению первой строки матрицы  $D_l(s)$ , умноженной на «-2», со второй строкой  $D_l(s)$ . В результате элемент «вторая строка – первый столбец» матрицы  $L_1(s)D_l(s)$  стал равным нулю:

$$\begin{pmatrix} s^2 + 4 & -2 \\ 0 & s^4 + 10s^2 + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & s^2 + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

С целью дальнейшего преобразования матрицы  $L_1(s)D_l(s)$  левую часть уравнения (17) преобразуем, вставим матрицу  $R_1(s)R_1^{-1}(s)$ :

$$L_1(s)D_l(s)R_1(s)R_1^{-1}(s)y(s) = L_1(s)N_l(s)u(s).$$

Умножение матрицы  $L_1(s)D_l(s)$  справа на  $R_1(s)$  соответствует сложению первого столбца, умноженного на  $s$ , со вторым. Подставим матрицы

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s^2 + 4 & -2 \\ 0 & s^4 + 10s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{L_1 D_l} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\bar{y}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{L_1 N_l} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

и выполним умножение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s^2 + 4 & s^3 + 4s - 2 \\ 0 & s^4 + 10s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{L_1 D_1 R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\bar{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{L_1 N_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Уравнение (18) запишем кратко:

$$L_1(s) D_l(s) R_1(s) \bar{y}(s) = L_1(s) N_l(s) u(s). \quad (19)$$

Уравнение (19) представим в блочном виде (рис. 10). При этом вспомним, что

$$y = R_1(s) \bar{y}.$$

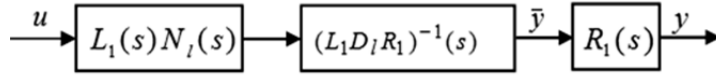


Рис. 10. Структурная схема после введения матриц  $L_1(s)$  и  $R_1(s)$  в уравнение (14)

И, наконец, если умножим на « $-s$ » первую строку левой матрицы уравнения (19) и прибавим ко второй, избавимся от  $s^4$ . Это соответствует умножению левой части уравнения (19) на матрицу  $L_2(s)$ :

$$L_2(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}.$$

Для сохранения эквивалентности необходимо уравнение (19) умножить слева на  $L_2(s)$ :

$$\underbrace{L_2(s) L_1(s)}_{L(s)} D_l(s) R_1(s) \bar{y}(s) = \underbrace{L_2(s) L_1(s)}_{L(s)} N_l(s) u(s),$$

или

$$\underbrace{L(s) D_l(s) R_1(s)}_{\bar{D}_l(s)} \bar{y}(s) = \underbrace{L(s) N_l(s)}_{\bar{N}_l(s)} u(s),$$

где  $L(s) = L_2(s) L_1(s)$ . Подставим матрицу  $L_2(s)$  в уравнение (18):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} s^2 + 4 & s^3 + 4s - 2 \\ 0 & s^4 + 10s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{L_1 D_1 R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\bar{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{L_1 N_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

и выполним умножение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s^2 + 4 & s^3 + 4s - 2 \\ -s^3 - 4s & 6s^2 + 2s + 4 \end{pmatrix}}_{\bar{D}_l(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\bar{y}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s + 2 & s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{\bar{N}_l(s)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Соответствующие преобразования  $L_1(s)$ ,  $L_2(s)$  и  $R_1(s)$  можно отобразить в виде структурных схем рис. 11 и 12.

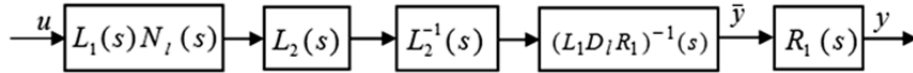


Рис. 11. Структурная схема после эквивалентных преобразований  $L_1(s) \rightarrow R_1(s) \rightarrow L_2(s)$

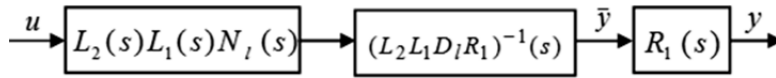


Рис. 12. Структурная схема рис. 11 в свернутом виде

Перепишем уравнение (21) с учетом введенных обозначений:

$$\bar{D}_l(s) \bar{y}(s) = \bar{N}_l(s) u(s), \quad (22)$$

которое представим в структурном виде на рис. 13 с учетом связи между  $u$  и  $\bar{y}$ .

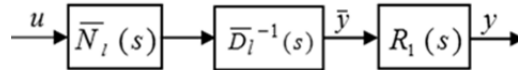


Рис. 13. Эквивалентная структурная схема

Перейдем к реализации структурной схемы объекта в матричном виде.

**3.1. Матричная структурная схема объекта.** Перепишем уравнение (21) в виде матричного полинома:

$$(\bar{D}_3 s^3 + \bar{D}_2 s^2 + \bar{D}_1 s + \bar{D}_0) \bar{y}(s) = (\bar{N}_2 s^2 + \bar{N}_1 s + \bar{N}_0) u(s), \quad (23)$$

где

$$\bar{D}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{D}_0 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{N}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (23) найдем  $\bar{y}$  :

$$\bar{y}(s) = \bar{D}_3^{-1} s^{-1} \left( -\bar{D}_2 \bar{y}(s) + \bar{N}_2 u(s) + s^{-1} \left( -\bar{D}_1 \bar{y}(s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{N}_1 u(s) + s^{-1} \left( -\bar{D}_0 \bar{y}(s) + \bar{N}_0 u(s) \right) \right) \right), \quad (24)$$

которое соответствует структурной схеме, приведенной на рис. 14, без выделенной части (выделено штриховой линией). Выделенная часть реализует  $y = R_1(s) \bar{y}$ . Вспомним матрицу  $R_1(s)$  и выполним несколько простейших преобразований:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 + s\bar{y}_2 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \bar{y}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{y} + \begin{pmatrix} s\bar{y}_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

В нашем случае  $s\bar{y} = (s\bar{y}_1 \quad s\bar{y}_2)^t$ , из которого надо получить  $(s\bar{y}_2 \quad 0)^t$ . Для этого сигнал  $s\bar{y}$  «пропустим» через матрицу  $Q$  такую, чтобы получить  $(s\bar{y}_2 \quad 0)^t$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\bar{y}_1 \\ s\bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\bar{y}_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Для того чтобы «исключить» дифференцирование перед матрицей  $Q$ , добавим матрицу  $\bar{D}_3^{-1}$ . В результате получим структуру, выделенную штриховой линией на рис. 14. То, что структура, выделенная штриховой линией, реализует  $y$ , легко проверяется.

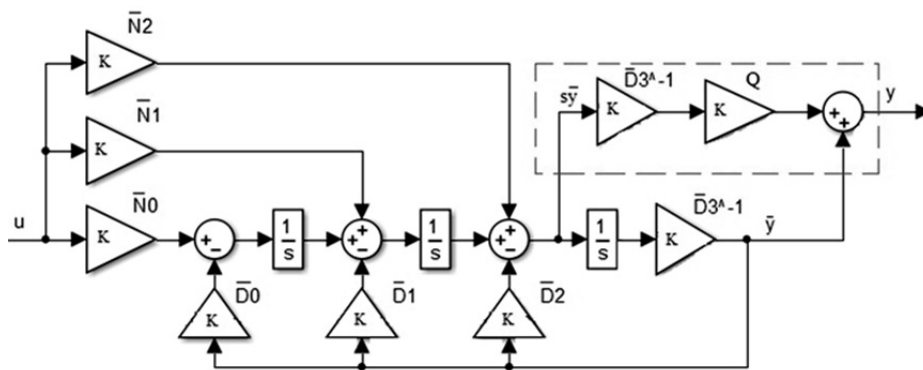


Рис. 14. Модель объекта (14) в матричном виде после эквивалентных преобразований

Очевидно, что структурная схема на рис. 14 реализуемая, что следует из не вырожденности  $\bar{D}_3$  ( $\det(\bar{D}_3) \neq 0$ , откуда  $\bar{D}_3^{-1} \neq 0$ ). Переходный процесс

для  $u = (1\ 0)^t$  приведен на рис. 15, который совпадает с переходным процессом исходного объекта (14), что подтверждает справедливость вышеприведенных преобразований (14)–(26).

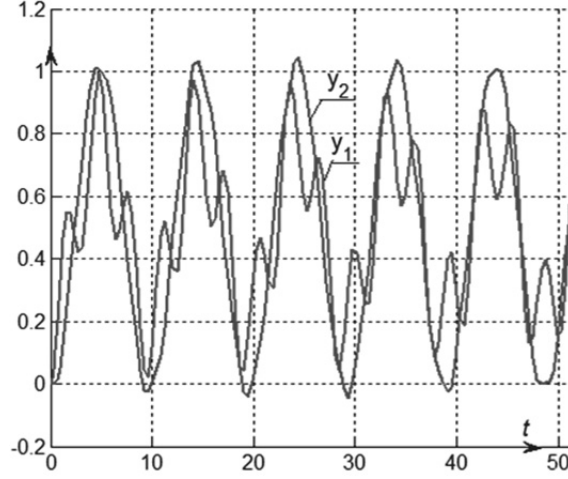


Рис. 15. Переходные процессы системы (14) и системы на рис. 14 для  $u = (1\ 0)^t$

Для сравнения исходной структуры (14) и преобразованной структуры, приведенной на рис. 14, рассмотрим объект в скалярном виде.

**3.2. Скалярная структурная схема объекта.** Перепишем матричное полиномиальное уравнение (21)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s^2 + 4 & s^3 + 4s - 2 \\ -s^3 - 4s & 6s^2 + 2s + 4 \end{pmatrix}}_{\bar{D}_I(s)} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s + 2 & s^2 + 4 \end{pmatrix}}_{\bar{N}_I(s)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

и в скалярном виде:

$$\begin{cases} \bar{y}_1 s^2 + 4\bar{y}_1 + \bar{y}_2 s^3 + 4\bar{y}_2 s - 2\bar{y}_2 = u_1, \\ -\bar{y}_1 s^3 - 4\bar{y}_1 s + 6\bar{y}_2 s^2 + 2\bar{y}_2 s + 4\bar{y}_2 = -s u_1 + 2u_1 + u_2 s^2 + 4u_2. \end{cases} \quad (28)$$

Из уравнений (28) найдем  $y_1$  и  $y_2$ :

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \frac{1}{s} \left( 6\bar{y}_2 - u_2 + \frac{1}{s} \left( -4\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 + u_1 + \frac{1}{s} (4\bar{y}_2 - 2u_1 - 2u_1 - 4u_2) \right) \right), \\ \bar{y}_2 = \frac{1}{s} \left( -\bar{y}_1 + \frac{1}{s} \left( -4\bar{y}_2 + \frac{1}{s} (4\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 + u_1) \right) \right), \end{cases}$$

где векторы  $y$  и  $\bar{y}$  связаны следующим образом (25):

$$\begin{cases} y_1 = \bar{y}_1 + sy_2, \\ y_2 = \bar{y}_2. \end{cases}$$

Приведем реализацию структурной схемы объекта в скалярном виде (рис. 16).

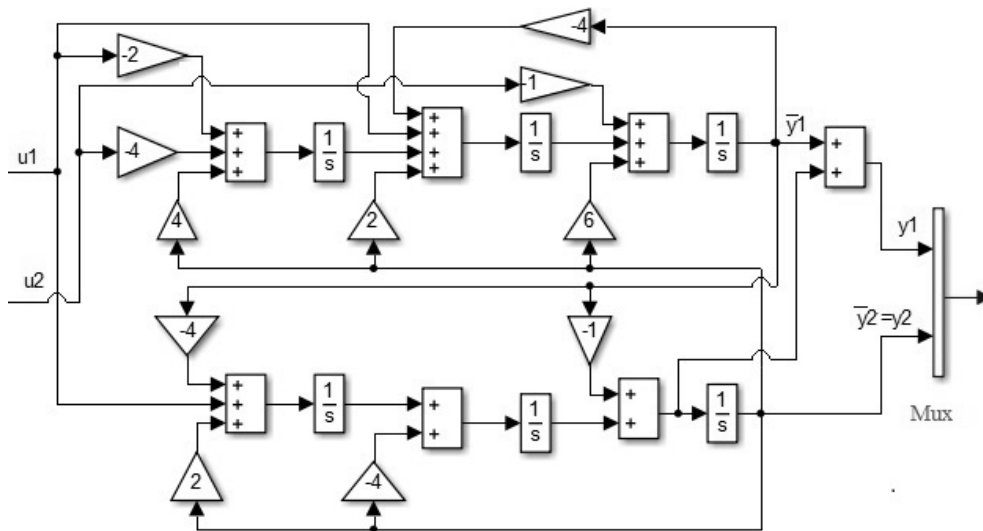


Рис. 16. Структурная схема объекта в скалярном виде после эквивалентных преобразований

Переходные процессы в последней системе совпадают с переходными процессами, приведенными на рис. 14, что подтверждает эквивалентность используемых преобразований. Из сравнения рис. 14 и 16 следует, что скалярное представление объекта громоздкое по сравнению с матричным представлением, поэтому удобнее использовать матричное полиномиальное представление.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщены структурные преобразования одноканальных линейных систем на многоканальные линейные системы автоматического управления при представлении матричной передаточной функции в виде левого или правого полиномиального представления. Приведены формулы сворачивания для типовых соединений звеньев – последовательного соединения, параллельного соединения и соединения типа обратной связи. В данной работе предлагаются преобразования, соответствующие введению унимодальных матриц, которые дают новые возможности при решении задач анализа, синтеза и моделирования многоканальных систем. Унимодальные преобразования полиномиального разложения многоканальных систем соответствуют некоторым структурным преобразованиям, которые могут быть использованы при ана-

лизе синтеза линейных многоканальных систем, по аналогии с использованием типовых структурных преобразований одноканальных линейных систем. Применение введенных эквивалентных структурных преобразований показано на примерах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воевода А.А. Матричные передаточные функции. (Основные понятия): конспект лекций по курсу «Проектирование систем управления» для 4–5 курсов АВТФ (спец. 2101). – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. – 94 с.
2. Воевода А.А., Вороной В.В. Модальный синтез регуляторов пониженного порядка методом дифференцирования характеристического полинома // Сборник научных трудов НГТУ. – 2011. – № 1 (63). – С. 3–12.
3. Воевода А.А. Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 1 (38). – С. 195–198.
4. Шоба Е.В. Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Новосибирск, 2013. – 192 с.
5. Бобобеков К.М., Воевода А.А. Расчет параметров регулятора для стабилизации перевернутого маятника по углу отклонения // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 18–32.
6. Бобобеков К.М. Бобобеков К.М. Об особенностях реализации двухпараметрического регулятора стабилизации положения маятника в среде Matlab // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 3 (85). – С. 115–130.
7. Воевода А.А., Шоба Е.В. О разрешимости задачи автономизации многоканальной системы. Ч. 1 // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 2 (60). – С. 16–25.
8. Воевода А.А., Чехонадских А.В., Шоба Е.В. Модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения: разделение движений при стабилизации трехмассовой системы // Научный вестник НГТУ. – 2011. – № 2 (43). – С. 39–46.
9. Воевода А.А., Чехонадских А.В. Моделирование стабилизирующего управления на примере тройного математического маятника // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 38–48.
10. Бобобеков К.М. О нормировании полиномов знаменателей объекта и регулятора при полиномиальном методе синтеза // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 4 (86). – С. 7–24.
11. Бобобеков К.М., Воевода А.А. Полиномиальный метод синтеза ПИ(Д)-регулятора для неминимально фазового объекта // Сборник научных трудов НГТУ. – 2015. – № 4 (82). – С. 7–20.
12. Воевода А.А., Шоба Е.В. О модели перевернутого маятника // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 1 (67). – С. 3–14.
13. Воевода А.А., Бобобеков К.М. Активная идентификация параметров модели перевернутого маятника по углу при подаче на вход синусоидальных сигналов // Сборник научных трудов НГТУ. – 2016. – № 2 (84). – С. 21–37.
14. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of the inverted pendulum control system // Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2015). – St. Petersburg: LETI Publ., 2015. – Vol. 1. – P. 153–156.
15. Востриков А.С., Воевода А.А., Жмудь В.А. Эффект понижения порядка системы при управлении по методу разделения движений // Научный вестник НГТУ. – 2005. – № 3. – С. 3–13.
16. Mehra R.K. Optimal input for linear system identification // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – Vol. 19, N 3. – P. 192–200.
17. Chen C.T. Linear system theory and design. – 3<sup>rd</sup> ed. – New York: Oxford University Press, 1999. – 334 p.
18. Ljung L. System identification: theory for the user. – 2<sup>nd</sup> ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1999. – 315 p.



19. Bobobekov K.M., Voevoda A.A., Troshina G.V. The active identification of parameters for the unstable object // XI Международный форум по стратегическим технологиям, IFOST-2016, Новосибирск, 1–3 июня 2016 г. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – С. 594–596.

20. Bobobekov K.M., Voevoda A.A., Troshina G.V. The parameters determination of the inverted pendulum model in the automatic control system // XIII международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения» АПЭП-2016, Новосибирск, 3–6 октября 2016 г. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – Т. 1, ч. 3. – С. 180–182

21. Воевода А.А., Чехонадских А.В. Координатизация системы корней вещественных многочленов степени 5 // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 1 (22). – С. 173–176.

22. Воевода А.А., Шоба Е.В. Управление перевернутым маятником // Сборник научных трудов НГТУ. – 2012. – № 2 (68). – С. 3–14.

Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович, специалист по технологиям машиностроения, 2008–2013 гг. – кафедра «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» механико-технологического факультета Таджикского технического университета (ТТУ) им. акад. М.С. Осими. С 2013 по 2015 г. ассистент Таджикского технического университета. С 2015 г. аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. В настоящее время специализируется в области синтеза систем управления техническими системами. Имеет 11 публикаций. E-mail: kurbon\_111@mail.ru

### ***About structural transformations of multichannel linear systems in the matrix polynomial representation\****

**K.M. BOBOBEKOV**

*Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation; post-graduate student, automation department. E-mail: kurbon\_111@mail.ru*

When analyzing and synthesizing linear automatic control systems, folding formulas for a typical connection of links and equivalent transformations of structural systems are actively used, namely-the transfer of the branching node and the adder through a link. In multi-channel systems, folding formulas are also used for typical link connections such as serial, parallel and feedback-type connections. But in contrast to single-channel systems, here arise additional difficulties associated with the dimension of vectors settings Impact, the output signal and the control signal. Unlike single-channel systems, the inversion of a transfer function is not always possible. In addition, it is necessary to consider separately the cases of matrix and polynomial matrix representations of transfer functions. In multichannel systems, there is a possibility of an equivalent transformation of both a matrix transfer function and a polynomial matrix representation. An example of such transformations can be the use of unimodal matrices. Transformations that offer new possibilities to solve problems of analysis, synthesis and modeling of multichannel systems are proposed in this paper. The application of the proposed equivalent structural transformations is illustrated by examples. The purpose of the paper is the generalization of structural transformations to multichannel linear systems of automatic control when representing a matrix transfer function in the form of a left or right polynomial representation.

**Keywords:** multichannel linear systems of automatic control, equivalent transformations, matrix polynomial expansion, unimodal matrix, realization of the structural scheme

DOI: 10.17212/1814-1196-2017-2-7-25

---

\* Received 22 December 2016.

## REFERENCES

1. Voevoda A.A. *Matrichnye peredatochnye funktsii (Osnovnye ponyatiya)*: konspekt lektsii po kursu "Proektirovanie sistem upravleniya" [Matrix transfer functions (Basic concepts): a summary of lectures on the course "Designing of control systems"]. Novosibirsk, NSTU Publ., 1994. 94 p.
2. Voevoda A.A., Voronoi V.V. Modal'nyi sintez regulyatorov ponizhennogo poryadka metodom differentsirovaniya kharakteristicheskogo polinoma [Modal design of reduced order controllers by method of differentiation of the characteristic polynomial]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 1 (63), pp. 3–12.
3. Voevoda A.A. Stabilizatsiya dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya [Stabilisation of two-mass system by a modal method of synthesis with polynomial factorization]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 1 (38), pp. 195–198.
4. Shoba E.V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [The modal method for the synthesis of multi-channel dynamic systems using a polynomial expansion. PhD eng. sci. diss.]. Novosibirsk, 2013. 192 p.
5. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Raschet parametrov regulyatora dlya stabilizatsii perevernutogo mayatnika po uglu otkloneniya [Calculation of controller parameters for the stabilization of the inverted pendulum by corner deviation]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 18–32.
6. Bobobekov K.M. Ob osobennostyakh realizatsii dvukhparametricheskogo re-gulyatora stabilizatsii polozheniya mayatnika v srede Matlab [On the peculiarities of realization the two-parameter regulator of stabilization the position pendulum in environment MATLAB]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 3 (85), pp. 115–130.
7. Voevoda A.A., Shoba E.V. O razreshimosti zadachi avtonomizatsii mnogokanal'noi sistemy. Ch. 1 [About diagonally decoupling for multi-input multi-output systems. Pt. 1]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2010, no. 2 (60), pp. 16–25.
8. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V., Shoba E.V. Modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniya: razdelenie dvizhenii pri stabilizatsii trekhmassovoi sistemy [Modal synthesis method using a polynomial decomposition: the separation of motions in the stabilization of the three-mass plant]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2011, no. 2 (43), pp. 39–46.
9. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Modelirovanie stabiliziruyushchego upravleniya na primere troinogo matema-ticheskogo mayatnika [Simulation of stabilizing control on the example of triple mathematical pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 38–48.
10. Bobobekov K.M. O normirovanii polinomov znamenatelei ob"ekta i regulyatora pri polinomial'nom metode sinteza [About rationing polynomials denominator object and regulator during polynomial method of synthesis]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 4 (86), pp. 7–24.
11. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Polinomial'nyi metod sinteza PI(D)-regulyatora dlya neminimal'no fazovogo ob"ekta [Polynomial method synthesis of PI(D) regulator for non-minimum-phase object]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2015, no. 4 (82), pp. 7–20.
12. Voevoda A.A., Shoba E.V. O modeli perevernutogo mayatnika [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 1 (67), pp. 3–14.
13. Bobobekov K.M., Voevoda A.A. Aktivnaya identifikatsiya parametrov modeli perevernutogo mayatnika po uglu pri podache na vkhod sinusoidal'nykh signalov [Active identification of the

inverted pendulum model data on angle in applied to the input sinusoidal signal]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2016, no. 2 (84), pp. 21–37.

14. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of the inverted pendulum control system. *Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM'2015)*. St. Petersburg, LETI Publ., 2015, vol. 1, pp. 153–156.

15. Vostrikov A.S., Voevoda A.A., Zhmud' V.A. Effekt ponizheniya poryadka sistemy pri upravlenii po metodu razdeleniya dvizhenii [The effect of reducing the order of the system that is controlled by the method of separation of motions]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2005, no. 3, pp. 3–13.

16. Mehra R.K. Optimal input for linear system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, no. 3, pp. 192–200.

17. Chen C.T. *Linear system theory and design*. 3<sup>rd</sup> ed. New York, Oxford University Press, 1999. 334 p.

18. Ljung L. *System identification: theory for the user*. 2<sup>nd</sup> ed. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall PTR, 1999. 315 p.

19. Bobobekov K.M., Voevoda A.A., Troshina G.V. [The active identification of parameters for the unstable object]. *XI Mezhdunarodnyi forum po strategicheskim tekhnologiyam, IFOST–2016* [The 11<sup>th</sup> International Forum on Strategic Technology IFOST–2016], Novosibirsk, 1–3 June 2016, pp. 594–596.

20. Bobobekov K.M., Voevoda A.A., Troshina G.V. The parameters determination of the inverted pendulum model in the automatic control system. *XIII mezh-dunarodnaya nauchno-tehnicheskaya konferentsiya "Aktual'nye problemy elek-tronnogo priborostroeniya" APEP-2016* [Proceedings of the XIII International Conference "Actual problems of electronic instrument engineering", (APEIE-2016)], Novosibirsk, 3–6 October 2016, vol. 1, pt. 3, pp. 180–182.

21. Voevoda A.A., Chekhonadskikh A.V. Koordinatizatsiya sistemy kornei veshchestvennykh mnogochlenov stepeni 5 [Coordinatization of the system of roots of real polynomials degree 5]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2006, no. 1 (22), pp. 173–176.

22. Voevoda A.A., Shoba E.B. Upravlenie perevernutym mayatnikom [About model inverted pendulum]. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*, 2012, no. 2 (68), pp. 3–14.