ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 68, № 3, 2017, с. 126–141

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 68, No. 3, 2017, pp. 126–141

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ INFORMATION PROCESSING

УДК 517.977

Глобальная оптимизация с селективным усреднением смешанных переменных: непрерывных и дискретных при упорядоченных возможных значениях*

А.И. РУБАН[1], А.С. МИХАЛЕВ[2]

[1] *660074, РФ, г. Красноярск, ул. Академика Киренского, 26, Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий, доктор технических наук, профессор кафедры Информатика. E-mail: airouban@mail.ru*
[2] *660074, РФ, г. Красноярск, ул. Академика Киренского, 26, Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий, аспирант кафедры Информатика. E-mail: spaming1@yandex.ru*

Изложена идея конструирования базового алгоритма глобальной оптимизации на множестве непрерывных и дискретных переменных с упорядоченными возможными значениями при наличии ограничений типа неравенств. В основе алгоритма лежит разнесение во времени пробных и рабочих шагов, селективное усреднение искомых переменных по результатам пробных движений, адаптивная перестройка размеров множества возможных пробных движений и учет ограничений типа неравенств.

Основная существующая схема поиска (с селективным усреднением) непрерывных переменных переносится на смешанные переменные, в которых дискретные переменные имеют упорядоченные возможные значения. Для каждой дискретной переменной ставится в соответствие непрерывная вспомогательная безразмерная переменная. Она содержит как номера возможных значений дискретной переменной, так и одинаковые примыкающие друг другу единичные интервалы, охватывающие эти номера. Номера располагаются в центре интервалов. Вспомогательная переменная на каждом рабочем шаге имеет свой фиксированный интервал возможных значений.

При генерировании каждой пробной точки для соответствующей дискретной переменной на непрерывном интервале вспомогательной переменной датчиком равномерно распределенной непрерывной случайной величины вычисляется псевдослучайное число, и оно попадает на один из интервалов, в центре которого находится номер дискретного возможного значения. Далее дискретное значение с этим номером участвует в вычислении минимизируемой функции и функций ограничений типа неравенств. По каждой дискретной переменной расчеты нового центра поисковых движений и размера множества поисковых движений вначале ведется по непрерывной вспомогательной переменной, а затем выполняется переход к дискретным возможным значениям. Размерность задачи оптимизации при таком подходе не меняется. Сложность расчетов по сравнению с наличием только непрерывных переменных возрастает незначительно. Пример демонстрирует возможность получения близкой к единице оценки вероятности попадания вычисленных переменных в малую окрестность истинного решения даже при высоком уровне аддитивной помехи измерения минимизируемой функции.

* *Статья получена 20 мая 2017 г.*

Ключевые слова: глобальная оптимизация, непрерывные переменные, дискретные переменные, селективное усреднение искомых переменных, многоэкстремальная функция, ограничения типа неравенств, непрерывная вспомогательная переменная, аддитивная помеха измерения оптимизируемой функции

DOI: 10.17212/1814-1196-2017-3-126-141

ВВЕДЕНИЕ

Проблема поиска глобального экстремума целевой функции в допустимой области изменения искомых непрерывных переменных [1–8] относится к классу сложных. Специфика глобальной оптимизации обусловлена многоэкстремальным видом целевых функций, их разрывным характером, присутствием помех, ограниченностью множества возможных значений искомых переменных, наличием смешанных переменных (непрерывных и дискретных) и др. Появление дискретных переменных проблему не упрощает.

Учет дискретных переменных существенно расширяет множество объектов глобальной оптимизации. Развитие методов и алгоритмов глобальной оптимизации по смешанным переменным позволяет выполнять оптимизацию не только по обычным параметрическим переменным (параметрам оборудования, параметрам функционирования процессов), но и по структурным дискретным переменным (при синтезе наилучших сетевых моделей, при построении схем, при идентификации структуры и параметров адекватных статических и динамических моделей объектов). Алгоритмы оптимизации встраиваются в системы адаптивного оптимального управления.

Первые работы по глобальной оптимизации на множестве смешанных переменных относятся к 80-м годам прошлого столетия. Существующие подходы к их решению условно могут быть разделены на два класса. Первый класс – это эвристические методы. Они не гарантируют, что при завершении процесса поиска будет найдено оптимальное решение с заданной точностью. К другому классу относятся более строгие в математическом отношении методы. Поиск в них прекращается при выполнении заданной точности получаемого решения или указывается, что задача не имеет решения. В этих методах по-разному производится расчет и уточнение оценок оптимального решения [9–12]. Примером эвристического метода [13] является совмещение эвристической глобальной идеи (например, наличие стадий «широкого» разброса пробных точек) и обычного локального поиска из каждой пробной точки.

В данной статье основная существующая эффективная схема поиска глобального минимума (с селективным усреднением непрерывных переменных [14–16]) переносится на оптимизацию со смешанными переменными, среди которых дискретные переменные имеют упорядоченные возможные значения.

1. ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Каждая дискретная переменная имеет несколько дискретных возможных значений. Свойства этих значений позволяют разделить дискретные переменные на два класса: с неупорядоченными и с упорядоченными возможными значениями.

Вариант решения задачи оптимизации (на основе метода с селективным усреднением искомых переменных) при наличии дискретных переменных первого класса рассмотрен в статьях [17, 18].

В предлагаемой работе рассматривается второй класс дискретных переменных, участвующих при оптимизации наряду с непрерывными переменными.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решается задача поиска глобального минимума целевой функции $f(x,y)$ со смешанными переменными: непрерывными и дискретными с упорядоченными возможными значениями при наличии ограничений-неравенств:

$$f(x,y)=\min,\ \varphi_j(x,y)\le 0,\ \ j=\overline{1,m}. \tag{1}$$

Здесь $x=(x_1,...,x_k)$ – вектор k непрерывных переменных, $y=(y_1,...,y_h)$ – вектор h дискретных переменных. Каждая дискретная переменная y_t имеет r_t возможных упорядоченных значений y_{t,r_t}, $t=\overline{1,h}$.

Ограничения неравенства выделяют (сужают) допустимое множество, внутри которого ведется поиск глобального минимума. Требуется определить положение (x^*, y^*) глобального минимума целевой функции $f(x,y)$ на ограниченном множестве изменения ее переменных.

Функция $f(x,y)$ может быть многоэкстремальной, недифференцируемой, искаженной помехой. Функции ограничений также могут быть недифференцируемыми и невыпуклыми. Поиск минимума осуществляется на основе только измерений или вычислений указанных функций ($f(x,y)$, $\varphi_j(x,y)$, $j=\overline{1,m}$) в выбранных пробных точках.

Глобальный минимум функции $f(x,y)$ на допустимом множестве единственный.

3. БАЗОВЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ С СЕЛЕКТИВНЫМ УСРЕДНЕНИЕМ ИСКОМЫХ СМЕШАННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Теоретическое селективное усреднение (математическое ожидание со специальной плотностью распределения вероятности) искомых непрерывных переменных [14–16] при убывающем ядре (с возрастанием его нормированного аргумента от 0 до 1) позволяет с ростом коэффициента селективности ядра подойти сколько угодно близко к положению глобального минимума. Этот теоретический результат дал возможность построить структуру базового численного алгоритма, который напрямую успешно применяется при наличии нежестких ограничений неравенств. На основе этого алгоритма синтезировано несколько алгоритмов при учете других ограничений (жестких ограничений неравенств и ограничений равенств) и при решении других проблем глобальной оптимизации. Примером служит многокритериальная глобальная оптимизация многоэкстремальных функций.

В основе базового алгоритма лежит разнесение во времени пробных и рабочих шагов, равномерное размещение пробных точек в допустимой области, численное селективное усреднение (вычисление оценки математического ожидания) искомых переменных по результатам вычисленных (или измеренных) значений оптимизируемой функции в пробных точках. Также на каждом рабочем шаге осуществляется адаптивная перестройка размеров множества пробных движений.

Обобщим указанный базовый алгоритм глобальной оптимизации, основанный на селективном усреднении искомых непрерывных переменных, на случай, когда кроме непрерывных имеются и дискретные искомые переменные с упорядоченными возможными значениями.

Решение задачи оптимизации со смешанными переменными основано на переходе от каждой дискретной переменной к соответствующей вспомогательной непрерывной переменной. В процессе вычислений выполняется и обратный также однозначный переход к реальным значениям дискретной переменной.

Для каждой дискретной переменной y_t ставится в соответствие вспомогательная непрерывная переменная $\bar{x}_t$ (рис. 1). От возможных значений $y_{t,1},\ldots,y_{t,r_t}$ дискретной переменной y_t осуществляется переход к их номерам, расположенным на оси вспомогательной непрерывной переменной $\bar{x}_t$. Переменная $\bar{x}_t$ является безразмерной. На рис. 1 также указаны одинаковые единичной длины примыкающие друг к другу подынтервалы и получаемый исходный интервал возможного изменения вспомогательной непрерывной переменной $\bar{x}_t$. В центре каждого из подынтервалов находится номер соответствующего дискретного значения. На начальном этапе поиска интервал возможных значений вспомогательной непрерывной переменной имеет вид $[0.5;\ r_t + 0.5\,]$.

Вспомогательные непрерывные переменные $\bar{x}$ используются при нахождении для каждой координаты $\bar{x}_t$ (по равномерному закону) номера $\bar{x}_{t,N}^{(i)}$ дискретного значения $y_{t,N}^{(i)}$ переменной y_t (рис. 1). Дальнейшие вычисления на каждом рабочем шаге ведутся для номеров $\bar{x}_{t,N}^{(i)}$ возможных значений дискретных переменных y_t. Вычисляются усредненные значения переменных (оценки математического ожидания) и размеры (тоже усредненные) множества варьирования переменных.

Координаты пробных точек обозначаем верхним индексом в скобках. Точку с номером i в непрерывных фактических и вспомогательных переменных записываем в виде $(x^{(i)}, \bar{x}^{(i)})$, а в соответствующих смешанных переменных – в форме $(x^{(i)}, y^{(i)})$. Здесь $y^{(i)}$ означает, что вектор дискретных переменные принял одно из своих возможных значений с учетом покомпонентного перехода от $\bar{x}_t^{(i)}$ к одному из номеров $\bar{x}_{t,N}^{(i)}$ дискретных возможных значений и к соответствующему дискретному возможному значению $y_{t,N}^{(i)}$ (рис. 1).

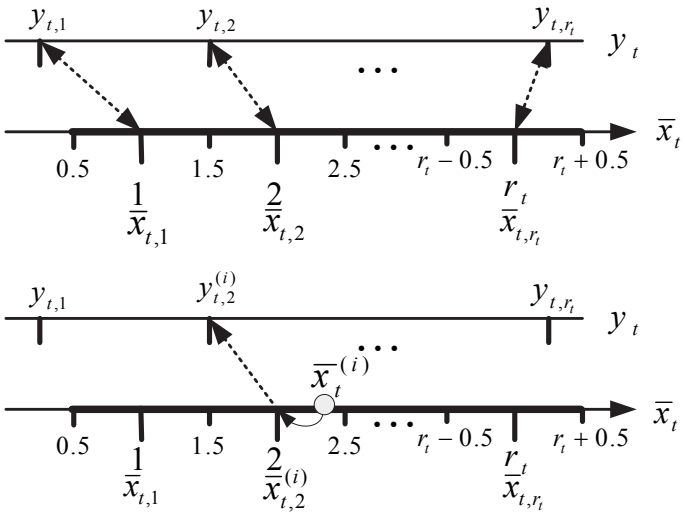


Рис. 1. Взаимно-однозначный переход от возможных значений дискретной переменной к ее номерам на оси вспомогательной непрерывной переменной $\bar{x}_t$ и переход от любого значения $\bar{x}_t^{(i)}$ вспомогательной непрерывной переменной $\bar{x}_t$ к ее дискретному значению $\bar{x}_{t,2}^{(i)}$ (номеру) и, соответственно, к значению $y_{t,2}^{(i)}$ дискретной переменной y_t

Для получения n пробных точек $(x^{(i)}, y^{(i)}), i = \overline{1, n}$ последовательно по равномерному закону генерируются на «прямоугольном» множестве точки и из них оставляются те, которые удовлетворяют ограничениям неравенствам.

После l-го рабочего шага генерирование пробных точек (с непрерывными основными и вспомогательными переменными) осуществляется одинаково:

$$x_v^{(i)} = x_v^l + \Delta x_v^l u_{x_v}^{(i)}, \quad u_{x_v}^{(i)} \in [-1; 1], v = \overline{1, k},$$
$$\bar{x}_t^{(i)} = \bar{\bar{x}}_t^l + \overline{\Delta \bar{x}}_t^l u_{\bar{x}_t}^{(i)}, \quad u_{\bar{x}_t}^{(i)} \in [-1; 1], t = \overline{1, h}, \ i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Для каждой вспомогательной переменной сразу же осуществляется переход к номеру $\bar{x}_{t,N}^{(i)}$ возможного дискретного значения $y_{t,N}^{(i)}$ переменной y_t.

В формуле (2) $u_{x_v}^{(i)}$, $u_{\bar{x}_t}^{(i)}$ – элементы псевдослучайной последовательности равномерно распределенной случайной непрерывной величины. Этот равномерный закон распределения обусловливает одинаковые вероятности появления возможных значений (и их номеров) всех дискретных переменных. При конечном числе пробных точек относительная частота появления возможных значений каждой дискретной переменной является состоятельной несмещенной оценкой указанных одинаковых вероятностей.

В полученных пробных точках вычисляется значение минимизируемой функции $f^{(i)} \equiv f(x^{(i)},\ y^{(i)}),\ i=\overline{1,n}$. Далее уточняется положение минимума.

Новое значение $(x^{l+1},\ \bar{x}^{l+1})$ по непрерывным и дискретным переменным и размеры $(\Delta x^{l+1},\ \Delta\bar{x}^{l+1})$ «прямоугольного» множества пробных движений рассчитываются по одной из двух групп формул:

$$\begin{cases} x_\nu^{l+1} = x_\nu^l + \Delta x_\nu^l u_{x_\nu,\min},\ u_{x_\nu,\min} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_\nu}^{(i)} \bar{p}_{s,\min}^{(i)},\ \nu=\overline{1,k}, \\ \bar{x}_t^{l+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_{t,N}^{(i)} \bar{p}_{s,\min}^{(i)},\ t=\overline{1,h}, \\ \bar{p}_{s,\min}^{(i)} = \dfrac{p_s(g_{\min}^{(i)})}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_s(g_{\min}^{(j)})},\ g_{\min}^{(i)} = \dfrac{f^{(i)} - \hat{f}_{\min}}{\hat{f}_{\max} - \hat{f}_{\min}}, \\ \Delta x_\nu^{l+1} = \gamma_q \Delta x_\nu^l \left(\sum\limits_{i=1}^{n} | u_{x_\nu}^{(i)} |^q\ \bar{p}_{s,\min}^{(i)} \right)^{1/q},\ \nu=\overline{1,k}, \\ \Delta\bar{x}_t^{l+1} = \gamma_q \left(\sum\limits_{i=1}^{n} | \bar{x}_{t,N}^{(i)} - \bar{\bar{x}}_t^l |^q\ \bar{p}_{s,\min}^{(i)} \right)^{1/q},\ t=\overline{1,h}, \\ l=0,1,2,\ldots;\ \ [0<\gamma_q,\ q\in\{1,2,\ldots\},\ 0<s]; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_\nu^{l+1} = x_\nu^l + \Delta x_\nu^l u_{x_\nu,\min},\ u_{x_\nu,\min} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_\nu}^{(i)} \bar{p}_{s,\min}^{(i)},\ \nu=\overline{1,k}, \\ \bar{x}_t^{l+1} = \bar{\bar{x}}_t^l + \overline{\Delta\bar{x}}_t^l u_{\bar{x}_t,\min},\ u_{\bar{x}_t,\min} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{\bar{x}_t}^{(i)} \bar{p}_{s,\min}^{(i)},\ t=\overline{1,h}, \\ \bar{p}_{s,\min}^{(i)} = \dfrac{p_s(g_{\min}^{(i)})}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_s(g_{\min}^{(j)})},\ g_{\min}^{(i)} = \dfrac{f^{(i)} - \hat{f}_{\min}}{\hat{f}_{\max} - \hat{f}_{\min}}, \\ \Delta x_\nu^{l+1} = \gamma_q \Delta x_\nu^l \left(\sum\limits_{i=1}^{n} | u_{x_\nu}^{(i)} |^q\ \bar{p}_{s,\min}^{(i)} \right)^{1/q},\ \nu=\overline{1,k}, \\ \Delta\bar{x}_t^{l+1} = \gamma_q \overline{\Delta\bar{x}}_t^l \left(\sum\limits_{i=1}^{n} | u_{\bar{x}_t}^{(i)} |^q\ \bar{p}_{s,\min}^{(i)} \right)^{1/q},\ t=\overline{1,h}, \\ l=0,1,2,\ldots;\ \ [0<\gamma_q,\ q\in\{1,2,\ldots\},\ 0<s]. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\hat{f}_{\max} = \max\{f^{(i)}, i = \overline{1,n}\}$, $\hat{f}_{\min} = \min\{f^{(i)}, i = \overline{1,n}\}$, $p_s(\cdot)$ – неотрицательное ядро, s – коэффициент селективности ядра. Неотрицательные ядра $\overline{p}_{s,\min}^{(i)}$ нормированы на единицу на системе n пробных точек: $\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_{s,\min}^{(i)} = 1$. Аргумент ядра – это безразмерная переменная, которая всегда лежит в интервале [0; 1]. Ядра $p_s(\cdot)$ монотонно убывают при возрастании аргумента.

Обе группы алгоритмов имеют близкие друг другу свойства. Сравнение их мы здесь не приводим.

В первой группе усредненные величины для вспомогательных переменных вычисляются как оценки соответствующих статистических характеристик дискретных случайных величин. Так, $\overline{x}_t^{l+1}$ оценивает математическое ожидание, а $\Delta\overline{x}_t^{l+1}$ (при $q = 2$ и $\gamma_q = 1$) является оценкой среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины.

Во второй группе преобразования для вспомогательных переменных по структуре те же, что и для обычных непрерывных переменных. Коррекции на каждом рабочем шаге подвергаются только начальные значения усредненного значения переменных и интервалы варьирования.

При рассмотрении в разделе 5 примера за основу будем брать первую группу преобразований, но в конце приведем результаты и при использовании преобразований второй группы. Результаты оказываются близки друг другу, но небольшое предпочтение отдаем первой группе преобразований.

Наиболее используемые следующие типы ядер в степени s: $p_s(g) = (1-g)^s$ – линейное, $p_s(g) = (1-g^2)^s$ – параболическое, $p_s(g) = e^{-sg}$ – экспоненциальное, $p_s(g) = g^{-s}$ – гиперболическое.

На l-м шаге рассчитанное в соответствии с формулой (3) значение $\overline{x}_t^l$ попадает в единичный интервал, охватывающий некоторый номер соответствующего значения дискретной переменной (рис. 2). Так вычисляются значения всех дискретных переменных. Добавление к ним рассчитанных по формуле (3) непрерывных переменных дает значения всех непрерывных и дискретных переменных новой точки рабочего шага.

Процесс нахождения нового интервала изменения вспомогательной переменной представлен на рис. 2. Рассчитанный (на предыдущем рабочем шаге) по формуле (3) интервал варьирования $2\Delta\overline{x}_t^l$ непрерывной вспомогательной переменной выделяет номера возможных значений дискретной переменной (на рис. 2 они помечены кружками), которые будут участвовать в пробных движениях следующего шага. Интервалы единичной длины, охватывающие эти номера, образуют новый отрезок изменения вспомогательной переменной. Середина отрезка дает $\overline{\overline{x}}_t^l$, а половина его длины – $\overline{\Delta\overline{x}}_t^l$. Для любой компоненты $\overline{x}_t$ исходные значения этих величин таковы (рис. 1): $\overline{\overline{x}}_t^0 = (r_t + 1)/2$, $\overline{\Delta\overline{x}}_t^0 = r_t/2$.

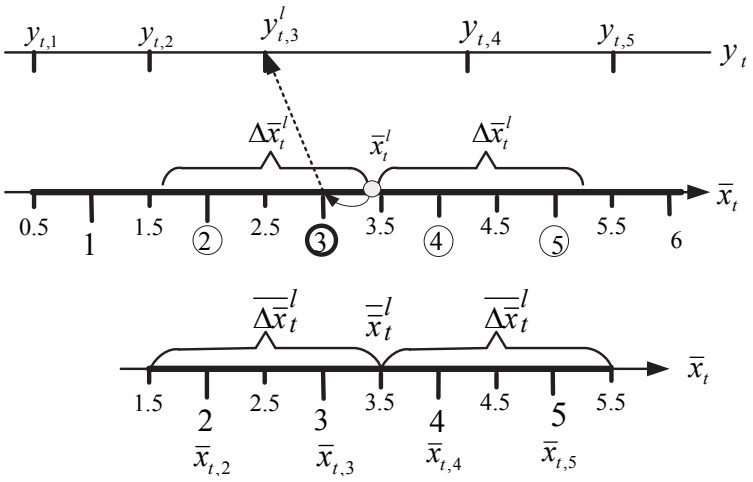


Рис. 2. Переход на l-м шаге от рассчитанного усредненного значения $\bar{x}_t^l$ вспомогательной непрерывной переменной $\bar{x}_t$ к соответствующему значению дискретной переменной y_t^l и определение скорректированных значений среднего значения $\bar{\bar{x}}_t^l$ вспомогательной переменной и интервала $2\,\overline{\Delta\bar{x}}_t^l$ ее изменения

При подходе к минимуму область пробных движений уменьшается, за счет этого происходит все более точное отслеживание положения экстремума. Критерием останова процесса поиска обычно служит условие уменьшения (при некотором l) размера области варьирования переменных до заданной величины:

$$\max\left\{\frac{\Delta x_v^l}{\Delta x_v^0}, v=\overline{1,k}\right\} \le \varepsilon_1, \quad \max\left\{\frac{\overline{\Delta\bar{x}}_t^l}{\overline{\Delta\bar{x}}_t^0}, t=\overline{1,h}\right\} \le \varepsilon_2 . \tag{5}$$

Скорректированное значение $\bar{\bar{x}}_t^l$ в формуле (3) напрямую не используется, а $\overline{\Delta\bar{x}}_t^l$ дает интервал варьирования $2\overline{\Delta\bar{x}}_t^l$ для вспомогательной координаты $\bar{x}_t$ (при последующем формировании пробных точек) и используется в условии останова процесса поиска (5).

Переход к безразмерному аргументу $g_{\min}^{(i)}$ в ядре $p_s\left(g_{\min}^{(i)}\right)$ процедуры усреднения (3) существенно повышает скорость сходимости алгоритмов и обеспечивает сравнительно высокую точность расчета искомых переменных.

4. ТЕСТОВЫЕ ФУНКЦИИ

В основе конструирования тестовых многоэкстремальных функций, на которых исследуются свойства алгоритмов поиска глобального минимума, существует несколько общих схем [15]. Простая и эффективная из них базируется на использовании набора простых потенциальных функций (часто

называемых потенциалами) с одним минимумом и на операции «минимум» при их объединении для каждого фиксированного значения независимых переменных. Этот способ синтеза многоэкстремальных функций предложен в 1962 году И.Н. Бочаровым и А.А. Фельдбаумом [19] и является до сих пор наиболее изящным и удобным в использовании методом.

Выберем для конкретности степенные потенциалы:

$$f_l(x_1, x_2) = a_{1,l}\,|\,x_1 - c_{1,l}\,|^{d_{1,l}} + a_{2,l}\,|\,x_2 - c_{2,l}\,|^{d_{2,l}} + b_l,\ \ l = \overline{1,m}\,.$$

Здесь параметр b_l равен величине минимального значения функции $f_l(x_1,\, x_2)$ в точке $(c_{1,l},\, c_{2,l})$. Положительные параметры $a_{1,l},\, a_{2,l},\, d_{1,l},\, d_{2,l}$ характеризуют быстроту нарастания степенной функции и ее вид в окрестности точки минимума. Например, при $d_{1,l} \in (0;1]$ точка минимума является угловой по координате x_1, при $1 < d_{1,l}$ угловая точка исчезает. С ростом $d_{1,l}$ расширяется плато (окрестность точки минимума) малого изменения функции.

Из потенциалов на основе применения операции «минимум» при каждом фиксированном значении искомых переменных конструируется многоэкстремальная функция:

$$f(x_1, x_2) = \min\left\{ f_l(x_1, x_2),\ l = \overline{1,m} \right\}.$$

При этом в итоговой функции используется только некоторая окрестность минимума каждой потенциальной функции без изменения положения каждого минимума и величины функции в окрестности минимума.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим тестовую функцию с десятью минимумами, построенную за счет применения операции min к десяти степенным потенциалам:

$$f(x,y) = \min\{3\,|\,x+1\,|^2 + 3\,|\,y-9\,|^2;\ \ 4\,|\,x-8\,|^{1.8} + 4\,|\,y-8\,|^{1.8} + 9;$$

$$7\,|\,x+8\,|^{0.8} + 6\,|\,y-6\,|^{1.6} + 5;\ \ 4\,|\,x\,|^{1.2} + 4\,|\,y-4\,|^{1.8} + 10;$$

$$7\,|\,x-5\,|^{0.8} + 7\,|\,y-1\,|^{0.6} + 6;\ \ 5\,|\,x+9\,|^{1.2} + 6\,|\,y+2\,|^{0.6} + 7.5;$$

$$5\,|\,x+2\,|^{1.3} + 5\,|\,y+2\,|^{1.3} + 7;\ \ 5\,|\,x-9\,| + 5\,|\,y+5\,| + 8;$$

$$2\,|\,x-2\,|^2 + 2\,|\,y+5\,|^2 + 3;\ \ 7\,|\,x+7\,|^{0.8} + 7\,|\,y+9\,|^{1.2} + 8.5\}\,.$$

Дискретная переменная y принимает следующие возможные значения $\{-9, -5, -2, 1, 4, 6, 8, 9\}$. Допустимая область имеет вид квадрата, заданного двумя ограничениями-неравенствами:

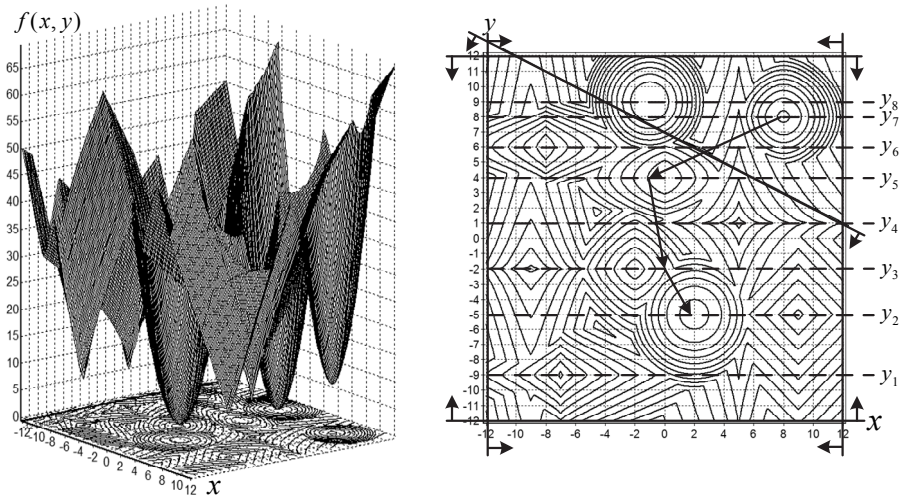
$$\varphi_1(x) \equiv |\,x\,| - 12 \le 0\,;\quad \varphi_2(y) \equiv |\,y\,| - 12 \le 0\,.$$

Глобальный минимум при этом соответствует точке $(x^*, y^*) = (-1; 9)$, и в ней $f(x^*, y^*) = 0$.

Вводим дополнительное ограничение, которое отсекает два минимума, включая указанный:

$$\phi_3(x, y) \equiv 0.5x + y - 7 \le 0.$$

Условный глобальный минимум теперь приходится на точку $(x^*, y^*) = (2; -5)$, в ней $f(x^*, y^*) = 3$.



а *б*

Рис. 3. Многоэкстремальная функция $f(x, y)$:

а – пространственный вид функции; *б* – линии равных уровней, допустимая область поиска и одна из траекторий движения в окрестности глобального минимума

На рис. 3 представлены пространственный вид минимизируемой функции, линии равных уровней для нее и ограничения, выделяющие допустимую область. Оба рисунка построены в предположении, что y является непрерывной переменной, а затем указаны возможные значения дискретной переменной. На самом же деле мы имеем 8 сечений представленной функции при указанных дискретных значениях второй переменной.

Продемонстрируем работоспособность предложенного алгоритма. Комплексной характеристикой процесса поиска глобального минимума является оценка $\widehat{P}_{\text{прав}}$ вероятности попадания получаемого решение (x^*, y^*) в заданную ε окрестность истинного решения (x^{**}, y^{**}):

$$\frac{|x_\nu^* - x_\nu^{**}|}{\Delta x_\nu^0} \le \varepsilon,\ \nu = \overline{1, m} \text{ и } |y_{t,N^*}^* - y_{t,N^{**}}^{**}| = 0,\ t = \overline{1, h}, \tag{6}$$

т. е. если модули относительных невязок непрерывных переменных не выходят за границу ε, а значения рассчитанных значений дискретных переменных точно совпадают с истинными значениями в точке минимум.

Рассмотрим зависимость оценки вероятности отыскания истинного решения от количества пробных точек n. Для этого осуществляется M реализаций процесса поиска минимума. Оценка вероятности $\hat{P}_{\text{прав}}$ будет равна относительной частоте попадания полученных решений $(x^*, y^*)_j$, $j = \overline{1, M}$ в окрестность истинного решения.

Параметры алгоритма минимизации следующие: $(x^0, y^0, \overline{x}^0) = (8; 8; 7)$, $(\Delta x^0, \overline{\Delta x}^0) = (16; 6.5)$, $\gamma_q = 1$, $q = 2$, ядро по минимизируемой функции параболическое со степенью селективности $s = 100$. Параметры исследования: число реализаций $M = 101$, размер окрестности истинного решения $\varepsilon = 0.0005$.

Полученная зависимость $\hat{P}_{\text{прав}}$ от числа пробных точек n представлена на рис. 4, *а*. На рис. 4, *б* дана типичная реализация перестройки от шага к шагу непрерывной и дискретной переменных при поиске глобального минимума при числе пробных шагов $n = 500$.

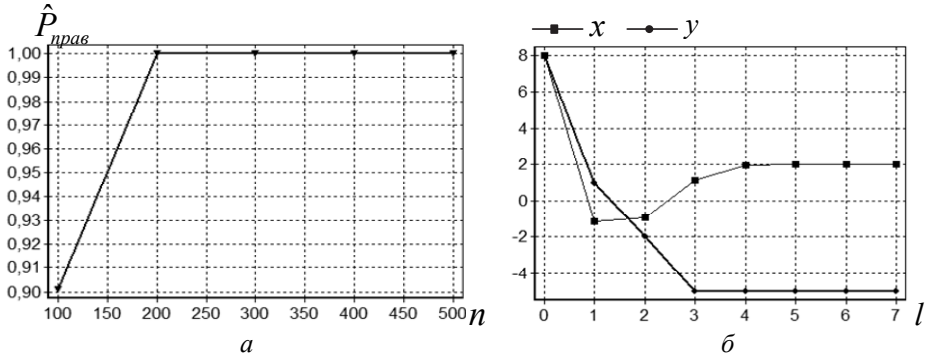


Рис. 4. Зависимость оценки вероятности попадания найденного решения в окрестность истинного решения от объема выборки (*а*); изменение переменных по итерациям (*б*)

Оценим работоспособность алгоритма при наличии помех. Добавим к минимизируемой функции центрированную равномерно распределенную помеху $R[-\theta; \theta] = \theta \cdot R[-1; 1]$:

$$f(x, y) = \tilde{f}(x, y) + \theta \cdot R[-1; 1]. \tag{7}$$

Выбор равномерного закона распределения помехи соответствует худшей ситуации (максимальному значению энтропии), которая в принципе может встретиться при реальном искажении оптимизируемой функции.

Коэффициент θ вычисляется по заданной величине ρ отношения «шум–сигнал»: $\rho = \dfrac{2\theta}{\Delta \tilde{f}}$. Здесь $\Delta \tilde{f}$ – интервал изменения минимизируемой функции без помехи (при изменении переменных внутри допустимого множества). Для $\rho = 1$ шум будет 100 % по отношению к сигналу (функции без помехи).

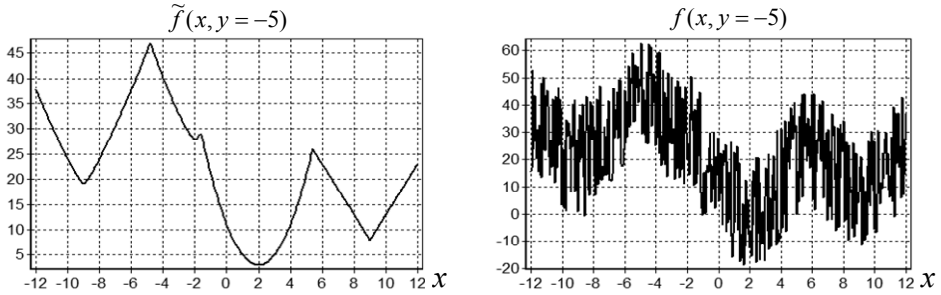


Рис. 5. Сечение функции $f(x, y=-5)$ без помехи и при 100 %-й помехе

Для наглядности степени влияния помехи на рис. 5 приведены сечения при значении $y_1 = -5$ дискретной переменной в точке глобального минимума при отсутствии помехи и при 100 %-й помехе. Коэффициент θ при этом равен 22.

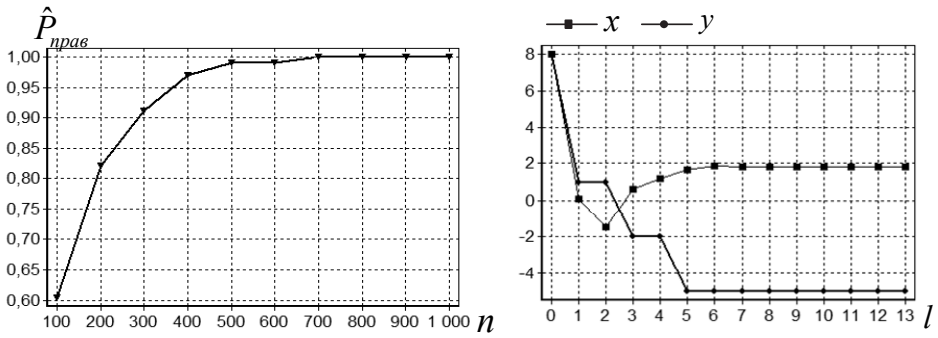


Рис. 6. Зависимость оценки вероятности попадания найденного решения в окрестность истинного решения от объема выборки и изменение по итерациям переменных при 100 % помехе и $n = 1000$

При 100 %-й помехе (рис. 6) по сравнению с предыдущим случаем (без помехи) для приближения оценки вероятности отыскания истинного решения $\hat{P}_{\text{прав}}$ к единице надо увеличивать в два раза число пробных движений на каждом рабочем шаге. И это несмотря на уменьшение требуемой точности нахождения истинного решения от $\varepsilon = 0.0005$ до $\varepsilon = 0.05$. Параметры алгоритма минимизации следующие: $(x^0, y^0, \overline{\overline{x}}^0) = (8;\ 8;\ 7)$, $(\Delta x^0, \overline{\Delta \overline{x}}^0) = (16;\ 6.5)$, $\gamma_q = 1$, $q = 2$, ядро параболическое со степенью селективности $s = 250$. Параметры исследования: число реализаций $M = 101$, размер окрестности истинного решения $\varepsilon = 0.05$.

Получаемые численные закономерности удивления не вызывают, ибо с увеличением уровня помех всегда увеличиваются затраты на поиск минимума. Важно то, что базовый алгоритм работает и при значительных уровнях помех.

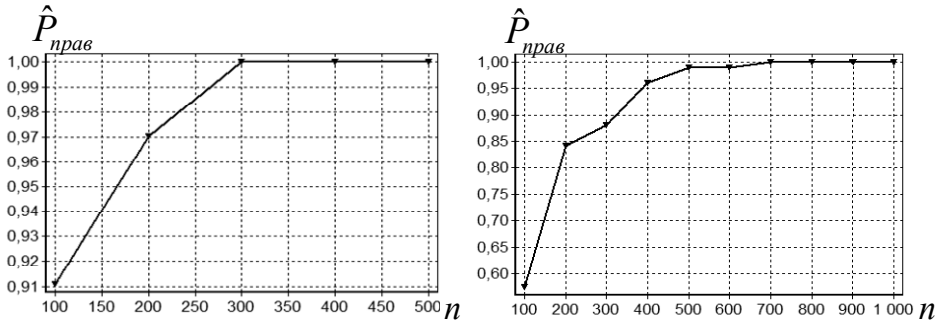


Рис. 7. Зависимость оценки вероятности попадания искомых переменных в окрестность истинного решения от количества пробных точек без помехи (слева) и со 100 %-й помехой при использовании второй группы формул (4) (страва)

Использование второй группы расчетных формул (4) при тех же исходных данных дает для $\hat{P}_{\text{прав}}$ примерно такие же закономерности (рис. 7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный алгоритм глобальной оптимизации имеет достаточно простую структуру. За счет селективного усреднения искомых переменных алгоритм имеет неплохую помехоустойчивость. Переход в алгоритме к безразмерным (относительным) переменным существенно увеличивает скорость сходимости алгоритма и уменьшает число настраиваемых параметров.

Размерность задачи оптимизации при выбранном подходе не меняется. Сложность расчетов по сравнению с наличием только непрерывных переменных возрастает незначительно. Все основные свойства алгоритма сохранятся по сравнению с оптимизацией только по непрерывным переменным.

Алгоритм в основе своей содержит однотипные операции, которые могут быть выполнены параллельно на многопроцессорных вычислительных системах. Все указанное особенно важно при наличии большого количества разнородных ограничений и искомых переменных.

Предложенный алгоритм глобальной оптимизации при смешанных искомых переменных может быть распространен на решение проблемы глобальной оптимизации относительно только дискретных переменных с упорядоченными возможными значениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стронгин Р.Г.* Поиск глобального оптимума. – М.: Знание, 1990. – 48 с.

2. *Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г.* Методы поиска глобального оптимума. – М.: Наука, 1991. – 247 с.

3. *Horst R., Tuy H.* Global optimization – Deterministic approaches. – 3rd ed. – Berlin: Springer, 1996. – 729 p.

4. *Zhigljavsky A., Zilinskas A.* Stochastic global optimization. – Berlin: Springer, 2008. – 269 p.

5. *Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

6. *Пантелеев А.В.* Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. – М.: МАИ-Принт, 2009. – 159 с.

7. *Weise T.* Global optimization algorithms. Theory and Application. – 3rd ed. – [S. l.]: University of Science and Technology of China, 2011. – 1217 p.

8. *Хансен Э., Уолстер Дж.У.* Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа. – М.; Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований, 2012. – 520 с.

9. *Leyffer S.* Integrating SQP and branch-and-bound for mixed integer nonlinear programming // Computational Optimization and Applications. – 2001. – Vol. 18. – P. 295–309.

10. *Fletcher R., Leyffer S.* Solving mixed integer nonlinear programs by outer approximation // Mathematical Programming. – 1994. – Vol. 66. – P. 327–349.

11. *Bagajewicz M., Manousiouthakis V.* On the Generalized Benders Decomposition // Computers and Chemical Engineering. – 1991. – Vol. 15 (10). – P. 691–700.

12. *Westerlund T., Pettersson T.* An extended cutting plane method for solving convex MINLP problems // Computers and Chemical Engineering. – 1995. – Vol. 19, suppl. – P. 131–136.

13. *Liberti L., Nannicini G., Mladenovic N.* A good recipe for solving MINLP // Metaheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming. – New York, Springer, 2009. – P. 231–245. – (Annals of Information Systems; vol. 10).

14. *Rouban A.I.* Method for global optimization in continuous space // Advances in Modelling & Analysis: Series A. – 2003. – Vol. 40 (4). – P. 9–28.

15. *Рубан А.И.* Глобальная оптимизация методом усреднения координат. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. – 303 с.

16. *Рубан А.И.* Метод глобальной оптимизации, основанный на селективном усреднении координат при наличии ограничений // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – Вып. 1 (22). – С. 114–123.

17. *Mikhalev A.S., Rouban A.I.* Algorithms of global optimization of functions on set of the mixed variables: continuous and discrete with unordered possible values // Advances in Modelling & Analysis: Series D. – 2015. – Vol. 20, N 1. – P. 56–75.

18. *Mikhalev A.S., Rouban A.I.* Global optimization on set of mixed variables: continuous and discrete with unordered possible values // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. 122. – Art. 012024. – doi: 10.1088/1757-899X/122/1/012024.

19. *Бочаров И.Н., Фельдбаум А.А.* Автоматический оптимизатор для поиска минимального из нескольких минимумов (глобальный оптимизатор) // Автоматика и телемеханика. – 1962. – № 3. – С. 289–301.

Рубан Анатолий Иванович, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, профессор кафедры «Информатика» Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета. Основные направления научных исследований – идентификация, адаптивное управление, теория чувствительности, глобальная оптимизация. Имеет 290 публикаций, в том числе 5 монографий. E-mail: ai-rouban@mail.ru

Михалев Антон Сергеевич, аспирант кафедры «Информатика» Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета. Основные направления научных исследований – глобальная оптимизация, программная инженерия. Имеет 6 публикаций. E-mail: spaming1@yandex.ru

Global optimization with selective averaging of mixed variables: continuous and discrete with the ordered possible values[*]

A.I. RUBAN[1], *A.S. MIKHALEV*[2]

[1] *Siberian Federal University, Institute of Space and Information Technologies, 26, Academician Kirenskogo Street, Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation, D.Sc. (Eng), professor. E-mail: ai-rouban@mail.ru*
[2] *Siberian Federal University, Institute of Space and Information Technologies, 26, Academician Kirenskogo Street, Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation, post-graduate student. E-mail: spaming1@yandex.ru*

The idea of constructing a basic algorithm of global optimization on a set of continuous and discrete variables with the ordered possible values in the presence of inequality type restrictions is started. The algorithm is based on time separation of trial and operating steps, selective averaging of required variables by results of trial movements, adaptive rearrangement of sizes of possible trial movement set as well as on taking into account inequality type restrictions.

The main existing scheme of continuous variables search (with selective averaging) is applied to mixed variables in which discrete variables have ordered possible values. A continuous auxiliary dimensionless variable is assigned for every discrete variable. It contains both the numbers of possible values of a discrete variable and identical adjoining each other individual intervals covering these numbers. The numbers are located in the center of intervals. An auxiliary variable on every operating step has its own fixed interval of possible values.

When generating every sampling point for the corresponding discrete variable on the continuous interval the sensor of a uniformly distributed continuous random value calculates a pseudo-random number which is placed in one of the subintervals in the center of which there is the number of a discrete possible value. Next, a discrete value with this number participates in calculating a function being minimized and functions of inequality type restriction. For every discrete variable calculations of a new center of search movements and the sizes of a search movement set are in the beginning made on a continuous auxiliary variable and then transition to discrete possible values is carried out. The dimension of the optimization problem with such an approach does not change. The complexity of calculations in comparison with the case when only continuous variables exist increases insignificantly. The example shows a possibility of obtaining a probability estimate close to-unity of getting the calculated variables in a small neighborhood of a true solution even at a high level of an additive noise of measuring the function being minimized.

Keywords: global optimization; continuous variables; discrete variables; selective averaging of required variables; multiextremal function; inequality type restrictions; continuous auxiliary variable; additive noise of optimized function measurement

DOI: 10.17212/1814-1196-2017-3-126-141

REFERENCES

1. Strongin R.G. *Poisk global'nogo optimuma* [Search of global optimum]. Moscow, Znanie Publ., 1990. 48 p.
2. Zhiglyavskii A.A., Zhilinskas A.G. *Metody poiska global'nogo optimuma* [Methods of search of global optimum]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 247 p.
3. Horst R., Tuy H. *Global optimization – Deterministic approaches*. 3rd ed. Berlin, Springer, 1996. 729 p.
4. Zhigljavsky A., Zilinskas A. *Stochastic global optimization*. Berlin, Springer, 2008. 269 p.

[*] *Received 20 May 2017.*

5. Sergeev Ya.D., Kvasov D.E. *Diagonal'nye metody global'noi optimizatsii* [Diagonal methods of global optimization]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 352 p.

6. Panteleev A.V. *Metaevristicheskie algoritmy poiska global'nogo ekstremuma* [Metaheuristic algorithms of search of global extremum]. Moscow, MAI-Print Publ., 2009. 159 p.

7. Weise T. *Global optimization algorithms. Theory and Application*. 3rd ed. University of Science and Technology of China, 2011. 1217 p.

8. Hansen E., Walster G.W. *Global optimization using interval analysis*. 2nd ed. New York, Marcel Dekker, 2004 (Russ. ed.: Khansen E., Uolster Dzh.U. *Global'naya optimizatsiya s pomoshch'yu metodov interval'nogo analiza*. Moscow, Izhevsk, R & C Dinamics, Institute of Computer Sciences Publ., 2012. 520 p.).

9. Leyffer S. Integrating SQP and branch-and-bound for mixed integer nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 2001, vol. 18, pp. 295–309.

10. Fletcher R., Leyffer S. Solving mixed integer nonlinear programs by outer approximation. *Mathematical Programming*, 1994, vol. 66, pp. 327–349.

11. Bagajewicz M., Manousiouthakis V. On the Generalized Benders Decomposition. *Computers and Chemical Engineering*, 1991, vol. 15 (10), pp. 691–700.

12. Westerlund T., Pettersson T. An extended cutting plane method for solving convex MINLP problems. *Computers and Chemical Engineering*, 1995, vol. 19, suppl., pp. 131–136.

13. Liberti L., Nannicini G., Mladenovic N. A good recipe for solving MINLP. *Metaheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming*. New York, Springer, 2009, pp. 231–245.

14. Rouban A.I. Method for global optimization in continuous space. *Advances in Modelling & Analysis: Series A*, 2003, vol. 40 (4), pp. 9–28.

15. Rouban A.I. *Global'naya optimizatsiya metodom usredneniya koordinat* [Global optimization by a method of averaging of coordinates]. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk State Technical University Publ., 2004. 303 p.

16. Rouban A.I. Metod global'noi optimizatsii, osnovannyi na selektivnom usrednenii koordinat pri nalichii ogranichenii [Global optimization method based on the selective averaging of coordinates with restrictions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2013, vol. 1 (22), pp. 114–123.

17. Mikhalev A.S., Rouban A.I. Algorithms of global optimization of functions on set of the mixed variables: continuous and discrete with unordered possible values. *Advances in Modelling & Analysis: Series D*, 2015, vol. 20, no. 1, pp. 56–75.

18. Mikhalev A.S., Rouban A.I. Global optimization on set of mixed variables: continuous and discrete with unordered possible values. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 122, art. 012024. doi: 10.1088/1757-899X/122/1/012024.

19. Bocharov I.N., Fel'dbaum A.A. Avtomaticheskii optimizator dlya poiska minimal'nogo iz neskol'kikh minimumov (global'nyi optimizator) [Automatic optimizer for search minimum from several minima (global optimizer)]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1962, no. 3, pp. 289–301. (In Russian).