

УДК 517.518.843:519.6

Перспективы онлайн-использования математических моделей мультипликативно-аддитивной структуры*

Р.А. НЕЙДОРФ¹, Т.А. ЩЕРБИНIN²

¹ 344000, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, Донской государственный технический университет, доктор технических наук, профессор. E-mail: rudolf.ney-dorf.44@mail.ru

² 344000, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, Донской государственный технический университет, аспирант. E-mail: sherbinin5@gmail.com

Исследуется вычислительная сложность моделей, получаемых новым, сравнительно недавно разработанным методом математического описания экспериментально полученных зависимостей. Этот метод, известный в основном под названием «cut-glue аппроксимация», основан на мультипликативном выделении локальных математических описаний выделенных некоторым образом фрагментов этих зависимостей. Каждый фрагмент аппроксимируется аналитической функцией с заданной или минимальной погрешностью. Последующий этап построения математической модели сводится к аддитивному соединению этих фрагментов в единое аналитическое выражение. В результате оказывается, что в методе аналитически разделены задачи аппроксимации выделенных участков и краевого согласования соответствующих кусочных зависимостей. Локальные модели кусочных участков описываются методами регрессионного анализа. Для их фрагментарного обособления применяются специальные аналитические функции со специфическими свойствами, которые обеспечивают мультипликативное вырезание участков локальных моделей. Свойства этих функций таковы, что позволяют их дальнейшее аддитивное объединение, в результате это обуславливает представление математической модели единой аналитической функцией. Это не только повышает точность математического описания экспериментальных данных, но и позволяет проводить аналитические исследования построенных математических моделей. Метод отличается универсальностью, так как не лимитирован ни количеством экспериментальных точек, ни структурой разбиения экспериментальных данных на фрагменты, ни порядком аппроксимирующих их функций. Недостатком метода является высокая алгебраическая сложность, которая порождает вопрос о возможном ограничении его применения при онлайн-использовании построенных с его помощью динамических моделей. В статье исследуется этот феномен и на частном примере показываются границы его применения по размерности конструируемой модели, количеству фрагментов и порядку аппроксимирующих их полиномов.

Ключевые слова: математическая модель, нелинейность, кусочная зависимость, аппроксимация, регрессия, мультипликативность, аддитивность, аналитическая функция, программное средство, оконный интерфейс, программный таймер

DOI: 10.17212/1814-1196-2017-3-142-157

* Статья получена 26 мая 2017 г.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] Нейдорфом Р.А. предложен, обоснован и подтвержден различными прикладными практическими расчетами новый метод экспериментального моделирования, ориентированный на самые сложные задачи, связанные с аппроксимацией кусочных зависимостей.

Построение математических моделей (ММ) исследуемых зависимостей значительно затрудняется, если они имеют кусочную (одномерную) или лоскутную (многомерную) структуру. В этих случаях применяется либо кусочная аппроксимация [3], либо сплайн-аппроксимация [4–6]. Оба метода исключают или сильно затрудняют аналитическое преобразование ММ. Для устранения этого недостатка был разработан и предложен исследуемый в данной статье метод, названный «cut-glue аппроксимацией» [1, 2]. Он позволяет представить кусочную зависимость одной аналитической функцией, которая имеет аддитивную структуру, составленную из мультипликативных членов. Последние получаются перемножением двух функций: основной и вспомогательной. Основная – это функция аппроксимации, которая обеспечивает математическое описание зависимости только на интервале между точками излома [7, 8]. За пределами интервала ее поведение произвольное. Вспомогательная функция «вырезает» из основной функции ее участок в пределах интервала, не искажая в нем существенно основную функцию. Кроме того, она обнуляет значения всего мультипликативного члена за границами «вырезанного» интервала. Сложение мультипликативных членов дает гладкую функцию, аппроксимирующую кусочную зависимость с необходимой точностью, которая имеет параметрическую настройку – один из аргументов вспомогательной функции.

Недостатком первоначально разработанного метода, развитого в [1, 2], являлось то, что математический аппарат решения задачи аппроксимации был развит только применительно к одномерным зависимостям, т. е. позволял строить аппроксимирующие функции одной независимой переменной. Однако часто возникает необходимость аппроксимации многомерных зависимостей [9–11]. Например, при построении ММ летательных аппаратов приходится аппроксимировать зависимости аэродинамических коэффициентов от двух, трех и более переменных [12, 13]. Другой пример построения многомерных моделей, имеющих явную кусочно-лоскутную структуру, дает задача математического описания состояния атмосферы, где в качестве параметров состояния выступают высота, давление, плотность, температура, влажность и пр. При этом профиль изменения многих параметров по высоте носит откровенно ломаный характер [1, 2, 13].

Основу предложенного в [1, 2] метода составляет мультипликативное «вырезание» фрагментов будущей математической модели исследуемой зависимости. Фрагменты «вырезаются» из функций, с высокой точностью аппроксимирующих локальные экспериментальные данные в некоторой ограниченной области. «Вырезание» осуществляется специальными вспомогательными функциями, которые с высокой точностью приближаются к единице в «вырезаемой» области и практически равны нулю во всем остальном диапазоне их области определения, которой является вся числовая ось [1, 2]. В результате умножения аппроксимирующей «вырезаемую» область функции на такую вспомогательную функцию формируется фрагмент, с высокой точностью опи-

сывающий эту область и равный нулю во всем остальном диапазоне значений аргумента. Тогда сложение таких фрагментов, имеющих общие границы, дает аналитическое выражение, описывающее исследуемую зависимость в более широком диапазоне. Необходимо только, чтобы как специальная «вырезающая», так и аппроксимирующая функции были аналитическими. Описанная концептуально процедура и представляет собой метод мультипликативно-аддитивной аппроксимации – МАА (в зарубежных публикациях автор метода описывал его под названием «cut-glue аппроксимация» – CGA).

В работах [1, 2] автор метода последовательно развивал теорию МАА применительно к одномерным задачам. Исследовались свойства используемых функций и преобразований, а также на различных прикладных задачах проверялись выработанные теоретические положения. Дальнейшие исследования были направлены на построение теории сначала двумерной [13], а затем и общей n -мерной МАА [15, 16]. Однако все эти исследования были связаны с построением исключительно алгебраических функций. Иными словами, решались задачи построения статических математических моделей (ММ). Возможность разработки динамических ММ подразумевалась, но такие примеры не рассматривались. В то же время решение многих практических задач, в том числе задач автоматического управления, связано с построением и использованием именно динамических моделей управляемых объектов. В связи с этим анализ возможностей применения cut-glue аппроксимации для построения динамических ММ следует считать актуальным.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулированная во введении проблема, связанная с наличием новой области применения разработанного эффективного метода аппроксимации нелинейных зависимостей по экспериментальным данным для построения динамических ММ, обуславливает необходимость проведения ряда дополнительных исследований:

- исследование задачи принципиальной применимости метода МАА при экспериментальном построении ММ динамики объектов (обычно объектов управления);
- исследование связи размерности и структуры ММ, полученных методом МАА с временем осуществления расчетных операций, необходимых для их онлайн-вычисления в составе динамических ММ;
- оценка возможности онлайн-использования таких ММ.

2. СУЩНОСТЬ ЗАДАЧИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО-АДДИТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Экспериментальное построение ММ различных объектов подразумевает получение информации о них в виде точечных данных определенной структуры. Общая структура данных эксперимента, проводимого в связи с построением ММ, представляет собой K записей, содержащих по два кортежа: кортеж входов (x_1, \dots, x_n) и кортеж выходов (y_1, \dots, y_m) , где K – это количество

опытов в эксперименте, x_i – независимые переменные, y_j – выходные переменные. Описание статической связи переменных требует получения функциональной зависимости каждого выхода y_j от всех входов (x_1, \dots, x_n) . Тогда каждая зависимость задается некоторой функцией φ_j , а полная ММ задается вектор-функцией Y :

$$y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n), j = \overline{1, m}, \quad (1a)$$

$$Y = \Phi(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)^T. \quad (1b)$$

Эти выражения задают общую математическую структуру экспериментальных данных. Однако при нелинейном характере зависимостей (1a) нужно учитывать также их внутреннюю структуру. При проведении пассивного эксперимента эта структура может быть совершенно неупорядоченная, в том смысле что кортежи входных данных формируются случайным образом и не связаны друг с другом зависимостями. Но при проведении активного эксперимента входные данные строятся по регулярной схеме. Тогда входные переменные оказываются связаны внутренней зависимостью по их значениям и изменение переменных в них приобретает регулярный характер. Чаще всего используют так называемый сеточный, решеточный или покоординатный принцип варьирования переменных в эксперименте.

Графическая иллюстрация экспериментальных зависимостей при таком подходе приведена на рис. 1

Интересующей исследователя выходной переменной в данном случае является сила F_x бокового смещения аэростата. Она возникает как результат влияния на эту силу определенных параметров полета: высоты h , угла крена α и скорости его подъема v . Эти параметры, как видно из графиков на рис. 1, принимают повторяющиеся значения из ограниченных рядов чисел. В результате для двумерных зависимостей можно воспользоваться матрично-векторным представлением данных. Но для трехмерных данных, иллюстрируемых примером на рис. 1, двух измерений обычной матрицы недостаточно.

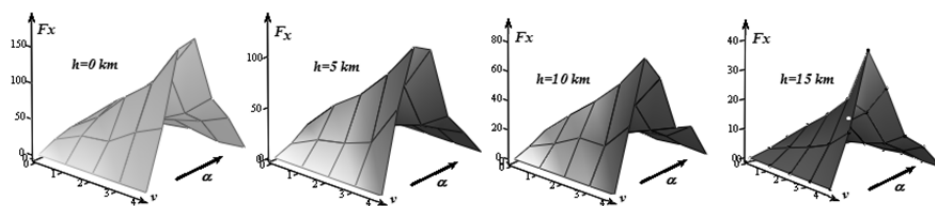


Рис. 1. Двумерные фрагменты зависимости силы бокового смещения аэростата от скорости его подъема v и угла крена α при различных высотах h

Данные, отображаемые на рис. 1, представлены в табл. 1. Ее анализ показывает, что эти данные образуют трехмерный аналог обычной матрицы. Ее изображение без 3D-представления невозможно. В обычном же представлении эти данные можно отобразить только несколькими матрицами для фиксируемых значений одного из трех параметров. По этому принципу представлены данные в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость силы бокового смещения аэростата от параметров полета

Высота полета	Скорость подъема	Угол крена α , °					
		0	15	30	45	60	75
h , км	v , м/с	$F(h)$, кН					
0	2,5	0,086	11,90	19,26	21,89	9,491	3,625
	4	0,224	30,19	46,28	57,61	22,88	12,44
	5	0,366	35,65	87,22	87,99	36,68	25,84
	6	0,550	61,54	119,43	127,3	58,23	37,38
	7,5	0,894	80,35	180,3	185,4	92,46	55,31
5	2,5	0,050	6,996	19,12	13,03	5,422	2,871
	4	0,132	20,44	47,45	33,85	14,27	9,331
	5	0,208	26,47	67,39	52,48	23,09	17,01
	6	0,300	36,71	96,68	77,62	32,76	22,34
	7,5	0,480	79,17	133,1	123,3	50,86	27,49
10	2,5	0,027	4,193	10,39	7,234	3,081	2,513
	4	0,071	12,30	27,24	18,54	8,056	5,605
	5	0,113	22,48	42,77	28,84	12,30	8,501
	6	0,166	22,96	60,82	41,88	19,97	11,48
	7,5	0,261	42,74	84,90	66,40	28,04	24,42
15	2,5	0,012	1,957	4,707	3,382	1,435	0,720
	4	0,032	5,010	11,37	8,684	3,530	2,061
	5	0,051	7,841	17,72	13,77	5,482	2,238
	6	0,074	11,35	25,56	19,89	8,192	4,371
	7,5	0,117	18,24	44,90	30,76	13,34	8,445

Табл. 1 составлена из четырех таблиц-матриц для четырех различных значений высоты h . Матрицы имеют одинаковую размерность 5×6 – по количеству варьируемых уровней аргументов v и α . При гладкой структуре аппроксимируемых зависимостей это не создает затруднений при применении математических методов. Однако все существенно затрудняется, когда данные имеют фрагментарную структуру. Под этим здесь понимается такой кусочный характер взаимного изменения расположения точечных данных, при котором явно выделяются отдельные участки зависимости. Одним из признаков необходимости выделения фрагментов можно назвать существенно различные наклоны с одной и с другой стороны линии их соприкосновения (см. рис. 1). Табличное или матричное представление не всегда позволяет это оценить,

но данное свойство хорошо различимо в графической форме, представленной на рис. 1.

Не касаясь особенностей задачи разбиения экспериментальных зависимостей на фрагменты, отметим, что каждый из выделенных фрагментов описывается уравнением типа (1a). Иными словами, структура этой системы уравнений зависит от выбранной исследователем структуры фрагментации экспериментальных данных. При существенной нелинейности моделируемой зависимости фрагменты вынужденно оказываются небольшими, т. е. поддерживаются небольшим количеством экспериментальных точек и характеризуют небольшой участок ее факторного пространства. Поэтому структура ММ фрагмента оказывается не слишком сложной. Для унификации процедуры мультипликативно-аддитивной аппроксимации удобно при математическом описании фрагментов использовать метод полиномиальной регрессии. В этом случае все ММ фрагментов будут иметь однотипную полиномиальную структуру.

Таким образом, в соответствии с парадигмой рассматриваемого метода аппроксимации [1, 2] вторым этапом метода после фрагментации является аппроксимация каждого фрагмента, выделенного в совокупности экспериментальных данных n -й размерности. Аппроксимация фрагментов осуществляется явно заданными аналитическими полиномиальными функциями вида

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n) = b_0 + \sum_i b_i x_i + \sum_{i,j} b_{i,j} x_i x_j + \dots, \quad (2)$$

где i, j, \dots – номера переменных факторного пространства, участвующих в формировании нелинейных аддитивных составляющих полинома второго, третьего и более высоких порядков.

Третьим этапом МАА является преобразование функций вида (2), полученных для каждого фрагмента, в интервально изолированные функции (ИИФ), которые достаточно точно описывают экспериментальные данные только в области факторного пространства, соответствующей положению фрагмента, а в остальной области мало отличимы от нуля. Это осуществляется мультипликативной операцией, т. е. функция (2) умножается на специальную мультипликативно вырезающую функцию (МВФ), которая обеспечивает ИИФ указанные свойства. Основу МВФ при аппроксимации зависимости произвольного n -го порядка (n -МВФ) составляет специально сконструированная функция 1-го порядка (1-МВФ), которая получена еще в первых работах по обоснованию МАА [1–4]. Функция 1-МВФ имеет следующий вид (numerator – числитель; denominator – знаменатель):

$$\begin{aligned} \lambda(x, x_l, x_r, \varepsilon) &= 0,25 \cdot \lambda_{num}(x, x_l, x_r, \varepsilon) / \lambda_{det}(x, x_l, x_r, \varepsilon), \\ \lambda_{num}(x, x_l, x_r, \varepsilon) &= \left[x - x_l + \sqrt{(x - x_l)^2 + \varepsilon^2} \right] \left[x_r - x + \sqrt{(x_r - x)^2 + \varepsilon^2} \right], \\ \lambda_{det}(x, x_l, x_r, \varepsilon) &= \sqrt{\left[(x - x_l)^2 + \varepsilon^2 \right] \left[(x_r - x)^2 + \varepsilon^2 \right]}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x_l = x_{i-1}$ и $x_r = x_i$ – левая и правая границы вырезаемого относительно оси x факторного пространства i -го интервала; ε – параметр настройки погрешности аппроксимации.

В работах [1, 2], а затем в [15] исследуются, доказываются и иллюстрируются свойства 1-МВФ, обеспечивающие ей свойства эффективного вырезания изолированных в факторном пространстве фрагментов – 1-ИИФ. Далее в работе [15] показывается, что мультипликативная функция n -МВФ, образованная несколькими 1-МВФ, сформированными по координатам факторного пространства моделируемой зависимости, может быть построена по следующему закону:

$$\lambda_{(i_1 \dots i_n)}(\vec{x}, \vec{x}_{(i_1-1, \dots, i_n-1)}, \vec{x}_{(i_1, \dots, i_n)}, \varepsilon) = \prod_{j=1}^n \lambda_{j_{i_j}}(x_j, x_{j_{i_j-1}}, x_{j_{i_j}} \varepsilon), \quad (4)$$

где нижний индекс $i_k, k = \overline{1, n}$ есть индекс интервала, который указывает на принадлежность k -й координате факторного пространства; составной индекс типа (i_1, \dots, i_n) указывает на номер n -мерного интервала соответствующей n -мерной функции или n -мерного вектора; j – номер координаты независимой переменной x_j .

Функция (4) представляет собой гиперпрямоугольный импульс, близкий единичному, в практически нулевом поле за его границами в пространстве R^{n+1} . Таким образом, используя n -ФАФ (2) и n -МВФ (4), можно мультипликативно построить ИИФ n -го порядка – n -ИИФ:

$$f_{(i_1 \dots i_n)}(\vec{x}) = \varphi_{(i_1 \dots i_n)}(\vec{x}) \cdot \lambda_{(i_1 \dots i_n)}(\vec{x}, \vec{x}_{(i_1-1, \dots, i_n-1)}, \vec{x}_{(i_1, \dots, i_n)}, \varepsilon). \quad (5)$$

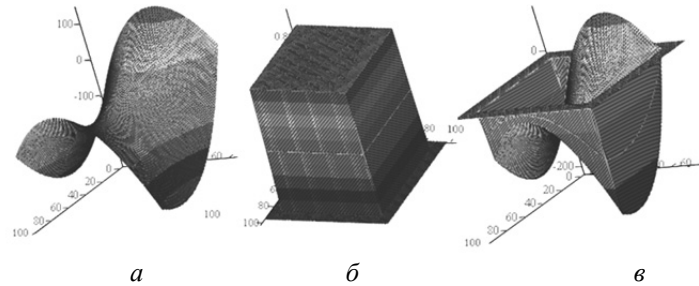


Рис. 2. Иллюстрация мультипликативного выделения из ФАФ:

a – с использованием МВФ; b – с использованием фрагментов ИИФ;
 v – для последующего аддитивного объединения (склеивания)

Определяемые выражением (5) n -ИИФ также представляют собой импульсы в R^{n+1} пространстве, как и n -МВФ (4), с тем отличием, что значения $f_{(i_1 \dots i_n)}(\vec{x})$ в пределах области определения фрагмента (i_1, \dots, i_n) практически повторяют значения исходной n -ФАФ (2). Иллюстрация этого феномена приведена на рис. 2. На рис. 1, a изображен фрагмент 2-ФАФ – поверхности, образованной функцией $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ в пространстве R^{2+1} , т. е. пространством двух факторов с третьей координатой y – непосредственно моделируемой величиной. Эта функция получается обычно методами регрессионного анализа при описании фрагмента и за его границами к исследуемой зависимости

никакого отношения не имеет. На рис. 1, б изображена 2-МВФ, которая, как видно из рисунка, представляет собою импульс-параллелепипед единичной высоты в области вырезаемого фрагмента, имеющий близкие к нулю значения во всей остальной области (бортики в нижней части параллелепипеда). Умножение 2-ФАФ на 2-МВФ приводит к получению 2-ИИФ – фрагмента, воспроизводящего моделируемую зависимость в области его определения и имеющего практически нулевые значения во всей остальной области факторного пространства (бортик на нулевом уровне рис. 1, в).

Четвертым этапом МАА является аддитивное объединение всех фрагментных ИИФ в единую функцию, описывающую моделируемую зависимость во всей области ее исследования, т. е. описывающую весь исходный массив экспериментальных данных. Таким образом, финальная модель мультипликативно-аддитивной аппроксимации является выражением суммирования n -ИИФ по всем координатам:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i_n=1}^{N_n} \dots \sum_{i_1=1}^{N_1} f_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}) = \sum_{i_n=1}^{N_n} \dots \sum_{i_1=1}^{N_1} \varphi_{i_1 \dots i_n}(\vec{x}) \cdot \prod_{j=1}^n \lambda_{j_i}(\vec{x}, x_{j_{i-1}}, x_{j_i}, \varepsilon_{j_i}). \quad (6)$$

Для наглядной иллюстрации этого этапа на рис. 3 приведены 3D-изображения, иллюстрирующие два ИИФ, выделенных из соответствующих ФАФ для двух из четырех фрагментов, а также результат этапа объединения четырех таких ИИФ (рис. 3, а и в). Кроме того, на рис. 3, б показана единая поверхность, образованная применением выражения (6) к четырем ИИФ. Поскольку данный пример взят из результатов построения трехмерной ММ, которую невозможно проиллюстрировать на плоскости, на рис. 3 приведены проекции полученных в расчетах четырехмерных фигур в трехмерное подпространство. Это пространство образовано независимыми переменными $x_1 - \alpha$ и $x_3 - \nu$, а также выходной переменной F_x . Построенные 3D-фигуры являются фактически «срезами» полученной трехмерной модели, образуемыми сечением четырехмерного пространства по фиксированному значению координаты $x_2 - h$.

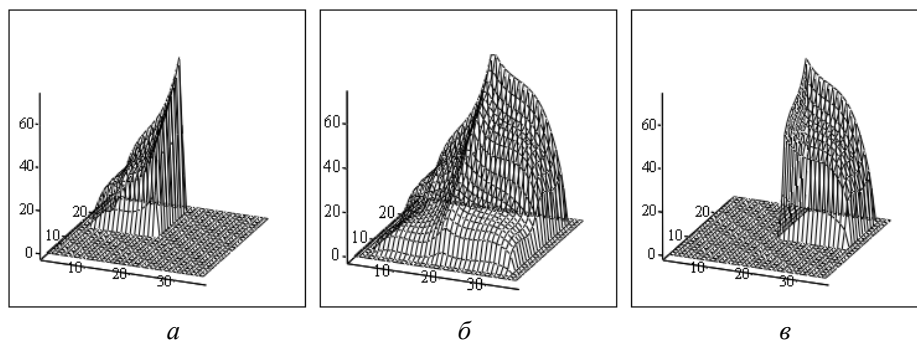


Рис. 3. Два из четырех ИИФ, аппроксимирующих зависимость силы бокового смещения аэростата F_x от скорости его подъема ν (а) и угла крена α (в) при различных высотах h (срезы получены для $h = 10$ км), а также срез на этой высоте итоговой модели (б)

3. ПРОГРАММНОЕ СРЕДСТВО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО РЕСУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО-АДДИТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Анализ выражения (6), развертываемого с помощью формул (3)–(5), показывает, что его вычислительная сложность быстро нарастает с повышением размерности, что, собственно, неудивительно. Основными факторами, обуславливающими сложность, а значит, и длительность вычислений на основе ММ (6), являются следующие ее составляющие:

1) порядок и структура ФАФ, обеспечивающих точность аппроксимации фрагментов;

2) количество фрагментов $N = \prod_{q=1}^n N_q$;

3) размерность n исследуемой зависимости;

4) математическая структура и параметры n -МВФ;

5) количество мультипликативно используемых 1-МВФ, которое быстро растет с увеличением размерности n и количества фрагментов N .

Как видно из перечня факторов, порождающих вычислительную сложность алгоритма МАА, сформулированная задача многоплановая и достаточно сложная для аналитических методов решения. Поэтому принято решение провести предварительное ее исследование с помощью прямого вычислительного эксперимента. Для этого разработано вспомогательное программное средство (ПС) «Тест-таймер мультипликативно-аддитивных функций» (ТТ МАФ).

Программа ТТ МАФ предназначена для измерения времени вычисления аддитивных математических конструкций, состоящих из членов, мультипликативно образованных полиномами (или другими алгебраическими функциями) и функций МВФ структуры. Программа является 32-битной и выполнена в однопоточном режиме. Ее главное окно ПС показано на рис. 4.

При первом запуске программы создаются файлы настроек settings.ini и settings_func.ini, которые содержат параметры используемых тестов и функций. При последующих запусках программы настройки автоматически сохраняются в данных файлах.

Графический интерфейс позволяет задавать шаблон МАФ в секции Pattern of multiplicatively cutting function в строковом представлении (так как данная функция меняется довольно редко, то она может быть скрыта с графического интерфейса кнопкой hide). Таблица Parameters of approximation functions позволяет просматривать и изменять аппроксимирующие функции и их параметры (левые и правые границы применения функции по каждому измерению). Колонка use позволяет выбирать используемые для текущего теста функции. Так как функции могут быть достаточно громоздкими и не помещаться полностью на экране, то для полного просмотра выбранной функции используется секция Function viewer (функция выбирается щелчком мыши). С помощью кнопок Add function, Delete function, Edit function можно соответственно добавить новую функцию, удалить или изменить выбранную аппроксимирующую функцию.

При нажатии кнопки создания/редактирования функции вызывается вспомогательное окно для работы с выбранным полиномом, представленное на рис. 5.

В таблице Function показана текущая функция. Секция String pattern позволяет задать шаблон индексов коэффициентов полинома, а секция Polynomial's coefficients задает коэффициенты полинома для текущего шаблона. После нажатия кнопки Generate polynomial from coeffs генерируется полином с заданными коэффициентами, который можно проверить в секции Result polynomial. Ниже в таблице Borders можно задать значения левой и правой границ текущего полинома.

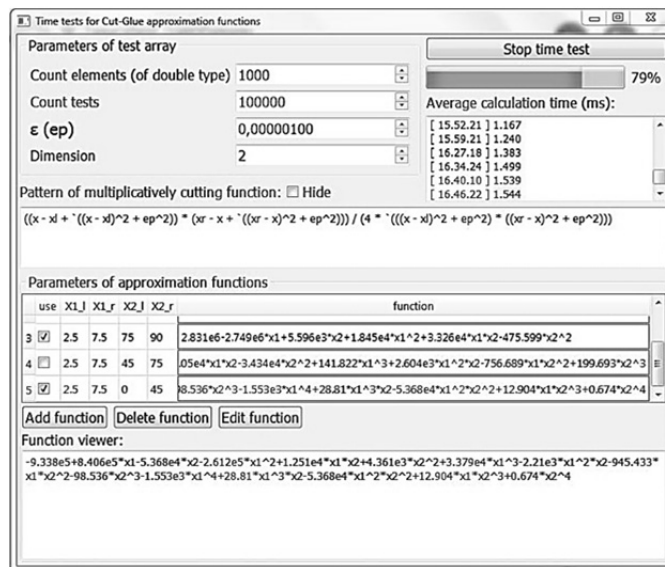


Рис. 4. Главное окно программы ТТ МАФ

Кнопка Generate canonical polynomial позволяет сгенерировать канонический полином заданной степени (Polynom degree) со всеми коэффициентами. Возможная степень полинома находится в интервале [1, 5].

Интерпретатор программы понимает все базовые математические операции: сложение (+), умножение (*), деление (/), смена знака (+/-), возведение в степень (^), взятие квадратного корня (sqrt), а также использование круглых скобок для определения порядка операций. Числа могут быть представлены как в целочисленном, так и в вещественном форматах (целая часть отделяется от дробной знаком '.'). Для вещественных чисел поддерживается экспоненциальная форма записи. Также интерпретатор поддерживает некоторые константы: ε (обозначается символом «ер»), левая и правая граница функции (обозначаются символами xl, xr).

Секция Parameters of test array содержит параметры тестирования для выбранных функций. К ним относятся количество элементов массива (Count elements), для которых будет вычислено значение функции; количество тестовых прогонов программы (Count tests) для нахождения времени выполнения функций и значение параметра ε.

После нажатия кнопки Start/Stop time test начинается запуск / остановка процесса тестирования времени выполнения с заданными параметрами. Ниже

данной кнопки показывается текущая стадия данного процесса в процентном выражении.

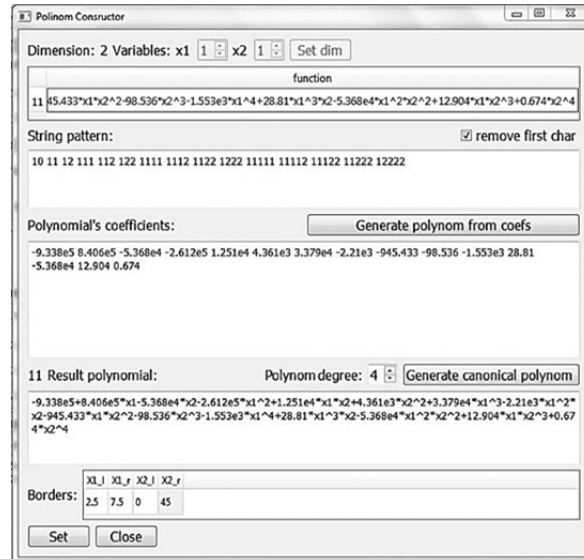


Рис. 5. Вспомогательное окно создания аппроксимирующего полинома

Секция Average calculation time (ms) показывает время последнего завершённого теста и среднее время, затраченное на один тест в миллисекундах.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО РЕСУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО-АДДИТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

На скриншотах главного и вспомогательного окон ПС ТТ МАФ зафиксирован промежуточный этап тестового исследования времени выполнения отдельных вычислений в ходе МАА условных экспериментальных данных, разбитых на пять фрагментов, также условных. Чтобы исследовать влияние порядка аппроксимирующего полинома на время вычисления аппроксимирующей функции, для пяти фрагментов введены через вспомогательное окно создания полинома (рис. 5) пять полиномов вида (2), имеющих размерность 2 и порядки от нулевого до четвертого (см. окно function на рис. 4). Первый полином нулевого порядка состоит из одного свободного члена – $y = b_0$; второй полином первого порядка содержит только линейные члены: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$. Третий полином второго порядка виден в окне functions главного окна программы. Четвертый и пятый полиномы третьего и четвертого порядка, соответственно, тоже частично видны в этом окне. Полная структура пятого полинома видна на рис. 5 в окне Result polynomial:.

Вычислительный алгоритм программы состоит в том, что в соответствии с заданной размерностью n аппроксимируемой зависимости и с введенными в окне рис. 5 границами (левой и правой) фрагментов по координатам (Borders: на рис. 5) для каждого фрагмента формируются n -МВФ (структура мультипликативной функции 1-МВФ показана в окне Pattern of multiplicatively cut-

ting function на рис. 4). Введенные через вспомогательное окно и показываемые в главном окне ПС (Parameters of approximation functions) полиномы ФАФ умножаются на n -МВФ. При этом формируются ИИФ, которые складываются.

Программное средство ТТ МАФ позволяет включать или не включать каждый из полиномов в расчет. Например, на рис. 4 видно, что ФАФ номер 4 в расчет не включена (сведения о ФАФ номер 1 и 2 можно получить, воспользовавшись линейкой прокрутки). В результате введенный в ПС пример позволяет промоделировать множество различных комбинаций набранных полиномов и оценить зависимость времени расчета модели от всех указанных выше пяти ее характеристик. Параметры расчета выходного значения модели соответствуют значениям, указанным на рисунках.

Результаты исследования сведены в таблицу 2, состоящую из двух блоков по три строки. Первая строка – это порядковый номер рассчитываемой модели (строки с 14-й по 19-ю видны в окне Average calculation time (ms):). Вторая строка содержит цифровые коды моделируемых выражений, которые формируются простановкой отметок в квадратных окнах use. Последовательность цифр указывает на включенные в ММ полиномы (по номеру). Третья строка показывает среднее по ста тысячам тестов время расчета одного теста, состоящего из тысячи случайно сгенерированных точек (x_1, x_2). Время выводится в миллисекундах. Поскольку тест состоит из тысячи однократных расчетов, получаем время одного вычисления в микросекундах.

Поскольку свободный член никаких расчетов, кроме умножения на МВФ, не требует, его время вычисления можно взять за основу. Тогда анализ данных табл. 2 показывает, что время вычисления, например, 2-МВФ составляет порядка 0,4 мкс, следовательно, время вычисления 1-МВФ $\sim 0,2$ мкс. Увеличение порядка полинома в ММ приводит к нарастающей схеме увеличения временных затрат: «0...1» – 0,032 мкс, «1...2» – 0,049 мкс соответствует сумме уже полученных оценок. Некоторые отклонения в соответствии временных и сложностных оценок объясняются наличием переменной фоновой загрузки процессора.

Таблица 2

Зависимость времени вычисления значений ММ МАА от ее структуры

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Код	1	2	3	4	5	12	23	13	14	24	34	15	25	35
Время	0,418	0,45	0,499	0,57	0,633	0,895	0,933	0,935	1,037	1,057	1,076	1,08	1,105	1,167
№	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
Код	45	123	124	234	125	235	345	1234	1235	1245	1345	2345	12345	
Время	1,24	1,383	1,499	1,539	1,544	1,598	1,72	1,977	2,059	2,164	2,205	2,189	2,647	

Для наглядности по результатам табл. 2 на рис. 6 построена гистограмма. Хорошо видно, что с увеличением сложности ММ на уровни полиномов нарастание времени происходит сравнительно плавно. Однако при смене структуры ММ, т. е. с увеличением на единицу количества объединяемых фрагментов, происходит скачкообразное увеличение времени расчета, связанное с необходимостью вычисления дополнительной 2-МВФ.



Рис. 6. Зависимость времени вычисления по ММ МАА от структуры модели сложности и ее составляющих

По результатам расчета видно, что даже самая сложная пятифрагментная модель рассчитывается немного дольше, чем 2,5 мкс. Для экспериментов использовалась 32-битная программа, которая выполнялась в однопоточном режиме на процессоре с тактовой частотой 3.30 ГГц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несложные расчеты, основанные на данных табл. 2, позволяют сделать вывод, что вычисление одного значения ММ, полученного методом МАА (или CGA), показывает, что даже достаточно сложная двумерная ММ, содержащая 100 фрагментов, описываемых полиномами четвертого порядка, будет обрабатываться за 60...65 мкс на ПК средней мощности. При третьем порядке ММ расчет займет уже 80...90 мкс, но все равно останется вполне приемлемым. Это показывает несостоятельность опасений по поводу алгебраической сложности результатов разработанного метода. Его вполне можно применять для экспериментального построения ММ до четвертой-пятой размерности при применении для описания фрагментов полиномов четвертого-пятого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейдорф Р.А. Аппроксимационное построение математических моделей по точечным экспериментальным данным методом cut-glue // Вестник ДГТУ. – 2014. – Т. 14, № 1 (76). – С. 45–58.
2. Neydorf R. "Cut-Glue" approximation in problems on static and dynamic mathematical model development // Proceedings of the ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition IMECE 2014, 14–20 November 2014. – Montreal, Quebec, Canada, 2014. – doi: 10.1115/IMECE2014-37236.
3. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация: пер. с фр. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
4. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения: пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 318 с.
5. De Boor C. A practical guide to splines. – New York: Springer-Verlag, 1978. – 392 p.

6. Cieselski Z. Spline bases in function spaces // Approximation theory / ed. by Z. Ciesielski and J. Musielak. – Dordrecht; Boston: D. Reidel; Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers, 1975. – P. 49–54.
7. Rawlings J.O., Pantula S.G., Dickey D.A. Applied regression analysis: a research tool. – 2nd ed. – New York: Springer, 1998.
8. Bates D.M., Watts D.G. Nonlinear regression analysis and its applications. – New York: John Wiley & Sons, 1988. – 365 p.
9. Дорошин А.В. Математическое моделирование в нелинейной динамике: учебное пособие. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 100 с.
10. Никульчев Е.В. Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным: монография. – М.: Моск. гос. ун-т печати, 2007. – 162 с.
11. Уалиев Г., Уалиев З.Г. Математическое моделирование динамики механических систем с переменными характеристиками. – Алматы: КазНПУ, 2006. – 275 с.
12. Кубланов М.С. Математическое моделирование задач летной эксплуатации воздушных судов на взлете и посадке: монография. – М.: МГТУ ГА, 2013. – 270 с. – ISBN 978-5-86311-908-3.
13. Neydorf R. Bivariate "Cut-Glue" approximation of strongly nonlinear mathematical models based on experimental data // SAE International Journal of Aerospace. – 2015. – Vol. 8 (1). – P. 47–54. – doi: 10.4271/2015-01-0039.
14. Каменецкий Е.С. Математические модели атмосферы над сложной подстилающей поверхностью. – Владикавказ: Владикавказ. науч. центр РАН и PCO-A, 2007. – 168 с.
15. Neydorf R., Neydorf A. Technology of Cut-Glue approximation method for modeling strongly nonlinear multivariable objects. Theoretical bases and prospects of practical application // SAE Technical Paper. – 2016. – 2016-01-2035. – doi: 10.4271/2016-01-2035.
16. Neydorf R., Neydorf A., Vučinić D. "Cut-Glue" approximation method for strongly nonlinear and multidimensional object dependencies modeling [Electronic resource] // Improved Performance of Materials: Design and Experimental Approaches. – Cham: Springer, 2017. – P. 155–173. – URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-59590-0_13 (accessed: 05.10.2017).

Нейдорф Рудольф Анатольевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации производственных процессов, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем факультета информатики и вычислительной техники Донского государственного технического университета. Основные направления научных исследований – теория автоматического управления, математическое и компьютерное моделирование, эвристические методы оптимизации. Имеет около 400 публикаций, в том числе одну монографию, 8 учебных пособий, 34 авторских свидетельства на изобретения и 28 свидетельств о регистрации программных средств. E-mail: rudolf.neydorf.44@mail.ru

Шербинин Тимофей Александрович, аспирант кафедры программного обеспечения вычислительной техники и администрирования информационных систем факультета информатики и вычислительной техники Донского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – математическое и компьютерное моделирование, нечеткая логика. Имеет более 10 публикаций, в том числе 3 свидетельства о регистрации программных средств. E-mail: sherbinin5@gmail.com

Prospects of online use of mathematical models of the multiplicative-additive structure*

R.A. NEIDORF¹, T.A. SHCHERBININ²

¹ Don State Technical University, 1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation, D.Sc. (Eng.), professor. E-mail: rudolf.neydorf.44@mail.ru

² Don State Technical University, 1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation, postgraduate student. E-mail: sherbinin5@gmail.com

In this paper we investigate computation complexity of the models obtained by the new method of mathematical description of experimentally obtained dependences. This method, known mainly as the "cut-glue" approximation, is based on the multiplicative fragmentation of local approximations of dependences. Each fragment is approximated by an analytic function with a predetermined or minimal error. The subsequent stage of constructing a mathematical model is reduced to an additive combination of these fragments into a single analytical expression. As a result, the method analytically separates the approximation problems of the selected regions and edge correlation of piecewise-defined dependencies. Local models of piecewise regions are described by regression analysis methods. For their fragmentary isolation special analytical functions with specific properties are used, which provides multiplicative cutting of local model sections. The properties of these functions are such that they allow their further additive union, which results in representing the mathematical model by a single analytic function. Not only does this increase the accuracy of mathematical description of experimental data, but also allows analytical studies of the constructed mathematical models. The method is versatile, because it is not limited by the number of experimental points, or by the structure of splitting experimental data into fragments, or by the order of its approximating functions. The disadvantage of the method is its high algebraic complexity, which might limit its usage in online and dynamic models. This article investigates this phenomenon, and shows the boundaries of its application on a particular example in terms of the dimension, number of fragments and order of the approximating polynomials of the model.

Keywords: mathematical model; non-linearity; piecewise dependence; approximation; regression; multiplicativity; additivity; analytic function; software; user interface; software timer

DOI: 10.17212/1814-1196-2017-3-142-157

REFERENCES

1. Neydorf R.A. Approksimatsionnoe postroenie matematicheskikh modelei po tochechnym eksperimental'nym dannym metodom "cut-glue" [Approximating mathematical model development according to point experimental data through "cut-glue" method]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Don State Technical University*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 45–58.
2. Neydorf R. "Cut-Glue" approximation in problems on static and dynamic mathematical model development. *Proceedings of the ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition IMECE 2014*, November 14–20, 2014, Montreal, Quebec, Canada. doi: 10.1115/IMECE2014-37236.
3. Laurent P.-J. *Approximation et optimization*. Paris, Hermann, 1972 (Russ. ed.: Loran P.-Zh. *Approksimatsiya i optimizatsiya*. Translated from French. Moscow, Mir Publ., 1975, 496 p.).
4. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. *The theory of splines and their applications*. New York, Academic Press, 1967 (Russ. ed.: Alberg Dzh, Nil'son E., Uolsh Dzh. *Teoriya splainov i ee prilozheniya*. Translated from English. Moscow, Mir Publ., 1972. 318 p.).

* Received 26 May 2017.

5. De Boor C. *A practical guide to splines*. New York, Springer-Verlag, 1978. 392 p.
6. Cieselski Z. Spline bases in function spaces. *Approximation theory*. Ed. by Z. Cieselski and J. Musielak. Dordrecht, Boston, D. Reidel, Warszawa, PWN-Polish Scientific Publishers, 1975, pp. 49–54.
7. Rawlings J.O., Pantula S.G., Dickey D.A. *Applied regression analysis: a research tool*. 2nd ed. New York, Springer, 1998.
8. Bates D.M., Watts D.G. *Nonlinear regression analysis and its applications*. New York, John Wiley & Sons, 1988. 365 p.
9. Doroshin A.V. *Matematicheskoe modelirovanie v nelineinoi dinamike* [Mathematical modeling in nonlinear dynamics]. Samara, Samara state aerospace university Publ., 2008. 100 p.
10. Nikul'chev E.V. *Geometricheskii podkhod k modelirovaniyu nelineinykh sistem po eksperimental'nym dannym* [Geometric approach to the modeling of nonlinear systems from experimental data]. Moscow, Moscow State University of Printing Arts Publ., 2007. 162 p.
11. Ualiev G., Ualiev Z.G. *Matematicheskoe modelirovanie dinamiki mekhanicheskikh sistem s peremennymi kharakteristikami* [Mathematical modeling of the dynamics of mechanical systems with variable characteristics]. Almaty, ABAI Kazakh National Pedagogical University Publ., 2006. 275 p.
12. Kublanov M.S. *Matematicheskoe modelirovanie zadach letnoi ekspluatatsii vozдушnykh sudov na vzlete i posadke* [Mathematical modeling of the problems of flight operation of aircraft on takeoff and landing]. Moscow, Moscow State Technical University of Civil Aviation Publ., 2013. 270 p. ISBN 978-5-86311-908-3.
13. Neydorf R. Bivariate "Cut-Glue" approximation of strongly nonlinear mathematical models based on experimental data. *SAE International Journal of Aerospace*, 2015, vol. 8 (1), pp. 47–54. doi: 10.4271/2015-01-0039.
14. Kamenetskii E.S. *Matematicheskie modeli atmosfery nad slozhnoi podstilayushchei poverkhnost'yu* [Mathematical models of the atmosphere over a complex underlying surface]. Vladikavkaz, Vladikavkazskii nauchnyi tsentr RAN i RSO-A Publ., 2007. 168 p.
15. Neydorf R., Neydorf A. Technology of Cut-Glue approximation method for modeling strongly nonlinear multivariable objects. Theoretical bases and prospects of practical application. *SAE Technical Paper* 2016-01-2035. doi: 10.4271/2016-01-2035.
16. Neydorf R., Neydorf A., Vučinić D. "Cut-Glue" approximation method for strongly nonlinear and multidimensional object dependencies modeling. *Improved Performance of Materials: Design and Experimental Approaches*. Cham, Springer, 2017, pp. 155–173. Available at: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-59590-0_13 (accessed 05.10.2017).