

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,
COMPUTER ENGINEERING
AND CONTROL

УДК 681.51:519.6

DOI: 10.17212/1814-1196-2018-1-19-38

Локальный регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации объекта с неточным входным сигналом*

Ю.Е. ВОСКОБОЙНИКОВ^{1,2}, Д.А. КРЫСОВ³

¹ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: voscob@mail.ru

² 630008, РФ, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: voscob@mail.ru

³ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, аспирант кафедры автоматики. E-mail: Toma-hawk.RUS@gmail.com

В качестве модели стационарной динамической системы часто выступает интегральное уравнение Вольтера первого рода с разностным ядром. Для такой модели задача непараметрической идентификации заключается в оценивании этого разностного ядра (называемого импульсной переходной функцией) по измеренным значениям входного и выходного сигналов идентифицируемой динамической системы [1]. Как известно, эта задача является некорректно поставленной, т. е. решение может не существовать, быть не единственным и обладать неустойчивостью по отношению к погрешностям (шумам измерения) исходных данных. Для получения единственного устойчивого (но приближенного) решения используются различные методы регуляризации, в частности метод регуляризации А.Н. Тихонова [2, 3]. При этом вычислительной основой алгоритмов, реализующих эти методы, является дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [4, 5]. Характерной чертой этих алгоритмов является то, что коэффициенты ДПФ регуляризованного решения зависят от одного параметра, называемого параметром регуляризации. Выбором этого параметра достигается приемлемая точность регуляризованного решения и его сходимости. При этом (применительно к рассматриваемой задаче идентификации) предполагают, что входной сигнал (ядро интегрального уравнения) задан точно, а выходной сигнал системы регистрируется с некоторой случайной ошибкой. Однако такое предположение редко выполняется на практике, так как и входной и выходной сигналы системы измеряются и регистрируются приборами примерно одинакового класса точности и, следовательно, и входной и выходной сигналы задаются с случайными погрешностями – шумами измерений. В работах автора (например, [5, 6]) для случая, когда эти шумы некоррелированы, был предложен регуляризирующий алгоритм, который учитывал эти шумы как при построении устойчивого решения, так и при оценивании оптимального параметра регуляризации. Од-

* Статья получена 12 сентября 2017 г.

нако, наличие только одного «управляющего» параметра – параметра регуляризации – не позволяет подобрать для каждого коэффициента ДПФ решения свой регуляризирующий множитель, минимизирующий ошибку вычисления этого коэффициента и всего регуляризованного решения в целом. Поэтому в данной работе предлагается подход к нахождению для каждого коэффициента ДПФ регуляризованного решения своего квазиоптимального регуляризирующего множителя из условия минимума среднеквадратической ошибки идентификации. Построена итерационная процедура уточнения отношения «шум/сигнал», входящего в регуляризирующий множитель, и находятся предельные точки этой процедуры. Выполненный вычислительный эксперимент показал более высокую точность идентификации предложенным локальным регуляризирующим алгоритмом по сравнению с регуляризирующим алгоритмом, зависящим от одного параметра регуляризации.

Ключевые слова: задача непараметрической идентификации, оптимальный регуляризирующий алгоритм, некорректно поставленные задачи, интегральное уравнение Вольтера I рода, локальный регуляризирующий алгоритм идентификации, ошибки регуляризованного решения задачи идентификации, итерационная процедура уточнения локального отношения «шум/сигнал», сходимость регуляризованного решения задачи идентификации, эффективность локального регуляризирующего алгоритма идентификации

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наиболее часто в качестве математической модели стационарной динамической системы используется интегральное уравнение Вольтера I рода с разностным ядром [1]:

$$\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad (1)$$

где $k(\tau)$ – импульсная переходная функция (ИПФ) динамической системы (ядро интегрального уравнения (1)); $\varphi(\tau)$ и $f(t)$ – входной и выходной сигналы системы. С уравнением (1) связаны две задачи:

- *обратная измерительная задача*, когда необходимо построить оценку для входного сигнала $\varphi(\tau)$ по зарегистрированным значениям функций $k(\tau)$ и $f(t)$, т. е. решить уравнение (1) относительно функции $\varphi(\tau)$;
- *задача непараметрической идентификации*, где необходимо построить оценку для ИПФ системы по зарегистрированным значениям функций $\varphi(\tau)$ и $f(t)$. Для этой задачи уравнение (1) целесообразно переписать в «симметричном» виде:

$$\int_0^t \varphi(t-\tau')k(\tau')d\tau' = f(t). \quad (2)$$

Заметим, что как первая, так и вторая задачи относятся к классу некорректно поставленных задач, когда могут нарушаться условия корректности по Адамару, в частности, появляется неустойчивость решения интегрального уравнения к погрешностям задания правой части $f(t)$ уравнений (1) и (2) [2, 3].

Для нахождения единственного и устойчивого (но приближенного) решения обратной измерительной задачи (т. е. решения уравнения (1) относительно функции $\varphi(\tau)$) используют различные методы регуляризации – как детерминированные, так и статистические [3–5]. Разностное ядро (т. е. когда $k(t - \tau)$ зависит только от разности $(t - \tau)$ и не зависит от t) интегрального уравнения (1) позволяет в качестве вычислительной базы построения регуляризованного решения использовать дискретное преобразование Фурье (ДПФ), что обуславливает (совместно с алгоритмом быстрого преобразования Фурье) высокую эффективность регуляризирующих алгоритмов (подробнее см.: [4, 5]). При этом, как правило, предполагают, что правая часть известна с некоторой погрешностью, а ядро $k(\tau)$ уравнения (1) задано точно. Эти же методы можно использовать и для решения задачи непараметрической идентификации [7], и тогда ядром уравнения (2) будет уже входной сигнал системы $\varphi(\tau)$. В этом случае делается аналогичное предположение, что входной сигнал идентифицируемой системы задан точно. Однако такое требование редко выполняется на практике, так как и входной и выходной сигналы системы измеряются и регистрируются приборами примерно одинакового класса точности и, следовательно, входной и выходной сигналы задаются с случайными погрешностями – шумами измерений.

В работах [5, 6] для обратной измерительной задачи предполагалось, что измеренные значения правой части и ядра интегрального уравнения (1) измерены с аддитивными случайными погрешностями, которые не коррелированы друг с другом. При этих предположениях был построен оригинальный регуляризирующий алгоритм (также использующий дискретное преобразование Фурье), который учитывает погрешности задания ядра уравнения не только при построении регуляризованного решения, но и при оценивании оптимального параметра регуляризации, минимизирующего СКО регуляризованного решения.

Существенной чертой этих регуляризирующих алгоритмов является наличие одного «управляющего» параметра – параметра регуляризации – для всех коэффициентов ДПФ регуляризованного решения, и это позволяет назвать (в соответствии с установившейся терминологией [8]) такие регуляризирующие алгоритмы «глобальными» в пространстве коэффициентов ДПФ (т. е. в частотной области). Подбором параметра регуляризации можно получить регуляризованное решение с минимальной ошибкой. Однако нахождение такого оптимального параметра регуляризации на практике представляет известную проблему. В литературе предложен ряд алгоритмов, позволяющих более или менее успешно оценить оптимальный параметр регуляризации, используя для этого как детерминированные, так и статистические подходы (подробнее см.: [5, 9–13]).

К сожалению, наличие только одного параметра регуляризации не позволяет подобрать для каждого вычисляемого коэффициента регуляризованного решения свой регуляризирующий множитель, минимизирующий как ошибку вычисления этого коэффициента, так и ошибку всего регуляризованного решения. Такой подбор позволил бы уменьшить общую ошибку

регуляризованного решения по сравнению с глобальными алгоритмами, а сам регуляризирующий алгоритм можно назвать локальным в частотной области.

В работе [14] для решения обратной измерительной задачи был предложен подход к построению локального регуляризирующего алгоритма при точно заданном ядре интегрального уравнения (1). Доказана сходимость регуляризованного решения к нормальному псевдорешению при стремлении уровня погрешности правой части к нулю. Проведено сравнение по точности с глобальными регуляризирующими алгоритмами. Для задачи непараметрической идентификации этот подход был применен в работе [7].

В данной работе предлагается локальный регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации (т. е. решение уравнения (2)) при неточно заданных входном и выходном сигналах идентифицируемой системы. При этом решаются следующие задачи:

- построение локального оптимального регуляризирующего алгоритма, минимизирующего среднеквадратическую ошибку регуляризованного решения;
- построение итерационного алгоритма апостериорного уточнения отношения «шум/сигнал выхода», от которого зависит локальный регуляризирующий множитель;
- доказательство сходимости построенного регуляризованного решения;
- исследование эффективности построенного локального регуляризирующего алгоритма.

2. ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ АЛГОРИТМ

В данной работе задача непараметрической идентификации рассматривается при предположении, что выходной и входной сигналы динамической системы (уравнение (2)) измерены (заданы) в дискретные моменты времени со случайными погрешностями (шумами):

$$\tilde{f}(t_i) = f(t_i) + \eta(t_i); \quad \tilde{\varphi}(\tau_j) = k(\tau_j) + \zeta(\tau_j),$$

где $\eta(t_i)$, $\zeta(\tau_j)$ – случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями σ_η^2 , σ_ζ^2 соответственно, не коррелированные друг с другом. Шаг дискретизации по аргументам t и τ одинаков и равен Δ_t .

Построение регуляризованного решения можно представить следующими «укрупненными» шагами (подробнее см.: [5]):

Шаг 1. Формирование по дискретным значениям $\tilde{f}_i = \tilde{f}(t_i)$, $\tilde{\varphi}_j = \tilde{\varphi}(\tau_j)$ периодических последовательностей $\{\tilde{f}_p(i)\}$, $\{\tilde{\varphi}_p(i)\}$, $i = 0, \dots, N-1$, где N – величина периода и взятия от этих последовательностей ДПФ, т. е. вычисление коэффициентов ДПФ $\tilde{F}_p(l)$, $\tilde{\Phi}_p(l)$, $l = 0, \dots, N-1$. Формиро-

вание периодических последовательностей осуществляется следующим образом:

$$\tilde{f}_p(i) = \begin{cases} \tilde{f}_i, & \text{если } 0 \leq i \leq N_f - 1, \\ 0, & \text{если } N_f \leq i \leq N - 1; \end{cases} \quad \tilde{\Phi}_p(i) = \begin{cases} \tilde{\Phi}_i \Delta_i N, & \text{если } 0 \leq i \leq N_\Phi - 1, \\ 0, & \text{если } N_\Phi \leq i \leq N - 1. \end{cases}$$

Используемое ДПФ определяется следующими соотношениями:

- прямое ДПФ:

$$F_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} l j\right);$$

- обратное ДПФ:

$$f_p(j) = \sum_{l=0}^{N-1} F_p(l) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} l j\right).$$

Шаг 2. Вычисление коэффициентов ДПФ $K_{p\alpha}(l)$, $l = 0, \dots, N - 1$, регуляризованного решения.

Шаг 3. Вычисление периодического регуляризованного решения $k_{p\alpha}(i)$, $i = 0, \dots, N - 1$ (взятием обратного ДПФ от последовательности $\{K_{p\alpha}(l)\}$) и формирование вектора непериодического регуляризованного решения k_{α_j} , $j = 0, \dots, N_k - 1$ как оценки для значений решения интегрального уравнения в дискретные моменты времени: $k(\tau_j)$, $j = 0, \dots, N_k - 1$.

Очевидно, что точность регуляризованного решения определяется способом вычисления коэффициентов $K_{p\alpha}(l)$ на втором шаге, которые будем находить в виде

$$K_{pq}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + q_p(l)} \tilde{F}_p(l), \quad l = 0, \dots, N - 1, \quad (3)$$

где $q_p(l)$ – стабилизирующий член, определяемый ниже. Обозначим коэффициенты ДПФ точного решения как $\bar{K}_p(l)$, и ошибку оценивания коэффициента $\bar{K}_p(l)$ определим условным математическим ожиданием

$$\Delta_{pq}(l) = M \left[|K_{pq}(l) - \bar{K}_p(l)|^2 / \tilde{\Phi}_p(l) \right] \quad (4)$$

при заданном коэффициенте ДПФ $\tilde{\Phi}_p(l)$ входного сигнала идентифицируемой системы. Справедливо

Утверждение 1. Если случайные величины $\eta(t_i)$, $\zeta(\tau_j)$ не коррелированы между собой и отсутствует корреляция в соседние моменты времени, то

$$\Delta_{pq}(l) = \frac{\left[\sigma_{Z_p}^2 |\bar{K}_p(l)|^2 + \sigma_{H_p}^2 \right] |\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + q_p^2(l) |\bar{K}_p(l)|^2}{\left[|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + q_p(l) \right]^2}, \quad (5)$$

где $\sigma_{Z_p}^2$ и $\sigma_{H_p}^2$ – дисперсии коэффициентов ДПФ периодических последовательностей $\{\zeta_p(i)\}$ и $\{\eta_p(i)\}$, которые зависят от дисперсий σ_ζ^2 и σ_η^2 следующим образом [5]:

$$\sigma_{Z_p}^2 = \frac{N_\Phi}{N^2} \sigma_\zeta^2, \quad \sigma_{H_p}^2 = \frac{N_f}{N^2} \sigma_\eta^2, \quad (6)$$

где N_f и N_Φ – количество отсчетов функций $f(t)$ и $\phi(\tau)$.

Доказательство. Обозначим через $H_p(l)$ коэффициенты ДПФ случайной последовательности $\{\eta_p(i)\}$, а $Z_p(l)$ – коэффициенты ДПФ последовательности $\{\zeta_p(i)\}$. Тогда ошибку $E_p(l) = K_{pq}(l) - \bar{K}_p(l)$ можно представить выражением

$$E_p(l) = \frac{-\tilde{\Phi}_p^c(l) Z_p(l) \bar{K}_p(l) + \tilde{\Phi}_p^c(l) H_p(l) - q_p(l) \bar{K}_p(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + q_p(l)}.$$

Возведем левую и правую части этого выражения в квадрат и вычислим условное математическое ожидание $\Delta_{pq}(l) = M \left[|E_p(l)|^2 / |\tilde{\Phi}_p(l)|^2 \right]$. Получим

$$\Delta_{pq}(l) = \frac{|\tilde{\Phi}_p^c(l)|^2 \left\{ M \left[|Z_p(l)|^2 \right] |\bar{K}_p(l)|^2 + M \left[|H_p(l)|^2 \right] \right\} + q_p^2(l) \left[|\bar{K}_p(l)|^2 \right]}{\left[|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + q_p(l) \right]^2}. \quad (7)$$

Введя обозначения дисперсий для коэффициентов ДПФ случайных последовательностей $\{\zeta_p(i)\}$, $\{\eta_p(i)\}$:

$$\sigma_{Z_p}^2 = M \left[|Z_p(l)|^2 \right], \quad \sigma_{H_p}^2 = M \left[|H_p(l)|^2 \right],$$

приходим к выражению (5) утверждения 1.

Для минимизации среднеквадратической ошибки регуляризованного решения достаточно минимизировать $\Delta_{pq}(l)$ для каждого $l = 0, \dots, N-1$. Беря частную производную от (5) по $q_p(l)$ и приравнивая эту производную нулю, получаем

Утверждение 2. Минимум $\Delta_{pq}(l)$ достигается при

$$q_{p \text{ opt}}(l) = \sigma_{Z_p}^2 + \frac{\sigma_{H_p}^2}{|\bar{K}_p(l)|^2}, \quad (8)$$

и коэффициенты ДПФ оптимального регуляризованного решения, имеющего наименьшую среднеквадратическую ошибку $\Delta_{pq}(l)$, определяются выражением

$$K_{p \text{ opt}}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_{\text{opt}}(l))} \tilde{F}_p(l), \quad (9)$$

где $\tilde{\Phi}_p^c(l)$ – величина, комплексно сопряженная с $\tilde{\Phi}_p(l)$;

$$S_{\text{opt}}(l) = S_\zeta(l) + S_\eta(l) = \frac{\sigma_{Z_p}^2}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2} + \frac{\sigma_{H_p}^2}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 \cdot |\bar{K}_p(l)|^2}. \quad (10)$$

Соотношение $S_\zeta(l)$ можно трактовать как отношение «шум / сигнал» для коэффициентов ДПФ входного сигнала, а соотношение $S_\eta(l)$ – как отношение «шум / сигнал» для коэффициентов ДПФ выходного сигнала. Алгоритм (9) вычисления коэффициентов ДПФ искомого решения можно назвать «винеровским алгоритмом», так как он минимизирует среднеквадратическую ошибку (4). Очевидно, что, взяв обратное ДПФ от коэффициентов (9), каждый из которых имеет минимальную среднеквадратическую ошибку, получим оценку для импульсной переходной функции динамической системы с наименьшей среднеквадратической ошибкой.

К сожалению, алгоритм (9) нереализуем на практике, так как в отношение «шум/сигнал» выходного сигнала (второе слагаемое в (10)) входят неизвестные коэффициенты ДПФ $\bar{K}_p(l)$ искомой импульсной переходной функции. Заметим, что такая же ситуация возникает и в «классическом» винеровском алгоритме фильтрации случайных процессов, где требуется априорное знание спектральной плотности выделяемого случайного процесса. Возникает традиционный вопрос: «Что делать?». Для ответа на этот вопрос предлагается итерационная процедура апостериорного уточнения отношения $S_\eta(l)$, которая является нетривиальным обобщением процедуры уточнения отноше-

ния «шум / сигнал», успешно используемой при вычислении регуляризованного решения обратной измерительной задачи при точно заданном ядре интегрального уравнения (1) (см. [14]).

3. ИТЕРАЦИОННОЕ УТОЧНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ «ШУМ / СИГНАЛ»

Так как отношение «шум / сигнал» коэффициентов ДПФ выходного сигнала $S_\eta(l)$ (в уравнении (10) это второе слагаемое) зависит от неизвестного коэффициента ДПФ $\bar{K}_p(l)$ точного решения, то предлагается следующая итерационная процедура апостериорного уточнения этого отношения, которая выполняется при вычислении каждого коэффициента ДПФ, т. е. для $l = 0, \dots, N-1$.

Введем величины:

$$\tilde{S}_\eta(l) = \frac{\sigma_{H_p}^2}{|\tilde{F}_p(l)|^2}, \quad \hat{S}_\eta^{(0)}(l) = \frac{\sigma_{H_p}^2}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 |\hat{K}_p^{(0)}(l)|^2}, \quad (11)$$

где $\hat{K}_p^{(0)}(l)$ – коэффициенты ДПФ «начальной» оценки $\hat{k}_p^{(0)}$ для искомой импульсной переходной функции (ее определение будет рассмотрено ниже). Перепишем выражение (9) в виде

$$K_{p \text{ opt}}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_\zeta(l) + S_\eta(l))} \tilde{F}_p(l) \quad (12)$$

и подставим $\hat{S}_\eta^{(0)}(l)$ в это выражение вместо $S_\eta(l)$. Получим коэффициенты ДПФ на первой итерации:

$$\hat{K}_p^{(1)}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_\zeta(l) + \hat{S}_\eta^{(0)}(l))} \tilde{F}_p(l).$$

Подставляя коэффициент $\hat{K}_p^{(1)}(l)$ в отношение «шум / сигнал» выходного сигнала, получаем оценку

$$\hat{S}_\eta^{(1)}(l) = \frac{\sigma_{H_p}^2}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 |\hat{K}_p^{(1)}(l)|^2}.$$

Продолжая такое итерационное уточнение отношения «шум / сигнал», получаем следующую итерационную процедуру:

$$\hat{K}_p^{(n+1)}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_\zeta(l) + \hat{S}_\eta^{(n)}(l))} \tilde{F}_p(l); \quad (13)$$

$$\hat{S}_\eta^{(n)}(l) = \frac{\sigma_{H_p}^2}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 |\hat{K}_p^{(n)}(l)|^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Возникает вопрос о сходимости этой итерационной процедуры уточнения отношения «шум / сигнал» выходного сигнала. Можно показать, что предельные точки этой процедуры определяются корнями $\hat{S}_\eta^*(l)$ нелинейного уравнения

$$\hat{S}_\eta^*(l) = \left[1 + S_\zeta(l) + \hat{S}_\eta^*(l) \right] \tilde{S}_\eta(l).$$

Выполнив несложные преобразования, приходим к квадратному уравнению

$$(\hat{S}_\eta^*(l))^2 + \left[2(1 + S_\zeta(l)) - \frac{1}{\tilde{S}_\eta(l)} \right] \hat{S}_\eta^*(l) + (1 + S_\zeta(l))^2 = 0, \quad (15)$$

корни которого обозначим при этом как $\hat{S}_{\eta 1}^*(l) \leq \hat{S}_{\eta 2}^*(l)$. Эти корни равны:

$$\hat{S}_{\eta 1}^*(l) = \frac{1 - 2(1 + S_\zeta) \tilde{S}_\eta - \sqrt{1 - 4(1 + S_\zeta) \tilde{S}_\eta}}{2 \tilde{S}_\eta},$$

$$\hat{S}_{\eta 2}^*(l) = \frac{1 - 2(1 + S_\zeta) \tilde{S}_\eta + \sqrt{1 - 4(1 + S_\zeta) \tilde{S}_\eta}}{2 \tilde{S}_\eta}$$

при очевидном условии их вещественности

$$(1 + S_\zeta) \tilde{S}_\eta \leq \frac{1}{4}.$$

Тогда из выражений (9), (10) следует

Утверждение 3. Предельная точка \hat{K}_p^* итерационной процедуры (13) определяется выражением

$$\hat{K}_p^*(l) = \begin{cases} \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_\zeta(l) + \hat{S}_{\eta 1}^*(l))} \tilde{F}_p(l), & \text{если } \hat{S}_\eta^{(0)} < \hat{S}_{\eta 2}^*(l) \\ & \text{и } \tilde{S}_\eta(l) (1 + S_\zeta(l)) \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_\zeta(l) + \hat{S}_{\eta 2}^*(l))} \tilde{F}_p(l), & \text{если } \hat{S}_\eta^{(0)} = \hat{S}_{\eta 2}^*(l) \\ & \text{и } \tilde{S}_\eta(l) (1 + S_\zeta(l)) \leq \frac{1}{4}; \\ 0, & \text{если } \tilde{S}_\eta(l) (1 + S_\zeta(l)) \leq \frac{1}{4}, \quad \hat{S}_\eta^{(0)} > \hat{S}_{\eta 2}^*(l); \\ 0, & \text{если } \tilde{S}_\eta(l) (1 + S_\zeta(l)) > \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (16)$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству в работах [14], но с учетом отношения «шум / сигнал» входного сигнала идентифицируемой системы.

Взяв обратное ДПФ от последовательности $\{\hat{K}_p^*(l)\}$, получаем периодическую последовательность $\{\hat{k}_p^*(i)\}$, из которой формируется оценка $\hat{k}^*(\tau_i)$ для импульсной переходной функции динамической системы в дискретные моменты времени:

$$\hat{k}^*(\tau_i) = \hat{k}_p^*(i), \quad i = 0, \dots, N_k - 1.$$

Заметим, что соотношение (16) позволяет, не выполняя итераций (13) и (14), сразу вычислить предельную точку итерационной процедуры, что существенно уменьшает затраты на вычисление коэффициентов ДПФ $\hat{K}_p^*(l)$.

Для того чтобы предлагаемый локальный алгоритм идентификации был регуляризирующим, необходимо убедиться в сходимости решения $\hat{k}^*(\tau)$ к «точной» ИПФ $\bar{k}(\tau)$ при стремлении уровней шумов измерений входного и выходного сигналов идентифицируемой системы к нулю. Определим среднеквадратическую сходимость построенного решения как

$$M \left[\left\| \hat{k}^* - \bar{k} \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma_\eta^2, \sigma_\zeta^2 \rightarrow 0, \quad (17)$$

где \hat{k}^* , \bar{k} – векторы размерности N_k , составленные из значений $\hat{k}^*(\tau_i)$, $\bar{k}(\tau_i)$ соответственно.

Утверждение 4. Если начальный вектор $\hat{k}^{(0)}$, составленный из значений $\hat{k}^{(0)}(\tau_i)$ «стартовой» функции $\hat{k}^{(0)}(\tau)$, сходится в среднеквадратическом к вектору точного решения \bar{k} , т. е.

$$M \left[\left\| \hat{k}^{(0)} - \bar{k} \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma_{\eta}^2, \sigma_{\xi}^2 \rightarrow 0, \quad (18)$$

то имеет место сходимость (17).

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству в работе [14], но с учетом отношения «шум / сигнал» входного сигнала идентифицируемой системы.

Таким образом, предложенный алгоритм построения решения является регуляризирующим, и его можно назвать *квазиоптимальным локальным регуляризирующим алгоритмом*. Слово «квазиоптимальный» отражает итерационное уточнение отношения «шум / сигнал» выходного сигнала идентифицируемой системы.

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДЛАГАЕМОГО АЛГОРИТМА

Приведенный локальный регуляризирующий алгоритм достаточно прост в вычислительной реализации. Однако он включает два момента, которые могут вызвать затруднения при практическом его использовании.

Первое затруднение обусловлено тем, что ряд соотношений (например, (10), (11), (14)) включают дисперсии $\sigma_{Z_p}^2$ и $\sigma_{H_p}^2$ соответствующих коэффициентов ДПФ, и для их вычисления необходимо задание дисперсий σ_{η}^2 и σ_{ξ}^2 , которые, как правило, неизвестны или известны с большой ошибкой.

Второе затруднение вызвано необходимостью задать такой «стартовый» вектор $\hat{k}^{(0)}$ для итерационной процедуры, который бы удовлетворял условию (18).

Для устранения первого затруднения приведем оценки для $\sigma_{Z_p}^2$ и $\sigma_{H_p}^2$, являющиеся обобщением оценки, построенной в работе [5]. Вначале рассмотрим последовательность $\{\tilde{f}_p(i)\}$, элементы которой можно представить как сумму элементов последовательности «точной» правой части и элементов последовательности шума правой части, т. е.

$$\tilde{f}_p(i) = f_p(i) + \eta_p(i).$$

Так как шум измерения $\eta(t)$ имеет более широкий спектр мощности, то коэффициенты ДПФ $\tilde{F}_p(l)$ правой части интегрального уравнения в некоторой окрестности точки $l = N/2$ определяются только погрешностями $\eta(t_j)$.

В качестве иллюстрации этого положения на рис. 1 показан график квадрата модуля $|\tilde{F}_p(l)|^2$ при $N = 256$.

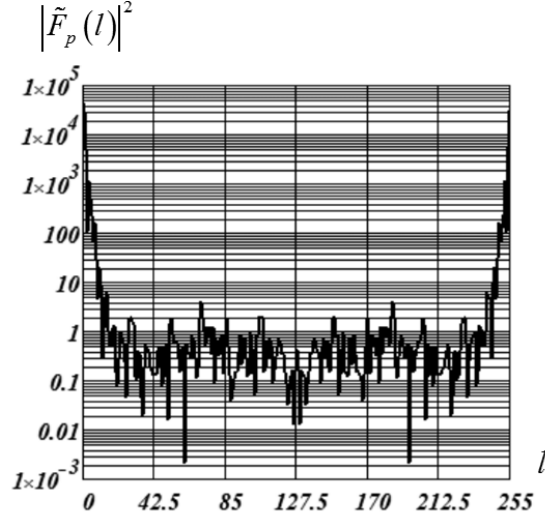


Рис. 1. Графики значений $|\tilde{F}_p(l)|^2$ выходного сигнала

Видно, что

- $|\tilde{F}_p(l)|^2$ симметричен относительно точки $l = N/2 = 128$;
- в диапазоне значений $l \in [30, 220]$ коэффициенты $|\tilde{F}_p(l)|^2$ в основном обусловлены шумом правой части (так как колеблются относительно постоянного уровня, примерно равного 0,3) и могут быть использованы для построения оценки для $\sigma_{H_p}^2$.

Поэтому оценку для $\sigma_{H_p}^2$ определим как

$$D_H(L_H) = \frac{1}{2L_H + 1} \sum_{l=-L_H}^{L_H} \left| \tilde{F}_p\left(\frac{N}{2} + l\right) \right|^2. \quad (19)$$

Можно показать, что при сделанном выше предположении и соответствующем выборе L_H величина $D_H(L_H)$ является несмещенной оценкой для $\sigma_{H_p}^2$.

Так как оценка $D_H(L_H)$ является случайной величиной, то был проведен многочисленный эксперимент по вычислению выборочного среднего

$$m_H(L_H) = \frac{1}{N_{sam}} \sum_{l=1}^{N_{sam}} D_H^{(l)}(L_H),$$

где оценка $D_H^{(l)}(L_H)$ вычисляется по l -й реализации правой части, и выборочного среднеквадратического отклонения $s_H(L_H)$ по формуле

$$s_H(L_H) = \sqrt{\frac{1}{N_{sam} - 1} \sum_{l=1}^{N_{sam}} \left[D_H^{(l)}(L_H) - m_H(L_H) \right]^2}$$

этой случайной величины для разных уровней шума и форм выходного сигнала. На рис. 2 показаны типичные графики этих выборочных характеристик (объем выборки $N_{sam} = 50$) как функции от величины L_H .

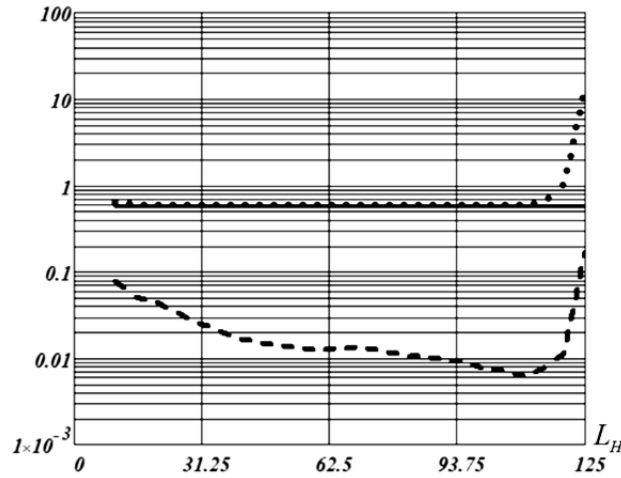


Рис. 2. Выборочные характеристики оценки $D_H(L_H)$

Точное значение дисперсии $\sigma_{H_p}^2$ определялось по формуле (6) и было равно 0,581 (на рис. 2 сплошная прямая). Значения $m_H(L_H)$ на рисунке показаны точечной кривой, а значения $s_H(L_H)$ — штриховой кривой. Видно, что при первоначальном увеличении L_H точность оценки увеличивается за счет увеличения объема выборки, равного $2L + 1$, при этом смещение оценки (т. е. разница $\sigma_{H_p}^2 - m_H(L_H)$) остается незначительным. При дальнейшем увеличении L_H ($L_H > 110$) появляется заметное смещение оценки (т. е. уменьшение точности оценки) из-за включения в выборку коэффициентов ДПФ, содержащих информацию о точной правой части. На практике можно рекомендовать выбирать L_H из интервала $[N/4, N/3]$.

По аналогии в качестве оценки для дисперсии $\sigma_{Z_p}^2$ можно принять величину

$$D_Z(L_Z) = \frac{1}{2L_Z + 1} \sum_{l=-L_Z}^{L_Z} \left| \tilde{\Phi}_p \left(\frac{N}{2} + l \right) \right|^2. \quad (20)$$

На практике можно рекомендовать выбирать L_Z также из интервала $[N/4, N/3]$.

Таким образом оценки (19) и (20) позволяют преодолеть затруднения, возникающие при построении предложенного локального алгоритма идентификации и обусловленные незнанием величин дисперсий шумов измерений входного и выходного сигналов идентифицируемой системы.

Второе затруднение, связанное с заданием «стартового» вектора $\hat{k}^{(0)}$, который должен удовлетворять условию (17), можно преодолеть, приняв в качестве $\hat{k}^{(0)}$ вектор регуляризованного решения k_α . Это решение строится с использованием глобального регуляризирующего алгоритма [5, 6], который учитывает шум измерения входного сигнала не только при нахождении устойчивого решения, но и при выборе параметра регуляризации. Построенный на основе критерия оптимальности алгоритм выбора параметра регуляризации гарантирует среднеквадратическую сходимость k_α к точному решению при $\sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2 \rightarrow 0$. Таким образом, вектор $\hat{k}^{(0)} = k_\alpha$ будет удовлетворять условию (17) и может быть принят в качестве «стартового» вектора для итерационной процедуры (13) и (14).

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ

Для обоснованного применения предложенного локального алгоритма идентификации на практике необходимо ответить на вопрос: как соотносятся между собой ошибки идентификации локальным регуляризирующим алгоритмом и глобальным регуляризирующим алгоритмом [5, 6], который также учитывает шум измерения входного сигнала как при нахождении устойчивого решения, так и при выборе параметра регуляризации. Для ответа на этот вопрос был проведен обширный вычислительный эксперимент по построению регуляризованных решений двумя этими алгоритмами и сравнению ошибок этих решений. Остановимся на некоторых результатах этого эксперимента.

В качестве импульсной переходной функции использовались два вида функций, графики которых приведены на рис. 3: «гладкая» ИПФ – кривая 1 (будем обозначать ИПФ1); «колебательная» ИПФ – кривая 2 (ИПФ2). Входной сигнал задавался двумя функциями: «узкополосным» сигналом – кривая 1 на рис. 4 (обозначим ВХОД1) и «широкополосным» – кривая 2 на рис. 4 (обозначим ВХОД2). Такой выбор входных сигналов был обусловлен тем, что для широкополосного сигнала при прочих равных условиях точность оценивания ИПФ возрастает. Количество отсчетов $k(\tau_j)N_k = 100$, количество отсчетов входного сигнала $\varphi(\tau_j)N_\varphi = 60$, $N_f = N_\varphi + N_k - 1 = 159$ и $N = 256$. Шаг дискретизации $\Delta_t = 0,022$. Шумы измерения как входного, так и выходного сигналов моделировались псевдослучайными величинами с нормальным распределением, нулевым средним и дисперсией, определяемой

относительными уровнями шума. При этом относительные уровни шума правой части δ_f и шума измерения входного сигнала δ_φ определялись соотношениями $\delta_f = \frac{\|\eta\|}{\|f\|}$ и $\delta_\varphi = \frac{\|\zeta\|}{\|\varphi\|}$, где f и φ – векторы размерности N_f и N_φ , составленные из значений $f(t_i)$ и $\varphi(\tau_j)$ соответственно; $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Точность решения k_{α_W} (глобальный регуляризирующий алгоритм с параметром регуляризации α_W , вычисленным на основе критерия оптимальности [5, 6]) определялась относительной ошибкой $\delta_k(\alpha_W) = \frac{\|k_{\alpha_W} - \bar{k}\|}{\|\bar{k}\|}$, точность решения \hat{k}^* (предложенный алгоритм идентификации) – $\delta_k^* = \frac{\|\hat{k}^* - \bar{k}\|}{\|\bar{k}\|}$. Для сопоставления этих двух ошибок введем коэффициент эффективности K_{eff} локального алгоритма идентификации, определяемый соотношением

$$K_{eff} = \frac{\delta_k(\alpha_W)}{\delta_k^*} = \frac{\|k_{\alpha_W} - \bar{k}\|}{\|\hat{k}^* - \bar{k}\|}. \quad (21)$$

Если $K_{eff} > 1$, то предпочтение следует отдать локальному алгоритму идентификации, в противном случае – глобальному алгоритму.

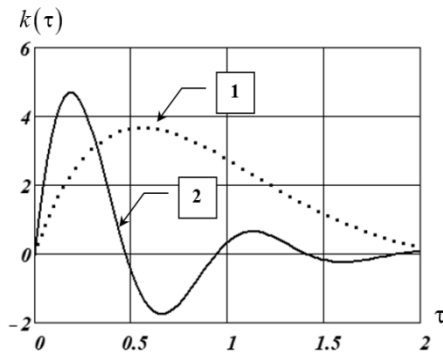


Рис. 3. Импульсные переходные функции $k(\tau)$

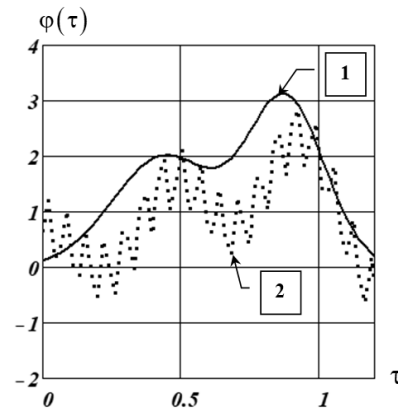


Рис. 4. Входные сигналы системы

Заметим, что коэффициент K_{eff} является случайной величиной, значение которой меняется от одной реализации шумов измерений к другой. По-

этому в качестве неслучайной характеристики использовалось выборочное среднее \bar{K}_{eff} , определяемое выражением

$$\bar{K}_{eff} = \frac{1}{N_{sam}} \sum_{l=1}^{N_{sam}} K_{eff}^{(l)},$$

где $K_{eff}^{(l)}$ – коэффициент эффективности, вычисленный по l -й реализации шумов измерений. Объем выборки в эксперименте $N_{sam} = 50$.

В работе [15] было показано следующее:

- большее влияние на ошибку идентификации оказывает уровень шума измерения правой части, чем уровень шума входного сигнала;
- если уровень шума измерения входного сигнала меньше или соизмерим с уровнем шума выходного сигнала, то значения параметров регуляризации, при которых достигаются минимальные ошибки идентификации практически совпадают как для точно заданного, так и неточно заданного входных сигналов (хотя сами ошибки идентификации различны).

Поэтому в вычислительном эксперименте принимался высокий относительный уровень шума входного сигнала $\delta_\varphi = 0,10$ (чтобы влияние этого шума на ошибку идентификации проявилось в полной мере), а уровни шума выходного сигнала δ_f задавались равными 0,02; 0,05 и 0,10.

В табл. 1 приведены средние значения коэффициента эффективности \bar{K}_{eff} при идентификации ИПФ1 с двумя входными сигналами ВХОД1 и ВХОД2, а в табл. 2 – при идентификации ИПФ2.

Таблица 1

Коэффициенты эффективности при идентификации ИПФ1

Уровень шума δ_f	Значения коэффициента эффективности \bar{K}_{eff}	
	ВХОД1	ВХОД2
0,02	1,12	1,15
0,05	1,09	1,11
0,10	1,05	1,06

Таблица 2

Коэффициенты эффективности при идентификации ИПФ2

Уровень шума δ_f	Значения коэффициента эффективности \bar{K}_{eff}	
	ВХОД1	ВХОД2
0,02	1,14	1,15
0,05	1,11	1,12
0,10	1,07	1,08

Анализируя приведенные значения \bar{K}_{eff} , можно сделать следующие выводы:

- для всех уровней шума правой части и используемых входных сигналов более предпочтительным является локальный регуляризирующий алгоритм идентификации (так как $\bar{K}_{eff} > 1$);
- по мере увеличения уровня шума измерения правой части значение коэффициента эффективности уменьшается, но он остается больше единицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный локальный регуляризирующий алгоритм идентификации имеет высокую вычислительную эффективность, обусловленную как алгоритмом быстрого преобразования Фурье (для вычисления прямого и обратного ДПФ), так и алгоритмом вычисления коэффициентов ДПФ регуляризованного решения (достаточно простые скалярные вычисления). Он позволяет строить устойчивые решения с ошибками, меньше чем ошибки регуляризованных решений, зависящие только от одного параметра регуляризации. Алгоритм может быть использован для параметрической идентификации динамической системы, математической моделью которой выступает интегральное уравнение Фредгольма I рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Greblicki W., Pawiak M. Nonparametric system identification. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 400 p.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1979. – 278 с.
3. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончаровский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 231 с.
4. Морозов В.А., Гребенников А.И. Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 319 с.
5. Воскобойников Ю.Е. Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач. – Новосибирск: Сибстрин, 2007. – 184 с.
6. Воскобойников Ю.Е., Литасов В.А. Устойчивый алгоритм восстановления изображений при неточно заданной аппаратной функции // Автометрия. – 2006. – № 6. – С. 13–22.
7. Воскобойников Ю.Е., Литасов В.А. Регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации при неточных исходных данных // Научный вестник НГТУ. – 2005. – № 2 (20). – С. 33–45.
8. Арсенин В.Я., Криксин Ю.А., Тимонов А.А. Метод локальной регуляризации линейных операторных уравнений и его приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28, № 6. – С. 793–802.
9. Information complexity-based regularization parameter selection for solution of ill conditioned inverse problems / A.M. Urmanov, A.V. Gribok, H. Bozdogan, J.W. Hines, R.E. Uhrig // Inverse Problems. – 2002. – Vol. 18, N 2. – P. L1–L9.
10. Vogel C.R. Non-convergence of L-curve regularization parameter selection method // Inverse Problems. – 1996. – Vol. 12, N 4. – P. 535–547.
11. Lukas M.A. Comparison of parameter choice methods for regularization with discrete noisy data // Inverse Problems. – 2000. – Vol. 14, N 2. – P. 161–184.
12. Engl H.W., Hanke M., Neubauer F. A regularization of inverse problems. – Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 383 p.

13. Титаренко В.Н., Ягола А.Г. Применение метода GVC для корректных и некорректных задач // Вестник МГУ. Серия 3, Физика, астрономия. – 2000. – № 4. – С. 15–18.
14. Voskoboïnikov Yu.E., Mukhina I.N. Regularizing algorithm for image and signal reconstructions with refinement of the local noise to signal ratios // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 1999. – N 4. – P. 60–70.
15. Воскобойников Ю.Е., Крысов Д.А. Непараметрическая идентификация динамической системы при неточном входном сигнале // Автоматика и программная инженерия. – 2017. – № 4 (22). – С. 86–93.

Воскобойников Юрий Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики НГАСУ (Сибстрин), профессор кафедры автоматизации Новосибирского государственного технического университета, заслуженный работник Высшей школы РФ. Основные направления научных исследований: решение некорректных задач интерпретации данных, задачи вычислительной томографии и идентификации динамических систем, фильтрация сигналов и изображений. Имеет более 290 научных публикаций, 6 монографий, 16 учебников и учебных пособий. E-mail: voscob@mail.ru

Крысов Данила Алексеевич, аспирант кафедры автоматизации Новосибирского государственного технического университета. E-mail: Tomahawk.RUS@gmail.com

DOI: 10.17212/1814-1196-2018-1-19-38

A local regularizing algorithm of nonparametric identification of an inaccurate input signal object*

YU.E. VOSKOBOINIKOV^{1,2}, D.A. KRYSOV³

¹ Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Phys. & Math.), professor. E-mail: voscob@mail.ru

² Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (SIBSTRIN), 113, Lenin-gradskaya Street, Novosibirsk, 630008, Russian Federation, D. Sc. (Phys. & Math.), professor. E-mail: voscob@mail.ru

³ Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, PhD student. E-mail: Tomahawk.RUS@gmail.com

As a model of a stationary dynamical system, Volterra Integral Equation of the First Kind with a difference kernel is often used. For such a model, the problem of nonparametric identification consists in estimating this difference kernel (called the impulse response function) from the measured values of the input and output signals of an identifiable dynamical system. As you know, this problem is ill-posed, i.e. the solution may not exist, be not a unique one and be unstable with respect to the errors (measurement noise) of the original data. To obtain a unique stable (but approximate) solution, various methods of regularization are used, in particular, the A.N. Tikhonov regularization method [1, 2]. In this case, the computational basis of the algorithms implementing these methods is the discrete Fourier transform (DFT) [3, 4]. A characteristic feature of these algorithms is that the DFT coefficients of the regularized solution depend on one parameter called the regularization parameter. By choosing this parameter, an acceptable accuracy of the regularized solution and its convergence are achieved. In this case (with respect to the identification problem under consideration) it is assumed that an input signal (the kernel of the integral equation) is specified exactly, and an output signal of the system is recorded with some random error. However, this assumption is rarely satisfied in practice as

* Received 12 September 2017.

the input and output signals of the system are measured and recorded by devices of approximately the same accuracy class and, consequently, both input and output signals are prescribed with arbitrary measurement noises. In the works of the author (for example, [4-6]), for the case when these noises were not correlated, a regularizing algorithm was proposed which took noises into account both in finding a stable solution and in estimating an optimal regularization parameter. However, the presence of only one control parameter, i.e. the regularization parameter, does not allow us to select a regularizing factor for every DFT coefficient that minimizes an error in calculating this coefficient and the entire regularized solution as a whole. Therefore, in this paper we propose an approach to finding a regularized solution of its quasi-optimal regularizing factor based on the condition of a minimum root-mean-square identification error for every DFT coefficient. An iterative procedure is developed for the signal-to-noise ratio relation included in the regularizing factor and the limit points of this procedure are found. The computational experiment performed showed a higher accuracy of identification by the proposed local regularizing algorithm in comparison with the regularizing algorithm which depends on one regularization parameter.

Keywords: Nonparametric identification, optimal regularizing algorithm, ill-posed problems, local regularization algorithm for identification, Volterra integral equation of the first kind, iterative procedure for calculation of the local Signal-to-Noise ratio, convergence of the regularized solution of the identification problem, efficiency of the local regularization algorithm for identification.

REFERENCES

1. Greblicki W., Pawlak M. *Nonparametric system identification*. Cambridge, Cambridge University Press, 2008. 400 p.
2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektno postavlennoy zadachi* [Methods for the Solution of Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 278 p.
3. Tikhonov A.N., Goncharovskii A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 231 p.
4. Morozov V.A., Grebennikov A.I. *Metody resheniya nekorrektno postavlennoy zadachi: algorit-micheskiy aspekt* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, MSU Publ., 1992. 319 p.
5. Voskoboinikov Yu.E. *Ustoichivyye algoritmy resheniya obratnykh izmeritel'nykh zadach* [A stable algorithms for solving inverse measurement problems]. Novosibirsk, SIBSTRIN Publ., 2007. 184 p.
6. Voskoboinikov Yu.E., Litasov V.A. Ustoichivyyi algoritm vosstanovleniya izobrazhenii pri netochno zadannoi apparatnoi funktsii [A stable image reconstruction algorithm for inexact point-spread function]. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2006, no. 6, pp. 13–22. (In Russian).
7. Voskoboinikov Yu.E., Litasov V.A. Regulyariziruyushchii algoritm neparametricheskoi identifikatsii pri netochnykh iskhodnykh dannyykh [Regularizing algorithm for nonparametric identification with inaccurate initial data]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2005, no. 2 (20), pp. 33–45.
8. Arsenin V.Ya., Kriksin Yu.A., Timonov A.A. A local regularization method for linear operator equations of the first kind and its applications. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1988, vol. 28, iss. 3, pp. 113–125. doi: 10.1016/0041-5553(88)90188-7. Translated from *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1988, vol. 28, no. 6, pp. 793–802.
9. Urmanov A.M., Gribok A.V., Bozdogan H., Hines J.W., Uhrid R.E. Information complexity-based regularization parameter selection for solution of ill conditioned inverse problems. *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, no. 2, pp. L1–L9.
10. Vogel C.R. Non-convergence of L-curve regularization parameter selection method. *Inverse Problems*, 1996, vol. 12, no. 4, pp. 535–547.

11. Lukas M.A. Comparison of parameter choice methods for regularization with discrete noisy data. *Inverse Problems*, 2000, vol. 14, no. 2, pp. 161–184.
12. Engl H.W., Hanke M., Neubauer F. *A regularization of inverse problems*. Dordrecht, Boston, Kluwer Academic Publishers, 2000. 383 p.
13. Titarenko V.N., Yagola A.G. Primenenie metoda GVC dlya korrektnykh i nekorrektnykh zadach [Applying the GVC method for correctly posed and ill-posed problems]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 3, Fizika. Astronomiya – Moscow University Physics Bulletin*, 2000, no. 4, pp. 15–18. (In Russian).
14. Voskoboinikov Yu.E., Mukhina I.N. Regularizing algorithm for image and signal reconstructions with refinement of the local noise to signal ratios. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 1999, no. 4, pp. 60–70.
15. Voskoboinikov Yu.E., Krysov D.A. Neparаметрическая идентификация динамической системы при неточном входном сигнале [Nonparametric identification of a dynamic system with an inaccurate input signal]. *Avtomatika i programnaya inzheneriya – Automatics & Software Engineering*, 2017, no. 4, pp. 86–93.

Для цитирования:

Воскобойников Ю.Е., Крысов Д.А. Локальный регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации объекта с неточным входным сигналом // Научный вестник НГТУ. – 2018. – № 1 (70). – С. 19–38. – doi: 10.17212/1814-1196-2018-1-19-38.

For citation:

Voskoboinikov Yu.E., Krysov D.A. Lokal'nyi regulyariziruyushchii algoritm neparаметricheskoi identifikatsii ob"ekta s netochnym vkhodnym signalom [A local regularizing algorithm of nonparametric identification of an inaccurate input signal object]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 1 (70), pp. 19–38. doi: 10.17212/1814-1196-2018-1-19-38.