

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ,
МЕТРОЛОГИЯ
И ИНФОРМАЦИОННО-
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ
ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ

INSTRUMENT MAKING,
METROLOGY
AND INFORMATION-
MEASUREMENT
DEVICES AND SYSTEMS

УДК 519.65; 539.3

DOI: 10.17212/1814-1196-2018-2-85-100

Расчет подкрепленных композитных цилиндрических оболочек с применением многосеточных конечных элементов*

В.Е. ЛЕВИН¹, И.П. ОЛЕГИН², А.Н. ГРИШАНОВ³

¹ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, доцент. E-mail: levin@craft.nstu.ru

² 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, доктор технических наук, доцент. E-mail: olegin@craft.nstu.ru

³ 630073, РФ, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, соискатель. E-mail: a_grishanov@ngs.ru

Рассмотрено применение многосеточных конечных элементов (МнКЭ) для расчета напряженно-деформированного состояния подкрепленных композитных цилиндрических оболочек при статическом нагружении. Такие оболочки находят широкое применение в ракетно-космической и авиационной технике. МнКЭ проектируются в локальных декартовых системах координат на основе мелких (базовых) разбиений оболочек, которые учитывают их неоднородную и микронеоднородную структуру, сложную форму, сложный характер нагружений и закреплений. Напряженно-деформированное состояние в МнКЭ описывается уравнениями трехмерной задачи теории упругости без введения дополнительных кинематических и статических гипотез, что позволяет использовать МнКЭ для расчета оболочек любой толщины. Показано построение в криволинейных системах координат лагранжевых полиномов, которые эффективны при проектировании МнКЭ оболочечного типа. Перемещения в конечных элементах, формирующих МнКЭ, аппроксимируются степенными и лагранжевыми полиномами различных порядков. Расчет напряженно-деформированного состояния с помощью предлагаемых МнКЭ порождает сходящиеся последовательности приближенных решений и приводит к снижению порядка системы алгебраических уравнений метода конечных элементов в $10^2 \dots 10^6$ раз, что обеспечивает существенную экономию ресурсов ЭВМ при небольших временных затратах.

Приведен пример расчета трехслойной подкрепленной цилиндрической оболочки с применением трехсеточного конечного элемента оболочечного типа, который уменьшает объем используемой памяти ЭВМ в $3,04 \cdot 10^5$ раз в сравнении с базовой конечно-элементной моделью, имеющей $6,64 \cdot 10^8$ узловых неизвестных. Это позволяет проводить расчеты композитных

* Статья получена 31 октября 2017 г.

цилиндрических оболочечных конструкций больших размеров. Приведено сравнение полученных результатов с решением данной задачи в программном комплексе ANSYS. Для верификации МнКЭ используется известный численный метод.

Ключевые слова: многосеточные конечные элементы, модели дискретизации, полиномы Лагранжа, сходимость последовательности решений, погрешность, программный комплекс ANSYS, упругость, напряженно-деформированное состояние, подкрепленная цилиндрическая оболочка, композитный материал

ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2] широко используется при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих оболочек [3–6]. Построение криволинейных конечных элементов (КЭ) при расчете оболочек встречает различные трудности [3], в частности, связанные с выполнением условий конформности, что необходимо для сходимости конечно-элементных решений [7]. Эти трудности во многом связаны с тем, что для снижения порядка уравнений в теории оболочек вводятся гипотезы, которые накладывают определенные ограничения на поля перемещений, деформаций и напряжений [8–14], что порождает неустранимые погрешности в решениях и ограничивает области применений этих теорий. Например, в работах [15, 16] рассматриваются трехмерные КЭ с заданным распределением перемещений по толщине с учетом обжатия оболочки. В работе [17] представлен обзор основных вариантов использования МКЭ для расчета композитных пластин и оболочек в двухмерной постановке. Попытки расчета композитных цилиндрических оболочек с применением КЭ в постановке трехмерной задачи теории упругости с учетом их структуры приводит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) МКЭ высокого порядка (более 10^6).

Вследствие этого возникает необходимость разработки таких вариантов МКЭ, в которых композитная цилиндрическая оболочка рассматривается в трехмерной постановке и которые приводят к СЛАУ низкого порядка при соблюдении допустимого уровня погрешности значений НДС. В работах [18, 19] предложены процедуры построения многосеточных КЭ (МнКЭ), удовлетворяющих этим требованиям, в которых для аппроксимации перемещений использованы степенные и лагранжевы полиномы различных порядков. Для аппроксимации только радиальных перемещений в осесимметричной задаче для слоистого цилиндра полиномы Лагранжа использовались в работе [20].

В данной работе трехмерный МнКЭ оболочечного типа, в котором перемещения аппроксимируются полиномами Лагранжа, используется для расчета НДС линейно-упругой композитной цилиндрической оболочки с подкреплением продольными ребрами (стрингерами) и окружными накладками (шпангоутами). Расчеты показывают, что использование МнКЭ для построения сходящейся последовательности решений в рассматриваемой задаче снижает порядок СЛАУ МКЭ примерно в 850 раз, а объем используемой памяти ЭВМ в $3,04 \cdot 10^5$ раз в сравнении со случаем использования стандартных КЭ [1, 2], что обеспечивает существенную экономию ресурсов ЭВМ и требует меньших временных затрат.

1. ТРЕХСЕТОЧНЫЙ КЭ ОБОЛОЧЕЧНОГО ТИПА

Рассмотрим построение МнКЭ с идеальными связями между компонентами неоднородной структуры на примере трехсеточного КЭ (ТрКЭ) $V^{(3)}$. Такой элемент состоит из нескольких двухсеточных КЭ (ДвКЭ) $V^{(2)}$, каждый из которых скомпонован из однородных односеточных КЭ (ОдКЭ) $V^{(1)}$ 1-го порядка с характерными размерами $h_x^{(1)} \times h_y^{(1)} \times h_z^{(1)}$ (рис. 1). Будем считать, что порядок МнКЭ определяется порядком полинома Лагранжа, построенного на его узловой сетке, а верхний индекс соответствует количеству узловых сеток в элементе.

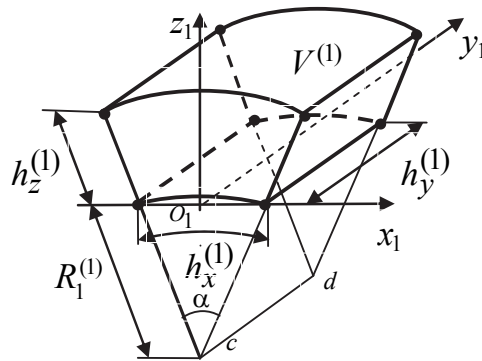


Рис. 1. Однородный КЭ $V^{(1)}$ ($V_n^{(1)}$)

Процедура построения ОдКЭ в локальной декартовой системе координат при аппроксимации полей перемещений степенными полиномами подробно изложена в работе [18]. Рассмотрим построение ДвКЭ и ТрКЭ в случае аппроксимации перемещений полиномами Лагранжа. Расположение узлов при использовании лагранжевых полиномов 3-го порядка в ДвКЭ $V^{(2)}$ с размерами $h_x^{(2)} \times h_y^{(2)} \times h_z^{(2)}$ в локальной декартовой системе координат $O_2x_2y_2z_2$ показано на рис. 2.

Базисная функция N_{ijk} для узла $P(i, j, k)$ (рис. 2) в криволинейных координатах α, η, ζ имеет вид $N_{ijk}(\alpha, \eta, \zeta) = L_i(\alpha)L_j(\eta)L_k(\zeta)$, где $L_i(\alpha)$, $L_j(\eta)$, $L_k(\zeta)$ – полиномы Лагранжа:

$$L_i(\alpha) = \prod_{n=1, n \neq i}^{n_1} \frac{\alpha - \alpha_n}{\alpha_i - \alpha_n}, \quad L_j(\eta) = \prod_{n=1, n \neq j}^{n_2} \frac{\eta - \eta_n}{\eta_j - \eta_n}, \quad L_k(\zeta) = \prod_{n=1, n \neq k}^{n_3} \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta_k - \zeta_n}. \quad (1)$$

Используя обозначения $u_i^{(2)}$, $v_i^{(2)}$, $w_i^{(2)}$, $N_i^{(2)}$ для перемещений и функций формы i -го узла ДвКЭ в системе координат $O_2x_2y_2z_2$, функции перемещений $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ можно представить в виде [1]

$$u^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_0} N_i^{(2)} u_i^{(2)}, \quad v^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_0} N_i^{(2)} v_i^{(2)}, \quad w^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_0} N_i^{(2)} w_i^{(2)}, \quad n_0 = n_1 n_2 n_3. \quad (2)$$

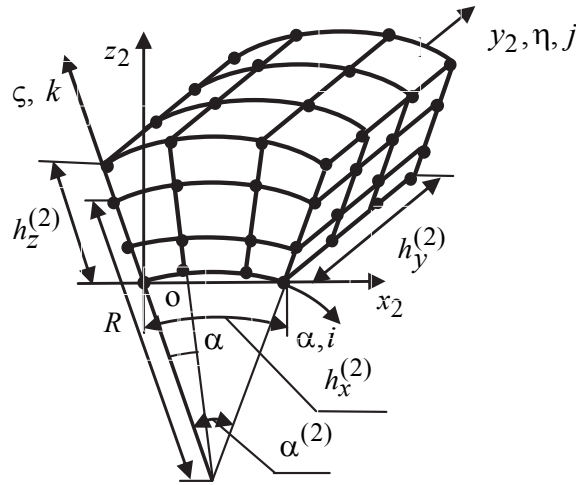


Рис. 2. Двухсеточный КЭ $V_m^{(2)}$ ($V_m^{(2)}$)

Функционал полной потенциальной энергии $\Pi^{(2)}$ для базового разбиения ДвКЭ $V^{(2)}$ запишем в виде

$$\Pi^{(2)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} (\delta_n^{(1)})^T \mathbf{K}_n^{(1)} \delta_n^{(1)} - (\delta_n^{(1)})^T \mathbf{P}_n^{(1)} \right), \quad (3)$$

где $\mathbf{K}_n^{(1)}$ – матрица жесткости; $\mathbf{P}_n^{(1)}$, $\delta_n^{(1)}$ – векторы узловых сил и перемещений КЭ $V_n^{(1)}$, которые отвечают системе координат $O_2x_2y_2z_2$; N – общее число КЭ $V_n^{(1)}$; T – транспонирование.

Используя выражения (2), вектор узловых перемещений $\delta_n^{(1)}$ КЭ $V_n^{(1)}$ можно выразить через вектор узловых перемещений $\delta^{(2)}$ КЭ $V^{(2)}$ в системе координат $O_2x_2y_2z_2$:

$$\delta_n^{(1)} = \mathbf{A}_n^{(2)} \delta^{(2)}, \quad (4)$$

где $\mathbf{A}_n^{(2)}$ – прямоугольная матрица, $n = 1, \dots, N$.

Подставляя формулу (4) в выражение (3) и, следуя принципу минимума полной потенциальной энергии $\partial\Pi^{(2)}(\delta^{(2)})/\partial\delta^{(2)} = 0$, для КЭ $V^{(2)}$ получаем соотношение $\mathbf{K}^{(2)}\delta^{(2)} = \mathbf{P}^{(2)}$, определяющее его равновесное состояние, где

$$\mathbf{K}^{(2)} = \sum_{n=1}^N (\mathbf{A}_n^{(2)})^T \mathbf{K}_n^{(1)} \mathbf{A}_n^{(2)}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = \sum_{n=1}^N (\mathbf{A}_n^{(2)})^T \mathbf{P}_n^{(1)}, \quad (5)$$

здесь $\mathbf{K}^{(2)}$ – матрица жесткости; $\mathbf{P}^{(2)}$ – вектор узловых сил в системе координат $O_2x_2y_2z_2$.

Процедуру построения ТрКЭ рассмотрим на примере метода ТрКЭ $V^{(3)}$ оболочечного типа с размерами $h_x^{(3)} \times h_y^{(3)} \times h_z^{(3)}$ в локальной декартовой системе координат $O_3x_3y_3z_3$ (рис. 3), состоящего из ДвКЭ $V_m^{(2)}$, $m = 1, \dots, M$. При построении оболочечных ТрКЭ используем полиномы Лагранжа (1), имеющие по осям $O_3\alpha$, $O_3\eta$ более высокий порядок аппроксимаций, чем по оси $O_3\zeta$.

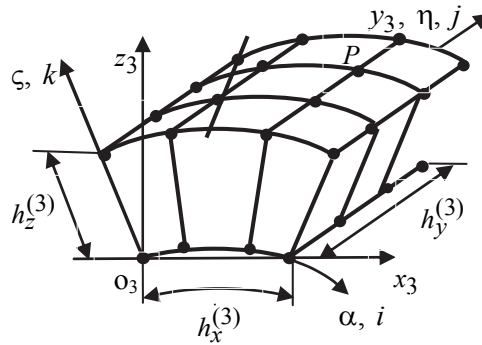


Рис. 3. Оболочечный ТрКЭ $V^{(3)}$

Алгоритм проектирования ТрКЭ аналогичен процессу построения ДвКЭ, рассмотренному выше, следуя которому можно получить основное уравнение для ТрКЭ $V^{(3)}$, определяющее его равновесное состояние $\mathbf{K}^{(3)}\delta^{(3)} = \mathbf{P}^{(3)}$, где

$$\mathbf{K}^{(3)} = \sum_{m=1}^M (\mathbf{A}_m^{(3)})^T \mathbf{K}_m^{(2)} \mathbf{A}_m^{(3)}, \quad \mathbf{P}^{(3)} = \sum_{m=1}^M (\mathbf{A}_m^{(3)})^T \mathbf{P}_m^{(2)}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{K}^{(3)}$, $\mathbf{P}^{(3)}$ – матрица жесткости и вектор узловых сил ТрКЭ $V^{(3)}$; $\mathbf{K}_m^{(2)}$ – матрица жесткости; $\mathbf{P}_m^{(2)}$, $\delta_m^{(2)}$ – векторы узловых сил и перемещений ДвКЭ $V_m^{(2)}$, которые отвечают системе координат $O_3x_3y_3z_3$. Вектор $\delta^{(3)}$ связан с вектором узловых перемещений $\delta_m^{(2)}$ ДвКЭ соотношением $\delta_m^{(2)} = \mathbf{A}_m^{(3)}\delta^{(3)}$, где $\mathbf{A}_m^{(3)}$ – прямоугольная матрица.

Следует отметить, что размерность вектора $\delta^{(3)}$ (т. е. размерность ТрКЭ $V^{(3)}$) не зависит от общего числа элементов, составляющих ТрКЭ. Следова-

тельно, разбиение ТрКЭ $V^{(3)}$ на ДвКЭ $V_m^{(2)}$ и ОдКЭ $V_n^{(1)}$ может быть сколь угодно мелким, что позволяет учитывать сложную неоднородную структуру ТрКЭ.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассмотрим применение ТрКЭ оболочечного типа в задаче деформирования трехслойной консольной цилиндрической оболочки V_0 , подкрепленной продольными ребрами (стрингерами) и окружными накладками (шпангоутами) при локальном нагружении (рис. 4).

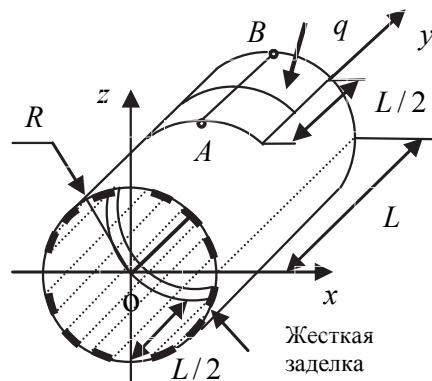


Рис. 4. Расчетная схема оболочки

Оболочка расположена в декартовой системе координат $Oxuz$, жестко закреплена при $y=0$. Радиус кривизны срединной поверхности оболочки $R=0,4$ м, толщина $H=0,015$ м, длина $L=0,5$ м, толщина всех криволинейных подкреплений $h=0,01$ м, ширина двенадцати равномерно расположенных по окружности продольных ребер составляет $0,03$ м, ширина двух симметрично расположенных относительно краев оболочки окружных накладок – $0,0625$ м (рис. 4). Оболочка состоит из трех слоев, параллельных оси Oy . Модули Юнга слоев, начиная с внутреннего, равны $6, 2$ и 10 ГПа, модуль Юнга подкреплений равен 3 ГПа, коэффициент Пуассона для всей конструкции $\nu=0,3$. Радиальное давление распределенной нагрузки $q=-0,2$ МПа приложено на участке верхней поверхности оболочки длиной $L/2$ от свободного края и угле раствора участка нагружения $\alpha=60^\circ$ симметрично относительно плоскости yOz . В расчетах используем половину оболочки.

2.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ТРЕХСЕТЧНОГО КЭ

Построена последовательность шести решений для многосеточных дискретных моделей Q_n , $n=1, \dots, 6$, с использованием лагранжевых ТрКЭ первого порядка оболочечного типа. Максимальное значение величины n в после-

довательности Q_n определяется возможностями используемой ЭВМ, исходными размерами базовой сетки (при $n=1$), выбором закона измельчения при построении конечно-элементных моделей Q_n , а также выбранным уровнем погрешности значений НДС. В данной задаче последовательность Q_n состоит из шести решений, так как при $n=6$ в дискретной модели Q_6 исчерпаны доступные ресурсы памяти используемой ЭВМ.

Исходные размеры ТрКЭ: $12h_x^{(1)} \times 12h_y^{(1)} \times 6h_z^{(1)}$, где $h_x^{(1)}, h_y^{(1)}, h_z^{(1)}$ – размеры ОдКЭ при $n=1$. Каждый ТрКЭ состоит из четырех ДвКЭ с исходными размерами $6h_x^{(1)} \times 6h_y^{(1)} \times 6h_z^{(1)}$ при аппроксимации перемещений полиномом Лагранжа первого порядка. Сетка базовой дискретной модели Q_n имеет размерность $m_n^1 \times m_n^2 \times m_n^3$, где

$$m_n^1 = 504n + 1, \quad m_n^2 = 96n + 1, \quad m_n^3 = 24n + 1, \quad n = 1, \dots, 6, \quad (7)$$

здесь m_n^1 – размерность по круговой координате, m_n^2 – по оси Oy , m_n^3 – по оси Oz .

Результаты расчетов в точках A и B на поверхности оболочки (рис. 4) даны в табл. 1, где w_n, σ_n, t – прогиб, эквивалентное напряжение (4-я теория прочности) и время расчета для многосеточной дискретной модели Q_n . Значения относительных погрешностей $\delta_{w,n}(\%), \delta_{\sigma,n}(\%)$ ($n \geq 2$) определяются по формулам:

$$\delta_{w,n}(\%) = 100\% \times |w_n - w_{n-1}| / w_n, \quad \delta_{\sigma,n}(\%) = 100\% \times |\sigma_n - \sigma_{n-1}| / \sigma_n. \quad (8)$$

Таблица 1

Прогибы и эквивалентные напряжения в точках A, B для моделей Q_n

Q_n	t , мин	$\frac{(w_n)_A, \text{мм}}{(w_n)_B, \text{мм}}$	$\frac{\delta_{w,n}(\%)_A}{\delta_{w,n}(\%)_B}$	$\frac{(\sigma_n)_A, \text{МПа}}{(\sigma_n)_B, \text{МПа}}$	$\frac{\delta_{\sigma,n}(\%)_A}{\delta_{\sigma,n}(\%)_B}$
Q_1	0,02	$\frac{-1,338}{-2,950}$	–	$\frac{10,084}{18,258}$	–
Q_2	0,15	$\frac{-1,618}{-3,449}$	$\frac{17,31}{14,47}$	$\frac{11,072}{18,468}$	$\frac{8,92}{1,14}$
Q_3	0,6	$\frac{-1,703}{-3,604}$	$\frac{4,99}{4,30}$	$\frac{11,403}{18,701}$	$\frac{2,90}{1,25}$
Q_4	4	$\frac{-1,738}{-3,671}$	$\frac{2,01}{1,83}$	$\frac{11,570}{18,882}$	$\frac{1,44}{0,96}$
Q_5	14	$\frac{-1,756}{-3,707}$	$\frac{1,03}{0,97}$	$\frac{11,677}{19,009}$	$\frac{0,92}{0,67}$
Q_6	42	$\frac{-1,767}{-3,728}$	$\frac{0,62}{0,56}$	$\frac{11,753}{19,099}$	$\frac{0,65}{0,47}$

Характер изменения величин $\delta_{w,n}(\%)$, $\delta_{\sigma,n}(\%)$ ($n = 2, \dots, 6$) демонстрирует быструю сходимость значений напряжений σ_n и перемещений w_n . Величины прогибов и эквивалентных напряжений $(w_6)_A = -1,767 \cdot 10^{-2}$ м, $(w_6)_B = -3,728 \cdot 10^{-2}$ м, $(\sigma_6)_A = 11,753$ МПа и $(\sigma_6)_B = 19,099$ МПа, полученные для разбиения Q_6 , могут быть приняты за точные значения с погрешностью менее 0,7 %.

Численные эксперименты показывают, что использование лагранжевых ТрКЭ второго и выше порядков в данной задаче приводит к сходимости решений к тем же значениям w_6 и σ_6 в рамках полученной погрешности 0,7 %. Однако в этих случаях время расчета НДС увеличивается в 2–4 раза.

2.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ANSYS WORKBENCH

Рассмотрим последовательность решения задачи в программном комплексе (ПК) ANSYS Workbench [21]. На первом этапе проектирования в модуле Design Modeler создается геометрическая модель многослойной оболочки с подкреплением. Строится поперечное сечение оболочки, состоящее из трех примыкающих друг к другу колец. Операция Extrude формирует трехслойную цилиндрическую оболочку, каждый слой которой находится в идеальном контакте с соседним слоем.

В плоскости ZYPlane строятся контуры поперечных сечений двух шпангоутов. Операция Revolve формирует два шпангоута с осью вращения OY. В плоскости XYPlane строятся контуры поперечных сечений 12 стрингеров. Операция Extrude формирует стрингеры, образующие единое изотропное тело со шпангоутами. Следует отметить, что возможности ПК ANSYS позволяют рассматривать все продольные и поперечные элементы подкрепления изолированно, присваивая каждому элементу свой набор физических параметров. Далее оболочка и подкрепления объединяются в трехмерную твердотельную модель (рис. 5, а). Учитывая симметрию относительно плоскости ZYPlane в ПК ANSYS геометрии конструкции, закрепления и нагружения, в расчетах используется половина оболочки.

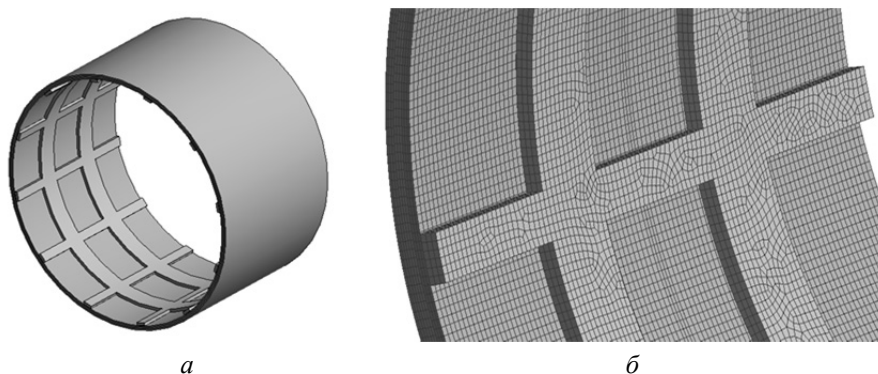


Рис. 5. Геометрическая модель оболочки с подкреплениями (а) и фрагмент конечно-элементной сетки (б)

Конечно-элементная сетка оболочки получена в ручном режиме с помощью метода Sweep. Используется объемный 20-узловой КЭ SOLID186 с квадратичной аппроксимацией поля перемещений. Минимальный размер ребра КЭ – 2,1 мм, максимальный – 5 мм. В каждом слое и подкреплении по толщине оболочки расположено три элемента, всего 12 КЭ. В результате генерирования сетки образовано примерно $1,3 \cdot 10^6$ узлов и $2,55 \cdot 10^5$ КЭ (рис. 5, б).

Распределение поверхностного локального нагружения формируется в программе EXEL как отдельный файл данных и рассматривается при задании нагружения в ПК ANSYS через функцию External Data.

Относительное отклонение результатов, полученных при использовании ТрКЭ, от результатов, полученных в ПК ANSYS, составляет в точках *A* и *B*: 0,34 и 2,25 % для перемещений, 0,09 и 6,02 % – для напряжений, что является приемлемым в инженерных расчетах. Расчеты показывают, что наибольшие расхождения результатов, полученных с помощью ТрКЭ и ПК ANSYS, наблюдаются в местах концентрации напряжений – на концах оболочки и в местах соединения оболочки с подкреплениями.

На рис. 6 представлены распределения прогиба и эквивалентного напряжения на верхней поверхности оболочки на конце консоли при $y = L$, вычисленные с помощью ТрКЭ при размерах сетки $1009 \times 193 \times 49$ и $3025 \times 577 \times 145$ (модели Q_2 и Q_6) и в случае применения ПК ANSYS. Отметим полное совпадение графиков прогибов при использовании модели Q_6 и ПК ANSYS, а также близость распределения напряжений в моделях Q_2 и Q_6 .

Размерность базовой дискретной модели Q_6 (для половины оболочки) равна 663 809 808 (примерно $6,64 \cdot 10^8$ узловых неизвестных), ширина ленты СЛАУ МКЭ – 1 316 026. Многосеточная модель Q_6 имеет 779 676 узловых неизвестных, ширина ленты СЛАУ МКЭ равна 3681. Реализация МКЭ для многосеточной модели Q_6 снижает порядок решаемой СЛАУ МКЭ в 851 раз и требует в $3,04 \cdot 10^5$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели, в которой используются традиционные КЭ [1]. Количество ТрКЭ, используемых для расчета в дискретной модели Q_6 , в 1,76 раза меньше, чем количество КЭ в ПК ANSYS. Таким образом, использование ТрКЭ при расчете НДС позволяет существенно экономить ресурсы ЭВМ в сравнении с ПК ANSYS и традиционным МКЭ [1], что значительно расширяет возможности МКЭ в варианте многосеточного моделирования.

Сопоставим время расчета НДС с помощью ТрКЭ и ПК ANSYS. Расчет задачи в ПК ANSYS занимает 8 мин. Время расчета последовательности дискретных моделей Q_n с помощью ТрКЭ представлено в табл. 1. Время расчета модели Q_6 (42 мин) в 5,25 раза больше, чем в ПК ANSYS. Однако, учитывая быструю сходимость последовательности решений Q_n ($n = 1, \dots, 6$), для оценки НДС, особенно на стадии эскизного проектирования оболочечной конструкции, можно ограничиться расчетом дискретных моделей при $n \leq 5$. В этом случае время расчета с использованием ТрКЭ меньше, чем при расчете в ПК ANSYS. Например, расчет модели Q_2 занимает 9 с, что примерно в 50 раз меньше времени расчета оболочки с подкреплением в ПК ANSYS при приемлемом совпадении результатов двух методов расчета (рис. 6).

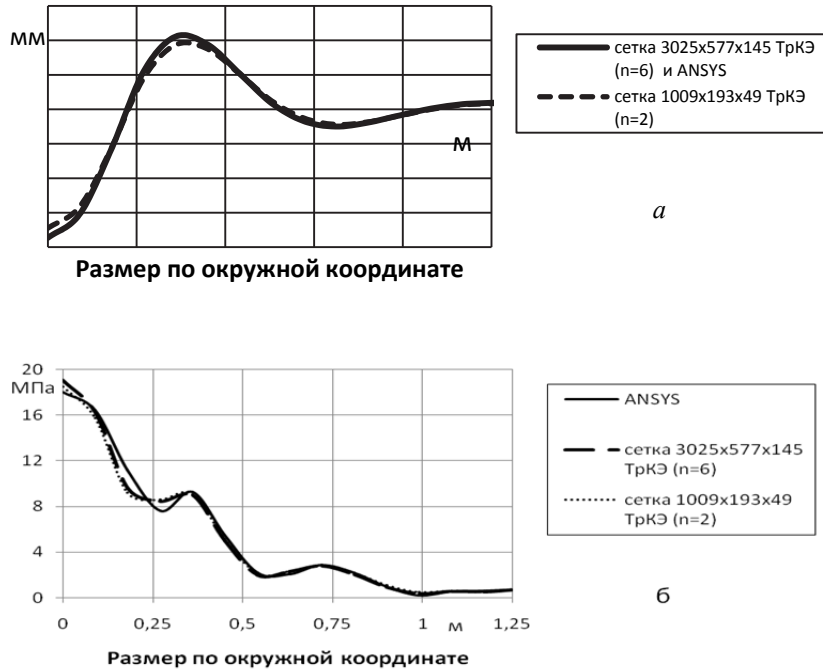


Рис. 6. Распределение прогиба (а) и эквивалентного напряжения (б) по верхней поверхности оболочки в поперечном сечении при $y = L$

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ ТРЕХСЕТОЧНОГО КЭ

Для исследования сходимости приближенных решений, построенных с применением ТрКЭ, использован численный метод [2], который предполагает решение с помощью предлагаемых ТрКЭ тестовой задачи с известным аналитическим или точным решением. Если последовательность решений, полученных при использовании ТрКЭ, сходится к аналитическому, то можно считать, что приближенные решения, построенные с помощью предлагаемых ТрКЭ и для других задач, аналогичных тестовой задаче, сходятся в пределе к точному решению.

Рассмотрим в качестве тестовой задачу об осесимметричном деформировании трехслойной цилиндрической оболочки V_1 , которая имеет такие же размеры, окружные накладки (продольные ребра отсутствуют), условия закрепления и модули упругости, как и оболочка V_0 в задаче п. 2. Пусть оболочка V_1 находится под действием радиальной равномерной нагрузки $q = 1$ МПа при $y \geq L/2$. Последовательность решений этой задачи с применением стандартных КЭ, являющихся однородными кольцами с прямоугольным поперечным сечением, сходится к точному решению [1].

Пусть w_n^0 , σ_n^0 – прогиб и эквивалентные напряжения; $\delta_{w,n}^0$ (%), $\delta_{\sigma,n}^0$ (%) – погрешности, определяемые по формулам, аналогичным (8) для дискретных моделей S_n оболочки, $n = 1, \dots, 6$, состоящей из стандартных КЭ, в точках A и B .

Аналогичные параметры w_n^p , σ_n^p , $\delta_{w,n}^p(\%)$, $\delta_{\sigma,n}^p(\%)$ для дискретных моделей G_n осесимметричной задачи при использовании ТрКЭ $V^{(3)}$ при тех же законах измельчения базовых моделей. Результаты, представленные в табл. 2 и 3, показывают быструю сходимость значений напряжений и перемещений. В силу малости величин погрешностей прогибы и напряжения при $n=6$ можно считать точными решениями, полученными для моделей S_n и G_n при использовании стандартных КЭ и предлагаемых ТрКЭ $V^{(3)}$.

Таблица 2

Прогибы и эквивалентные напряжения в точках A, B для моделей S_n

S_n	$\frac{(w_n^0)_A, \text{мм}}{(w_n^0)_B, \text{мм}}$	$\frac{\delta_{w,n}^0(\%)_A}{\delta_{w,n}^0(\%)_B}$	$\frac{(\sigma_n^0)_A, \text{МПа}}{(\sigma_n^0)_B, \text{МПа}}$	$\frac{\delta_{\sigma,n}^0(\%)_A}{\delta_{\sigma,n}^0(\%)_B}$
S_1	$\frac{-0,8186}{-1,864}$	–	$\frac{20,341}{45,542}$	–
S_2	$\frac{-0,8194}{-1,862}$	$\frac{0,098}{0,107}$	$\frac{19,993}{45,510}$	$\frac{1,741}{0,070}$
S_3	$\frac{-0,8196}{-1,862}$	$\frac{0,024}{0}$	$\frac{19,879}{45,505}$	$\frac{0,573}{0,011}$
S_4	$\frac{-0,8197}{-1,862}$	$\frac{0,012}{0}$	$\frac{19,823}{45,503}$	$\frac{0,283}{0,004}$
S_5	$\frac{-0,8197}{-1,862}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{19,790}{45,503}$	$\frac{0,167}{0}$
S_6	$\frac{-0,8197}{-1,862}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{19,767}{45,503}$	$\frac{0,116}{0}$

Таблица 3

Прогибы и эквивалентные напряжения в точках A, B для моделей G_n

G_n	$\frac{(w_n^p)_A, \text{мм}}{(w_n^p)_B, \text{мм}}$	$\frac{\delta_{w,n}^p(\%)_A}{\delta_{w,n}^p(\%)_B}$	$\frac{(\sigma_n^p)_A, \text{МПа}}{(\sigma_n^p)_B, \text{МПа}}$	$\frac{\delta_{\sigma,n}^p(\%)_A}{\delta_{\sigma,n}^p(\%)_B}$
G_1	$\frac{-0,7828}{-2,004}$	–	$\frac{20,062}{48,691}$	–
G_2	$\frac{-0,8008}{-1,916}$	$\frac{2,248}{4,593}$	$\frac{19,658}{46,760}$	$\frac{2,055}{4,130}$
G_3	$\frac{-0,8087}{-1,888}$	$\frac{0,977}{1,483}$	$\frac{19,476}{46,120}$	$\frac{0,934}{1,388}$
G_4	$\frac{-0,8126}{-1,877}$	$\frac{0,480}{0,586}$	$\frac{19,411}{45,865}$	$\frac{0,335}{0,556}$
G_5	$\frac{-0,8148}{-1,872}$	$\frac{0,270}{0,267}$	$\frac{19,397}{45,740}$	$\frac{0,072}{0,273}$
G_6	$\frac{-0,8161}{-1,869}$	$\frac{0,159}{0,161}$	$\frac{19,404}{45,670}$	$\frac{0,036}{0,153}$

Относительные погрешности $\delta_w(\%) = 100\% \times |w_6^0 - w_6^p| / w_6^0$, $\delta_\sigma(\%) = 100\% \times |\sigma_6^0 - \sigma_6^p| / \sigma_6^0$ отклонений решений для прогибов и напряжений, полученных при использовании ТрКЭ, от решений, полученных при использовании стандартных КЭ, соответственно равны: для точки *A* – 0,439 % и 1,836 %, для точки *B* – 0,376 % и 0,367 %

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных результатов можно сделать вывод, что предлагаемые ТрКЭ $V^{(3)}$ порождают решения σ_n^p и w_n^p , которые в пределе (при $n \rightarrow \infty$) стремятся к точному решению данной осесимметричной задачи. Тогда, следуя методу верификации, можно считать, что приближенные решения, построенные для задачи п. 2 с применением ТрКЭ $V^{(3)}$, при $n \rightarrow \infty$ сходятся к точному решению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
2. *Норри Д., Фриз Ж. де.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
3. *Голованов А.И., Тюленева О.И., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
4. *Клочков Ю.В., Николаев А.П., Шубович А.А.* Анализ напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке при различных вариантах интерполяции перемещений. – Волгоград: Волгоградский ГАУ, 2013. – 152 с.
5. *Киселев А.П.* Расчет тонких оболочек на прочность в трехмерной постановке без упрощающих гипотез // Известия вузов. Строительство. – 2008. – № 1. – С. 18–23.
6. *Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З.* Расчет многослойных оболочек вращения и пластин с использованием объемных конечных элементов // Известия вузов. Строительство. – 2010. – № 1. – С. 106–112.
7. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. *Болотин В.В., Новиков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
9. *Голушко С.К., Немировский Ю.В.* Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – М.: Физматлит, 2008. – 432 с.
10. *Ahmed A., Kapuria S.* A four-node facet shell element for laminated shells based on the third order zigzag theory // Composite Structures. – 2016. – Vol. 158. – P. 112–127.
11. *Carrera E., Pagani A., Valvano S.* Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structure // Composites Part B: Engineering. – 2017. – Vol. 111. – P. 294–314.
12. *Yasin M.Y., Kapuria S.* An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells // Composite Structures. – 2013. – Vol. 98. – P. 202–214.
13. *Cinefra M., Carrera E.* Shell finite elements with different through-the-thickness kinematics for the linear analysis of cylindrical multilayered structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2013. – Vol. 93, N 2. – P. 160–182.

14. A partial hybrid stress solid-shell element for the analysis of laminated composites / K. Rah, W. van Paepegem, A.M. Habraken, J. Degrieck // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2011. – Vol. 200, N 49–52. – P. 3526–3539.
15. Kara N., Kumbasar N. Three-dimensional finite element for thick shells of general shape // International Journal for Physical and Engineering Sciences. – 2001. – Vol. 52. – P. 1–7.
16. Sze K.Y. Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis // Progress in Structural Engineering and Materials. – 2002. – Vol. 4. – P. 400–407.
17. Caliri M.F., Ferreira A.J.M., Tita V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method // Composite Structures. – 2016. – Vol. 156. – P. 63–77.
18. Матвеев А.Д., Гришианов А.Н. Многосеточные криволинейные элементы в трехмерном анализе цилиндрических композитных панелей с полостями и отверстиями // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2014. – Т. 156, кн. 4. – С. 47–59.
19. Матвеев А.Д., Гришианов А.Н. Многосеточные лагранжевые криволинейные элементы в трехмерном анализе композитных цилиндрических панелей и оболочек // Вестник КрасГАУ. – 2015. – № 2. – С. 75–85.
20. Chih-Ping Wu, Chehg-Hsin Kuo. A unified formulation of PVD-based finite cylindrical layer methods for functionally graded material sandwich cylinders // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, N 3. – P. 916–938.
21. Иванов Д.В., Доль А.В. Введение в ANSYS Workbench. – Саратов: Амирит, 2016. – 56 с.

Левин Владимир Евгеньевич, доктор технических наук, доцент кафедры «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – динамика авиационных конструкций. Имеет более 70 публикаций, в том числе одну монографию. E-mail: levin@craft.nstu.ru

Олегин Игорь Павлович, доктор технических наук, доцент кафедры «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – механика композитных материалов. Имеет более 80 публикаций, в том числе одну монографию. E-mail: olegin@craft.nstu.ru

Гришианов Александр Николаевич, соискатель кафедры «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – метод конечных элементов в теории упругости. Имеет 11 публикаций. E-mail: a_grishanov@ngs.ru

Calculation of reinforced composite cylindrical shells using multigrid finite elements*

V.E. LEVIN¹, I.P. OLEGIN², A.N. GRISHANOV³

¹ Novosibirsk State Technical University, 20, Karl Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), associate professor. E-mail: levin@craft.nstu.ru

² Novosibirsk State Technical University, 20, Karl Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, D. Sc. (Eng.), associate professor. E-mail: olegin@craft.nstu.ru

³ Novosibirsk State Technical University, 20, Karl Marx Prospekt, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, external PhD student. E-mail: a_grishanov@ngs.ru

The use of multigrid finite elements (MFE) for calculating stress-strain state of reinforced composite cylindrical shells under static loading is considered. Such shells are widely used in aerospace and aviation technology. MFEs are designed in local Cartesian coordinate systems on the basis of small (basic) shell splitting considering their heterogeneous or micro-heterogeneous structure, complex shape and a complex nature of loading and fastening. A stress-strain state in MFEs is described by means of the three-dimensional theory of elasticity correlations without introducing any additional kinematic or static hypotheses, which allows using MFEs to calculate shells of any thickness. The formation of Lagrange polynomials effective in designing shell-type MFEs in curvilinear coordinate systems is demonstrated. The displacements in finite elements forming MFEs are approximated by degree and Lagrange polynomials of various orders. Calculating a stress-strain state with the use of the proposed MFE yields converging sequences of approximate solutions and results in decreasing the order of the algebraic equation system in the finite element method by $10^2 - 10^6$ times, which ensures considerable saving of computer resources with low time costs.

An example for calculating a three-layer reinforced cylindrical shell using the developed three-grid finite shell-type element that reduces the memory volume used by the computer by $3,04 \cdot 10^5$ times compared to the reference finite-element model that has $6,64 \cdot 10^8$ nodal unknowns is given. This allows making calculations of large composite cylindrical shell constructions. The results are compared with the solution of the same task by the program complex ANSYS. A well-known numerical method is used to verify the proposed MFE.

Keywords: multigrid finite elements, discretization models, Lagrange polynomials, convergence of solution sequence, error, program complex ANSYS, elasticity, stress-strain state, reinforced cylindrical shell, composite material

REFERENCES

1. Zienkiewicz O.C. *The finite element method in engineering science*. London, McGraw Hill, 1971. 521 p. (Russ. ed.: Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike*. Moscow, Mir Publ., 1975. 541 p.).
2. Norrie D.H., Vries G. de. *An introduction to finite element analysis*. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1978. 301 p. (Russ. ed.: Norri D., Friz Zh. De. *Vvedenie v metod konechnykh elementov*. Moscow, Mir Publ., 1981. 304 p.).
3. Golovanov A.I., Tyuleneva O.I., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksii* [Finite element method in statics and dynamics of thin-wall constructions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 392 p.
4. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Shubovich A.A. *Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya obolochek vrashcheniya v geometricheski nelineinoi postanovke pri razlichnykh variantakh interpolyatsii peremeshchenii* [Analysis of stress-strain state of rotation shells in geometri-

* Received 31 October 2017.

cally non-linear setting with various variants of movement interpolation]. Volgograd, Volgogradskii GAU Publ., 2013. 152 p.

5. Kiselev A.P. Raschet tonkikh obolochek na prochnost' v trekhmernoi postanovke bez uproshtchayushchikh gipotez [Calculation of thin shells for strength to resist three-dimensional setting, without simplifying hypotheses]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo – News of higher educational institutions. Construction*, 2008, no. 1, pp. 18–23.

6. Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z. Raschet mnogosloynnykh obolochek vrashcheniya i plastin s ispol'zovaniem ob'emnykh konechnykh elementov [Calculating multilayer rotation shells and plates using volume finite elements]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo – News of higher educational institutions. Construction*, 2010, no. 1, pp. 106–112.

7. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice Hall, 1976. 544 p. (Russ. ed.: Bate K., Vilson E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov*. Moscow, Stroizdat Publ., 1982. 448 p.).

8. Bolotin V.V., Novikov Yu.N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksii* [Mechanics of multilayer structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 375 p.

9. Golushko S.K., Nemirovskii Yu.V. *Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya* [Direct and inverse problems of mechanics of elastic composite plates and shells of revolution]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 432 p.

10. Ahmed A., Kapuria S. A four-node facet shell element for laminated shells based on the third order zigzag theory. *Composite Structures*, 2016, vol. 158, pp. 112–127.

11. Carrera E., Pagani A., Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structure. *Composites Part B: Engineering*, 2017, vol. 111, pp. 294–314.

12. Yasin M.Y., Kapuria S. An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells. *Composite Structures*, 2013, vol. 98, pp. 202–214.

13. Cinefra M., Carrera E. Shell finite elements with different through-the-thickness kinematics for the linear analysis of cylindrical multilayered structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, vol. 93, no. 2, pp. 160–182.

14. Rah K., Paepegem W. van, Habraken A.M., Degrieck J. A partial hybrid stress solid-shell element for the analysis of laminated composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, vol. 200, no. 49–52, pp. 3526–3539.

15. Kara N., Kumbasar N. Three-dimensional finite element for thick shells of general shape. *International Journal for Physical and Engineering Sciences*, 2001, vol. 52, pp. 1–7.

16. Sze K.Y. Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 2002, vol. 4, pp. 400–407.

17. Caliri M.F., Ferreira A.J.M., Tita V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method. *Composite Structures*, 2016, vol. 156, pp. 63–77.

18. Matveev A.D., Grishanov A.N. Mnogosetochnye krivolineinye elementy v trekhmernom analize tsilindricheskikh kompozitnykh panelei s polostyami i otverstiyami [Multigrid curvilinear elements in three-dimensional analysis of cylindrical composite panels with cavities and holes]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie nauki – Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*, 2014, vol. 156, iss. 3, pp. 47–59.

19. Matveev A.D., Grishanov A.N. Mnogosetochnye lagranzhevyye krivolineinye elementy v trekhmernom analize kompozitnykh tsilindricheskikh panelei i obolochek [Multi-grid Lagrange curvilinear elements in three-dimensional analysis of composite cylindrical plates and shells]. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta – Krasnoyarsk State University bulletin*, 2015, no. 1, pp. 75–85.

20. Chih-Ping Wu, Chehg-Hsin Kuo. A unified formulation of PVD-based finite cylindrical layer methods for functionally graded material sandwich cylinders. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 3, pp. 916–938.

21. Ivanov D.V., Dol' A.V. *Vvedenie v ANSYS Workbench* [Introduction to ANSYS Workbench]. Saratov, Amirit Publ., 2016. 56 p.

Для цитирования:

Левин В.Е., Олегин И.П., Гришанов А.Н. Расчет подкрепленных композитных цилиндрических оболочек с применением многосеточных конечных элементов // Научный вестник НГТУ. – 2018. – № 2 (71). – С. 85–100. – doi: 10.17212/1814-1196-2018-2-85-100.

For citation:

Levin V.E., Olegin I.P., Grishanov A.N. Raschet podkreplennykh kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek s primeneniem mnogosetochnykh konechnykh elementov [Calculation of reinforced composite cylindrical shells using multigrid finite elements]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2018, no. 2 (71), pp. 85–100. doi: 10.17212/1814-1196-2018-2-85-100.