УДК 618.5.015

Оптимальное оценивание параметров моделей гауссовских линейных дискретных систем на основе планирования начальных условий*

В.М. ЧУБИЧ, О.С. ЧЕРНИКОВА

Рассмотрены теоретические и прикладные аспекты проблемы оптимального оценивания параметров моделей гауссовских линейных дискретных систем на основе планирования начальных условий. Рассмотрен случай вхождения неизвестных параметров в уравнения состояния и наблюдения, а также в ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Представлены оригинальные результаты. Приведен пример оптимального оценивания параметров одной модельной структуры.

Ключевые слова: оценивание параметров, метод максимального правдоподобия, планирование начальных условий, информационная матрица, критерий оптимальности.

ВВЕДЕНИЕ

Применение методов теории планирования эксперимента при построении математических моделей динамических систем позволяет повысить эффективность и качество проводимых исследований. При этом основное внимание отечественных и зарубежных исследователей сосредоточено на планировании входных сигналов (см., например, [1–6]). Другая возможность повысить точность оценивания неизвестных параметров связана с планированием начальных условий [7], что особенно актуально при анализе автономно функционирующих динамических систем.

При заданной структуре математической модели процедура оптимального оценивания параметров предполагает выполнение следующих этапов:

1) вычисление оценок неизвестных параметров по измерительным данным, соответствующим некоторому плану эксперимента;

2) синтез на основе полученных оценок оптимального плана эксперимента;

3) пересчет оценок параметров по измерительным данным, соответствующим синтезированному плану.

В настоящей работе приводятся результаты последних исследований авторов по оптимальному оцениванию параметров на основе планирования начальных условий применительно к гауссовским линейным дискретным системам, описываемым моделями в пространстве состояний.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую наблюдаемую, идентифицируемую модель стохастической линейной дискретной системы в пространстве состояний:

$$x(t_{k+1}) = a(t_k) + F(t_k)x(t_k) + \Gamma(t_k)w(t_k), \tag{1}$$

---

* *Статья получена 15 февраля 2013 г.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта Министерства образования и науки РФ в 2013 г. (Регистр. №01201256089).

$$y\left(t_{k+1}\right)=A\left(t_{k+1}\right)+H\left(t_{k+1}\right)x\left(t_{k+1}\right)+v\left(t_{k+1}\right),\ k=0,1,...,N-1. \qquad (2)$$

Здесь $x(t_k)$ – n-вектор состояния, $w(t_k)$ – p-вектор возмущения, $y(t_{k+1})$ – m-вектор измерения (выхода), $v(t_{k+1})$ – m-вектор ошибки измерения.

Предположим, что:

- случайные векторы $w(t_k)$ и $v(t_{k+1})$ образуют стационарные белые гауссовские последовательности, для которых

$$E\left[w(t_k)\right]=0,\ E\left[w(t_k)w^T(t_i)\right]=Q\delta_{ki},\ E\left[v(t_k)\right]=0,$$

$$E\left[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})\right]=R\delta_{ki},\ E\left[v(t_k)w^T(t_i)\right]=0$$

для любых $k,i=0,1,\ldots,N-1$ ($E[\cdot]$ – оператор математического ожидания, δ_{ki} – символ Кронекера);

- начальное состояние $x(t_0)$ имеет нормальное распределение с параметрами $\overline{x}(t_0)$, $P(t_0)$ и не коррелирует с $w(t_k)$ и $v(t_{k+1})$ при любых значениях переменной k.

Будем считать, что структура модели (1), (2) задана с точностью до неизвестных параметров $\Theta=\left(\theta_1,\theta_2,...,\theta_s\right)$, которые могут входить в различных комбинациях в элементы матриц $F\left(t_k\right)$, $\Gamma\left(t_k\right)$, $H\left(t_{k+1}\right)$, Q, R, $\mathrm{P}\left(t_0\right)$ и векторов $a\left(t_k\right)$, $A\left(t_{k+1}\right)$.

Необходимо для математической модели (1), (2) с учетом высказанных априорных предположений разработать процедуру оптимального оценивания параметров на основе планирования начальных условий, исследовать ее эффективность и целесообразность применения.

2. ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Оценивание неизвестных параметров математической модели будем осуществлять по данным наблюдений Ξ в соответствии с критерием идентификации $\chi(\Theta;\Xi)$. Сбор числовых данных происходит в процессе проведения идентификационных экспериментов, которые выполняются по некоторому плану ξ_ν.

Предположим, что экспериментатор может произвести ν запусков системы, причем начальное условие $\overline{x}^1(t_0)$ используется k_1 раз, начальное условие $\overline{x}^2(t_0)$ – k_2 раза и т. д., наконец, с начальное условие $\overline{x}^q(t_0)$ – k_q раз. В этом случае дискретный (точный) нормированный план эксперимента ξ_ν представляет собой совокупность точек $\overline{x}^1(t_0), \overline{x}^2(t_0), ..., \overline{x}^q(t_0)$, называемых спектром плана, и соответствующих им долей повторных запусков:

$$\xi_\nu=\begin{Bmatrix} \overline{x}^1(t_0), & \overline{x}^2(t_0), & \ldots, & \overline{x}^q(t_0) \\ \dfrac{k_1}{\nu}, & \dfrac{k_2}{\nu}, & \ldots, & \dfrac{k_q}{\nu} \end{Bmatrix},\ \overline{x}^i(t_0)\in\Omega_{\overline{x}(t_0)},\ i=1,2,...,q.$$

Множество планирования $\Omega_{\overline{x}(t_0)}\subset R^n$ задает ограничения на условия проведения эксперимента.

Обозначим через $Y_{i,j} = \left[\left(y^{i,j}(t_1) \right)^T, \left(y^{i,j}(t_2) \right)^T, \ldots, \left(y^{i,j}(t_N) \right)^T \right]^T$ j-ю реализацию выходного сигнала ($j = 1, 2, \ldots, k_i$), соответствующую i-му начальному условию $\overline{x}^i(t_0)$ ($i = 1, 2, \ldots, q$). Тогда в результате проведения по плану ξ_ν идентификационных экспериментов будет сформировано множество

$$\Xi = \left\{ \left(\overline{x}^i(t_0), Y_{i,j} \right), \; j = 1, 2, \ldots, k_i, \; i = 1, 2, \ldots, q \right\}, \; \sum_{i=1}^{q} k_i = \nu .$$

Априорные предположения, высказанные при постановке задачи, позволяют воспользоваться для оценивания неизвестных параметров методом максимального правдоподобия. В соответствии с этим методом необходимо найти такие значения параметров $\hat{\Theta}$ из области допустимых значений Ω_Θ, для которых

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta \in \Omega_\Theta} \left[\chi(\Theta; \Xi) \right] = \arg \min_{\Theta \in \Omega_\Theta} \left[-\ln L(\Theta; \Xi) \right],$$

где $\ln L(\Theta; \Xi)$ – логарифмическая функция правдоподобия. Согласно [8] критерий идентификации имеет вид

$$\chi(\Theta; \Xi) = \frac{Nm\nu}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \nu \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det \mathrm{B}^i(t_{k+1}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\varepsilon^{i,j}(t_{k+1}) \right]^T \left[\mathrm{B}^i(t_{k+1}) \right]^{-1} \left[\varepsilon^{i,j}(t_{k+1}) \right],$$

где $\varepsilon^{i,j}(t_{k+1})$ при фиксированных i, j и $\mathrm{B}^i(t_{k+1})$ вычисляются по уравнениям дискретного фильтра Калмана [9]:

$$\hat{x}^{i,j}(t_{k+1} \mid t_k) = F(t_k) \hat{x}^{i,j}(t_k \mid t_k) + a(t_k);$$

$$\text{Đ}^i(t_{k+1} \mid t_k) = F(t_k) \text{Đ}^i(t_k \mid t_k) F^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k);$$

$$\hat{y}^{i,j}(t_{k+1} \mid t_k) = \text{Í}(t_{k+1}) \hat{x}^{i,j}(t_{k+1} \mid t_k) + A(t_{k+1});$$

$$\varepsilon^{i,j}(t_{k+1}) = y^{i,j}(t_{k+1}) - \hat{y}^{i,j}(t_{k+1} \mid t_k);$$

$$\text{Â}^i(t_{k+1}) = \text{Í}(t_{k+1}) \text{Đ}^i(t_{k+1} \mid t_k) \text{Í}^T(t_{k+1}) + R;$$

$$K^i(t_{k+1}) = \text{Đ}^i(t_{k+1} \mid t_k) \text{Í}^T(t_{k+1}) \left[\text{Â}^i(t_{k+1}) \right]^{-1};$$

$$\hat{x}^{i,j}\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)=\hat{x}^{i,j}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)+K^i\left(t_{k+1}\right)\varepsilon^{i,j}\left(t_{k+1}\right);$$

$$\text{Đ}^{i}\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)=\left[I-K^i\left(t_{k+1}\right)H\left(t_{k+1}\right)\right]P^i\left(t_{k+1} \mid t_k\right),$$

для $k=0,1,\ldots,N-1$, $j=1,2,\ldots,k_i$, $i=1,2,\ldots,q$ с начальными условиями $\hat{x}^{i,j}\left(t_0 \mid t_0\right)=\overline{x}^i\left(t_0\right)$, $\text{Đ}^{i}\left(t_0 \mid t_0\right)=\text{Đ}^{i}\left(t_0\right)$.

Поиск условного минимума $\chi(\Theta;\Xi)$ осуществим либо симплексным методом, либо методом проекции градиента [10].

3. ПЛАНИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Следуя [7], будем понимать под непрерывным нормированным планом эксперимента ξ совокупность величин:

$$\xi=\begin{Bmatrix}\overline{x}^1(t_0), & \overline{x}^2(t_0), & \ldots, & \overline{x}^q(t_0) \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_q\end{Bmatrix},\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{q} p_i=1,\ \overline{x}^i(t_0)\in\Omega_{\overline{x}(t_0)},\ i=1,2,\ldots,q. \quad (3)$$

Нормированная информационная матрица $\text{Ì}\ (\xi)$ плана (3) находится по формуле

$$\text{Ì}\ (\xi)=\sum_{i=1}^{q} p_i \text{Ì}\ \left(\overline{x}^i(t_0);\Theta\right),$$

в которой информационные матрицы одноточечных планов

$$\text{Ì}\ \left(\overline{x}^i(t_0);\Theta\right)=-\underset{Y}{E}\left[\frac{\partial^2 \ln L\left(\overline{x}^i(t_0),Y_i;\Theta\right)}{\partial\Theta\partial\Theta^T}\right]$$

зависят от неизвестных параметров Θ (это позволяет говорить только о локально-оптимальном планировании) и вычисляются в соответствии с [11, 12].

Планирование экспериментов, предполагая воздействие на нижнюю границу неравенства Рао–Крамера [13], опирается на критерии оптимальности планов и заключается в решении экстремальной задачи

$$\xi^*=\arg\min_{\xi\in\Omega_\xi} X\left[M(\xi)\right]. \quad (4)$$

Остановимся на критериях D- и A-оптимальности, имеющих вполне определенную статистическую интерпретацию: D-оптимальный план ($X\left[M(\xi)\right]=-\ln\det M(\xi)$) минимизирует объем, а A-оптимальный план ($X\left[M(\xi)\right]=SpM^{-1}(\xi)$) – сумму квадратов длин осей эллипсоида рассеяния оценок неизвестных параметров. Важно также и то, что для указанных критериев справедлива теорема эквивалентности, обобщенная формулировка которой приведена в [14].

Оптимизационную задачу (4) можно решать непосредственно (напрямую) с помощью общих методов численного поиска экстремума, не забывая при этом в конце проверять необходимые условия оптимальности планов [14]. Другой подход (его называют двойственным) основан на выше упомянутой теореме эквивалентности. Собственно говоря, с этим и связано название соответствующих вычислительных процедур (прямая и двойственная), возможные варианты которых приведены в [14].

Использование градиентов в процедурах планирования позволяет заметно повысить скорость решения задач и невозможно без нахождения производных информационных матриц Фишера по компонентам вектора начальных условий $\bar{x}(t_0)$. Соответствующий вычислительный алгоритм разработан и приведен в [12].

Практическое применение синтезированного при помощи той или иной процедуры непрерывного оптимального плана

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} \bar{x}_*^1(t_0), & \bar{x}_*^2(t_0), & \ldots, & \bar{x}_*^q(t_0) \\ p_1^*, & p_2^*, & \ldots, & p_q^* \end{Bmatrix}, \; p_i^* \geq 0, \; \sum_{i=1}^{q} p_i^* = 1, \; \bar{x}_*^i(t_0) \in \Omega_{\bar{x}(t_0)}, \; i = 1, 2, \ldots, q$$

затруднительно, поскольку веса p_i^* представляют собой произвольные вещественные числа, заключенные в интервале от нуля до единицы. Несложно заметить, что в случае заданного числа ν возможных запусков системы величины $k_i^* = \nu p_i^*$ могут оказаться нецелыми числами. Проведение эксперимента требует округления величин k_i^* до целых чисел. Очевидно, что полученный в результате такого округления план будет отличаться от оптимального непрерывного плана, причем приближение тем лучше, чем больше число запусков. Возможный алгоритм «округления» непрерывного плана до дискретного изложен в [15].

Далее составим дискретный план

$$\xi_\nu^* = \begin{Bmatrix} \bar{x}_*^1(t_0), & \bar{x}_*^2(t_0), & \ldots, & \bar{x}_*^q(t_0) \\ \dfrac{k_1^*}{\nu}, & \dfrac{k_2^*}{\nu}, & \ldots, & \dfrac{k_q^*}{\nu} \end{Bmatrix},$$

проведем идентификационные эксперименты и пересчитаем оценки неизвестных параметров.

4. ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Выполнение процедуры оптимального оценивания параметров моделей гауссовских линейных дискретных систем стало возможным в результате реализации разработанных алгоритмов в программном комплексе ПК-III [16], содержащим модули, отвечающие за вычисление информационной матрицы и ее производных по компонентам вектора начальных условий, нахождение оценок максимального правдоподобия, синтез *A*- и *D*-оптимальных планов (реализованы прямая и двойственная градиентные процедуры).

Рассмотрим следующую дискретизованную (шаг дискретизации – 1 мин) стохастическую модель изменения температуры в двухкомнатной квартире со смежными комнатами и нагревателем, расположенным в одной из них (детерминированная модель состояния приведена в [17]):

$$x(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \Psi u(t_k) + \mathrm{F}\, x(t_k) + \Gamma w(t_k) =$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} u(t_k) + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} w(t_k); \tag{5}$$

$$y(t_{k+1}) = x_1(t_{k+1}) + v(t_{k+1}),\ k = 0,1,...,N-1. \tag{6}$$

где $x_i\left(t_k\right)$ – температура воздуха в i-й комнате ($i=1,2$), измеряемая в °C; $u\left(t_k\right)$ – количество теплоты, выделяемое нагревателем в кДж/мин; $w\left(t_k\right)$ – помехи, обусловленные влиянием внешней среды.

Если принять теплоемкость воздуха равной 1 ÊÄæ/(êã·°C), считать массу воздуха в первой и второй комнатах – 57.6 кг и 72 кг соответственно, а температуру наружного воздуха – 5 °C, то

$$f_{11} = \frac{(a_1+\theta_1)e^{b_1} + (a_1-\theta_1)e^{b_2}}{2a_1};\ f_{12} = \frac{288\theta_2(e^{b_2} - e^{b_1})}{a_1} = f_{21};$$

$$f_{22} = \frac{(a_1-\theta_1)e^{b_1} + (a_1+\theta_1)e^{b_2}}{2a_1};$$

$$\psi_1 = 5c_1\left(1-\frac{\theta_1}{a_1}\right) + 5c_2\left(1+\frac{\theta_1}{a_1}\right);\ \psi_2 = \frac{2880\theta_2(c_1-c_2)}{a_1};$$

$$\gamma_1 = 25\theta_1 c_1\left(\left(1-\frac{\theta_1}{a_1}\right) + c_2\left(1+\frac{\theta_1}{a_1}\right)\right) - 5\theta_1\frac{c_4-c_3}{72};$$

$$\gamma_2 = 5\theta_1\left(4c_1\left(1+\frac{\theta_1}{a_1}\right) + 4c_2\left(1-\frac{\theta_1}{a_1}\right)\right) - 25\theta_1\frac{c_4-c_3}{288}.$$

Здесь

$$a_1 = \sqrt{3317760{\theta_2}^2 + {\theta_1}^2};\quad a_2 = e^{\theta_2 + \frac{\theta_1}{64}};\ b_1 = -\theta_2 - \frac{\theta_1}{64} - \frac{a_1}{576};\ b_2 = -\theta_2 - \frac{\theta_1}{64} + \frac{a_1}{576};$$

$$b_3 = e^{\frac{a_1}{576}};\ c_1 = \frac{a_2 - b_3}{-576a_2b_2};\ c_2 = \frac{b_3a_2 - 1}{-576a_2b_1b_3};\quad c_3 = \frac{1658880\theta_2c_1}{a_1};\ c_4 = \frac{1658880\theta_2c_2}{a_1}.$$

Будем считать, что априорные предположения, высказанные при постановке задачи, выполнены, причем

$$Q = E\left[w^2\left(t_k\right)\right] = 0.4;\quad R = E\left[v^2\left(t_{k+1}\right)\right] = 0.3;$$

$$P(t_0) = E\left[\left(x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right)\left(x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right)^T\right] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, неизвестные параметры θ_1, θ_2 (θ_1 – потери за счет конвенции, θ_2 – коэффициент теплообмена между комнатами) функционально входящих в элементы матриц F, Ψ, Γ.

Подав на вход системы двоичный сигнал, представленный на рис. 1, произведем пять независимых запусков с начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 28 \end{bmatrix}$.

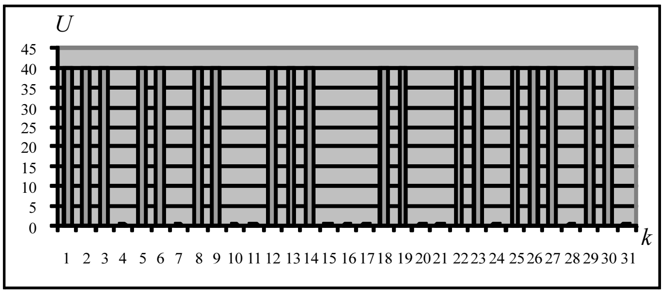

Рис. 1. Входной сигнал для идентификационных экспериментов

Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметров $\theta_1^* = 0.2$, $\theta_2^* = 0.8$ и $N = 31$. Применяя метод максимального правдоподобия, вычислим оценки неизвестных параметров $\hat{\theta}$. Выберем область планирования $\Omega_{\bar{x}(t_0)} = \{5 \le \bar{x}_i(t_0) \le 28,\ i = 1, 2\}$. В соответствии с критерием D-оптимальности построим непрерывный план эксперимента и «округлим» его до дискретного из расчета возможности проведения пяти запусков. В результате получим план, состоящий из двух точек. Снова подадим на вход системы тот же самый двоичный сигнал, используя первое синтезированное начальное условие четыре раза, а второе – один раз, смоделируем данные наблюдений, пересчитаем оценки неизвестных параметров и получим $\hat{\theta}^*$. Результаты выполнения описанной процедуры вместе с соответствующими относительными ошибками оценивания в пространстве параметров представим в таблице.

Результаты оптимального оценивания неизвестных параметров модели (5), (6)

Начальные условия	Значения оценок параметров
Исходные: $\bar{x}^1(t_0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 28 \end{bmatrix}$; $k_1 = 5$	$\hat{\theta}_1 = \mathbf{0.136}$
	$\hat{\theta}_2 = \mathbf{0.683}$
	$\delta_\theta = \dfrac{\lVert \theta^* - \hat{\theta} \rVert}{\lVert \theta^* \rVert} = 0.162$
Синтезированные: $\bar{x}_*^1 = \begin{bmatrix} 28 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_*^2 = \begin{bmatrix} 28 \\ 28 \end{bmatrix}$; $k_1 = 4,\ k_2 = 1$	$\hat{\theta}_1^* = \mathbf{0.187}$
	$\hat{\theta}_2^* = \mathbf{0.786}$
	$\delta_\theta^* = \dfrac{\lVert \theta^* - \hat{\theta}^* \rVert}{\lVert \theta^* \rVert} = 0.023$

При решении реальных задач истинные значения параметров неизвестны и, таким образом, сравнение качества оценивания в пространстве параметров невозможно. В связи с этим более показательным является сравнение качества оценивания в пространстве откликов.

Выполним пять запусков системы, подав на ее вход двоичный сигнал, изображенный на рис. 1. Для каждого запуска при $\theta = \theta^*$ смоделируем по уравнениям (5), (6) выборку измерений $Y = \{ y(t_1), y(t_2), ..., y(t_N) \}$, используя которую сформируем с помощью выражения

$$\hat{y}(t_{k+1} \mid t_{k+1}) = \mathrm{H}(t_{k+1}) \hat{x}(t_{k+1} \mid t_{k+1}) + A(t_{k+1})$$

последовательности

$$\hat{Y} = \{ \hat{y}(t_1 \mid t_1), \hat{y}(t_2 \mid t_2), ..., \hat{y}(t_N \mid t_N) \}, \hat{Y}^* = \left\{ \hat{y}^*(t_1 \mid t_1),\ \hat{y}^*(t_2 \mid t_2), ..., \hat{y}^*(t_N \mid t_N) \right\},$$

полагая $\theta = \hat{\theta}_{\text{ср}}$ и $\theta = \hat{\theta}^*_{\text{ср}}$ соответственно. Усреднив полученные результаты, образуем $Y_{\text{ср}}$, $\hat{Y}_{\text{ср}}$, $\hat{Y}^*_{\text{ср}}$, представленные на рис. 2 и 3.

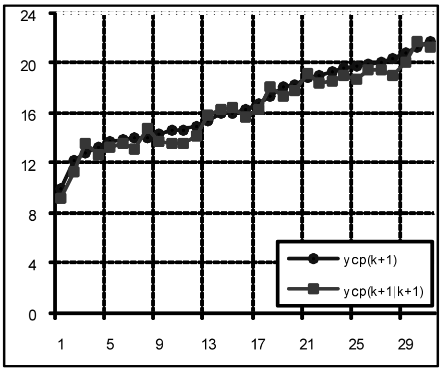

Рис. 2[*]. Графическое представление $Y_{\text{ср}}$ и $\hat{Y}_{\text{ср}}$

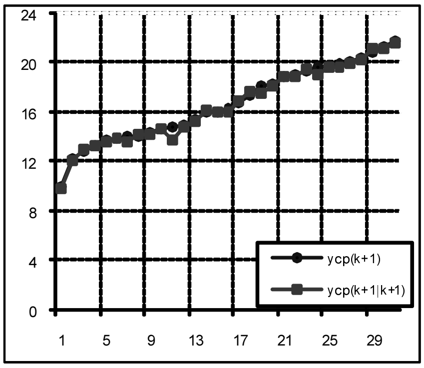

Рис. 3[†]. Графическое представление $Y_{\text{ср}}$ и $\hat{Y}^*_{\text{ср}}$

Воспользовавшись соотношениями $\delta_Y = \dfrac{\left\| Y_{\text{ср}} - \hat{Y}_{\text{ср}} \right\|}{\left\| Y_{\text{ср}} \right\|}$, $\delta^*_Y = \dfrac{\left\| Y_{\text{ср}} - \hat{Y}^*_{\text{ср}} \right\|}{\left\| Y_{\text{ср}} \right\|}$, найдем относительные ошибки оценивания в пространстве откликов. Получим, что $\delta_Y = 0.041$ и $\delta^*_Y = 0.016$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые для гауссовских линейных дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний, дано систематическое изложение наиболее существенных для практики вопросов теории и техники оптимального параметрического оценивания на основе планирования начальных условий. Рассмотрен общий случай вхождения неизвестных параметров: в уравнения состояния, наблюдения, в ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Разработанное программно-математическое обеспечение позволяет решать задачи оптимального оценивания неизвестных параметров с использованием метода максимального правдоподобия, а также прямой и двойственной градиентных процедур построения *A*- и *D*-оптимальных планов. На примере одной модельной структуры показана эффективность разработанной процедуры оптимального оценивания параметров.

[*] $y_{\text{ср}}(k+1)$ соответствует $y_{\text{ср}}(t_{k+1})$, а $y_{\text{ср}}(k+1 \mid k+1)$ соответствует $\hat{y}_{\text{ср}}(t_{k+1} \mid t_{k+1})$.

[†] $y_{\text{ср}}(k+1)$ соответствует $y_{\text{ср}}(t_{k+1})$, а $y_{\text{ср}}(k+1 \mid k+1)$ соответствует $\hat{y}_{\text{ср}}(t_{k+1} \mid t_{k+1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Mehra R.K.** Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems – survey and new results / R.K. Mehra // IEEE Trans. Automat. Control. – 1974. – № 6. – Vol. 19. – P. 753–768.

[2] **Овчаренко В.Н.** Планирование идентифицирующих входных сигналов в линейных динамических системах / В.Н. Овчаренко // АиТ. – 2001. – № 2. – С. 75–87.

[3] **Денисов В.И.** Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем во временной области / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова // Сиб. журн. индустр. матем. – 2003. – № 3. – Т. 6. – С. 70–87.

[4] **Абденов А.Ж.** Планирование автокорреляционной функции входного сигнала для стохастических непрерывно-дискретных динамических систем / А.Ж. Абденов // Автометрия. – 2005. – № 2. – Т. 41. – С. 81–97.

[5] **Pronzato L.** Optimal experimental design and some related control problems / L. Pronzato // Automatica. – 2008. – Vol. 44. – P. 303–325.

[6] **Чубич В.М.** Активная параметрическая идентификация нелинейных дискретных систем на основе линеаризации во временной области и оптимального управления / В.М. Чубич, О.С. Черникова // Проблемы управления. – 2011. – № 2. – С. 9–15.

[7] **Горский В.Г.** Планирование промышленных экспериментов (модели динамики) / В.Г. Горский, Ю.П. Адлер, А.М. Талалай. – М.: Металлургия, 1978. – 112 с.

[8] **Astrom K.J.** Maximum likelihood and prediction errors methods / K.J. Astrom // Automatica. – 1980. – Vol. 16. – P. 551–574.

[9] **Огарков М.А.** Методы статистического оценивания параметров случайных процессов / М.А. Огарков. – М.: Энергоатомиздат, 1980. – 208 с.

[10] **Базара М.** Нелинейное программирование / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.

[11] **Чубич В.М.** Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. – 2009. – № 1(34). – С. 23–40.

[12] **Чубич В.М.** Планирование начальных условий в задаче активной параметрической идентификации гауссовских линейных дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. – 2011. – № 1. – С. 39–46.

[13] **Ивченко Г.И.** Введение в математическую статистику / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010. – 600 с.

[14] **Денисов В.И.** Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова, Д.И. Бобылева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – 192 с.

[15] **Ермаков С.М.** Математическая теория оптимального эксперимента / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

[16] **Чубич В.М.** Программный комплекс активной параметрической идентификации стохастических нестационарных линейных дискретных систем (ПК-III) / В.М. Чубич, О.С. Черникова // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012612281. – М.: Роспатент, 2012.

[17] **Афанасьев В.Н.** Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высшая школа, 1998. – 574 с.

REFERENCES

[1] Mehra R.K. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems - survey and new results // IEEE Trans. Automat. Control. 1974. V. 19. No. 6. P. 753-768.

[2] Ovcharenko V.N. Planirovanie identificirujushhih vhodnyh signalov v linejnyh dinamicheskih sistemah // AiT. 2001. № 2. S. 75-87.

[3] Denisov V.I., Chubich V.M., Chernikova O.S. Aktivnaja parametricheskaja identifikacija stohasticheskih linejnyh diskretnyh sistem vo vremennoj oblasti // Sib. zhurn. industr. matem. 2003.T.6.- № 3. S. 70-87.

[4] Abdenov A.Zh. Planirovanie avtokorreljacionnoj funkcii vhodnogo signala dlja stohasticheskih nepreryvno-diskretnyh dinamicheskih sistem // Avtometrija. 2005. T. 41. №2. S. 81-97.

[5] Pronzato L. Optimal experimental design and some related control problems // Automatica. 2008.V.44. P.303–325.

[6] Chubich V.M., Chernikova O.S. Aktivnaja parametricheskaja identifikacija nelinejnyh diskretnyh sistem na osnove linearizacii vo vremennoj oblasti i optimal'nogo upravlenija // Problemy upravlenija. 2011. № 2. S. 9-15.

[7] Gorskij V.G., Adler Ju.P., Talalaj A.M. Planirovanie promyshlennyh jeksperimentov (modeli dinamiki). M.: Metallurgija, 1978. 112 s.

[8] Astrom K.J. Maximum likelihood and prediction errors methods // Automatica. 1980. V. 16. P. 551 - 574.

[9] Ogarkov M.A. Metody statisticheskogo ocenivanija parametrov sluchajnyh processov. M.: Jenergoatomizdat. 1980. 208 c.

[10] Bazara M., Shetti K. Nelinejnoe programmirovanie. M.: Mir. 1982. 583 c.

[11] Chubich V.M. Vychislenie informacionnoj matricy Fishera v zadache aktivnoj parametricheskoj identifikacii stohasticheskih nelinejnyh diskretnyh sistem // Nauchnyj vestnik NGTU. 2009. № 1 (34). S. 23-40.

[12] Chubich V.M. Planirovanie nachal'nyh uslovij v zadache aktivnoj parametricheskoj identifikacii gaussovskih linejnyh diskretnyh sistem // Nauchnyj vestnik NGTU. 2011. № 1. S.39-46.

[13] Ivchenko G.I., Medvedev Ju.I. Vvedenie v matematicheskuju statistiku. M.: Izd-vo LKI, 2010. 600 c.

[14] Denisov V.I., Chubich V.M., Chernikova O.S., Bobyleva D.I. Aktivnaja parametricheskaja identifikacija stohasticheskih linejnyh sistem. Novosibirsk: Izd-vo NGTU. 2009. 192 s.

[15] Ermakov S.M., Zhigljavskij A.A. Matematicheskaja teorija optimal'nogo jeksperimenta. M.: Nauka. 1987. 320 s.

[16] Chubich V.M., Chernikova O.S. Programmnyj kompleks aktivnoj parametricheskoj identifikacii stohasticheskih nestacionarnyh linejnyh diskretnyh sistem (PK-III) // Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlja JeVM №2012612281. – M.: Rospatent. – 2012.

[17] Afanas'ev V.N., Kolmanovskij V.B., Nosov V.R. Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija. M.: Vysshaja shkola. 1998. 574 s.

Чубич Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – анализ и планирование экспериментов для стохастических динамических систем. Имеет более 40 публикаций, в том числе 5 учебных пособий и монографию. E-mail: chubich_62@ngs. ru.

Черникова Оксана Сергеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – планирование экспериментов для стохастических динамических систем. Имеет более 20 публикаций, в том числе монографию. E-mail: chernicova@ngs. ru.

V.M. Chubich, O.S. Chernikova

Optimal parameter estimation Gaussian linear discrete system based on design of initial conditions

We treat systematically the most significant practical questions of the theory and techniques of the optimal parameter estimation of stochastic linear discrete systems. For the first time we consider and solve actual problem of optimal estimation in the case when the unknown parameters appear in the state and control equations as well as the covariance matrices of the dynamic noise and measurement errors. The designed algorithm of calculation of information matrices derivatives with respect to initial state components is given. This algorithm allows us to synthesize initial state by means of sequential quadratic programming method and by that to reduce search time of optimal experiment design considerably. The original gradient algorithms of optimal parameter estimation are designed. They enable us to solve optimal parameter estimation problems for mathematical models using the maximum likelihood method involving the direct and dual procedures for synthesizing A and D –optimal initial conditions. Some theoretical and applied aspects of the optimal parameter estimation of the stochastic linear discrete systems based on design of initial conditions are considered for the first time. An example of optimal parameter estimation for one model structure is shown.

Key words: linear discrete system, parameter estimation, maximum likelihood method, design of initial conditions, information matrix, optimality criterion, Kalman filter, evaluation quality.