

Применение глобальных координат в модели составной осесимметричной оболочки при анализе ее статического и динамического поведения*

В.Е. ЛЕВИН, А.Н. ПЕЛЬ, Д.А. КРАСНОРУЦКИЙ, П.З. АЛЮКАЕВ

В статье получены разрешающие уравнения расчета параметров напряженно-деформированного состояния оболочек вращения при статическом и динамическом осесимметричном нагружении. При выводе применяется глобальная система координат срединной поверхности оболочки и векторов поворота точки на этой поверхности. В качестве примера приведены результаты расчета статического деформирования составной оболочки, состоящей из цилиндрической и конической части. В частном случае для круговой пластины из общих уравнений получаются известные уравнения.

Ключевые слова: оболочка, орт, система координат, кривизна.

ВВЕДЕНИЕ

Теория оболочек в ее традиционной форме [1] располагает хорошо развитым аппаратом, позволяющим решать многие задачи практики. Для вывода разрешающих уравнений, как правило, используются локальные системы координат, опирающиеся на геометрию самой оболочки – касательные и нормаль к срединной поверхности. В то же время такая параметризация не всегда удобна, например, при расчете составных оболочек. При решении задач деформирования оболочек, имеющих излом меридиана предполагается склейка решений, что накладывает определенные неудобства при получении численного результата.

Представленные в данной статье разрешающие уравнения построены с применением глобальных систем координат и вектора конечного поворота [2]. Этот подход удачно применялся для описания поворотов поперечных сечений при деформировании тонкого стержня [3–4]. Вектор поворота используется для описания деформирования окрестности точки на срединной поверхности оболочки.

1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Для вывода уравнений оболочки предполагаем, что выполняются гипотезы Кирхгофа – Лява. Их применение для описания деформирования оболочки позволяет перейти к задаче деформирования ее срединной поверхности.

Запишем векторное уравнение срединной поверхности оболочки вращения в следующем виде:

$$\vec{r}(s, \varphi) = r(s)\vec{i}_r + z(s)\vec{i}_z, \quad (1)$$

где \vec{i}_k – орты глобальной цилиндрической системы координат, s – координата вдоль меридиана (рис. 1).

* Статья получена 26 июня 2013 г.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта Министерства образования и науки РФ № 7.822.2011.

Возьмем на срединной поверхности некоторую точку O с координатами $s = s_0$ и $\varphi = \varphi_0$. Затем линиями $s_1 = r\varphi_0$, $s_1 = r(\varphi_0 + d\varphi)$, $s_2 = s_0$, $s_2 = s_0 + ds_2$ вырежем малый элемент поверхности $ds_1 \times ds_2$ (рис. 2). Поместим тройку ортов локального базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в рассматриваемую точку O .

Локальный базис, связанный с поверхностью, образуется следующими единичными векторами:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{i}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i}_1 + \cos \varphi \vec{i}_2, \\ \vec{e}_2 &= r_{,s} \vec{i}_r + z_{,s} \vec{i}_z = r_{,s} \cos \varphi \vec{i}_1 + r_{,s} \sin \varphi \vec{i}_2 + z_{,s} \vec{i}_3, \\ \vec{e}_3 &= z_{,s} \vec{i}_r - r_{,s} \vec{i}_z = z_{,s} \cos \varphi \vec{i}_1 + z_{,s} \sin \varphi \vec{i}_2 - r_{,s} \vec{i}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

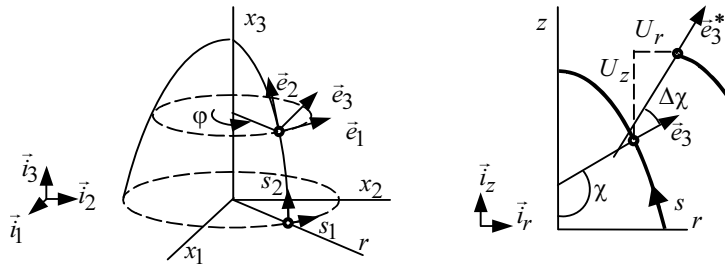


Рис. 1. Геометрия и деформирование оболочки вращения

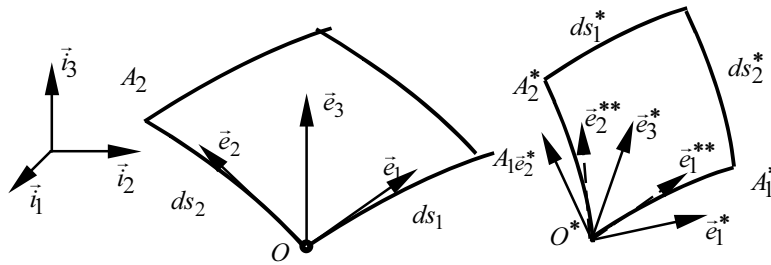


Рис. 2. Деформирование элемента срединной поверхности оболочки

Связь ортов локального и глобального базиса выражается соотношением:

$$\vec{e}_j = \beta_{jk} \vec{i}_k, \quad \beta = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ r_{,s} \cos \varphi & r_{,s} \sin \varphi & z_{,s} \\ z_{,s} \cos \varphi & z_{,s} \sin \varphi & -r_{,s} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Деформацию малого элемента оболочки представим следующим образом:

- перемещение элемента параллельно самому себе как жесткого целого и поворот относительно точки O^* ;
- изменение длин его сторон;
- изменение угла между сторонами.

При повороте малого элемента поверхности относительно некоторой оси, проходящей через точку O , тройка единичных векторов, ориентированная так же, как орты $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, по-

вернется и займет положение \vec{i}_1^* , \vec{i}_2^* , \vec{i}_3^* . Положение ортов в пространстве после поворота будет определено, если известен закон их преобразования [5]:

$$\vec{i}_j^* = \lambda_{jk} \vec{i}_k, \quad (4)$$

где λ_{jk} – элементы матрицы поворота.

Компоненты матрицы поворота вычисляются по формуле

$$\lambda_{ij} = \delta_{ij} + e_{ijk} \frac{\sin|\vec{\omega}|}{|\vec{\omega}|} \omega_k + e_{kin} e_{jmn} \frac{1 - \cos|\vec{\omega}|}{|\vec{\omega}|^2} \omega_m \omega_k,$$

здесь $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}(s_1, s_2)$ – вектор конечного поворота [2]; ω_k – проекции этого вектора на оси глобальной системы координат; e_{ijk} – символы Леви–Чевиты.

Вектор поворота нормали в случае осесимметричного деформирования (рис. 1) имеет вид

$$\vec{\omega} = -\Delta\chi \vec{e}_1 = -\Delta\chi \beta_{1k} \vec{i}_k = \Delta\chi \sin \varphi \vec{i}_1 - \Delta\chi \cos \varphi \vec{i}_2. \quad (5)$$

Таким образом,

$$\omega_1 = \Delta\chi \sin \varphi, \quad \omega_2 = -\Delta\chi \cos \varphi, \quad \omega_3 = 0, \quad |\vec{\omega}| = \Delta\chi. \quad (6)$$

В результате деформирования длины отрезков $|OA_1| = ds_1$ и $|OA_2| = ds$ изменятся и станут равными соответственно $|O^*A_1^*| = ds_1^*$ и $|O^*A_2^*| = ds^*$. Деформации ε_1 и ε_2 в направлениях s_1 и s_2 : $\varepsilon_1 = \frac{ds_1^* - ds_1}{ds_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{ds_2^* - ds_2}{ds_2}$.

Рассмотрим вектор \vec{OA}_2 до поворота:

$$d\vec{r} = \vec{e}_2 ds_2 = \beta_{2k} \vec{i}_k ds_2. \quad (7)$$

При повороте относительно точки O координаты этого вектора в поворачивающемся базисе не изменятся. Длина может измениться в результате деформации растяжения-сжатия.

В итоге получим выражение для этого вектора после поворота и деформации

$$d\vec{r}^* = \vec{e}_2^* ds_2^* = \beta_{2k} \vec{i}_k^* ds_2^* = (1 + \varepsilon_2) \beta_{2k} \lambda_{kj} \vec{i}_j ds_2. \quad (8)$$

Вместе с изменением длины при деформировании возможно изменение угла между ортогональными векторами \vec{e}_1^* , \vec{e}_2^* . Обозначим конфигурацию векторов, связанных с деформированной поверхностью, \vec{e}_1^{**} , \vec{e}_2^{**} , \vec{e}_3^* (рис.1.). Векторы \vec{e}_1^{**} и \vec{e}_2^{**} выражаются через векторы \vec{e}_1^* и \vec{e}_2^* :

$$\vec{e}_1^{**} = \vec{e}_1^* \cos \gamma + \vec{e}_2^* \sin \gamma, \quad \vec{e}_2^{**} = -\vec{e}_1^* \sin \gamma + \vec{e}_2^* \cos \gamma,$$

где γ – угол, характеризующий нарушение ортогональности векторов \vec{e}_1^{**} и \vec{e}_2^{**} (для ортогональных векторов $\gamma = 0$).

$$\text{Обозначим } \vec{e}_k^{**} = a_{kj} \vec{e}_j^*, \quad \vec{e}_m^* = \hat{a}_{mn} \vec{e}_n^{**}, \quad a = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad \hat{a} = \frac{1}{\cos 2\gamma} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Соотношение (8) может быть записано в виде

$$d\vec{r}^* = \vec{e}_1^{**} ds_1^* = a_{1j} \vec{e}_j^* ds_1^* = a_{1j} \beta_{jk} \vec{i}_k^* ds_1^* = a_{1j} (1 + \varepsilon_1) \beta_{jk} \lambda_{kn} \vec{i}_n ds_1.$$

Поскольку $\frac{\partial \vec{U}}{\partial s_j} = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial s_j} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_j}$, где \vec{U} – вектор перемещений срединной поверхности, то

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial s_i} = [a_{ij} (1 + \varepsilon_i) \beta_{jk} \lambda_{kn} - \beta_{in}] \vec{i}_n, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Соотношения (9) описывают кинематику деформирования срединной поверхности оболочки и связывают поворот элемента оболочки, растяжение его сторон и изменение угла между ними с перемещениями элемента. Метрика деформированной поверхности определяется шестью функциями координат срединной поверхности оболочки: $\omega_1(s_1, s_2)$, $\omega_2(s_1, s_2)$, $\omega_3(s_1, s_2)$, $\varepsilon_1(s_1, s_2)$, $\varepsilon_2(s_1, s_2)$ и $\gamma(s_1, s_2)$. Теоретически эти шесть функций могут быть выражены через параметры перемещений – шесть частных производных. Ограничений на рассмотренные функции не накладывается. Эти соотношения являются нелинейными. В случае малых поворотов и растяжений возможна их линейризация.

Найдем кривизны оболочки в направлении нормали к ней в двух сечениях для недеформированного и деформированного состояний:

$$k_1 = \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial s_1} \vec{e}_1, \quad k_1^* = \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial s_1^*} \vec{e}_1^{**}, \quad k_2 = \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial s_2} \vec{e}_2, \quad k_2^* = \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial s_2^*} \vec{e}_2^{**}. \quad (10)$$

В случае осесимметричного деформирования оболочки вращения координатная сетка на оболочке остается ортогональной, т. е. $\gamma = 0$.

Кривизны недеформированной срединной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial s_1} \vec{e}_1 = \frac{1}{r} (-z_{,s} \sin \varphi \vec{i}_1 + z_{,s} \cos \varphi \vec{i}_2) (-\sin \varphi \vec{i}_1 + \cos \varphi \vec{i}_2) = \frac{z_{,s}}{r}, \\ k_2 &= \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial s_2} \vec{e}_2 = (z_{,ss} \cos \varphi \vec{i}_1 + z_{,ss} \sin \varphi \vec{i}_2 - r_{,ss} \vec{i}_3) (r_{,s} \cos \varphi \vec{i}_1 + r_{,s} \sin \varphi \vec{i}_2 + z_{,s} \vec{i}_3) = \\ &= z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s}. \end{aligned} \quad (11)$$

Кривизны координатных линий на деформированной поверхности вычислим по формулам

$$\begin{aligned} k_1^* &= \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial s_1^*} \vec{e}_1^* = \frac{1}{r} \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)} \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial \varphi} \vec{e}_1^* = \frac{1}{r} \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)} (z_{,s} \cos \Delta\chi + r_{,s} \sin \Delta\chi), \\ k_2^* &= \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial s_2^*} \vec{e}_2^* = \frac{1}{1 + \varepsilon_2} \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial s} \vec{e}_2^* = \frac{1}{1 + \varepsilon_2} (z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s} - \Delta\chi_{,s}), \end{aligned} \quad (12)$$

здесь $\vec{e}_k^* = \beta_{kn} \vec{i}_n^* = \beta_{kn} \lambda_{mn} \vec{i}_m$.

Запишем приращения кривизн

$$\Delta k_1 = k_1^* - k_1 = \frac{1}{r} \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)} (z_{,s} \cos \Delta\chi + r_{,s} \sin \Delta\chi) - \frac{z_{,s}}{r},$$

$$\Delta k_2 = k_2^* - k_2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_2} (z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s} - \Delta \chi_{,s}) - z_{,ss} r_{,s} - r_{,ss} z_{,s}. \quad (13)$$

Произведем преобразование выражений для производных перемещений (9). Так как $\vec{U} = U_r \vec{i}_r + U_z \vec{i}_z = U_r \cos \varphi \vec{i}_1 + U_r \sin \varphi \vec{i}_2 + U_z \vec{i}_3$, то из (9) получаем

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial s_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} U_r \vec{i}_\varphi = \varepsilon_1 \vec{i}_\varphi, \text{ откуда: } \varepsilon_1 = \frac{1}{r} U_r. \quad (14)$$

Поскольку $\frac{d\vec{U}}{ds} = \frac{dU_r}{ds} \vec{i}_r + \frac{dU_z}{ds} \vec{i}_z$, то можем записать:

$$\frac{dU_r}{ds} = (1 + \varepsilon_2) (r_{,s} \cos \Delta \chi - z_{,s} \sin \Delta \chi) - r_{,s}, \quad (15)$$

$$\frac{dU_z}{ds} = (1 + \varepsilon_2) (z_{,s} \cos \Delta \chi + r_{,s} \sin \Delta \chi) - z_{,s}. \quad (16)$$

Таким образом, в случае осесимметричного деформирования оболочки вращения связь угла поворота нормали к меридиану, деформации меридиана и окружной деформации с радиальными и осевыми перемещениями точек меридиана выражается с помощью соотношений (14), (15) и (16). Если углы поворота нормали и деформации меридиана малы, то соотношения (13), (15), (16) можно упростить:

$$\begin{aligned} \frac{dU_r}{ds} &= r_{,s} \varepsilon_2 - z_{,s} \Delta \chi, & \frac{dU_z}{ds} &= z_{,s} \varepsilon_2 + r_{,s} \Delta \chi, \\ \Delta k_1 &= k_1^* - k_1 = \frac{r_{,s} \Delta \chi}{r}, & \Delta k_2 &= k_2^* - k_2 = -\Delta \chi_{,s}, & \varepsilon_1 &= \frac{1}{r} U_r. \end{aligned} \quad (17)$$

2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим равновесие элемента оболочки, находящийся под действием распределенной нагрузки (рис. 3). По его граням прикладываются внутренние погонные усилия и моменты, полученные в результате усреднения напряжений по толщине оболочки.

Направление погонной силы относительно нормали к грани, в которой она действует, может быть в общем случае произвольным (возможны нормальные, поперечные и касательные усилия). Вектор погонного момента лежит в плоскости элемента для обеих граней.

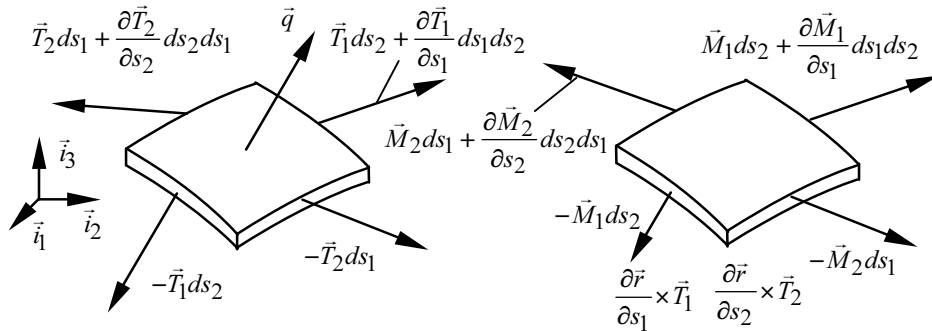


Рис. 3. Равновесие сил и моментов, приложенных к элементу

При выполнении гипотез Кирхгофа – Лява и введении погонных усилий и моментов будем рассматривать равновесие элемента срединной поверхности оболочки.

Представим дифференциалы параметров поверхности в следующем виде:

$$ds_1 = A_1 d\alpha_1, \quad ds_2 = A_2 d\alpha_2,$$

где A_1, A_2 – параметры Ляме, α_1, α_2 – безразмерные параметры на поверхности.

Для деформированной оболочки имеем $ds_1^* = A_1^* d\alpha_1$, $ds_2^* = A_2^* d\alpha_2$.

Уравнения равновесия сил и моментов, записанные для деформированного состояния, выглядят таким образом:

$$\frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_2^* \vec{T}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_1^* \vec{T}_2)}{\partial \alpha_2} + \vec{q} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_2^* \vec{M}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial (A_1^* \vec{M}_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_1} \times \vec{T}_1 + \frac{1}{A_2^*} \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha_2} \times \vec{T}_2 = 0. \quad (19)$$

Приложенные к граням вырезанного элемента распределенные усилия и моменты могут быть разложены на компоненты в локальном базисе. Локальный базис связан с деформированной срединной поверхностью оболочки.

Тем не менее с точки зрения получаемых соотношений более удобным является использование проекций моментов и сил на глобальные оси системы координат. Получаемые при таком проектировании уравнения оболочки являются свободными от кривизн исходной поверхности, что позволяет описывать оболочки с изломами меридиана.

Рассмотрим осесимметричное нагружение оболочки вращения. Введем параметры Ляме в виде следующих соотношений:

$$ds_1 = r d\varphi, \quad ds_2 = \ell d\xi,$$

здесь $\xi = s / \ell$, ℓ – характерный геометрический размер оболочки, s – длина меридиана.

В случае деформированной поверхности

$$ds_1^* = r(1 + \varepsilon_1) d\varphi, \quad ds_2^* = \ell(1 + \varepsilon_2) d\xi.$$

В силу осевой симметрии деформирования векторы неизвестных погонных внутренних усилий и моментов имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= T_{1\varphi} \vec{i}_\varphi, & \vec{T}_2 &= T_{2r} \vec{i}_r + T_{2z} \vec{i}_z, \\ \vec{M}_1 &= M_{1s} \vec{i}_s = M_{1s} r_s \vec{i}_r + M_{1s} z_s \vec{i}_z, & \vec{M}_2 &= M_{2\varphi} \vec{i}_\varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Полагаем, что деформации малы. В этом случае геометрия деформированной оболочки практически не отличается от геометрии недеформированной, поэтому можно принять допущение, что $A_1^* = A_1 = r$, $A_2^* = A_2 = \ell$.

Вектор распределенной нагрузки представим так: $\vec{q} = q_r \vec{i}_r + q_z \vec{i}_z$.

Запишем уравнение равновесия сил (18) в проекциях на оси цилиндрической системы координат \vec{i}_r, \vec{i}_z :

$$\frac{d(rT_{2r})}{d\xi} - \ell T_{1\varphi} + q_r r \ell = 0, \quad \frac{d(rT_{2z})}{d\xi} + q_z r \ell = 0. \quad (21)$$

Уравнение равновесия сил в проекции на ось \vec{i}_φ удовлетворяется тождественно.

Перепишем уравнение равновесия моментов (19) в проекции на ось \vec{i}_φ :

$$\frac{d(rM_{2\varphi})}{d\xi} + \ell M_{1s}r_{,s} + r\ell(T_{2rz,s} - T_{2zs,r}) = 0. \quad (22)$$

Приведем необходимые соотношения теории упругости.

Нормальные к граням элемента погонные силы N_1 , N_2 и изгибающие моменты M_1 , M_2 , приложенные к граням элемента срединной поверхности оболочки (соответствующие векторы лежат в срединной поверхности), связаны с изменениями геометрии срединной поверхности следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1 = T_{1\varphi} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad N_2 = T_{2r}r_{,s} + T_{2z}z_{,s} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \\ M_1 = M_{1s} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\Delta k_1 + \nu\Delta k_2), \quad M_2 = -M_{2\varphi} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\Delta k_2 + \nu\Delta k_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Введем безразмерные геометрические параметры оболочки $\bar{h} = h/\ell$, $\bar{r} = r/\ell$, наряду с $\xi = s/\ell$, и неизвестные функции (соответствующие индексы не указываются):

$$\bar{U} = U/\ell, \quad \bar{T} = \frac{1-\nu^2}{Eh}T, \quad \bar{M} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2}M. \quad (24)$$

Примем в качестве разрешающих следующие функции:

$$\bar{U}_r, \bar{U}_z, \Delta\chi, \bar{T}_{2r}, \bar{T}_{2z}, \bar{M}_{2\varphi}. \quad (25)$$

Остальные величины, которые описывают напряженно-деформированное состояние оболочки, выражаются через разрешающие функции.

Для разрешающих функций получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}_r}{d\xi} &= \bar{r}_{,\xi} \left(\bar{T}_{2r}\bar{r}_{,\xi} + \bar{T}_{2z}\bar{z}_{,\xi} - \nu\frac{\bar{U}_r}{\bar{r}} \right) - \bar{z}_{,\xi}\Delta\chi, \\ \frac{d\bar{U}_z}{d\xi} &= \bar{z}_{,\xi} \left(\bar{T}_{2r}\bar{r}_{,\xi} + \bar{T}_{2z}\bar{z}_{,\xi} - \nu\frac{\bar{U}_r}{\bar{r}} \right) + \bar{r}_{,\xi}\Delta\chi, \\ \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} &= \frac{1}{\bar{r}} \left[(\nu-1)\bar{r}_{,\xi}\bar{T}_{2r} + \nu\bar{T}_{2z}\bar{z}_{,\xi} + (1-\nu^2)\frac{\bar{U}_r}{\bar{r}} - \frac{q_r\bar{r}(1-\nu^2)}{E\bar{h}} \right], \\ \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} &= \frac{1}{\bar{r}} \left[-\bar{r}_{,\xi}\bar{T}_{2z} - \frac{q_z\bar{r}(1-\nu^2)}{E\bar{h}} \right], \quad \frac{d\Delta\chi}{d\xi} = -\frac{\bar{M}_{2\varphi}}{\bar{h}} - \nu\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}}\Delta\chi, \\ \frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} &= (\nu-1)\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}}\bar{M}_{2\varphi} + \bar{h}(\nu^2-1)\left(\frac{\bar{r}_{,\xi}}{\bar{r}}\right)^2\Delta\chi - \frac{12}{\bar{h}}(\bar{T}_{2r}\bar{z}_{,\xi} - \bar{T}_{2z}\bar{r}_{,\xi}). \end{aligned} \quad (26)$$

Систему уравнений (26) дополняем необходимыми краевыми условиями.

Для получения системы уравнений осесимметричных движений необходимо добавить в систему (26) инерционные составляющие: $q_r = \rho h(\xi)\ddot{U}_r$, $q_z = \rho h(\xi)\ddot{U}_z$, где $\rho h(\xi)$ – масса оболочки на единицу площади; точки означают дифференцирование по времени.

3. НАХОЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НДС СОСТАВНОЙ ОБОЛОЧКИ

Проведем расчет статического деформирования составной оболочки, представляющей собой усеченный конус и цилиндр (рис. 4) со следующими параметрами: $\bar{h} = h / R = 0.005$, радиус цилиндра $R = 0.5$ м, высота цилиндра – $H = 0.7$ м, длина образующей конуса $L = 0.3$ м, модуль упругости материала оболочки $E = 20$ МПа. Нагружение осуществим постоянным давлением $P = \bar{P} \cdot E$.

Рассмотрим нагружение оболочки с двумя разными углами конусности ϕ .

Численное решение уравнений (26) будем получать методом пристрелки. На рис. 5 и 6 сплошной линией обозначена деформированная конфигурация оболочки, пунктиром – недеформированная.

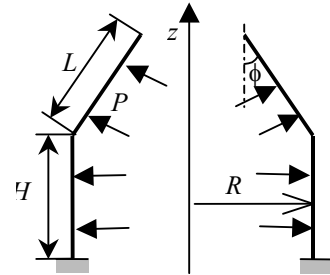


Рис. 4. Схема нагружения

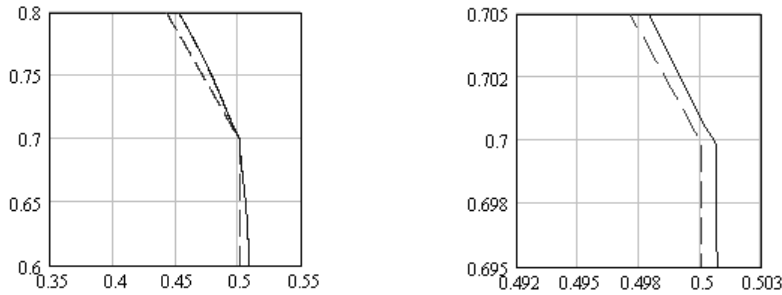


Рис. 5. Деформированная конфигурация оболочки при $\phi = 30^\circ$, $\bar{P} = 3 \times 10^{-7}$

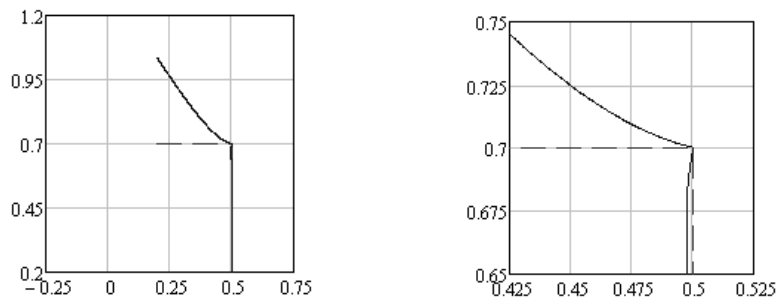


Рис. 6. Деформированная конфигурация оболочки при $\phi = 90^\circ$, $\bar{P} = 1 \times 10^{-8}$

При традиционном решении задачи о нагружении оболочки, составленной из конуса и цилиндра, производится стыковка решений для цилиндрической и конической частей оболочки. В рамках предложенной методики результат получен решением краевой задачи для системы дифференциальных уравнений всей оболочки, записанных в глобальных переменных, которые не привязаны к исходной форме оболочки и заранее удовлетворяют уравнениям совместности. Стыковка решений в этом случае выполняется автоматически.

В случае $\phi = 90^\circ$ коническая часть составной оболочки вырождается в кольцевую платину. Покажем, что используемые уравнения применимы и для расчета круглых плитин как предельного случая формы конической оболочки.

4. ПЕРЕХОД К ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Из уравнений (26) можно получить уравнения для круглой пластины. Геометрию оболочки-пластины зададим следующим образом:

$$\bar{r}(s) = s; \quad \bar{z}(s) = 0.$$

Система уравнений (26) распадается на две подсистемы, описывающие изгиб круговой пластины (27) и ее растяжение в плоскости (28):

$$\frac{d\bar{U}_z}{d\xi} = \Delta\chi, \quad \frac{d\Delta\chi}{d\xi} = -\frac{\bar{M}_{2\varphi}}{\bar{h}} - \nu\frac{1}{\bar{r}}\Delta\chi, \quad \frac{d\bar{T}_{2z}}{d\xi} = \frac{1}{\bar{r}} \left[-\bar{T}_{2z} - \frac{q_z\bar{r}(1-\nu^2)}{E\bar{h}} \right],$$

$$\frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} = (\nu-1)\frac{1}{\bar{r}}\bar{M}_{2\varphi} + \bar{h}(\nu^2-1)\frac{1}{\bar{r}^2}\Delta\chi + \frac{12}{\bar{h}}\bar{T}_{2z}. \quad (27)$$

$$\frac{d\bar{U}_r}{d\xi} = \bar{T}_{2r} - \nu\frac{\bar{U}_r}{\bar{r}}, \quad \frac{d\bar{T}_{2r}}{d\xi} = \frac{1}{\bar{r}} \left[(\nu-1)\bar{T}_{2r} + (1-\nu^2)\frac{\bar{U}_r}{\bar{r}} - \frac{q_r\bar{r}(1-\nu^2)}{E\bar{h}} \right]. \quad (28)$$

Сведем систему уравнений (27) к уравнениям теории оболочек. Для этого из четвертого уравнения (27) выразим осевую силу:

$$\bar{T}_{2z} = \frac{\bar{h}}{12} \left[\frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} - (\nu-1)\frac{1}{\bar{r}}\bar{M}_{2\varphi} - \bar{h}(\nu^2-1)\frac{1}{\bar{r}^2}\Delta\chi \right]. \quad (29)$$

Подставим выражение (29) в третье уравнение системы (27):

$$\frac{\bar{h}}{12} \left[\frac{d^2\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi^2} - (\nu-2)\frac{1}{\bar{r}}\frac{d\bar{M}_{2\varphi}}{d\xi} - \bar{h}(\nu^2-1)\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{d\Delta\chi}{d\xi} \right] = -\frac{q_z(1-\nu^2)}{E\bar{h}}. \quad (30)$$

Выразим из второго уравнения (27) изгибающий момент и подставим его в уравнение (30):

$$\frac{\bar{h}^2}{12} \left[\left(\frac{d^3\Delta\chi}{d\xi^3} \right) + 2\frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{d^2\Delta\chi}{d\xi^2} \right) - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{d\Delta\chi}{d\xi} + \frac{1}{\bar{r}^3} \Delta\chi \right] = -\frac{q_z(1-\nu^2)}{E\bar{h}}. \quad (31)$$

Подставляя вместо $\Delta\chi$ первое уравнение системы (27), получим

$$\frac{d^4U_z}{d\xi^4} + 2\frac{1}{\bar{r}}\frac{d^3U_z}{d\xi^3} - \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{d^2U_z}{d\xi^2} + \frac{1}{\bar{r}^3}\frac{dU_z}{d\xi} = -\frac{q_z}{D}, \quad D = \frac{E\bar{h}^3}{12(1-\nu^2)} \quad (32)$$

Уравнение (32) соответствует уравнению Софи Жермен-Лагранжа [6], описывающему изгиб круговой симметрично нагруженной пластины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение глобальных координат при составлении уравнений деформирования оболочки позволяет уйти от проблем стыковки при расчете деформирования составных оболочек (с изломом меридиана). Получены уравнения осесимметричного деформирования срединной поверхности оболочки с использованием глобальных координат. Сделаны проверки на частных случаях. Проведены расчеты статического деформирования осесимметричной составной оболочки. Влияние излома в меридиане оболочки на характер деформирования подобно влиянию шпангоута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в трех томах. Т. 1. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Изд-во «Машиностроение», 1968. – 832 с.
- [2] Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц / Дж. Аргирис. – 1968. – М.: Изд-во лит-ры по стр-ву. – 242 с.
- [3] Пустовой Н.В. Применение геометрически нелинейных уравнений стержня к расчету статике и динамики тросов. Часть 1 / Н.В. Пустовой, В.Е. Левин, Д.А. Красноруцкий // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1 (46). – С. 83–92.
- [4] Пустовой Н.В. Методика вычисления параметров больших поворотов поперечных сечений гибкого стержня при расчетах в рамках его дифференциальной модели. Часть 1 / Н.В. Пустовой, В.Е. Левин, Д.А. Красноруцкий // Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2 (51). – С. 155–165.
- [5] Левин В.Е. Механика деформирования криволинейных стержней: монография / В.Е. Левин, Н.В. Пустовой. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 208 с.
- [6] Уманский А.А. Строительная механика самолета / А.А. Уманский. – М.: Оборонгиз, 1961. – 529 с.

REFERENCES

- [1] Birger I.A. Prochnost', ustojchivost', kolebanija – Spravochnik v treh tomah. Tom 1. Pod red. I.A. Birgera i Ja.G. Panovko. – Moskva, izdate'l'stvo "Mashinostroenie", 1968. – 832 s.
- [2] Argiris Dzh. Sovremennye dostizhenija v metodah rascheta konstrukcij s primeneniem matric. – 1968. – М.: Izd-vo lit-ry po str-vu. – 242 s.
- [3] Pustovoj N.V. Primenenie geometricheski nelinejnyh uravnenij stержnja k raschetu statiki i dinamiki trossov. Chast' 1 / N.V. Pustovoj, V.E. Levin, D.A. Krasnoruckij // Nauchnyj vestnik NGTU, 2012. – № 1 (46). – S. 83–92.
- [4] Pustovoj N.V. Metodika vychislenija parametrov bol'shix povorotov poperechnyx sechenij gibkogo stержnja pri raschetah v ramkah ego differencial'noj modeli. Chast' 1 / N.V. Pustovoj, V.E. Levin, D.A. Krasnoruckij // Nauchnyj vestnik NGTU, 2013. – № 2 (51). – S. 155–165.
- [5] Levin V.E., Pustovoj N.V. Mehanika deformirovanija krivolinejnyh stержnej: monografija. – Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2008. – 208 s.
- [6] Uman'skij A.A. Stroitel'naja mehanika samoleta. – М.: Oborongiz, 1961. – 529 s.

Левин Владимир Евгеньевич, доктор технических наук, доцент, зам. заведующего кафедрой прочности летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – динамика конструкций. Имеет более 40 публикаций, в том числе 1 монографию. E-mail: levin@craft.nstu.ru

Пель Александр Николаевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прочности летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – деформирование оболочек. Имеет более 20 публикаций. E-mail: pell@ngs.ru

Красноруцкий Дмитрий Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – механика деформирования криволинейных стержней. Имеет более 20 публикаций. E-mail: dakras@mail.ru

Алюкаев Павел Зарифович, аспирант кафедры технической механики Сибирской государственной академии управления, инженер ОАО «ИСС» им академика Ф.М. Решетнева. Основное направление научных исследований – модальный анализ ЛА. Имеет 6 публикаций. E-mail: pavel-alyukaev@yandex.ru

V.E. Levin, A.N. Pel, D.A. Krasnorutskiy, P.Z. Alyukaev

Usage of global coordinates in model of a compound axisymmetric shell for the analysis of static and dynamic behavior

At this paper the equations for calculating the parameters of the stress-strain state of shells of revolution under static and dynamic axisymmetric loading are derived. The global coordinate system of the shell's middle surface and rotation vectors at points on this surface are used to derive these equations. A natural curvature of a shell is not used in these equations. It is possible to solve nonlinear boundary-value problem for any profile line of shell of revolution. As an example the results of calculation of the static deformation of compound shell of cylindrical and conic parts are presented. In contrast to the traditional approach when we have to join the solutions for parts, the presented method allows us to obtain solution for compound shell immediately. The shooting method is used to solve nonlinear boundary-value problem for derived system of equations. In a particular case for the round plate the known equations follow from the common equations.

Key words: axisymmetric shell, large displacements, shells of revolution, ort, global coordinate system, curvature.