ISSN 1814-1196
Научный вестник НГТУ
том 74, № 1, 2019, с. 7–20

http://journals.nstu.ru/vestnik
Science Bulletin of the NSTU
Vol. 74, No. 1, 2019, pp. 7–20

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,
COMPPUTER ENGINEERING
AND CONTROL

УДК 539.3: 534.1

DOI: 10.17212/1814-1196-2019-1-7-20

Колебания механических систем при случайных кинематических возбуждениях*

Ж.Б. БАКИРОВ[a], М.Ж. БАКИРОВ[b], Г.Д. ТАЖЕНОВА[c], Т.С. ФИЛИППОВА[d]

100027, РК, г. Караганда, бульвар Мира, 56, Карагандинский государственный технический университет

[a] bakirov_50@mail.ru [b] Madybacirov@rambler.ru [c] gulzada_2604@mail.ru
[d] confucius_kstu@mail.ru

Работа посвящена исследованию линейных колебаний механической системы с одной степенью свободы при случайных кинематических возбуждениях. Для общего случая нестационарного воздействия задача решается методом функции Грина. Применением теории случайных функции получены общие выражения для определения математического ожидания и корреляционной функции выходного процесса. Рассмотрены нестационарные колебания системы при стационарных возбуждениях двух типов: в виде «белого шума» и экспоненциально-коррелированного процесса. Для этих воздействий определены выражения для корреляционной функции и дисперсии выходного процесса. Также определено выражение для дисперсии относительного перемещения массы. Такой режим колебаний характерен для переходных процессов в системе. Путем увеличения времени наблюдения осуществлен переход к установившемуся режиму колебаний системы.

Спектральным методом решена задача о стационарных колебаниях системы при стационарных случайных кинематических воздействиях. Полученное решение использовано для определения вероятностных характеристик колебаний подвески автомобиля от воздействия случайного микропрофиля дороги. При этом кинематическое воздействие представлено случайными процессами двух видов: экспоненциально-коррелированным процессом и косинусоидальным процессом. На основе решения задачи могут быть получены общие соотношения для определения спектральной плотности и корреляционной функции динамической составляющей силы в подвеске.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчете и проектировании систем виброзащиты оборудования и рабочих мест от случайных кинематических воздействий, а также для оценки погрешности показаний приборов и аппаратуры, установленных на основаниях, испытывающих случайные вибрации.

Ключевые слова: случайные колебания, динамическая модель, кинематическое воздействие, функция Грина, корреляционная функция, спектральная плотность, дисперсия, спектральный метод, виброзащита

* *Статья получена 10 сентября 2018 г.*

ВВЕДЕНИЕ

Кинематическое воздействие на механическую систему возникает при всяком движении основания, на котором она установлена. Это многочисленные устройства амортизации и демпфирования транспортных средств, системы виброзащиты различного оборудования и операторов горно-транспортных машин, средства виброзащиты приборов и аппаратуры на летательных аппаратах и морских судах, а также сейсмические воздействия на сооружения. Эти кинематические воздействия в большинстве случаев являются случайными или имеют в составе случайные флуктуации. В связи с этим анализ колебаний механических систем при случайных кинематических возбуждениях представляет большой интерес для инженерных приложений. Решение этих задач является необходимым этапом при расчете и проектировании элементов машин и приборов, при прогнозировании их надежности и долговечности. Кроме того, из-за колебаний основания искажаются показания приборов, установленных на них, и нарушается работа аппаратуры.

Вопросы анализа колебаний механических систем при кинематических воздействиях изучаются давно применительно к системам виброзащиты [1, 2]. Исследования в этом направлений продолжаются и в настоящее время [3–6]. В монографии [7] параметры кинематического воздействия рассматриваются как случайные величины.

Методы расчета механических систем на случайные воздействия изложены в монографиях [8–11]. Из них следует, что для анализа нестационарных колебаний линейных систем наиболее подходят метод функции Грина и метод дифференциальных уравнений, а для стационарных процессов наиболее эффективен метод спектральных представлений.

Вопросы применения стохастических методов к задачам виброзащиты рассмотрены в работах [12–14]. Анализу колебаний в системах виброзащиты при детерминированных и случайных воздействиях посвящены работы [15–18].

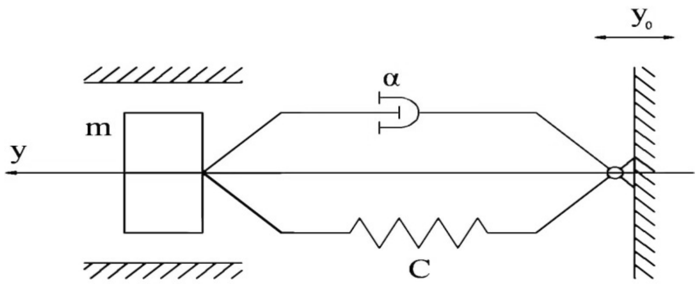
Анализ журнальных статей показывает, что исследованию колебаний механических систем при различных типах случайных кинематических возбуждений уделено недостаточно внимания. Данная работа посвящена восполнению этого пробела.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамическую модель механической системы с одной степенью свободы, показанную на рисунке, где масса m через упруго-диссипативный элемент с характеристиками c, α соединяется с жестким основанием. В некоторый момент времени $t_0 = 0$ основание получает смещение $y_0(t)$. Тогда уравнение движения массы имеет вид

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega_0^2 y = 2\varepsilon\dot{y}_0 + \omega_0^2 y_0, \tag{1}$$

где $\omega_0^2 = c / m$ – частота собственных колебаний; $2\varepsilon = \alpha / m$ – коэффициент затухания.



Динамическая модель системы

Dynamic system model

Решение этого уравнения при нулевых начальных условиях имеет вид

$$y = \frac{1}{\rho}\int_0^t k(t-\tau)\left(2\varepsilon\dot{y}_0 + \omega_0^2 y_0\right)d\tau, \tag{2}$$

где $p = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$, $k(t-\tau) = e^{-\varepsilon(t-\tau)}\sin p(t-\tau)$.

Смещение y_0 считаем в общем случае случайной нестационарной функцией с известными вероятностными характеристиками. Вероятностные характеристики случайной функции представляют собой неслучайные функции: математическое ожидание $m_y(t)$, дисперсия $D_y(t)$, корреляционная функция $K_y(t,t')$ и спектральная плотность $S_y(\omega)$.

Вероятностные характеристики решения (2) равны:

$$m_y = \frac{1}{p}\int_0^t \left(\omega_0^2 m_{y_0} + 2\varepsilon m_{\dot{y}_0}\right)k(t-\tau)d\tau;$$

$$K_y = \frac{1}{p^2}\int_0^t\int_0^{t_1}\left[\omega_0^4 K_{y_0} + 2\varepsilon\omega_0^2\left(K_{\dot{y}_0 y_0} + K_{y_0\dot{y}_0}\right) + 4\varepsilon^2 K_{\dot{y}_0\dot{y}_0}\right]\times$$

$$\times k(t-\tau)k(t_1-\tau_1)\,d\tau\,d\tau_1, \tag{3}$$

где $m_{\dot{y}_0} = dm_{y_0}/dt$, а корреляционные функции смещения и его производной определяются по формуле [8]:

$$K_{x_p x_q} = \frac{\partial^{p+q}K(t,t')}{\partial t^p(\partial t')^q},$$

где p, q – порядки производных.

Рассмотрим действие стационарного кинематического возбуждения. При этом возможны как нестандартные колебания, если время процесса меньше времени t_s, необходимого для практического затухания переходных процессов, так и стационарные, если время процесса больше времени t_s. Определим вероятностные характеристики колебания массы при различных типах случайного воздействия.

2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

Пусть движение основания представляет собой стационарный процесс в виде «белого шума»:

$$m_{y_0} = 0\,,\ K_{y_0(\tau)} = S_0\,\delta(\tau)\,,$$

где S_0 – интенсивность процесса; $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака.

Корреляционную функцию решения определяем по формуле (3):

$$K_y = \frac{S_0}{p^2}\left\{\omega_0^4\int_0^t k(t-\tau)k(t_1-\tau)d\tau + 2\varepsilon\omega_0^2\left[\int_0^t\int_0^{t_1}\frac{\partial\delta(\tau-\tau_1)}{\partial\tau}k(t-\tau)k(t_1-\tau_1)d\tau d\tau_1 +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t\int_0^{t_1}\frac{\partial\delta(\tau-\tau_1)}{\partial\tau_1}k(t-\tau)k(t_1-\tau_1)\right] + 4\varepsilon^2\int_0^t\int_0^{t_1}\frac{\partial^2\delta(\tau-\tau_1)}{\partial\tau\partial\tau_1}k(t-\tau)k(t_1-\tau_1)d\tau d\tau_1\right\} =$$

$$= \frac{S_0}{p^2}\left[\omega_0^4 I_1 + 2\varepsilon\omega_0^2(I_2+I_3) + 4\varepsilon^2 I_4\right]. \qquad (4)$$

Вычислим интегралы I_i:

$$I_1 = \frac{p^2}{4\varepsilon\omega_0^2}\left\{e^{-\varepsilon\Delta t}\left(\cos p\Delta t + \frac{\varepsilon}{p}\sin p\Delta t\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p^2}e^{-\varepsilon(t_1+t)}\left[\varepsilon^2\cos p(t_1+t) - p\varepsilon\sin p(t_1+t) - \omega_0^2\cos p\Delta t\right]\right\},$$

где $\Delta t = t_1 - t$.

Для вычисления остальных интегралов воспользуемся следующим свойством дельта-функции [9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dot\delta(t-t_0)\,\varphi(t)\,dt = -\dot\varphi(t_0)\,.$$

Тогда

$$I_3 = \int_0^t k(t-\tau)\,d\tau\left[-\frac{\partial k(t_1-\tau_1)}{\partial\tau_1}\right]_{\tau_1=\tau} =$$

$$= \int_0^t k(t-\tau)e^{-\varepsilon(t_1-\tau)}\left[p\cos p(t_1-\tau) - \varepsilon\sin p(t_1-\tau)\right]d\tau =$$

$$= \frac{p}{4\varepsilon}\left\{e^{-\varepsilon(t-t_1)}\left[\sin p\Delta t + \frac{\varepsilon}{p}\cos p\Delta t - \frac{\varepsilon}{p}\cos p(t_1+t)\right] - e^{-\varepsilon|\Delta t|}\sin p\Delta t\right\}.$$

Для вычисления I_2 достаточно здесь поменять местами t и t_1. Тогда

$$I_2 + I_3 = 0{,}5\, e^{-\varepsilon(t+t_1)} \left[\cos p\Delta t - \cos p(t_1 + t)\right].$$

Интеграл

$$I_4 = \int_0^t k(t-\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{t_1}\frac{\partial\delta(\tau-\tau_1)}{\partial\tau_1}k(t_1-\tau_1)\,d\tau_1\right]d\tau =$$

$$= \int_0^t k(t-\tau)\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{\partial k(t_1-\tau_1)}{\partial\tau_1}\right]_{\tau_1=\tau}\right\}d\tau =$$

$$= \int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{e^{-\varepsilon(t_1-\tau)}\left[p\cos p(t_1-\tau) - \varepsilon\sin p(t_1-\tau)\right]\right\}d\tau.$$

После дифференцирования, интегрирования и приведения подобных членов получим

$$I_4 = \frac{p}{4}\left\{e^{-\varepsilon(t_1+t)}\left[2\sin p\Delta t - \frac{\omega_0^2 - 2\varepsilon^2}{\varepsilon p}\cos p\Delta t - \sin p(t_1+t) - \frac{\varepsilon}{p}\cos p(t_1+t)\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-\varepsilon\Delta t}\left(\frac{p}{\varepsilon}\cos p\Delta t - \sin p\Delta t\right)\right\}.$$

Подставляя далее эти интегралы в выражение (4) и распространяя результат на всю числовую ось, получаем

$$K_y(\tau) = \frac{S_0}{4\varepsilon}e^{-\varepsilon|\tau|}\left[\left(\omega_0^2 + 4\varepsilon^2\right)\cos p\tau + \frac{\varepsilon}{p}\left(\omega_0^2 - 4\varepsilon^2\right)\sin p|\tau|\right] -$$

$$- \frac{S_0}{4p}e^{-\varepsilon(t_1+t)}\left[\frac{\omega_0^4 - 8\varepsilon^4}{p\varepsilon}\cos p\tau - 8\varepsilon^2\sin p|\tau| + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{p}\left(3\omega_0^2 + 4\varepsilon^2\right)\cos p(t_1+t) + \left(\omega_0^2 + 4\varepsilon^2\right)\sin p(t_1+t)\right]. \qquad (5)$$

Полагая здесь $t_1 = t$ $(\tau = 0)$, получаем выражение для дисперсии

$$D_y = \frac{S_0}{4\varepsilon}\left\{\omega_0^2 + 4\varepsilon^2 - p^{-2}e^{-2\varepsilon t}\left[\omega_0^4 - 8\varepsilon^4 + \varepsilon^2\left(3\omega_0^2 + 4\varepsilon^2\right)\cos 2pt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{p}{\varepsilon}\left(\omega_0^2 + 4\varepsilon^2\right)\sin 2pt\right]\right\}. \qquad (6)$$

По истечении определенного времени $(t \to \infty)$ процесс становится стационарным и его корреляционная функция определяется первым слагаемым с квадратной скобкой в выражении (5), а дисперсия

$$D_y = \left(\omega_0^2 + 4\varepsilon^2\right) S_0 / 4\varepsilon .$$

Эти результаты легко получить из уравнения (1) спектральным методом:

$$S_y(\omega) = \frac{S_0}{2\pi} \frac{\omega_0^4 + 4\varepsilon^2\omega^2}{A_2(\omega)\, A_2(-\omega)} ,$$

где $A_2(\omega) = \omega^2 - 2i\omega\varepsilon - \omega_0^2$.

Корреляционная функция стационарного процесса определяется выражением

$$K_y(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \qquad (7)$$

Применяя теорему о вычетах, получаем

$$K_y(\tau) = \frac{S_0}{2\pi} 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \frac{\omega_0^4 + 4\varepsilon^2\omega_k^2}{A_2'(\omega_k)\, A_2(-\omega_k)}\, e^{i\omega_k \tau} ,$$

где ω_k – полином $A_2(\omega)$:

$$\omega_1 = p + i\varepsilon , \quad \omega_2 = -p + i\varepsilon , \quad A_2' = 2(\omega - i\varepsilon) .$$

После подстановки ω_k и алгебраических преобразований получаем

$$K_y(\tau) = \frac{S_0}{4\varepsilon} e^{-\varepsilon|\tau|} \left[\left(\omega_0^2 + 4\varepsilon^2\right) \cos p\tau + \frac{\varepsilon}{p} \left(\omega_0^2 - 4\varepsilon^2\right) \sin p|\tau| \right].$$

Рассмотрим теперь экспоненциально-коррелированное кинематическое воздействие:

$$m_{y_0} = 0, \qquad K_{y_0(\tau)} = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} .$$

В этом случае корреляционные функции, входящие под знак интеграла, имеют вид $(u = \tau - \tau_1)$

$$K_{\dot{y}_0 y 0} = \frac{\partial K_{y_0}}{\partial \tau} = \sigma^2 \frac{\partial e^{-\alpha|u|}}{\partial |u|} \frac{d|u|}{du} \frac{du}{d\tau} = -\sigma^2 \alpha e^{-\alpha|u|} \operatorname{sign} u ;$$

$$K_{y_0 \dot{y} 0} = \frac{\partial K_{y_0}}{\partial \tau_1} = \sigma^2 \alpha e^{-\alpha|u|} \operatorname{sign} u ; \quad K_{y_0 \dot{y} 0} = \frac{\partial^2 K_{y_0}}{\partial \tau \partial \tau_1} = \sigma^2 \alpha e^{-\alpha|u|} \left[2\delta(u) - \alpha \right].$$

Здесь использованы следующие свойства обобщенных функций:

$$\frac{d|u|}{du} = \operatorname{sign} u; \quad \frac{d(\operatorname{sign} u)}{du} = 2\delta(u).$$

После подстановки этих выражений в (3) получаем

$$K_y = \frac{\sigma^2}{p^2}\int_0^t\int_0^{t_1}\left[\omega_0^4 + 8\alpha\varepsilon^2\delta(\tau-\tau_1) - 4\varepsilon^2\alpha^2\right]k(t-\tau)k(t_1-\tau_1)e^{-\alpha|\tau-\tau_1|}d\tau d\tau_1;$$

$$D_{y(t)} = \frac{\sigma^2}{p^2}\left\{\left(\omega_0^4 - 4\varepsilon^2\alpha^2\right)\int_0^t\int_0^t k(t-\tau)k(t-\tau_1)e^{-\alpha|\tau-\tau_1|}d\tau d\tau_1 + 8\varepsilon^2\alpha\int_0^t k^2(t-\tau)d\tau\right\} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{p^2}\left[\left(\omega_0^4 - 4\varepsilon^2\alpha^2\right)I_q + 8\varepsilon^2\alpha I_0\right].$$

Вычислим интеграл I_q. Внутренний интеграл представим в виде суммы двух интегралов, не содержащих модуля:

$$e^{\tau(\varepsilon-\alpha)}\int_0^\tau \sin\rho(t-\tau_1)e^{(\alpha+\varepsilon)\tau_1}d\tau_1 + e^{(\alpha+\varepsilon)\tau}\int_\tau^t \sin\rho(t-\tau_1)e^{(\varepsilon-\alpha)\tau_1}d\tau_1.$$

С учетом того, что

$$I_1 = \int_0^t e^{at}\sin\rho(t-\tau)\,d\tau = \frac{pe^{at} - a\sin\rho t - \rho\cos\rho t}{\rho^2 + a^2},$$

$$I_2 = \int_0^t e^{2\varepsilon\tau}\sin\rho(t-\tau)\sin\rho\tau d\tau = \frac{p}{4\omega_0^2}\left[\sin\rho t + \frac{p}{\varepsilon}\cos\rho t + e^{2\varepsilon t}\left(\sin\rho t - \frac{p}{\varepsilon}\cos\rho t\right)\right],$$

$$I_3 = \int_0^t e^{2\varepsilon\tau}\sin\rho(t-\tau)\cos\rho\tau d\tau =$$

$$= \frac{p}{4\omega_0^2}\left[-\cos\rho t - \frac{p^2 + 2\varepsilon^2}{\varepsilon\rho}\sin\rho t + e^{2\varepsilon t}\left(\cos\rho t + \frac{p}{\varepsilon}\sin\rho t\right)\right],$$

после математических преобразований получаем

$$I_q = \frac{p^2(\alpha + 2\varepsilon)}{2\varepsilon\omega_0^2\left(\omega_0^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon\alpha\right)} - \frac{2p[(\alpha+\varepsilon)\sin\rho t + \rho\cos\rho t]}{\left(\omega_0^2 + \alpha^2\right)^2 - 4\varepsilon^2\alpha^2}e^{-(\alpha+\varepsilon)t} +$$

$$+ \frac{\omega_0^2(\varepsilon-\alpha)/\varepsilon + \left(\omega_0^2 + \alpha\varepsilon - 2\varepsilon^2\right)\cos 2pt - p(\alpha - 2\varepsilon)\sin 2\rho t}{2\omega_0^2\left(\omega_0^2 + \alpha^2 - 2\varepsilon\alpha\right)}e^{-2\varepsilon t}.$$

Вычислим интеграл I_0:

$$I_0=\int_0^t \sin^2 p(t-\tau)e^{-2\varepsilon(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{4\varepsilon\omega_0^2}\left[p^2-\left(\omega_0^2-\varepsilon^2\cos 2pt+p\varepsilon\sin 2\rho t\right)e^{-2\varepsilon t}\right].$$

Теперь после математических преобразований имеем

$$D_{y(t)}=\sigma^2\left[\frac{\omega_0^2(\alpha+2\varepsilon)+4\varepsilon^2\alpha}{2\varepsilon\left(\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha\right)}-\frac{2\left(\omega_0^4-4\varepsilon^2\alpha^2\right)}{\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)^2-4\varepsilon^2\alpha^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos pt+\frac{\alpha+\varepsilon}{p}\sin pt\right)e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\right]-\frac{\sigma^2 e^{-2\varepsilon t}}{2p^2\left(\omega_0^2+\alpha^2-2\varepsilon\alpha\right)}\times$$

$$\times\left\{\omega_0^4(\alpha-\varepsilon)/\varepsilon+4\varepsilon\alpha\left(\omega_0^2+\varepsilon\alpha\right)-\left[\omega_0^4+\varepsilon(\alpha-2\varepsilon)\omega_0^2-4\varepsilon^2\alpha(\alpha-\varepsilon)\right]\cos 2pt+\right.$$

$$\left.+p\left[\omega_0^2(\alpha-2\varepsilon)+4\alpha\varepsilon^2\right]\sin 2pt\right\}. \tag{8}$$

Определим дисперсию относительно перемещения массы $\Delta=y_0-y$:

$$D_\Delta=M\left\{\left[y_{0(t)}-y_{(t)}\right]^2\right\}=D_{y_0}+D_y-2K_{yy_0}.$$

Корреляционный момент с учетом решения (2) равен

$$K_{yy_0}=\frac{1}{p}\int_0^t k(t-\tau)\left\{\omega_0^2 M\left[y_{0(t)}y_{0(\tau)}\right]+2\varepsilon M\left[y_{0(t)}\dot{y}_{0(\tau)}\right]\right\}d\tau.$$

Здесь $M\left[y_{0(t)}y_{0(\tau)}\right]=K_{y_0}(t,\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|t-\tau|}$;

$$M\left[y_{0(t)}\frac{\partial y_{0(\tau)}}{\partial\tau}\right]=\frac{\partial}{\partial\tau}M\left[y_{0(t)}y_{0(\tau)}\right]=\sigma^2\frac{\partial}{\partial\tau}e^{-\alpha|t-\tau|}=\alpha\sigma^2 e^{-\alpha|t-\tau|}\operatorname{sign}(t-\tau).$$

Учитывая, что под интегралом $t\ge\tau$, получаем

$$K_{yy_0}=\frac{\sigma^2}{p}\int_0^t k(t-\tau)\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\sigma^2\frac{\omega_0^2+2\varepsilon\alpha}{\omega_0^2+2\varepsilon\alpha+\alpha^2}\left[1-\left(\cos pt+\frac{\alpha+\varepsilon}{p}\sin pt\right)e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\right]. \tag{9}$$

Дисперсия отклонения Δ в момент времени t_k с учетом формул (8) и (9) равна

$$D_\Delta(t_k)=\sigma^2\left[\frac{\alpha\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)}{2\varepsilon\left(\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha\right)}+\right.$$

$$+\frac{2\alpha^2\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)}{\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)^2-4\varepsilon^2\alpha^2}\left(\cos\rho t_k+\frac{\alpha+\varepsilon}{p}\sin\rho t_k\right)e^{-(\alpha+\varepsilon)t_k}\Bigg]-$$

$$-\frac{\sigma^2 e^{-2\varepsilon t_k}}{2p^2\left(\omega_0^2+\alpha^2-2\varepsilon\alpha\right)}\left\{\omega_0^4(\alpha-\varepsilon)/\varepsilon+4\varepsilon\alpha\left(\omega_0^2+\varepsilon\alpha\right)-\right.$$

$$\left.-\left[\omega_0^4+\varepsilon(\alpha-2\varepsilon)\omega_0^2-4\alpha\varepsilon^2(\alpha-\varepsilon)\right]\cos 2\rho t_k+p\left[\omega_0^2(\alpha-2\varepsilon)+4\alpha\varepsilon^2\right]\sin 2\rho t_k\right\}.$$

При $t_k > t_s$ (после переходного процесса) имеем

$$D_\Delta=\frac{\sigma^2\alpha\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)}{2\varepsilon\left(\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha\right)}.$$

Стандарт отклонения $\sigma_\Delta=\sqrt{D_\Delta}$.

Если рассматривается смещение основания, на котором установлен прибор, то $y_0(t)$ можно толковать как случайные флуктуации этого смещения. Тогда стандарт отклонения можно толковать как ошибку показаний прибора.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

В этом случае целесообразно применить спектральный метод. Переходная функция, имеющая смысл динамической податливости, для уравнения (1) имеет вид

$$H(i\omega)=\frac{\omega_0^2+2i\varepsilon\omega}{\omega_0^2+2\varepsilon i\omega-\omega^2}, \tag{10}$$

а спектральная плотность решения определяется по формуле

$$S_{y(\omega)}=\left|H(\omega)\right|^2 S_h(\omega)=\frac{\omega_0^4+4\varepsilon^2\omega^2}{A_{2(\omega)}A_{2(-\omega)}}S_{h(\omega)}, \tag{11}$$

где $S_h(\omega)$ – спектральная плотность кинематического воздействия.

Корреляционная функция решения при необходимости находится преобразованием Фурье по формуле (7).

Часто для расчета элемента конструкций достаточно знать дисперсию колебаний:

$$D_y=K_{y(0)}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{y(\omega)}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_0^4+4\varepsilon^2\omega^2}{L(i\omega)L(-i\omega)}S_{h(\omega)}d\omega. \tag{12}$$

Вычисление этого интеграла сводится к вычислению стандартного интеграла вида

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{n(\omega)}}{A_{n(\omega)}A_{n(-\omega)}}d\omega, \tag{13}$$

где $B_{n(\omega)}$ и $A_{n(\omega)}$ – полиномы с комплексными коэффициентами:

$$A_{n(\omega)} = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + ... + a_{n-1}\omega + a_n ;$$

$$B_{n(\omega)} = b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + ... + b_{n-2}\omega^2 + b_{n-1} .$$

Все корни $A_{n(\omega)}$ должны лежать в верхней полуплоскости. Формулы для интегралов (13) при различных n приведены в работе [19].

Примером стационарных колебаний могут быть колебания подвески автомобиля. Динамическая модель имеет вид, показанный на рисунке, где m – подрессоренная масса, приходящаяся на одну подвеску; y_0 – кинематическое воздействие, зависящее от высоты микропрофиля дороги $h(x)$. Путем статистической обработки результатов замера микропрофилей различного класса дорог в работе [20] воздействие дороги на подвеску автомобиля рассматривается как стационарный случайный процесс, который носит экспоненциально-коррелированный или косинусоидальный характер.

Такая задача рассмотрена в работе [21]. Спектральные плотности указанных процессов имеют вид

$$S_h(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi}\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}, \qquad S_h(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi}\frac{\omega^2+\beta^2+\alpha^2}{(\omega^2-\beta^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\omega^2}, \tag{14}$$

где σ – стандарт высоты неровностей; α – коэффициент широкополостности процесса; β – несущая частота.

Подставляя первое выражение (14) в (11) и применяя преобразование (7), после ряда математических выкладок получаем корреляционную функцию перемещения

$$K_y = \frac{\sigma^2}{\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)^2-4\varepsilon^2\alpha^2}\left\{\frac{\alpha}{2\varepsilon}e^{-\varepsilon|\tau|}\left[\left(\omega_0^4+\omega_0^2\alpha^2+4\varepsilon^2\alpha^2\right)\cos\rho\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\varepsilon}{\rho}\left(3\omega_0^4+\omega_0^2\alpha^2-4\varepsilon^2\alpha^2\right)\sin\rho|\tau|\right]+\left(\omega_0^4-4\varepsilon^2\alpha^2\right)e^{-\alpha|\tau|}\right\}.$$

При $\tau = 0$ находим дисперсию

$$D_y = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\frac{\omega_0^2(\alpha+2\varepsilon)+4\alpha\varepsilon^2}{\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha}. \tag{15}$$

Для косинусоидального процесса приведем определение дисперсии колебаний подвески. Для этого второе выражение (14) подставим в интеграл (12). После ряда математических преобразований получим

$$D_y = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\frac{\alpha\left(\omega_0^2+a^2\right)\left(\omega_0^2+4\varepsilon^2\right)+2\varepsilon\omega_0^2\left(\omega_0^2+2\alpha^2+2\alpha\varepsilon\right)+8\varepsilon^3a^2}{4(\alpha+\varepsilon)\left(\alpha\omega_0^2+\varepsilon a^2\right)+(\omega^2-a^2)^2},$$

где $a^2 = \alpha^2+\beta^2$.

При $\beta = 0$ совпадают спектральные плотности (14); в этом случае $(a^2 = \alpha^2)$ это выражение совпадает с дисперсией (15).

В работе [21] показано использование вероятностных характеристик перемещения массы для оценки вероятности «пробоя» подвески и определения вероятностных характеристик динамической составляющей нагрузки в подвеске, которая является случайной функцией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнен анализ колебаний механической системы с одной степенью свободы при случайных кинематических воздействиях. Приведены общие выражения для определения математического ожидания и корреляционной функции в общем случае нестационарного случайного кинематического воздействия. Рассмотрены переходные процессы в системе при стационарных возбуждениях в виде «белого шума» и экспоненциально-коррелированного процесса и определены вероятностные характеристики выходного процесса и относительного перемещения массы.

Спектральным методом выполнен анализ стационарных колебаний системы при стационарных случайных кинематических воздействиях. В качестве примера приведены вероятностные характеристики колебаний подвески автомобиля от воздействия случайного микропрофиля дороги. При этом случайное воздействие описано экспоненциально-коррелированным процессом и косинусоидальным процессом.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчете и проектировании систем виброзащиты оборудования и рабочих мест от случайных кинематических воздействий, а также для оценки погрешности показаний приборов и аппаратуры, установленных на основаниях, испытывающих случайные вибрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамические свойства линейных виброзащитных систем / под ред. К.В. Фролова. – М.: Наука, 1982. – 205 с.

2. *Вольперт Э.Г.* Динамика амортизаторов с нелинейными упругими элементами. – М.: Машиностроение, 1972. – 136 с.

3. *Крюкова И.В., Ургалова Г.Б.* Исследование колебаний системы с двумя степенями свободы при кинематическом возбуждении // Сборник трудов 52 научно-технической конференции МИРЭА. – М., 2003. – С. 88–94.

4. *Kotera T., Shintani M.* Chaotic and periodic motions in a vibro-impacting system // JSME International Journal Series C. – 2003. – Vol. 46, N 2. – P. 659–665.

5. *Рыков А.А. Юрьев Г.С., Ненев Ю.В.* Пассивная виброзащита и автоматическое управление // Вестник машиностроения. – 2006. – № 6. – С. 24–25.

6. *Мондрус В.Л., Смирнов В.А.* Численное моделирование систем виброзащиты трансмиссионного электронного микроскопа // Промышленное и гражданское строительство. – 2012. – № 6. – С. 48–49.

7. *Голощанов В.М.* Виброзащитные системы в вероятностном поле нагружения. – Пенза: Изд-во Пенз. технол. акад., 2006. – 135 с.

8. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.

9. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1991. – 320 с.

10. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 368 с.

11. *Бакиров Ж.Б.* Вероятностные методы расчета элементов конструкций. – Караганда: КарГТУ, 2001. – 186 с.

12. *Kundu A., Adhikari S.* Transient response of structural dynamic systems with parametric incertainty // Journal of Engineering Mechanics. – 2014. – Vol. 140, iss. 2. – P. 315–331.

13. *Namachchivaya N.* Random dynamical systems: addressing uncertainty, nonlinearity and predictability // Meccanica. – 2016. – Vol. 51, iss. 12. – P. 2975–2995.

14. *Sun W., Zhou J., Gong D.* Random vibration analysis on vertical vehicle-track coupled system with Timoshenko beam model // Chinese Journal of Mechanical Engineering. – 2014. – Vol. 50, iss. 18. – P. 134–141.

15. *Таженова Г.Д.* Виброзащита объекта при импульсных кинематических воздействиях // Труды Международной научной конференции «Наука и образование – ведущий фактор стратегии «Казахстан – 2030». – Караганда, 2009. – Вып. 2. – С. 273–276.

16. *Бакиров Ж.Б., Таженова Г.Д.* Имитационное моделирование систем виброзащиты колесного транспорта // Труды Международного симпозиума «Информационно-коммуникационные технологии в индустрии, образовании и науке». – Караганда, 2010. – Ч. 1. – С. 90–93.

17. *Бакиров Ж.Б., Таткеева Г.Г., Ахмедиев С.К.* Виброзащита оператора транспортных средств // Научный вестник НГТУ. – 2014. – № 2. – С. 7–19.

18. *Бакиров Ж.Б., Бакиров М.,Ж., Таженова Г.Д.* Расчет систем виброзащиты при случайных воздействиях // Труды Университета. – Караганда: КарГТУ, 2015. – № 2. – С. 91–94.

19. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1981. – 351 с.

20. *Яценко Н.Н.* Колебания, прочность и форсированные испытания грузовых автомобилей. – М.: Машиностроение, 1972. – 372 с.

Бакиров Жетписбай Бакирович, доктор технических наук, профессор Карагандинского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – динамика и прочность машин. Имеет около 220 публикаций, в том числе 9 монографий. E-mail: bakirov_50@mail.ru

Бакиров Мади Жетписбаевич, кандидат технических наук, доцент Карагандинского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – механика деформируемого твердого тела. Имеет 58 публикаций. E-mail: Madybacirov@rambler.ru

Таженова Гульзада Даулетхановна, кандидат технических наук, доцент Карагандинского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – виброизоляция оборудования. Имеет 35 публикаций. E-mail: gulzada_2604@mail.ru

Филиппова Татьяна Силиньевна, кандидат технических наук, профессор Карагандинского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – машиностроение. Имеет 50 публикаций. E-mail: confucius_kstu@mail.ru

Bakirov Zhetpisbai Bakirovich, D.Sc. (Eng.), a professor at the Karaganda State Technical University. His research interests are focused on dynamics and strength of machines. He is the author of about 220 publications including 9 monographs. E-mail: bakirov_50@mail.ru

Bakirov Madi Zhetpisbaevich, PhD (Eng.), an associate professor at the Karaganda State Technical University. His research interests are focused on mechanics of deformable solid body. He is the author of 58 publications. E-mail: Madybacirov@rambler.ru

Tazhenova Gulzada Daulethanovna, PhD (Eng.), an associate professor at the Karaganda State Technical University. His research interests are focused on vibroinsulation of equipment. She has published 35 research papers. E-mail: gulzada_2604@mail.ru

Filippova Tatyana Silinievna, PhD (Eng.), a professor at the Karaganda State Technical University. His research interests are focused on machine building. She is the author of about 50 publications. E-mail: confucius_kstu@mail.ru

DOI: 10.17212/1814-1196-2019-1-7-20

Vibration of mechanical systems under random kinematic action[*]

Zh.B. BAKIROV[a], *M.Zh. BAKIROV*[b], *G.D. TAZHENOVA*[c], *T.S. FILIPPOVA*[d]

Karaganda State Technical University, 56, Boulevard Mira, Karaganda, 100027, Kazakhstan

[a] *bakirov_50@mail.ru* [b] *Madybacirov@rambler.ru* [c] *gulzada_2604@mail.ru*
[d] *confucius_kstu@mail.ru*

Abstract

The work is devoted to the study of linear vibrations of a mechanical system with one degree of freedom under random kinematic action. The problem is solved by the Green function method for the general case of non-stationary effects. Using the theory of random functions general expressions for determining the mathematical expectation and correlation function of the output process were obtained. Non-stationary vibrations of the system under stationary excitations of two types are considered, namely in the form of "white noise" and an exponentially-correlated process. Expressions for the correlation function and the dispersion of the output process are determined for these actions. An expression for the dispersion of a relative mass transfer is also defined. This mode of vibration is characteristic of transition processes in the system. A transition to the steady state vibration of the system was made by increasing the observation time.

The problem of stationary vibrations of the system under stationary random kinematic actions was solved by the spectral method. The solution is used to determine the probability characteristics of vibrations of vehicle suspension from the effects of a random microprofile of the road. At the same time the kinematic effect is represented by two types of random processes: an exponentially correlated process and a cosine process. Based on the solution of the problem, general expressions can be obtained for determining the spectral density and the correlation function of the dynamic component of the force in the suspension. Specific expressions for an exponentially-correlated process are obtained.

The results of the work can be used in the calculation and design of vibration protection systems for equipment and workplaces from random kinematic actions as well as for estimating an error in the readings of instruments and equipment installed on the supports experiencing random vibrations.

Keywords: random action, dynamic model, kinematic action, Green function, correlation function, spectral density, dispersion, spectral method, vibration protection

REFERENCES

1. Frolov K.V., ed. *Dinamicheskie svoistva lineinykh vibrozashchitnykh sistem* [Dynamic properties of linear vibration protection systems]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 205 p.

2. Vol'pert E.G. *Dinamika amortizatorov s nelineinymi uprugimi elementami* [The dynamics of shock absorbers with nonlinear elastic elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 136 p.

3. Kryukova I.V., Urgalova G.B. [Investigation of oscillations of a system with two degrees of freedom with kinematic excitation]. *Sbornik trudov 52-i nauchno-tekhnicheskoi konferentsii MIREA* [Transaction of papers of the 52nd Scientific and Technical Conference MIREA]. Moscow, 2003, pp. 88–94. (In Russian).

4. Kotera T., Shintani M. Chaotic and periodic motions in a vibro-impacting system. *JSME International Journal Series C*, 2003, vol. 46, no. 2, pp. 659–665.

5. Rykov A.A. Yur'ev G.S., Nenev Yu.V. Passivnaya vibrozashchita i avtomaticheskoe upravlenie [Passive vibration protection and automatic control]. *Vestnik mashinostroeniya – Bulletin of Mechanical Engineering*, 2006, no. 6, pp. 24–25.

6. Mondrus V.L., Smirnov V.A. Chislennoe modelirovanie sistem vibrozashchity transmissionnogo elektronnogo mikroskopa [Numerical simulation of transmission electron microscope's vibroprotection system]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and Civil Engineering*, 2012, no. 6, pp. 48–49.

[*] *Received 10 September 2018.*

7. Goloshchanov V.M. *Vibrozashchitnye sistemy v veroyatnostnom pole nagruzheniya* [Vibration protection systems in a probabilistic loading field]. Penza, Penzenskaya tekhnologicheskaya akademiya Publ., 2006. 135 p.

8. Bolotin V.V. *Sluchainye kolebaniya uprugikh sistem* [Random oscillations of elastic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 336 p.

9. Svetlitskii V.A. *Sluchainye kolebaniya mekhanicheskikh sistem* [Random oscillations of mechanical systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991. 320 p.

10. Dimentberg M.F. *Nelineinye stokhasticheskie zadachi mekhanicheskikh kolebanii* [Nonlinear stochastic problems of mechanical oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 368 p.

11. Bakirov Zh.B. *Veroyatnostnye metody rascheta elementov konstruktsii* [Probabilistic methods for calculating structural elements]. Karaganda, KarGTU Publ., 2001. 186 p.

12. Kundu A., Adhikari S. Transient response of structural dynamic systems with parametric incertainty. *Journal of Engineering Mechanics*, 2014, vol. 140, iss. 2, pp. 315–331.

13. Namachchivaya N. Random dynamical systems: addressing uncertainty, nonlinearity and predictability. *Meccanica*, 2016, vol. 51, iss. 12, pp. 2975–2995.

14. Sun W., Zhou J., Gong D. Random vibration analysis on vertical vehicle-track coupled system with Timoshenko beam model. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2014, vol. 50, iss. 18, pp. 134–141.

15. Tazhenova G.D. [Vibration protection of an object under impulse kinematic influences]. *Trudy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii: "Nauka i obrazovaniye – vedushchiy faktor strategii "Kazakhstan – 2030"* [Proceedings of the International scientific conference "Science and education as a leading factor in strategy "Kazakhstan – 2030"]. Karaganda, 2009, iss. 2, pp. 273–276. (In Russian).

16. Bakirov Zh.B., Tazhenova G.D. [Simulation modeling of vibration protection systems for wheeled transport]. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma «Informatsionno-kommunikatsionnye tekhnologii v industrii, obrazovanii i nauke»* [Proceedings of the International Symposium "Information and communication technologies in industry, education and science"]. Karaganda, 2010, pt. 1, pp. 90–93. (In Russian).

17. Bakirov Zh.B., Akhmediyev S.K., Tatkeeva G.G. Vibrozashchita operatora transportnykh sredstv [Vibroprotection of transport vehicle operators]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2014, no. 2, pp. 7–19.

18. Bakirov Zh.B., Bakirov M.Zh., Tazhenova G.D. Raschet sistem vibrozashchity pri sluchainykh vozdeistviyakh [Calculation of vibration protection systems under random effects]. *Trudy universiteta – University's works*, 2015, no. 2, pp. 91–94.

19. Bolotin V.V. *Metody teorii veroyatnostei i teorii nadezhnosti v raschetakh sooruzhenii* [Methods of probability theory and reliability theory in the calculations of structures]. Moscow, Stroiizdat Publ., 1981. 351 p.

20. Yatsenko N.N. *Kolebaniya, prochnost' i forsirovannye ispytaniya gruzovykh avtomobilei* [Fluctuations, strength and accelerated testing of trucks]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 372 p.

Для цитирования:

Колебания механических систем при случайных кинематических возбуждениях / Ж.Б. Бакиров, М.Ж. Бакиров, Г.Д. Таженова, Т.С. Филиппова // Научный вестник НГТУ. – 2019. – № 1 (74). – С. 7–20. – DOI: 10.17212/1814-1196-2019-1-7-20.

For citation:

Bakirov Zh.B., Bakirov M.Zh., TAzhenova G.D., Filippova T.S. Kolebaniya mekhanicheskikh sistem pri sluchainykh kinematicheskikh vozbuzhdeniyakh [Vibration of mechanical systems under random kinematic action]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2019, no. 1 (74), pp. 7–20. DOI: 10.17212/1814-1196-2019-1-7-20.