*ISSN 1814-1196*
*Научный вестник НГТУ*
*том 75, № 2, 2019, с. 69–88*

*http://journals.nstu.ru/vestnik*
*Science Bulletin of the NSTU*
*Vol. 75, No. 2, 2019, pp. 69–88*

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И УПРАВЛЕНИЕ

INFORMATICS,
COMPPUTER ENGINEERING
AND CONTROL

УДК 519.233.22 DOI: 10.17212/1814-1196-2019-2-69-88

# Анализ входных условий в модели информационной безопасности, построенной на основе аппарата редких событий*

**Г.А. ПОПОВ[a], Е.А. ПОПОВА[b], О.В. ВАСИЛЬЕВА[c]**

*414056, РФ, г. Астрахань, ул. Татищева, 16, Астраханский государственный технический университет*

[a] *popov@astu.org* [b] *e.popova@astu.org* [c] *vasilyevaov26@gmail.com*

Рассматривается задача оценки вероятности совершения злоумышленного действия в условиях, когда исходный процесс обеспечения информационной безопасности является регенерирующим. Особый интерес представляет анализ вероятности и возможного момента реализации злонамеренной атаки. Указанная вероятность обычно очень мала, что позволяет говорить о вероятности успешного совершения атаки как о редком событии. Тогда момент успешной реализации этой атаки в рамках восстанавливаемых систем может рассматриваться как момент первого наступления некоторого события (редкого события). Моменты регенерации рассматриваемого процесса восстановления могут быть моментами проведения профилактических и проверочных мероприятий. Таким образом, предполагается, что вероятность злоумышленного действия мала, а исходный процесс является регенерирующим. Проведена формализация исходных условий, которые необходимы для последующего изучения указанной вероятности на основе методов математического и компьютерного моделирования. Поскольку в рассматриваемой постановке процессы поступления потока злоумышленных атак и потока противодействия им неоднородны, то введены нормирующие функции для сравнения этих потоков. Для указанных нормирующих функций получены предельные соотношения, представляющие собой показательные соотношения. Приведены альтернативные формулировки исходных условий, и доказана их эквивалентность исходным условиям. Показано, что при выполнении приведенных условий процессы поступления злоумышленных атак и противодействия им могут быть разбиты на отдельные группы, каждая из которых обладает свойством асимптотической сходимости, т. е. может рассматриваться как поступления одного и того же источника для данной группы. Полученные соотношения могут быть использованы для разбиения поступающих атак по отдельным источникам атак.

**Ключевые слова:** злоумышленное действие, неоднородный регенерирующий процесс, поток злоумышленных атак, вероятность злоумышленной атаки, поток результатов противодействия, редкое событие, время до совершения атаки, нормирующие функции, предельные соотношения, разбиение входящего потока по источникам

---

* *Статья получена 01 февраля 2019 г.*

## ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи анализа информационной безопасности можно свести к исследованию восстанавливаемых систем. Особый интерес представляет анализ вероятности и возможного момента реализации злонамеренной атаки. Указанная вероятность обычно очень мала, что позволяет говорить о вероятности успешного совершения атаки как о редком событии. Тогда момент успешной реализации этой атаки в рамках восстанавливаемых систем может рассматриваться как момент первого наступления некоторого события (редкого события), вероятность которого можно считать исчезающе малой (см.: [1, 2, 4]). Моментами регенерации рассматриваемого процесса восстановления могут быть моменты проведения профилактических и проверочных мероприятий.

Для анализа моделей описанного типа часто применяется теорема А.Д. Соловьева [5] для однородных регенерирующих процессов. Однако, в системах информационной безопасности условие однородности не соответствует реальному положению дел, так как постоянно меняются характеристики злонамеренных угроз: злоумышленник активно ищет возможные пути преодоления систем защиты; устаревают имеющиеся программно-аппаратные и технические средства защиты, внедряются новые, более совершенные. Поскольку событие нарушения безопасности происходит достаточно редко, захватывая большие интервалы времени, то указанные изменения существенны для анализа этих событий. Поэтому необходимо при анализе вероятности совершения злонамеренной атаки учитывать неоднородность в соответствующих моделях. Данная работа посвящена построению модели процесса совершения злонамеренной атаки на основе аппарата редких событий в регенерирующих неоднородных процессах. Работ по однородным регенерирующим процессам применительно к задачам анализа надежности систем достаточно много, перечень многих важных работ по данной тематике приведен в работе [2].

Проблема изучения редких событий актуальна во многих сферах деятельности. В частности, в теории надежности [3], при оценке рисков, особенно связанных с чрезвычайными ситуациями, которые происходят достаточно редко [8], а также в ситуациях, связанных с корпоративными рисками [16], при моделировании поведения больших скоплений людей [9], прогнозировании эксплуатационных процессов в сложных системах машиностроения [10], в задачах компьютерного тестирования [11] и имитационного моделирования сложных систем [12, 13], при поиске закономерностей в больших базах данных (Data Mining) [15]. При этом существующие методы анализа редких событий часто недостаточно эффективны. Из известных методов кроме упомянутого выше результата А.Д. Соловьева [5] отметим также исследования редких событий на основе аппарата регрессий [14] и математического моделирования рекуррентных событий [17].

Ранее в работе [1] была представлена формализованная модель, предназначенная для количественного анализа показателей информационной безопасности. Эта модель опирается на аппарат редких событий. В работе в самой общей постановке приведены условия, позволяющие ввести определенный уровень регулярности всех рассматриваемых процессов, связанных с проявлением угроз информационной безопасности. Настоящая работа является продолжением работы [1], где представлена модель процесса совершения злонамеренной атаки. В основе модели – аппарат редких событий в реге-

нерирующих неоднородных процессах. В работе получен ряд соотношений, устанавливающих количественные взаимосвязи между различными характеристиками построенной модели.

Аналогичный подход ранее был рассмотрен в теории надежности [2]. Наиболее близкой к данной работе по методам исследования является работа [7].

## 1. ОПИСАНИЕ ФОРМАЛИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ

Пусть задан случайный процесс $\kappa(t)$ и $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ есть точки регенерации процесса $\kappa(t)$ (моменты времени совершения действий, связанных с нарушением ИБ). Предположим, что в некоторый момент $t_{n-1} + \eta_n$ $(0 \le \eta_n < \xi_n)$ на каждом промежутке $[t_{n-1},\, t_n)$ может произойти или не произойти некоторое событие $A_n$ (в нашем случае – успешная атака, связанная с нарушением ИБ), причем событие $A_n$ и величина $\eta_n$ определены на классе траекторий $\{\kappa(t),\, t_{n-1} \le t < t_n\}$ и, таким образом, не зависят от поведения процесса $\kappa(t)$ вне промежутка $[t_{n-1},\, t_n)$. Пусть $\chi_k$ есть индикатор события $A_k$, $\tau_n$ – случайный момент первого после $t_{n-1}$ появления одного из событий $A_k$ $(k \ge n)$; $\varsigma_n \overset{def}{=} \xi_n(1-\chi_n) + \eta_n\chi_n$. Введем следующие обозначения $(n \ge 1;\, z \ge 0)$ :

$$\varphi_n(z) = M(e^{-z\xi_n}), \qquad \overline{\varphi_n}(z) = 1 - \varphi_n(z), \qquad q_n = P\{\chi_n = 1\},$$

$$\varphi_n^-(z) = M\left(e^{-z\varsigma_n}\chi_n\right), \qquad \varphi_n^+(z) = M\left(e^{-z\varsigma_n}(1-\chi_n)\right), \qquad \pi_n(z) = \overline{\varphi_n}(z) + \varphi_n^-(z),$$

где $M$ – знак математического ожидания. Заметим, что $\overline{\varphi_n}(0) = 0$ и $\varphi_n^-(0) = q_n$.

В дальнейшем все введенные характеристики будут являться функциями некоторого параметра $\gamma \in \Theta$ (т. е. $q_n = q_n(\gamma)$, $\varphi_n^-(z) = \varphi_n^-(\gamma, z)$, $\pi_n(z) = \pi_n(\gamma, z)$ и т. д.), где $\Theta$ – некоторое множество на действительной прямой, для которого точка 0 является предельной точкой. Всюду ниже запись «$\gamma \to 0$» означает, что $\gamma \to 0$ так, что $\gamma \in \Theta$.

Ниже приводятся и исследуются условия, наличие которых предполагается при доказательстве основных результатов. При этом всю совокупность условий можно разбить на группы и охарактеризовать следующим образом.

Приведем точные формулировки перечисленных условий.

А) Существуют функции $g_n(\gamma)$ и $m(\gamma)$ $(n \ge 1 - 1/\gamma \in \Theta)$ такие, что $\lim\limits_{\gamma\to 0} m(\gamma) = \lim\limits_{\gamma\to 0} g_n(\gamma) = 0$ и при любых $n \ge 1$, $z > 0$ существует предел

$$\lim_{\gamma\to 0}\left\{\overline{\varphi}_n(m(\gamma)z)g_n(\gamma))^{-1}\right\} \overset{def}{=} \omega_n(z), \qquad \omega_n(1) = 1. \tag{1}$$

Б) Справедливо соотношение $\lim\limits_{\gamma\to 0}\sup\limits_{n\ge 1} q_n(\gamma) = 0$.

Прежде чем описывать остальные условия, введем обозначения ($n \geq 1$, $\gamma > 0$):

$$S_1(n,\gamma) = \sum_{k=1}^{n} q_k(\gamma), \quad S_2(n,\gamma) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\gamma).$$

Ниже часто для простоты вместо обозначения $S_i(n, \gamma)$ будет использовано обозначение $S_i(n)$.

В) Для любых $\gamma > 0$ и целых $n > 0$ справедливы соотношения

$$S_i(n) = n^{\theta_i} L_i(n) \cdot G_i(\gamma)(1 + \alpha_i(n,\gamma)) \qquad (i = \overline{1,2}), \tag{2}$$

где $\theta_i \geq 0$, $L_i(x)$ $(x > 0)$ – медленно меняющаяся функция (ММФ), $\lim\limits_{n\to\infty,\gamma\to 0} \alpha_i(n,\gamma) = 0$.

Как показано в [1], справедливы соотношения

$$\lim_{\gamma\to 0} G_i(\gamma) = 0 \qquad (i = \overline{1,2}). \tag{3}$$

При этом необходимо $\theta_2 \leq 1$ и $\lim\limits_{\gamma\to 0}(\lambda_i(\gamma)) = +\infty$ для $i = 1, 2$.

Положим $\lambda(\gamma) = \min(\lambda_1(\gamma), \lambda_2(\gamma))$.

Г) Существует предел

$$\lim_{\gamma\to 0}(\lambda_1(\gamma)/\lambda_2(\gamma)) \overset{def}{=} \lambda_0, \qquad 0 \leq \lambda_0 \leq +\infty. \tag{4}$$

Д) Для любого фиксированного $x > 0$ условие (1) выполняется равномерно по $n \leq x\lambda(\gamma)$, т. е.

$$\lim_{\gamma\to 0}\left\{\max_{1\leq n\leq x\lambda(\gamma)}\left|\overline{\varphi}_n(m(\gamma)\cdot z)(g_n(\gamma))^{-1} - \omega_n(z)\right|\right\} = 0. \tag{5}$$

Е) Равномерно по $k$ и $x \in (a, b)$, где $a$ и $b$ $(0 < a < b < +\infty)$ – произвольные числа, для любого $T \geq 1$ имеют место соотношения:

$$\lim_{\gamma\to 0}\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{T}\left\{Q_{i_j^{(k)}}(\gamma)\cdot\chi\left(i_j^{(k)} \leq x\lambda(\gamma)\right)\right\} = 0; \tag{6}$$

$$\lim_{\gamma\to 0}\sum_{m\in N_k, m\leq x\lambda(\gamma)} g_m(\gamma) \overset{def}{=} \mu_k(x), \tag{7}$$

где $Q_n(\gamma) = g_n(\gamma) + q_n(\gamma)$ $(n \geq 1)$, при $|N_\kappa| < +\infty$ полагаем $Q_n(\lambda) = 0$ для $n > |N_\kappa|$; $\chi(A)$ есть индикатор события $A$; множества $N_k$ вводятся в утверждении леммы 2 работы [1].

Условие (6) можно заменить на следующее условие: для любого $T \geq 1$ равномерно по $k$ ($1 \leq k \leq M$) и $x \in (a, b)$, где $a$ и $b$ ($0 < a < b < \infty$) – любые числа, существуют пределы:

$$\lim_{\gamma \to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{n} Q_{i_j^{(k)}}(\gamma) \left( \sum_{m \in N_k, m \leq x\lambda(\gamma)} Q_{i_j^{(k)}}(\gamma) \right)^{-1} \right\} = 0 . \tag{8}$$

Вместо выполнения совокупности условий В) и Г) можно потребовать выполнение следующих более общих условий В′) и Г′).

В′) Существует функция $\lambda(\gamma)$ ($\gamma > 0$) такая, что для любого $x > 0$ существуют пределы ($i = 1, 2$)

$$\lim_{\gamma \to 0} S_i(x\lambda(\gamma)) \overset{def}{=} \sigma_i(x) < +\infty, \quad \max(\sigma_1(x), \sigma_2(x)) \neq 0 .$$

Г′) Существуют функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ $(x > 0)$ и числа $\gamma_0$, $A > 0$ такие, что для всех $x > A$ и $i = 1, 2$; $j = \overline{3,5}$

$$\inf_{|\gamma| \leq \gamma_0} |S_i(x\lambda(\gamma))| \geq \vartheta_1(x) , \qquad \sup_{|\gamma| \leq \gamma_0} |S_i(x\lambda(\gamma))| \leq \vartheta_2(x) ,$$

причем для любого $P < 1$

$$\int_A^{\infty} e^{-P\varphi_1(y)} d\varphi_2(y) < \infty . \tag{9}$$

Из условия В′ следует $\lim_{\gamma \to 0} \lambda(\gamma) = +\infty$ . Справедливы соотношения ($x > 0$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x) = \sigma_2(x), \tag{10}$$

Можно считать, что функции $\vartheta_1(y)$ и $\vartheta_2(y)$ монотонно не убывают с ростом $y$.

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Лемма 1.** При фиксированном $z > 0$ равномерно по $n \geq 1$ имеют место соотношения:

$$\lim_{\gamma \to 0} \left\{ \varphi_n^-(m(\gamma)z)(g_n(\gamma))^{-1} \right\} = 1 ; \tag{11}$$

$$\lim_{\gamma \to 0} \sup_{n \geq 1} g_n(\gamma) = 0 . \tag{12}$$

*Доказательство.* Докажем вначале (11). Предположим противное, т. е. существуют последовательности $\{n_k, k \geq 1\}$ и $\{\gamma_k, k \geq 1\}$ такие, что $\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty$, $\lim_{k \to \infty} \gamma_k = 0$ и $\lim_{k \to \infty} \left\{ 1 - \varphi_n^-(\gamma_k, m(\gamma_k))(q_{n_k}(\gamma_k))^{-1} \right\} = \Delta > 0$ . По-

скольку $q_n(\gamma) = P(\chi_n = 1)$ и $\varphi_n^-(\gamma_k, m(\gamma_k))(q_{n_k}(\gamma_k))^{-1} = P\left(\dfrac{e^{-\gamma_k m(\gamma_k)\varsigma_n}\chi_n}{\chi_n = 1}\right)$, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty (1-\exp\{m(\gamma_k)\cdot zx\})d_x\Phi_{n_k}(\gamma_k, x)) = \Delta > 0\,, \tag{13}$$

где $\Phi_n(\gamma, x) \overset{def}{=} P\{\varsigma_n < x / \chi_n = 1\}$. По второй теореме Хелли из последовательности $\{\Phi_{n_k}(\gamma_k, x), k \ge 1\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\Phi_{n'_k}(\gamma'_k, x), k \ge 1\}$ такую, что $\Phi_{n'_k}(\gamma'_k, x) \Rightarrow \Phi(x)$ при $k \to \infty$, где $\Phi(x)$ – некоторая собственная функция распределения (ФР) и «$\Rightarrow$» – знак слабой сходимости. Но тогда в силу замечания 2 [6, с. 319] имеем

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty (1-\exp\{m(\gamma_k)\cdot zx\})d_x\Phi_{n_k}(\gamma_k, x)) = \int_0^\infty \lim_{k\to\infty}(1-\exp\{m(\gamma_k)\cdot zx\})d\Phi(x)) = 0\,,$$

что противоречит (13). Соотношение (11) доказано.

Для доказательства (12) также предположим противное, т. е. существуют последовательности $\{n_k,\ k \ge 1\}$ и $\{\gamma_k,\ k \ge 1\}$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\gamma_k = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(\gamma_k) = g > 0$. Опираясь на вторую теорему Хелли, без ограничения общности можно предположить, что $P(\xi_{n_k} < x) \Rightarrow F(x)$, где $F(x)$ – некоторая собственная ФР. Тогда из (1) следует: $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(m(\gamma_k)) = \lim\limits_{k\to\infty}(g_{n_k}(\gamma_k)\cdot\omega_{n_k}(1)) = g$. Но в силу замечания 2 [5, с. 319] имеем

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\varphi}_{n_k}(m(\gamma_k)) = \lim_{k\to\infty}\int_0^\infty\left(1-\exp\left\{m\left(\lim_{k\to\infty}\gamma_k\right)zx\right\}\right)dF(x) = 0\,.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость (12).

**Лемма 2.** При выполнении условий В и Г равномерно по $x \in (a, b)$, где $a$ и $b$ $(0 < a < b < \infty)$ – любые фиксированные числа, справедливы соотношения ($i = 1, 2$)

$$\lim_{\gamma\to 0} S_i(x\lambda(\gamma)) = m_i x^{\theta_i}\,, \tag{14}$$

где $m_1 = \min\left(1,\ \lambda_0^{-\theta_1}\right)$, $m_2 = \min\left(1,\ \lambda_0^{\theta_2}\right)$. В частности, $\max(m_1,\ m_2) = 1$.

*Доказательство.* Аналогично (6) из [1] получаем соотношения ($i = 1, 2$):

$$\lim_{\gamma\to 0} S_i(x\lambda(\gamma)) = x^{\theta_i}\lim_{\gamma\to 0}\left\{\left(\frac{\lambda(\gamma)}{\lambda_i(\gamma)}\right)^{\theta_i}\frac{\tilde{L}_i(\lambda(\gamma))}{\tilde{L}_i(\lambda_i(\gamma))}\right\}. \tag{15}$$

Полагая $\alpha_i(\gamma) \overset{def}{=} \dfrac{\lambda(\gamma)}{\lambda_i(\gamma)}$ ($i$ = 1, 2), из (15) выводим

$$\lim_{\gamma\to 0}\left\{\left(\frac{\lambda(\gamma)}{\lambda_i(\gamma)}\right)^{\theta_i}\frac{\tilde{L}_i(\lambda(\gamma))}{\tilde{L}_i(\lambda_i(\gamma))}\right\} = \exp\left\{\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_{\alpha_i(\gamma)}^{1}\frac{-\varepsilon_i(\lambda_i(\gamma)z)-\theta_i}{z}\,dz\right\} =$$

$$= \lim_{\gamma\to 0}(\alpha_i(\gamma))^{\theta_i} = \left(\min\left(\lim_{\gamma\to 0}\frac{\lambda_1(\gamma)}{\lambda_i(\gamma)},\ \lim_{\gamma\to 0}\frac{\lambda_2(\gamma)}{\lambda_i(\gamma)}\right)\right)^{\theta_i}. \qquad (16)$$

Обоснование справедливости последних соотношений очевидно, когда $\lim\limits_{\gamma\to 0}\alpha_i(\gamma) > 0$. При $\lim\limits_{\gamma\to 0}\alpha_i(\gamma) = 0$ справедливость (16) следует из того, что в этом случае, если для некоторой последовательности $\{\gamma_k,\ k \ge 1\}$ $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_i(\gamma_k) = 0$, при достаточно больших $k$ имеем $-\varepsilon_i(\lambda_i(\gamma_k)z)-\theta_i \le -\theta_i/2$ для всех $z \in (a_i)$, так как $\lambda_i(\gamma)z \ge \lambda(\gamma) \to +\infty$ при $\gamma \to 0$.
Значит,

$$\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_{\alpha_i(\gamma)}^{1}(-\varepsilon_i(\lambda_i(\gamma)z)-\theta_i)z^{-1}dz = -\infty.$$

Из (15), (16) и условия Г следует (14).

Далее в силу В имеем ($i$ = 3, 4, 5)

$$\lim_{\gamma\to 0}\left\{S_i(x\lambda(\gamma))R(\gamma)^{-1}\right\} = x^{\theta_i}\lim_{\gamma\to 0}\left\{\left(\frac{[x\lambda(\gamma)]}{x\lambda(\gamma)}\right)^{\theta_i}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\tilde{L}_i([x\lambda(\gamma)])}{\tilde{L}_i(x\lambda(\gamma))}\frac{\tilde{L}_i(x\lambda(\gamma))}{\tilde{L}_i(\lambda(\gamma))}\frac{(\lambda(\gamma))^{\theta_i}\tilde{L}_i(\lambda(\gamma))}{R(\gamma)}G_i(\gamma)\right\} =$$

$$= x^{\theta_i}\lim_{\gamma\to 0}\left\{\frac{(\lambda(\gamma))^{\theta_i}\tilde{L}_i(\lambda(\gamma))}{R(\gamma)}G_i(\gamma)\right\}.$$

На основе условия Г и определения $R(\gamma)$ получаем: существует предел ($i$ = 3, 4, 5)

$$\lim_{\gamma\to 0}\left\{\int(\lambda(\gamma))^{\theta_i}\tilde{L}_i(\lambda(\gamma))R(\gamma)^{-1}\right\} = m_i,$$

откуда аналогично (6) из [1] выводим (15).

**Лемма 3.** Выполнение условий В и Г влечет выполнение условий В′ и Г′.

*Доказательство.* Из (14) и (15) следует справедливость условия В′. Для доказательства условия Г′ необходимо доказать существование чисел $\gamma_0$ и $A$ и функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ($x > 0$) таких, что для всех $x > A$ $\max\limits_{i=1,2}\sup\limits_{|\gamma|\le\gamma_0} S_i(x\lambda(\gamma)) \ge \varphi_1(x)$ и $\max\limits_{1\le j\le 3}\sup\limits_{|\gamma|\le\gamma_0}(S_j(x\lambda(\gamma)/R(\gamma)) \le \varphi_2(x)$.

В силу условия B аналогично (6) из [1] имеем

$$\text{при } \gamma \in G \overset{def}{=} \{\gamma > 0 : \lambda(\gamma) = \lambda_1(\gamma)\}$$

$$S_1(x\lambda(\gamma)) = \left(\frac{[x\lambda_1(\gamma)]}{\lambda_1(\gamma)}\right)^{\theta_1} \frac{L_1([x\lambda_1(\gamma)])}{L_1(\lambda_1(\gamma))} (\lambda_1(\gamma))^{\theta_1} L_1(\lambda_1(\gamma)) G_1(\gamma). \qquad (17)$$

В силу леммы 1 [1] существует число $\overline{\gamma_1} > 0$ такое, что для всех $\gamma$ $\left(|\gamma| \le \overline{\gamma_1}\right)$

$$(\lambda_1(\gamma))^{\theta_1} L_1(\lambda_1(\gamma)) G_1(\gamma) \ge \frac{1}{2}.$$

Далее, существует $\overline{\gamma_2} > 0$ такое, что для всех $x \ge 1$ имеем $\frac{1}{2} \le \frac{[x\lambda(\gamma)]}{x\lambda(\gamma)} \le 2$. Воспользовавшись (5) из [1] и неравенством $[z]/z \le 1$ ($z > 0$), для любого $\alpha > 0$ имеем

$$\left(\frac{[x\lambda_1(\gamma)]}{\lambda_1(\gamma)}\right)^{\alpha} \frac{L_1([x\lambda_1(\gamma)])}{L_1(\lambda_1(\gamma))} =$$

$$= \frac{c_1([x\lambda_1(\gamma)])}{c_1(x\lambda_1(\gamma))} \exp\left\{ \int_1^{[x\lambda_1(\gamma)]/(\lambda_1(\gamma))} \frac{\alpha}{u} du + \int_1^{[x\lambda_1(\gamma)]/(\lambda_1(\gamma))} \frac{\varepsilon(\lambda_1(\gamma)u)}{u} du \right\}. \qquad (18)$$

Отметим, что существует $x_1 > 1$ такое, что при $x \ge x_1$ $x/2 \le [x\lambda_1(\gamma)]/(\lambda_1(\gamma)) \le x$.

Поскольку $\lim\limits_{\gamma \to 0} \lambda_1(\gamma) = \infty$ (см. работу [1]) и существует $\overline{\gamma_3} > 0$ такое, что для всех $\gamma$ $(|\gamma| \le \overline{\gamma_3})$ и $x \ge 1$ справедливо $\sup\limits_{x \ge 1} \frac{c_1([x\lambda_1(\gamma)])}{c_1(x\lambda_1(\gamma))} \ge \frac{1}{2}$ и $\varepsilon(\lambda_1(\gamma)u) \ge -\frac{\alpha}{2}$ $(u \ge 1)$, то из последнего соотношения для всех $x \ge \max(x_1, 2)$ и $\gamma$, $|\gamma| \le \min\left(\overline{\gamma_2}, \overline{\gamma_3}\right)$, получаем

$$\left(\frac{[x\lambda_1(\gamma)]}{\lambda_1(\gamma)}\right)^{\alpha} \frac{L_1([x\lambda_1(\gamma)])}{L_1(x\lambda_1(\gamma))} \ge \frac{1}{2} \exp\{-\frac{\alpha}{2} \int_1^x u^{-1} du + \alpha \int_1^{x/2} u^{-1} du\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2} \ln x + \alpha \ln\left(\frac{1}{2} x\right)\right\} = x^{\alpha/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}. \qquad (19)$$

Из (17) и (19) следует, что для всех $x \ge x_1$ и $\gamma \in G$ $\left(|\gamma| \le \min\left(\overline{\gamma_2}, \overline{\gamma_2}, \overline{\gamma_3}\right)\right)$

$$S_1(x\lambda_1(\gamma)) \ge \left(\frac{x}{2}\right)^{\theta_1 - \alpha} x^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} = x^{\theta_1 - \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\theta_1 + 1}. \qquad (20)$$

Аналогично доказывается справедливость следующего соотношения для всех $x \ge x_2$, где $x_2 > 2$ – некоторая константа, и $\gamma$ таких, что $\lambda(\gamma) = \lambda_2(\gamma)$:

$$S_2(x\lambda_2(\gamma)) \ge \left(\frac{x}{2}\right)^{\theta_2-\alpha} x^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} = x^{\theta_2-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\theta_2+1}. \qquad (21)$$

Из (20) и (21) следует: для всех $\gamma > 0$

$$\max_{i=1,2} S_i(x\lambda_i(\gamma)) \ge x^{\min(\theta_1,\theta_2)-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\max(\theta_1,\theta_2)+1},$$

т. е. выполнено первое условие $\Gamma'$ с $A_1 = x_0 = \max(x_1,\ x_2)$ при $\alpha < 2\min(\theta_1,\ \theta_2)$ и $\vartheta_1(x) = x^{\min(\theta_1,\theta_2)-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\max(\theta_1,\theta_2)+1}$.

Аналогично (18) и (19) выводим: существуют $\overline{\gamma_4} > 0$ такие, что для всех $\gamma$ $\left(|\gamma| \le \overline{\gamma_4}\right)$, $x \ge x_3$, где $x_3 > 2$ – некоторая константа, и $j = 1,2$ справедливо

$$\left(\frac{[x\lambda(\gamma)]}{\lambda(\gamma)}\right)^{\alpha} \frac{L_j([x\lambda(\gamma)])}{L_j(x\lambda(\gamma))} \le 2\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\int_1^x u^{-1}du + \alpha\int_1^x u^{-1}du\right\} \le$$

$$\le 2\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\ln x + \alpha\ln x\right\} = 2x^{(3/2)\alpha},$$

откуда аналогично (17) получаем

$$S_j(x\lambda(\gamma)) = \left(\frac{[x\lambda(\gamma)]}{\lambda(\gamma)}\right)^{\theta_j} \frac{L_j([x\lambda(\gamma)])}{L_j(\lambda(\gamma))} (\lambda(\gamma))^{\theta_j} L_j(\lambda(\gamma))G_j(\gamma).$$

Так как $L_j(\lambda(\gamma))G_j(\gamma) \le 2$ при достаточно малых $\gamma$, то аналогично доказывается справедливость второго условия $\Gamma'$ с $A_2 = x_3$ и $\vartheta_2(x) = 2x^{\max(\theta_3,\theta_4,\theta_5)+\frac{3\alpha}{2}}$.

Наконец, очевидно, что

$$\int_{\max(A_1,A_2)}^{\infty} \exp\{-p\vartheta_1(x)\}d\vartheta_2(x) < \infty$$

для любого $p > 0$.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству существования хотя бы одного разложения, удовлетворяющего лемме 2 из [1].

Пусть $\Re \overset{def}{=} \{\omega_n(z),\ n \ge 1\}$ и $\mathfrak{T}$ есть замыкание $\Re$ в смысле слабой (поточечной) сходимости. Для любых двух функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$ положим

$$r(\alpha,\ \beta) = \sup_{z>0} \frac{z|\alpha(z) - \beta(z)|}{(1+z)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что $r(\alpha, \beta)$ является метрикой на множестве функций $g(z)$, являющихся ПЛС некоторых мер и удовлетворяющих условию $\sup\limits_{z>0} \frac{z|g(z)|}{(1+z)^2} < +\infty$.

**Лемма 4.** Множество $\mathfrak{I} \neq \varnothing$ и полно относительно сходимости по метрике $r$.

*Доказательство.* Из определения $w_n(z)$ $(n \geq 1,\ z > 0)$ (условие А) следует, что $\frac{\omega_n(z)}{z}$ является пределом преобразований Лапласа–Стильтеса (ПЛС) некоторых мер и, следовательно, само является ПЛС некоторой меры. Значит, $\frac{\omega_n(z)}{z}$ непрерывна при $z > 0$ и монотонно не возрастает с ростом $z$. Отметим также, что, как нетрудно вывести из (1) (см. [1]), функция $w_n(z)$ для любого $n \geq 1$ монотонно не убывает с ростом $z$.

Поскольку множество $\{\omega_n(z),\ n \geq 1\}$ $(0 \leq z \leq 1)$ состоит из монотонно возрастающих и ограниченных функций, то по первой теореме Хелли в этом множестве можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\omega_{i_k}(z),\ k \geq 1\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_{i_k}(z) \overset{def}{=} \tilde{\psi}_1(z)$ $(0 \leq z \leq 1)$. Аналогично из множества $\left\{\frac{\omega_{i_k}(z)}{z},\ k \geq 1\right\}$ $(z \geq 1)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\left\{\frac{\omega_{i'_k}(z)}{z},\ k \geq 1\right\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\omega_{i'_k}(z)}{z} = \frac{\tilde{\psi}_2(z)}{z}$ $(z \geq 1)$.

Полагая $\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}_1(z)$ при $z \in [0,1)$ и $\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}_2(z)$ при $z \geq 1$, заключаем, что $\tilde{\psi}(z) \in \mathfrak{I}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{I} \neq \varnothing$.

Пусть $\psi(z) \in \mathfrak{I}$ – любая функция. Тогда по определению $\mathfrak{I}$ существует последовательность $\{\omega_{i_k}(z),\ k \geq 1\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_{i_k}(z) \overset{def}{=} \psi(z)$ для всех $z > 0$. Отсюда совершенно так же, как и выше, заключаем, что функция $\psi(z)$, определенная для всех $z > 0$, не убывает с ростом $z > 0$, $\frac{\psi(z)}{z}$ является ПЛС некоторой меры (как предел ПЛС) и $\psi(1) = 1$ (см. [1]). Следовательно, $\psi(z)$ непрерывна при $z > 0$ и существуют пределы: $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z\psi(z)}{(1+z)^2} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z\psi(z)}{(1+z)^2} = 0$. Поэтому для любого $k \geq 1$ существует $z_k \in [0,\infty)$ такое, что $r(\omega_{i_k}, \psi) = \frac{z_k \left|\omega_{i_k}(z_k) - \psi(z_k)\right|}{(1+z_k)^2}$, где полагаем

$$\left.\left(\frac{z\left|\omega_{i_k}(z) - \psi(z)\right|}{(1+z)^2}\right)\right|_{z=\infty} = \lim_{z\to\infty} \left\{\frac{z^2}{(1+z)^2}\left|\frac{\omega_{i_k}(z)}{z} - \frac{\psi(z)}{z}\right|\right\} \ (<\infty).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0 \in [0,\infty)$, в противном случае из $\{z_k,\ k \ge 1\}$ можно было бы выбрать сходящуюся подпоследовательность. Если предположить, что $z_0 = 0$, то получаем

$$\lim_{k\to\infty} r(\omega_{i_k},\psi) \le \lim_{k\to\infty} \frac{z_k \left|\omega_{i_k}(1)+\psi(1)\right|}{(1+z_k)^2} = 0.$$

Пусть теперь $z_0 \ne 0$. Обозначим через $W_k(t)$ и $\Psi(t)$ $(t \ge 0)$ ФР мер, имеющих ПЛС $\dfrac{\omega_k(z)}{z}$ и $\dfrac{\psi(z)}{z}$ соответственно. Тогда из сходимости $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\omega_k(z)}{z} = \dfrac{\psi(z)}{z}$ следует, что $W_{i_k}(t) \Rightarrow \Psi(t)$ при $k \to \infty$. Отметим, что последняя сходимость имеет место равномерно на любом интервале $[a, b]$ $(0 \le a \le b < \infty)$. Действительно, выберем $\varepsilon > 0$ и разбиение $\left\{t_i,\ i=\overline{1,n}\right\}$ $(n \ge 1)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ такое, что для всех $i = \overline{1,n}$ имеем $\Psi(t_i) - \Psi(t_{i-1}) < e$. Далее, выберем $k_0 \ge 1$ такое, чтобы для всех $k \ge k_0$ и $j = \overline{1,n}$ имело место $\left|W_{i_k}(t_j) - \Psi(t_j)\right| < \varepsilon$. Тогда при $t \in [t_{j-1},\ t_j]$ и $k \ge k_0$ следует $\left|W_{i_k}(t) - \Psi(t)\right| \le \left|W_{i_k}(t_j) - \Psi(t_{j-1})\right| \le \left|W_{i_k}(t_j) - \Psi(t_j)\right| + \left|\Psi(t_j) - \Psi(t_{j-1})\right| < 2\varepsilon$, откуда вытекает справедливость отмеченного факта.

Имеем

$$r(\omega_{i_k},\psi) \le z_k \left|\frac{\omega_{i_k}(z_k)}{z_k^2} - \frac{\psi(z_k)}{z_k^2}\right| = \left|\int_0^\infty e^{-u}\left(W_{i_k}\left(\frac{u}{z_k}\right) - \Psi\left(\frac{u}{z_k}\right)\right)du\right| \le$$

$$\le \int_0^{2a} e^{-u}\left|W_{i_k}\left(\frac{u}{z_k}\right) - \Psi\left(\frac{u}{z_k}\right)\right|du + e^{-a}\left|\int_{2a}^\infty e^{-u/2}\left(W_{i_k}\left(\frac{u}{z_k}\right) - \Psi\left(\frac{u}{z_k}\right)\right)du\right| \le$$

$$\le 2a \sup_{0\le u\le 2a}\left|W_{i_k}\left(\frac{u}{z_k}\right) - \Psi\left(\frac{u}{z_k}\right)\right| + e^{-a}\int_0^\infty e^{-u/2}\left(W_{i_k}\left(\frac{u}{z_k}\right) + \Psi\left(\frac{u}{z_k}\right)\right)du \le$$

$$\le 2a \sup_{0\le u\le 2a}\left|W_{i_k}\left(\frac{u}{z_k}\right) - \Psi\left(\frac{u}{z_k}\right)\right| + e^{-a}(\omega_{i_1}(z_k/2) + \psi(z_k/2)). \qquad (22)$$

Пусть $0 < \tilde{z} < z_0$ и $k_0 \ge 1$ таковы, что при $k \ge k_0$ имеем $z_k > \tilde{z}$. Выберем произвольные $\varepsilon > 0$ и $a > 0$ таким образом, чтобы $e^{-a} < \varepsilon$. Поскольку $\dfrac{\omega_{i_k}(z_k/2)}{z_k/2} \le \dfrac{\omega_{i_k}(\tilde{z}/2)}{\tilde{z}/2}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\omega_{i_k}(\tilde{z}/2)}{\tilde{z}/2} = \dfrac{\psi((\tilde{z}/2))}{(\tilde{z}/2)}$, то существует константа $M > 0$ такая, что для всех $k \ge 1$ имеем

$$\frac{\omega_{i_k}(z_k/2)}{z_k/2} \le M \quad \text{и} \quad \frac{\psi(z_k/2)}{z_k/2} \le \frac{\psi(\tilde{z}/2)}{\tilde{z}/2} \le M.$$

Тогда из (22) получаем $(k \ge k_0)$

$$r(\omega_{i_k},\ \psi) \le 2a \sup_{0 \le x \le 2a/\tilde{z}} \left| W_{i_k}(t_j) - \psi(t_j) \right| + 2M\varepsilon\,, \tag{23}$$

откуда с учетом сделанного выше замечания о равномерной сходимости мер $W_{i_k}(t)$ и $\Psi(t)$, выводим $\lim\limits_{k\to\infty} r(\omega_{i_k},\ \psi) = 0$.

Таким образом, из поточечной сходимости последовательности $\{\omega_{i_k}(z),\ k \ge 1\}$ следует сходимость по метрике $r$. Обратное утверждение очевидно.

Покажем теперь, что $\Im$ $r$-полно. Пусть $\{\psi_n(z) \in \Im,\ n \ge 1\}$ $(z > 0)$ – произвольная сходящаяся последовательность, т. е. существует функция $\psi(z)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r(\psi_n, \psi) = 0$. По определению множества $\Im$ и доказанному выше для любого $n \ge 1$ существует последовательность $\left\{\omega_m^{(n)}(z) \in \Re,\ m \ge 1\right\}$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} r\left(\omega_m^{(n)},\ \psi_n\right) = 0$. Но тогда нетрудно построить последовательность $\left\{\omega_{m_n}^{(n)}(z),\ n \ge 1\right\}$ такую, что

$$r\left(\omega_{m_n}^{(n)},\ \psi_n\right) < \frac{1}{2^n}\,.$$

Отсюда следует: $\lim\limits_{n\to\infty} r\left(\omega_{m_n}^{(n)},\ \psi\right) \le \lim\limits_{n\to\infty} r\left(\omega_{m_n}^{(n)},\ \psi_n\right) + \lim\limits_{n\to\infty} r(\psi_n,\ \psi)$, и значит $\psi(z) \in \Im$.

Пусть теперь $\{\psi_n(z) \in \Im,\ n \ge 1\}$ – произвольная фундаментальная последовательность. Аналогично доказательству того, что $\Im \ne \varnothing$, показывается существование последовательности $\{\psi_{i_k}(z),\ k \ge 1\}$ такой, что при $k \to \infty$ $\psi_{i_k}(z)$ поточечно сходится к некоторой функции $\psi(z)$ $(z > 0)$. Отсюда совершенно так же, как и выше при выводе (23), доказывается, что $\lim\limits_{k\to\infty} r(\psi_{i_k},\ \psi) = 0$ и $\psi \in \Im$. Воспользовавшись неравенством $r(\psi_k,\ \psi) \le r(\psi_{i_n}, \psi_k) + r(\psi_{i_n},\ \psi)$ и фундаментальностью последовательности $\{\psi_k(z),\ n \ge 1\}$, выводим $\lim\limits_{k\to\infty} r(\psi_k,\ \psi) = 0$.

**Лемма 5.** Множество $\Re$ можно представить в виде $\Re = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Re(\psi_k)$, где $\Re(\psi_i) \cap \Re(\psi_j) = \varnothing$ при $i \ne j$.

Если $\Re(\psi_k) = \left\{\omega_{i_n}^{(k)}(z),\ n \ge 1\right\}$ $(k \ge 1)$, то для любого $n \ge 0$ имеем $r\left(\omega_{i_n}^{(k)},\ \psi_k\right) = \inf\limits_{\psi \in \Im} r\left(\omega_{i_n}^{(k)},\ \psi\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r\left(\omega_{i_n}^{(k)},\ \psi_k\right) = 0$ равномерно по $k \ge 1$

и $\psi_k \in \Re(k \geq 1)$. Здесь при $|\Re(\psi_k)| < \infty$ полагаем $r\left(\omega_{i_n}^{(k)}, \psi_k\right) = 0$ для $n > |\Re(\psi_k)|$.

В частности, имеет место утверждение леммы 2 из [1].

*Доказательство.* Заметим, что для любых двух функций $\psi_i \in \Re(i = 1,2)$ существует лишь конечное число точек $z$, $|1 - z| \leq 1/2$ таких, что $\psi_1(z) = \psi_2(z)$. Предположим противное, т. е. существуют две различные функции $\psi_i(z) \in \Re$ $(i = 1, 2)$ и последовательность различных точек $\{z_n,\ |1 - z_n| \leq 1/2,\ n \geq 1\}$ такие, что для всех $n \geq 1$ имеем $\psi_1(z_n) = \psi_2(z_n)$. Без ограничения общности можно считать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \overset{def}{=} z_0$ $(|1 - z_0| \leq 1/2)$. Имеем $\alpha(z) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\psi_1(z)}{z} - \dfrac{\psi_2(z)}{z} = 0$ при $z = z_n$ $(n \geq 1)$. Но поскольку $\alpha(z)$ аналитична в области Re $z > 0$ как разность ПЛС некоторых мер, то необходимо $\alpha(z) \equiv 0$ в области Re $z > 0$. Полученное противоречие и доказывает справедливость сделанного выше замечания.

Выберем некоторую последовательность $\{z_n,\ n \geq 1\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. Тогда для любых двух функций $\psi_i(z) \in \Re$ $(i = 1,2)$ существует конечное число $m \geq 1$ такое, что $\psi_1(z_i) = \psi_2(z_i)$ $(i = \overline{1, m-1})$, но либо $\psi_1(z_m) < \psi_2(z_m)$, либо $\psi_1(z_m) > \psi_2(z_m)$. Будем говорить, что функция $\psi_1(z)$ не превосходит функции $\psi_2(z)$ (записывается $\psi_1 \prec \psi_2$), если для некоторого числа $m \geq 1$ $\psi_1(z_i) = \psi_2(z_i)$ $(i = \overline{1, m-1})$, но $\psi_1(z_m) < \psi_2(z_m)$. Нетрудно убедиться, что введенное соотношение превращает $\Re$ во вполне упорядоченное множество.

Введенное бинарное отношение «$\prec$» является транзитивным.

Действительно, пусть $\psi_1 \prec \psi_2$ и $\psi_2 \prec \psi_3$. Покажем, что $\psi_1 \prec \psi_3$.

Из определения отношения $\psi_1(z_{m_1}) < \psi_2(z_{m_1})$ следует существование чисел $m_1$ и $m_2$ таких, что $\psi_1(z_n) = \psi_2(z_n)$ при $n < m_1$, $\psi_1(z_{m_1}) < \psi_2(z_{m_1})$ и $\psi_2(z_n) = \psi_3(z_n)$ при $n < m_2$, $\psi_2(z_{m_2}) < \psi_3(z_{m_2})$. Пусть $m_1 \leq m_2$. Тогда имеем

$$\psi_1(z_{m_1}) < \psi_2(z_{m_1}) \leq \psi_3(z_{m_1}), \text{ т. е. } \psi_1(z_{m_1}) < \psi_3(z_{m_1}).$$

Аналогично при $m_1 > m_2$ имеем $\psi_1(z_{m_2}) = \psi_2(z_{m_2}) < \psi_3(z_{m_2})$. Таким образом, полагая $m = \min(m_1, m_2)$, получаем $\psi_1(z_n) = \psi_3(z_n)$ при $n < m$ и $\psi_1(z_m) < \psi_3(z_m)$, т. е. $\psi_1 \prec \psi_3$.

Отметим, что если последовательность $\{\psi_n \in \Re,\ n \geq 1\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(z) = \psi(z)$ $(z > 0)$ и $\psi_i \prec \psi_j$ для всех $i \geq 1$, $j \geq 1$, $i < j$, то для любого $i \geq 1$ имеем $\psi_i \prec \psi$. Действительно, для любого $i \geq 1$ существует конечное число $m(i) \geq 1$ такое, что $\psi_i(z_n) < \psi(z_n)$ $(n = \overline{1, m(i)-1})$, но

$\psi_i(z_{m(i)}) \neq \psi(z_{m(i)})$. Покажем, что тогда для всех $j \geq i$ имеем $\psi_j(z_n) < \psi(z_n)$ $(n = \overline{1, m(i)-1})$. Предположим противное. Тогда существует наименьшее число $i_1 > i$ такое, что $m(i_1) < m(i)$, и поэтому $\psi_i(z_n) = \psi(z_n)$ для всех $n \leq m(i_1)$. Так как $\psi_i(z_n) = \psi_{i_1}(z_n) = \psi(z_n)$ для всех $n < m(i_1)$ и $\psi_i \prec \psi_{i_1}$, то отсюда следует

$$\psi(z_{m(i_1)}) = \psi_i(z_{m(i_1)}) < \psi_{i_1}(z_{m(i_1)}). \tag{24}$$

Из вышесказанного вытекает существование (наименьшего) числа $i_2 > i_1$ такого, что $m(i_2) < m(i_1)$, так как в противном случае (т. е. при $m(k) \geq m(i_1)$ для всех $k > i_1$) ввиду $\psi_{i_1} \prec \psi_k$ имеем $\psi_{i_1}(z_n) = \psi_k(z_n)$ для всех $n < m(i)$ и

$$\psi_{i_1}(z_{m(i_1)}) \leq \psi_k(z_{m(i_1)}). \tag{25}$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(z_{m(i_1)}) = \psi(z_{m(i_1)})$, то ввиду (24) соотношение (25) не может иметь места для всех $k > i_1$ – противоречие со сделанным выше предположением.

Проделав описанную выше процедуру не более чем $m(i)$ раз, придем к следующему: существует число $i_0 > i$ такое, что для всех $k > i_0$ имеем $m(k) \geq m(i_0)$, но $m(i_0) < m(i)$. Но тогда аналогично (24) и (25) для всех $j > i_0$ выводим

$$\psi(z_{m(i_0)}) = \psi_i(z_{m(i_0)}) < \psi_{i_0}(z_{m(i_0)}) \leq \psi_k(z_{m(i_0)})$$

– противоречие с определением $m(i)$.

Таким образом, для всех $j \geq i$ имеем $\psi_j(z_n) = \psi(z_n)$ $(n = \overline{1, m(i)-1})$, откуда ввиду $\psi_j \prec \psi_k$ при $i \leq j < k$ выводим $\psi_j(z_{m(i)}) \leq \psi_k(z_{m(i)})$. Но поскольку $\psi_i(z_{m(i)}) \neq \psi(z_{m(i)})$ и $\psi_i \prec \psi_k$ для $k > i$, то существует число $j > i$ такое, что $\psi_i(z_{m(i)}) < \psi_j(z_{m(i)})$, так как в противном случае (т. е. при $\psi_i(z_{m(i)}) = \psi_k(z_{m(i)})$ для всех $k > i$) получаем $\psi_i(z_{m(i)}) = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(z_{m(i)}) =$ $= \psi(z_{m(i)})$ – противоречие с определением $m(i)$. Отсюда следует

$$\psi_i(z_{m(i)}) < \psi_j(z_{m(i)}) \leq \lim_{k\to\infty} \psi_k(z_{m(i)}) = \psi(z_{m(i)}),$$

и значит $\psi_i \prec \psi$.

Для любой функции $\alpha(z)$ $(z > 0)$ положим $r(\alpha, \mathfrak{I}) = \inf\limits_{\psi\in\mathfrak{I}} r(\alpha, \psi)$.

Пусть $\psi \in \mathfrak{I}$. Построим множество $\mathfrak{R}(\psi)$ следующим образом: $\mathfrak{R}(\psi) = \{\omega_n \in \mathfrak{R} : r(\omega_n, \mathfrak{I}) = r(\omega_n, \psi)$, но не существует $\psi' \in \mathfrak{I}$, $\psi' \prec \psi$ такого,

что $r(\omega_n, \mathfrak{I}) = r(\omega_n, \psi')\}$. Обозначим через $\mathfrak{I}_1$ множество тех функций $\psi \in \mathfrak{I}$, для которых $\mathfrak{R}(\psi) \neq \varnothing$.

Докажем, что тогда $\mathfrak{R} = \bigcup\limits_{\psi \in \mathfrak{I}_1} \mathfrak{R}(\psi)$, причем $\mathfrak{R}(\psi_1) \cap \mathfrak{R}(\psi_2) = \varnothing$ при $\psi_1 \neq \psi_2$. Покажем вначале, что для любого $n \geq 1$ существует $\psi \in \mathfrak{I}$ такое, что $r(\omega_n, \mathfrak{I}) = r(\omega_n, \psi)$. Построим последовательность $\{\psi_n \in \mathfrak{I},\ n \geq 1\}$ следующим образом: выберем $\psi_k \in \mathfrak{I}$ так, чтобы $r(\omega_n, \psi_k) - r(\omega_n, \mathfrak{I}) < 1/k$ $(k \geq 1)$. В силу леммы 4 существуют подпоследовательность $\{\psi_{j_k}(z),\ k \geq 1\}$ и функция $\psi \in \mathfrak{I}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r(\psi_{i_k}, \psi) = 0$. Но тогда для любого $k \geq 1$ имеем

$$r(\omega_n, \mathfrak{I}) \leq r(\omega_n, \psi) \leq r(\omega_n, \psi_{i_k}) + r(\psi_{i_k}, \psi) \leq r(\omega_n, \mathfrak{I}) + i_k^{-1} + r(\psi_{i_k}, \psi),$$

откуда после перехода к пределу при $k \to \infty$ получаем $r(\omega_n, \mathfrak{I}) = r(\omega_n, \psi)$.

Положим $\Omega = \Omega_n \overset{def}{=} \{\psi \in \mathfrak{I}\colon\ r(\omega_n, \mathfrak{I}) = r(\omega_n, \psi)\}$. Покажем, что $\Omega$ замкнуто относительно сходимости по метрике *r*. Предположим, что последовательность $\{\psi_n \in \mathfrak{I},\ n \geq 1\}$ сходится по метрике *r* к некоторой функции $\psi \in \mathfrak{I}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r(\psi_k, \psi) = 0$. Тогда имеем

$$r(\omega_n, \psi) \leq \lim_{k\to\infty} \{r(\omega_n, \psi_k) + r(\psi_k, \psi)\} = r(\omega_n, \mathfrak{I}),$$

откуда следует, что $r(\omega_n, \psi) = r(\omega_n, \mathfrak{I})$ и $\psi \in \mathfrak{I}$.

Покажем, что существует $\psi \in \Omega$ такое, что для любого $\psi' \in \Omega,\ \psi' \neq \psi$ имеем $\psi' \prec \psi$.

Если $\Omega$ содержит лишь конечное число элементов, то этот факт очевиден. Возьмем произвольную цепь $\{\psi_k \in \Omega,\ k \geq 1\}$, т. е. необходимо $\psi_1 \prec \psi_2 \prec \ldots \prec \psi_k \prec \ldots$. В силу леммы 4 существуют подпоследовательность $\{\psi_k,\ k \geq 1\}$ и функция $\psi \in \Omega$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r(\psi_k, \psi) = 0$. Но тогда, как показано выше, $\psi_{i_k} \prec \psi$ для любого $k \geq 1$. Отсюда для любого $m \geq 1$, выбирая $i_k > m$, получаем $\psi_m \prec \psi_{i_k} \prec \psi$, т. е. $\psi_m \prec \psi$ для всех $m \geq 1$. Таким образом, мы показали, что всякая цепь из $\Omega$ имеет верхнюю грань. Отсюда на основе леммы Цорна заключаем, что в $\Omega$ существует максимальный элемент $\psi \in \Omega$, т. е. для всех $\psi' \in \Omega,\ \psi' \neq \psi$ имеем $\psi' \prec \psi$. Из вышесказанного в силу определения $\mathfrak{R}(\psi)$ заключаем, что

$$r(\omega_n, \psi) = \lim_{k\to\infty} r(\omega_n, \psi_k) = \lim_{k\to\infty} r(\omega_n, \mathfrak{I}) = r(\omega_n, \mathfrak{I}),$$

и, следовательно, $\omega_n \in \mathfrak{R}(\psi)$. Заметим, что так как $\mathfrak{I}$ – вполне упорядоченное множество, то в $\mathfrak{I}$ не существует двух различных функций $\psi_i \in \mathfrak{I}$ $(i = 1, 2)$ таких, что $\omega_n \in \mathfrak{R}(\psi_i)$ $(i = 1, 2)$.

Указанное свойство определяет разбиение множества $\Re = \bigcup_{\psi\in\Im} \Re(\psi)$, причем $\Re(\psi_1)\cap\Re(\psi_2)=\varnothing$, если $\psi_1 \neq \psi_2$. Но поскольку множество $\Re$ счетно, то $\Im_1$ также не более чем счетно, и все функции, входящие в $\Im_1$, могут быть пронумерованы, т. е. $\Im_1 = \{\psi_k,\ k=\overline{1,N},\ N\le\infty\}$. Поэтому последнее разбиение эквивалентно следующему: $\Re = \bigcup_{k=1}^{N} \Re(\psi_k)$, где $\Re(\psi_n)\neq\varnothing$ $(1\le n\le N)$, $\Re(\psi_i)\cap\Re(\psi_j)=\varnothing$ если $i\neq j$.

Первое утверждение леммы 5 доказано.

Пусть $\Re(\psi_k)=\left\{\omega_{i_n}^{(k)}(z),\ 1\le n\le N_k\right\}$ $(1\le k\le N,\ z>0,\ 1\le N_k\le\infty)$. Покажем, что если $\Re(\psi_k)$ для некоторого $k$ содержит бесконечное множество элементов, то $\lim\limits_{n\to\infty} r\left(\omega_{i_n}^{(k)},\ \psi_k\right)=0$. Предположим, что подпоследовательность $\{\omega_{i_m}(z)\in\Re(\psi_k),\ m\ge 1\}$ и функция $\psi\in\Im$ таковы, что $\lim\limits_{m\to\infty} r(\omega_{i_m},\ \psi)=0$. В силу определения множества $\Re(\psi_k)$ имеем

$$r(\omega_{i_m},\ \psi_k)=\inf_{\psi'\in\Im} r(\omega_{i_m},\ \psi')\le r(\omega_{i_m},\ \psi),$$

откуда следует $\lim\limits_{m\to\infty} r(\omega_{i_m},\ \psi_k)=0$. Значит, $\psi=\psi_k$.

Таким образом, $\Re(\psi_k)$ имеет единственную предельную точку $\psi_k$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r\left(\omega_{i_n}^{(k)},\ \psi_k\right)=0$.

Наконец, покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} r\left(\omega_{i_n}^{(k)},\ \psi_k\right)=0$ равномерно по $k\ge 1$. Предположим противное. Тогда существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого $n\ge 1$ существуют $M=M(n)>n$ и $k=k(n)$ такие, что $r\left(\omega_{i_M}^{(k)},\ \psi_k\right)>\varepsilon$. Но совершенно так же, как и при доказательстве леммы 4, показывается, что из подпоследовательности $\left\{\omega_{i_{M(n)}}^{(k(n))}(z),\ n\ge 1\right\}$ $(z>0)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\left\{\omega_{j_m}^{(k)}(z),\ m\ge 1\right\}$, т. е. существует функция $\psi\in\Im$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} r\left(\omega_{j_m}^{(k)},\ \psi\right)=0$ – противоречие с определением $\Re(\psi_k)$ и неравенством $r\left(\omega_{i_M}^{(k)},\ \psi_k\right)>\varepsilon$.

Утверждение леммы 2 из [1] является частью утверждения леммы 5.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование аппарата редких восстанавливаемых событий для анализа характеристик информационной безопасности представляет новый подход к изучению систем обеспечения информационной безопасности. Ранее с участием одного из авторов была проведена формализация всех условий и ограничений в модели восстановления с редкими событиями. Полученные условия достаточно сложны. В работе проведено определенное упрощение этих условий. Приведены альтернативные постановки ограничений, которые более понятны и прозрачны для понимания; доказана их эквивалентность исходным характеристикам; доказана полнота и замкнутость класса моделей, удовлетворяющих введенным ограничениям. Полученные результаты являются основой для оценки основных характеристики системы информационной безопасности: вероятности совершения злоумышленной атаки и времени до момента начала ближайшей из атак.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Г.А., Попов А.Г., Лаптев П.В.* Формализация процесса изменения вероятности нарушения сервисов информационной безопасности на основе аппарата редких событий // Наука, образование, инновации: пути развития: материалы восьмой Всероссийской научно-практической конференции (23–25 мая 2017 г.). – Петропавловск-Камчатский, 2017. – С. 29–34.

2. *Гнеденко Д.Б., Соловьев А.Д.* Одна общая модель резервирования с восстановлением // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – № 6. – С. 113–119.

3. Некоторые вопросы надежности / под ред. В.В. Каштанова. – М.: Радио и связь, 1979. – 126 с.

4. *Гнеденко Д.Б., Соловьев А.Д.* Асимптотическая оценка надежности сложных систем с быстрым восстановлением // Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. – Т. 1. – С. 185–197.

5. *Соловьев А.Д.* Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1971. – № 6. – С. 79–90.

6. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 436 с.

7. *Попов Г.А.* Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в неоднородном регенерирующем процессе. – М., 2000. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ № 2193-В00.

8. *Шевченко Е.Н.* Математическое моделирование распределения риска при независимых случайных величинах вероятностей исходных событий и ущерба // Фундаментальные исследования. – 2011. – № 12-3. – С. 604–608.

9. *Рогатин А.Д.* Оценка вероятности редких событий в поведении толпы // Управление большими системами. – 2016. – № 63. – С. 106–128.

10. *Ташевский А.Г.* Моделирование редких событий при прогнозировании эксплуатационных процессов в сложных системах машиностроения // Инструмент и технологии. – 2011. – № 32. – С. 22–33.

11. *Граничин О.Н., Сысоев С.С., Чуйко Д.С.* Проблемы тестирования сервера как задачи о моделировании редких событий // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2005. – Т. 1, № 1-1. – С. 48–72.

12. *Агалаков Ю.Г.* Оценивание вероятностей редких событий в вычислительных экспериментах с имитационными моделями // Управление большими системами. – 2012. – № 40. – С. 83–95.

13. *Русинов М.А.* Об основных принципах методики анализа редких событий в дискретных сложных системах // Вестник МГТУ Станкин. – 2015. – № 3 (34). – С. 139–144.

14. *King G., Zeng L.* Logistic regression in rare events data // *Political Analysis*. – 2001. – Vol. 9. – P. 137–163.

15. Data Mining: Классификация редких событий [Электронный ресурс]. – URL: http://docplayer.ru/45110849-Data-mining-klassifikaciya-redkih-sobytiy.html (дата обращения: 16.06.2019).

16. *Уколов А.И., Гупалова Т.Н.* Управление корпоративными рисками: инструменты хеджирования. – М.: Директ-Медиа, 2014. – 273 с.

17. Математическое моделирование потоков автотранспорта на основе макро- и микроскопических подходов / М.А. Трапезников, А.А. Чечина, Н.Г. Чурбанова, Д.Б. Поляков // Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1. – С. 130–139.

*Попов Георгий Александрович*, доктор технических наук, профессор кафедры «Информационная безопасность» Астраханского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – математическое моделирование систем, информационная безопасность, системный анализ. Имеет более 150 публикаций, в том числе две монографии. E-mail: popov@astu.org

*Попова Екатерина Александровна*, старший преподаватель кафедры «Информационная безопасность» Астраханского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – системный анализ, математическое моделирование. Имеет более 20 публикаций. E-mail: e.popova@astu.org

*Васильева Ольга Валерьевна*, кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационная безопасность» Астраханского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – системный анализ, математическое моделирование. Имеет 15 публикаций. E-mail: vasilyevaov26@gmail.com

*Popov Georgy Alexandrovich,* D.Sc. (Eng.), professor, Department of Information Security, Astrakhan State Technical University. The main field of his research covers mathematical modeling of systems, information security and systems analysis. He is the author of over 150 publications including 2 monographs. E-mail: popov@astu.org

*Popova Ekaterina Alexandrovna*, assistant professor, Department of Information Security, Astrakhan State Technical University. The main field of her research includes mathematical modeling and systems analysis. She is the author of over 20 publications. E-mail: e.popova@astu.org

*Vasilieva Olga Valerievna*, PhD (Eng.), associate professor, Department of Information Security, Astrakhan State Technical University. The main field of her research covers mathematical modeling and systems analysis. She is the author of 15 publications E-mail: vasilyevaov26@gmail.com

DOI: 10.17212/1814-1196-2019-2-69-88

## *Analysis of input conditions in the information security model based on the rare event apparatus*[*]

*G.A. POPOV*[a], *E.A. POPOVA*[b], *O.V. VASILIEVA*[c]

*Astrakhan State Technical University, 16, Tatishcheva St., Astrakhan, 414056, Russian Federation*

[a] *popov@astu.org* [b] *e.popova@astu.org* [c] *vasilyevaov26@gmail.com*

**Abstract**

The task of estimating the probability of a malicious attack is considered under conditions when the initial process of ensuring information security is regenerative. Of particular interest is the analysis of the likelihood and a possible moment of a malicious attack. This probability is usually very small, which allows us to speak of the probability of a

[*] *Received 01 February 2019.*

successful attack as a rare event. Then the moment of successful realization of this attack within the framework of the systems being restored can be considered as the moment of the first occurrence of a certain event (a rare event). The moments of regeneration of the considered restoration process can be the moments of carrying out preventive and testing activities. Thus, it is assumed that the probability of a malicious action is small, and the original process is regenerating. The formalization of initial conditions, which are necessary for the subsequent study of this probability based on the methods of mathematical and computer modeling, has been carried out. Since the processes of malicious attack flows and flows of countermeasures in this formulation are heterogeneous, normalizing functions to compare these flows are introduced. For the indicated normalizing functions, limiting relations are obtained, which are exponential relations. Alternative formulations of the initial conditions are given, and their equivalence with the initial conditions is proved. It is shown that when the above conditions are fulfilled, the processes of incoming attacks and counteraction to them can be divided into separate groups, each of which has the property of asymptotic convergence, that is, it can be considered as incomes of the same source for this group. The obtained ratios can be used for splitting attacks into individual sources of attacks.

**Keywords:** malicious action, non-uniform regenerating process, flow of malicious attacks, probability of a malicious attack, flow of countermeasures, a rare event, the time before an attack, normalization functions, limit ratios, splitting of the incoming flow into sources

## REFERENCES

1. Popov G.A., Popov A.G., Laptev P.V. [Formalization of the process of changing the probability of violation of information security services based on the apparatus of rare events]. *Nauka, obrazovanie, innovatsii: puti razvitiya: materialy vos'moi Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Science, Education, Innovations: Ways of Development: materials of the eighth All-Russian Scientific-Practical Conference], 23–25 May 2017. Petropavlovsk-Kamchatskii, 2017, pp. 29–34. (In Russian).

2. Gnedenko D.B., Solov'ev A.D. Odna obshchaya model' rezervirovaniya s vosstanovleniem [One common backup model with recovery]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1974, no. 6, pp. 113–119. (In Russian).

3. Kashtanov V.V., ed. *Nekotorye voprosy nadezhnosti* [Some issues of reliability]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1979. 126 p.

4. Gnedenko D.B., Solov'ev A.D. [Asymptotic estimation of reliability of complex systems with fast recovery]. *Trudy III Vsesoyuznoi shkoly-soveshchaniya po teorii massovogo obsluzhivaniya* [Proceedings of the III All-Union School-Meeting on Queuing Theory]. Moscow, MSU Publ., 1975, pp. 185–197. (In Russian).

5. Solov'ev A.D. [Asymptotic behavior of the moment of the first occurrence of a rare event in the regenerating process]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1971, no. 6, pp. 79–90. (In Russian).

6. Shilov G.E. *Matematicheskii analiz. Spetsial'nyi kurs* [Mathematical analysis. Special course]. Moscow, GIFML Publ., 1961. 436 p.

7. Popov G.A. Asymptotic behavior of the moment of the first occurrence of a rare event in an inhomogeneous regenerating process. Moscow, 2000. 46 p. Available from VINITI, no. 2193-V00.

8. Shevchenko E.N. Matematicheskoe modelirovanie raspredeleniya riska pri nezavisimykh sluchainykh velichinakh veroyatnostei iskhodnykh sobytii i ushcherba [Mathematical modeling of risk distribution with independent random values of the probabilities of initial events and damage]. *Fundamental'nye issledovaniya – Fundamental research*, 2011, no. 12-3, pp. 604–608.

9. Rogatin A.D. Otsenka veroyatnosti redkikh sobytii v povedenii tolpy [Estimation of the probability of rare events in crowd behavior]. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-scale Systems Control*, 2016, no. 63, pp. 106–128.

10. Tashevskii A.G. Modelirovanie redkikh sobytii pri prognozirovanii ekspluatatsionnykh protsessov v slozhnykh sistemakh mashinostroeniya [Modeling of rare events in forecasting operational processes in complex engineering systems]. *Instrument i tekhnologii*, 2011, no. 32, pp. 22–33. (In Russian).

11. Granichin O.N., Sysoev S.S., Chuiko D.S. Problemy testirovaniya servera kak zadachi o modelirovanii redkikh sobytii [Problems of testing the server as problems on the modeling of rare

events]. *Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike – Stochastic Optimization in Informatics*, 2005, vol. 1, no. 1-1, pp. 48–72.

12. Agalakov Yu.G. Otsenivanie veroyatnostei redkikh sobytii v vychislitel'nykh eksperimentakh s imitatsionnymi modelyami [Estimation of probabilities of rare events in computational experiments with simulation models]. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-scale Systems Control*, 2012, no. 40, pp. 83–95.

13. Rusinov M.A. Ob osnovnykh printsipakh metodiki analiza redkikh sobytii v diskretnykh slozhnykh sistemakh [On the basic principles of the method of analysis of rare events in discrete complex systems]. *Vestnik MGTU Stankin – Vestnik MSTU "Stankin"*, 2015, no. 3 (34), pp. 139–144.

14. King G., Zeng L. Logistic regression in rare events data. *Political Analysis*, 2001, vol. 9, pp. 137–163.

15. *Data Mining: Klassifikatsiya redkikh sobytii* [Data Mining: Classification of rare events]. Available at: http://docplayer.ru/45110849-Data-mining-klassifikaciya-redkih-sobytiy.html (accessed 16.06.2019).

16. Ukolov A.I., Gupalova T.N. *Upravlenie korporativnymi riskami: instrumenty khedzhirovaniya* [Corporate risk management: hedging tools]. Moscow, Direkt-Media Publ., 2014. 273 p.

17. Trapeznikov M.A., Chechina A.A., Churbanova N.G., Poljakov D.B. *Matematicheskoe modelirovanie potokov avtotransporta na osnove makro- i mikro-skopicheskikh podkhodov* [Mathematical modeling of traffic flows on the basis of macro- and microscopic approaches]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*, 2014, no. 1, pp. 130–139.

Для цитирования:

*Попов Г.А., Попова Е.А., Васильева О.В.* Анализ входных условий в модели информационной безопасности, построенной на основе аппарата редких событий // Научный вестник НГТУ. – 2019. – № 2 (75). – С. 69–88. – DOI: 10.17212/1814-1196-2019-2-69-88.

For citation:

Popov G.A., Popova E.A., Vasilieva O.V. Analiz vkhodnykh uslovii v modeli informatsi-onnoi bezopasnosti, postroennoi na osnove apparata redkikh sobytii [Analysis of the input conditions in the information security model built on the basis of the apparatus of rare events]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Science bulletin of the Novosibirsk state technical university*, 2019, no. 2 (75), pp. 69–88. DOI: 10.17212/1814-1196-2019-2-69-88.