Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 3(52)

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 681.513

К разделению движений в системах с большими коэффициентами*

А.С. ВОСТРИКОВ

Обсуждается техника разделения движений для особого класса систем, одновременно использующих и большие коэффициенты, и обратную связь по старшей производной выходной величины. Предлагается преобразование, позволяющее формально разделить движения в системах с производными выхода в законе управления и проводить расчет регулятора отдельно для быстрых движений.

Ключевые слова: метод разделения движений, большие коэффициенты, старшая производная, обратная связь, регулятор.

ВВЕДЕНИЕ

Давно инженерно-технический мир эксплуатирует идею пренебрежения малыми величинами. При этом нужно быть уверенными, что качественные свойства конкретной системы сохраняются, а количественные изменятся пренебрежимо мало. Методы малого параметра математически оформляют это соображение. Применительно к динамическим системам нужные утверждения формулируются на языке дифференциальных уравнений.

Метод разделения движений [1] также выражает идею малого параметра, но только по отношению к параметрам, определяющим инерционность отдельных элементов системы. В реальных системах полное движение можно представить композицией подпроцессов, происходящих с различными скоростями. При этом инженеры пренебрегают быстрыми составляющими (малыми инерционностями), что не всегда возможно. Пренебрежение быстрыми процессами может привести к ошибочным выводам относительно качественных свойств системы, в частности, устойчивости. Метод разделения движений отвечает на вопрос: «При каких условиях можно пренебречь малыми инерционностями?»

В данной работе мы обсудим технику разделения движений для систем особого класса, в которых одновременно используются и большие коэффициенты и обратная связь по старшей производной выходной величины. Для синтеза таких систем в свое время был разработан метод локализации [2, 3, 4].

1. МЕТОД БОЛЬШИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Технический прием, который получил название «метод больших коэффициентов», издавна используется при создании систем автоматического регулирования для придания им дополнительных технических свойств. Он позволяет улучшить статические свойства систем и форсировать (ускорять) процессы в системе.

Независимо от причины использования больших коэффициентов в системе всегда могут появиться быстрые подпроцессы. Их можно выделить и рассчитывать отдельно, используя методологию разделения движений. Такой прием использовался и в работах Е.П. Геращенко [1], и в работах В.И. Уткина [5]. Напомним здесь эту технику разделения движений в следующей постановке задачи.

* *Статья получена 6 февраля 2013 г.*

Обсуждаем системы, уравнения которых имеют вид

$$\dot{x} = f(t.x) + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad m < n, \quad y = g(x), \quad B = B(t,x). \tag{1}$$

Обращаем внимание, что правая часть линейна по компонентам вектора u, а система в целом нелинейная. Здесь в явном виде малых постоянных времени нет. Величина y есть выход объекта управления. Предполагаем, что мы хотим форсировать процессы в этом объекте и привести изображающую точку «быстро» к заданному многообразию $y = g(x) = 0$.

Управление с большим коэффициентом сформируем в виде

$$u = \varepsilon^{-1} \cdot K \cdot g(x),$$

где K – матрица $m \times m$, параметр ε есть скалярная величина, значение которой обратно выделенному «большому» общему множителю в матрице коэффициентов усиления.

Теперь первые два уравнения можно записать как одно в виде

$$\varepsilon\dot{x} = \varepsilon f(t,x) + BKg(x). \tag{2}$$

Оказывается, в системе (2) можно выделить два участка движения с разными скоростями: первый участок – от начальной точки до заданной поверхности, второй – вдоль заданного многообразия до начала координат (если движение вдоль многообразия $g(x) = 0$ устойчиво).

Рассмотрим теперь процедуру приближенного анализа процессов в системе (2) и, прежде всего, обсудим особенности ее фазового портрета. Понятно, что в произвольной точке пространства состояний (за исключением заданной поверхности) модуль вектора скорости обратно пропорционален малому параметру ε. Следовательно, в пределе при $\varepsilon \to 0$ изображающая точка как угодно быстро «прыгнет» к поверхности $g(x) = 0$. Для переменных выхода будет справедливо соотношение

$$\dot{y} = Gf(x) + \varepsilon^{-1}GBKy.$$

Здесь G – это матрица частных производных $G = \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]$, где i и j меняются от 1 до n.

Скорость движения системы вдоль поверхности $g(x) = 0$ имеет свои свойства и для нее справедливо следующее утверждение в виде леммы.

Лемма: скорость движения изображающей точки системы вдоль поверхности $g(x) = 0$ является малой (относительно быстрых процессов) и, в пределе, не зависит от значений общего коэффициента усиления ε^{-1}.

Покажем это. Соотношение $y = g(x) = 0$ является тождеством по времени t:

$$g(x(t)) = 0, \forall t \in [0, \infty).$$

Производная по времени также равна нулю:

$$G\dot{x} = 0, G\dot{x} = Gf(x) + GBu_0 = 0,$$

откуда получим значения управляющего воздействия

$$u_0 = -(GB)^{-1} \cdot Gf, \det GB \neq 0.$$

Здесь индексом 0 мы обозначили управление вдоль поверхности $g(x) = 0$.

Очевидно, теперь вектор скорости объекта при движении вдоль поверхности определится соотношением

$$\dot{x} = f - B(GB)^{-1} \cdot Gf. \tag{3}$$

Как видим, движение системы определяется только свойствами объекта и поверхностью $g(x)=0$, следовательно, оно является «нормальным» и не зависит от значений большого коэффициента. Это и требовалось показать.

Для выделения участка быстрых процессов снова рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + B(t,x)u, \\ y = g(x), \end{cases}$$
$$u = -\varepsilon^{-1} K y = \varepsilon^{-1} K g(x).$$

Если теперь перейти к быстрому времени $\tau = \varepsilon^{-1} t$, то получим уравнение в новом времени, в котором мы сохранили все обозначения из действительного времени:

$$\dot{x} = \varepsilon \cdot f(\varepsilon\tau, x) - B(\varepsilon\tau, x) \cdot K \cdot g(x).$$

Устремляя теперь $\mu \to 0$ и, после этого возвращаясь к «нормальному» времени, получим приближенное уравнение для быстрого этапа движений

$$\dot{x} = -\varepsilon^{-1} \cdot B(t,x) \cdot K \cdot g(x).$$

Это уравнение позволит определить вектор движения к поверхности $g=0$ в любой точке вне поверхности, но сходимость процессов к ней нужно оценивать отдельно. С этой целью исследуем поведение переменных $y = g(x)$ вдоль траекторий движения приближенной системы

$$\dot{y} = -\varepsilon^{-1} \cdot G(x) \cdot B(t,x) \cdot K \cdot y.$$

Это соотношение можно использовать для приближенной оценки сходимости в малой окрестности поверхности $g=0$, учитывая медленность движения вдоль нее. При этом элементы матриц G и B можно принять постоянными и, следовательно, для сходимости в малом достаточно выполнить условие

$$\operatorname{Re} \Lambda(GBK) \prec 0.$$

2. ε-ЗАВИСИМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Попытаемся теперь разделить движения стандартной процедурой метода разделения движений и с этой целью введем новые дополнительные искусственные переменные для расширения системы уравнений. В качестве дополнительных переменных возьмем управление u и добавим их к координатам состояния. Понятно, если мы увидим какое-то качественное свойство в «расширенной» системе, то оно будет выполняться и в первичной базовой системе (1). Итак, мы вводим:

$$u = \varepsilon^{-1} \cdot K \cdot g(x).$$

Обращаем внимание, что начальные условия по «новым» координатам зависят от малого параметра μ,

$$u(0) = \varepsilon^{-1} \cdot K \cdot g(x(0)).$$

Напишем теперь дифференциальное уравнение для u:

$$\dot{u} = \varepsilon^{-1} \cdot K \cdot G \cdot \left(f + Bu \right).$$

Вместе с уравнением для координат x мы получили систему с малым параметром при части производных

$$\left\{ \frac{\dot{x} = f + Bu,}{\varepsilon \dot{u} = K \cdot G \cdot f + K \cdot G \cdot B \cdot u} \right\}.$$

В этой системе имеем формальные основания разделять движения на быстрые и медленные. Разделив эту систему на два уравнения и предполагая все обращаемые матрицы невырожденными, получим вначале подсистему медленных движений

$$\dot{x} = f - B(GB)^{-1}Gf .$$

Если введем масштаб времени $t = \mu\tau$, то получим подсистему быстрых движений

$$\varepsilon\dot{u} = KGf + KGBu, \quad x = \text{const}.$$

Формально мы получили прежнюю (для метода разделения движений) систему уравнений, но мы знаем, что на участке быстрых процессов координаты x изменяются в темпе быстрых процессов. В связи с этим быстрая подсистема может быть нелинейная, и это нужно учитывать при анализе быстрых процессов. Происходит это свойство вследствие зависимости начальных значений дополнительных переменных от значений малого параметра.

3. СИСТЕМЫ С «ДВУМЯ» ОСОБЕННОСТЯМИ

Рассмотрим теперь систему с управлением по вектору скорости и поставим задачу выхода системы к поверхности $g(x) = 0$ в соответствии с эталонным уравнением

$$\dot{y} = F(y).$$

Закон управления имеет вид

$$u = \varepsilon^{-1}K(F(y) - \dot{y}). \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что предельные при $\varepsilon \to 0$ уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f + B(GB)^{-1}(F(y) - Gf), \\ &\dot{y} = F(y). \end{aligned}$$

При достижении поверхности $y = 0$ эти уравнения вырождаются в соотношение (3), что и должно быть. Сам процесс перехода определяется только заданным эталонным уравнением и не зависит от свойств объекта управления. Это есть свойство систем, построенных по методу локализации. Если теперь мы построим реальную систему с управлением (4), то будем вынуждены допустить инерционность дифференцирующего фильтра для оценки величины $\dot{y}$.

Используем простейший линейный фильтр, уравнение которого может иметь вид

$$\mu\dot{y}_1 = A(y - y_1) . \tag{5}$$

Здесь малая инерционность фильтра выражается малым параметром μ, а динамические свойства матрицей A. Состояние выражается вектором y_1. С учетом (5) полная система уравнений примет вид

$$\dot{x} = f + B\varepsilon^{-1}K(F(y) - \mu^{-1}A(y - y_1)), \quad \mu\dot{y}_1 = A(y - y_1).$$

В этой системе уравнений две особенности при стремлении двух малых параметров к нулю. На первый взгляд, быстрыми переменными должны быть координаты состояния фильтра. Однако если мы введем быстрое время $\tau = \mu^{-1}t$, то получим

$$\dot{x} = \mu f + B\varepsilon^{-1}K(\mu F(y) - A(y - y_1)), \quad \dot{y}_1 = A(y - y_1).$$

Как видим, скорость изменения переменных определяется соотношением двух малых параметров и отделить быстрые переменные от медленных не удастся.

Попробуем теперь ввести μ-зависимое преобразование переменных

$$z = \mu^{-1} A(y - y_1).$$

Уравнение движения для новых переменных примет вид

$$\mu \dot{z} = A(Gf \varepsilon^{-1} K(F(y) - z) - z).$$

В итоге, система уравнений принимает стандартный вид для процедуры разделения движений

$$\dot{x} = f + B\varepsilon^{-1} K(F(y) - z), y = g(x),$$
$$\dot{y}_1 = z,$$
$$\mu \dot{z} = A(Gf + GB\varepsilon^{-1} K(F(y) - z) - z).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенное преобразование позволяет формально разделить движения в системах с производными выхода в законе управления и проводить расчет регулятора отдельно для быстрых движений. Ранее мы использовали такие приемы для анализа конкретных систем [4, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Геращенко Е.И.** Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем / Е.И. Геращенко, С.М. Геращенко. – М.: Наука, 1975.

[2] **Utkin V.I.** Control systems with Decoupling Motions. A Link between Science and Applications of Automatic Control / V.I. Utkin, A.S. Vostrikov // Preprints of the VII Triennial World IFAC Congress, Helsinki, Finland, 12-16 June 1978, Pergamon Press, 1978. – Vol. 2. – P. 967–973.

[3] **Востриков А.С.** Системы с производной вектора состояния в управлении / А.С. Востриков, В.И. Уткин, Г.А. Французова // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 3. – С. 22–25.

[4] **Востриков А.С.** Синтез систем регулирования методом локализации / А.С. Востриков. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.

[5] **Уткин В.И.** Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления / В.И. Уткин. – М.: Наука, 1981.

[6] **Востриков А.С.** Проблема синтеза регуляторов для систем автоматики; состояние и перспективы / А.С. Востриков // Автометрия. – 2010. – № 2. – С. 3–19.

Востриков Анатолий Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – управление нелинейными нестационарными объектами. Имеет более 250 публикаций, автор несколький учебных пособий и монографий. E-mail: vostrikov@nstu.ru

A.S. Vostrikov

About dividing motions for systems with high gain

Discussed the technique of motion separation for a special class of systems, at the same time using and the large coefficients, and feedback on the highest derivative of the output variable. It is proposed conversion, allowing formally divide the movements in systems with derivative output in the control law and carry out the calculation controller separately for fast movements.

Key words: method of motion separation, large coefficients, higher derivative, feedback, controller.