

УДК 519.24

Активная параметрическая идентификация стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем на основе планирования входных сигналов*. Ч. 2

В.М. ЧУБИЧ, Е.В. ФИЛИПОВА

Рассмотрены теоретические и прикладные аспекты проблемы активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний. Рассмотрен случай вхождения подлежащих оцениванию параметров в уравнения состояния и наблюдения, начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Представлены оригинальные результаты. Приведен пример оптимального оценивания параметров одной модельной структуры.

Ключевые слова: линейризация, оценивание параметров, метод максимального правдоподобия, планирование оптимальных входных сигналов, информационная матрица, критерий оптимальности.

4. ПЛАНИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Качество оценивания параметров можно повысить за счет использования непрерывного плана эксперимента ξ^* , оптимизирующего некоторый выпуклый функционал X от информационной матрицы $M(\xi)$:

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} X[M(\xi)]. \quad (7)$$

Непрерывный нормированный план ξ здесь представляет собой совокупность величин

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} U_1, U_2, \dots, U_q \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1, \quad U_i \in \Omega_U, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (8)$$

но, в отличие от дискретного плана ξ_v , веса p_i в нем могут принимать любые значения в диапазоне от 0 до 1, в том числе и иррациональные.

Для плана (8) нормированная информационная матрица $M(\xi)$ вычисляется по формуле

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i M(U_i),$$

* Статья получена 1 февраля 2013 г. Часть первая опубликована в Научном вестнике НГТУ. – 2013. – № 2(51). – С. 25–34.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта Министерства образования и науки РФ в 2013 г. (регистр. № 01201256089).

в котором информационные матрицы однократных планов (информационные матрицы Фишера) $M(U_i)$ определяются соотношением

$$M(U_i) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln L(\Theta; Y_i)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]$$

и зависят от неизвестных параметров Θ , что позволяет в дальнейшем говорить только о локально-оптимальном планировании. Выражение и алгоритм вычисления информационных матриц Фишера приведены в [11], [20].

При планировании эксперимента мы определенным образом воздействуем на нижнюю границу неравенства Рао–Крамера: например, при использовании критерия D -оптимальности ($X[M(\xi)] = -\ln \det M(\xi)$) минимизируется объем, а при использовании критерия A -оптимальности ($X[M(\xi)] = Sp[M^{-1}(\xi)]$) – сумма квадратов длин осей эллипсоида рассеяния оценок параметров.

При решении экстремальной задачи (7) возможны два подхода: прямой и двойственный. Первый из них предполагает поиск минимума функционала $X[M(\xi)]$ непосредственно с привлечением методов нелинейного программирования [21, 8], другой предполагает решение двойственной задачи и основан на теоремах эквивалентности [5, 8].

Применение градиентных алгоритмов при синтезе входных сигналов повышает скорость решения задачи и невозможно без вычисления производных от информационных матриц по

компонентам входного сигнала $\left\{ \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, \dots, r, \beta = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$. Выражения и алгоритмы

вычисления соответствующих производных для моделей, полученных в результате временной линеаризации, приведены в [22], а для моделей, полученных в результате статистической линеаризации, – в [23] и [24]. Возможные варианты прямой и двойственной градиентных процедур синтеза непрерывных оптимальных планов представлены в [8].

После построения непрерывного оптимального плана ξ^* его необходимо «округлить» до соответствующего дискретного плана ξ_v . Возможная процедура округления дана в [25].

Для завершения процедуры активной идентификации необходимо еще раз выполнить оценивание параметров, используя при этом синтезированный оптимальный план.

5. ПРИМЕР ИДЕНТИФИКАЦИИ

Выполнение процедуры активной параметрической идентификации стохастических непрерывно-дискретных систем стало возможным в результате реализации разработанных алгоритмов в программном комплексе ПК-II [26] и в соответствующей подсистеме программной системы APIS 1.0 [27]. Программное обеспечение включает в себя модули, отвечающие за вычисление информационных матрицы, их производных по компонентам входного сигнала, нахождение оценок максимального правдоподобия, синтез A - и D -оптимальных входных сигналов с использованием прямой и двойственной градиентных процедур.

В качестве примера рассмотрим непрерывно-дискретную систему, описываемую следующими уравнениями:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1} x(t) + \frac{0.1}{\theta_1} \exp\{0.25[u(t) - x(t)]\} + \frac{0.1}{\theta_1} w(t) =$$

$$= f[x(t), u(t), t] + \frac{0.1}{\theta_1} w(t), \quad t \in [t_0, t_N] = [0, 30], \quad (9)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$ – неизвестные параметры, причем $3 \leq \theta_1 \leq 10$, $0.05 \leq \theta_2 \leq 1.25$.

Будем считать, что выполнены все априорные предположения, высказанные при постановке задачи, причем

$$E[w(t)w(\tau)] = 0.6\delta(t-\tau) = Q\delta(t-\tau),$$

$$E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] = 0.5\delta_{ki} = R\delta_{ki},$$

$$E[x(t_0)] = 0 = \bar{x}_0, \quad E\left\{[x(t_0) - \bar{x}_0]^2\right\} = 0.01 = P_0.$$

Для данной модели $f[x(t), u(t), t]$ непрерывна и дифференцируема по $x(t)$ и $u(t)$, так что применима как временная, так и статистическая линеаризация.

Выполнив линеаризацию модели состояния (9) во временной области относительно номинальной траектории

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_H(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1} x_H(t) + \frac{0.1}{\theta_1} \exp\{0.25[u_H(t) - x_H(t)]\}, & t \in [t_0, t_N]; \\ x_H(t_0) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

получим линеаризованную модель вида (3), (4), в которой

$$a(t) = \frac{0.1}{\theta_1} \exp\{0.25[u_H(t) - x_H(t)]\} \{1 - 0.25[u_H(t) - x_H(t)] + 0.25u(t)\};$$

$$F(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0.025}{\theta_1} \exp\{0.25[u_H(t) - x_H(t)]\};$$

$$\Gamma(t) = \Gamma = \frac{0.1}{\theta_1}; \quad A(t_{k+1}) = 0; \quad H(t_{k+1}) = H = 1.$$

Таким образом, подлежащие оцениванию параметры входят в $a(t)$, $F(t)$ и $\Gamma(t)$.

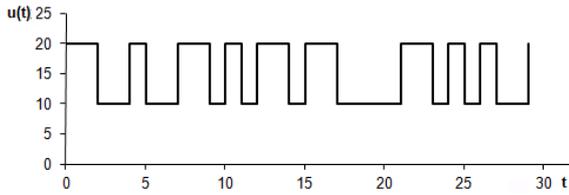
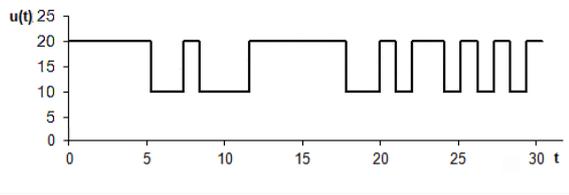
Считая, что для номинальной траектории (10) $u_H(t) = u(t)$, $t \in [t_0, t_N]$, обеспечим наилучшее приближение построенной линеаризованной модели к своему нелинейному аналогу.

Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять независимых запусков системы с выбранным пробным входным сигналом. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметров $\theta_1^* = 4$, $\theta_2^* = 0.5$, считая измерения равноотстоящими и $N = 30$. Для каждого запуска вычислим оценки максимального правдоподобия и, усреднив их, найдем $\hat{\Theta}_{\text{ср}}$.

Выберем область планирования $\Omega_U = \left\{U \in R^N \mid 10 \leq u(t_k) \leq 20, k = 0, 1, \dots, N-1\right\}$. Используя критерий D -оптимальности, синтезируем непрерывный план (в данном случае он оказался одноточечным), в соответствии с которым снова осуществим пять независимых запусков системы, смоделируем данные наблюдений, пересчитаем оценки неизвестных параметров, усредним их и получим $\hat{\Theta}_{\text{ср}}^*$. Результаты выполнения всех этапов процедуры активной параметрической идентификации представим в табл. 1.

Таблица 1

Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации в случае временной линейризации

Входной сигнал	Номер запуска системы	Значения оценки параметров	
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
<p align="center">Исходный</p> 	1	4.187	0.417
	2	5.225	0.482
	3	5.015	0.488
	4	4.395	0.521
	5	4.586	0.529
	$\hat{\Theta}_{cp}$	4.682	0.488
<p align="center">Синтезированный</p> 	1	4.266	0.513
	2	4.562	0.491
	3	4.732	0.498
	4	3.787	0.513
	5	4.580	0.478
	$\hat{\Theta}_{cp}^*$	4.386	0.499

О качестве идентификации будем судить по значениям относительных ошибок оценивания. В пространстве параметров имеем

$$\delta_{\Theta} = \frac{\|\Theta^* - \hat{\Theta}_{cp}\|}{\|\Theta^*\|} = \sqrt{\frac{(\theta_1^* - \hat{\theta}_{1cp})^2 + (\theta_2^* - \hat{\theta}_{2cp})^2}{(\theta_1^*)^2 + (\theta_2^*)^2}} = 0.169;$$

$$\delta_{\Theta}^* = \frac{\|\Theta^* - \hat{\Theta}_{cp}^*\|}{\|\Theta^*\|} = 0.096.$$

При решении реальных задач истинные значения параметров неизвестны и, таким образом, сравнение качества оценивания в пространстве параметров невозможно. В связи с этим показательным является сравнение качества идентификации в пространстве откликов:

$$\delta_Y = \frac{\|Y_{cp} - \hat{Y}_{cp}\|}{\|Y_{cp}\|} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_{cp}(t_{k+1}) - \hat{y}_{cp}(t_{k+1} | t_{k+1}))^2}{\sum_{k=0}^{N-1} (y_{cp}(t_{k+1}))^2}} = 0.084;$$

$$\delta_Y^* = \frac{\|Y_{cp} - \hat{Y}_{cp}^*\|}{\|Y_{cp}\|} = 0.066,$$

где $Y_{cp} = \{y_{cp}(t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$, $\hat{Y}_{cp} = \{\hat{y}_{cp}(t_{k+1} | t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$, $\hat{Y}_{cp}^* = \{\hat{y}_{cp}^*(t_{k+1} | t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ – усредненные по всем запускам последовательности из-

мерений для вектора θ , равного Θ^* , $\hat{\Theta}_{\text{ср}}$, $\hat{\Theta}_{\text{ср}}^*$ соответственно, при некотором тестирующем входном сигнале $u(t)$ (в нашем случае использовался входной сигнал, представленный на рис. 1)

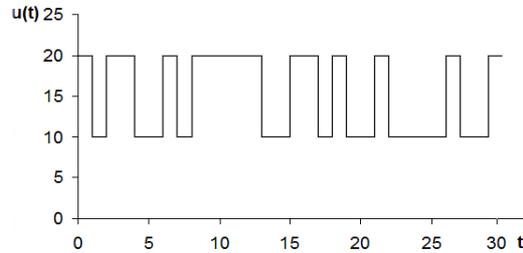


Рис. 1. Входной сигнал для оценки качества идентификации в пространстве откликов

Значения $\{\hat{y}_{\text{ср}}(t_{k+1} | t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ находятся при помощи равенства

$$\hat{y}(t_{k+1} | t_{k+1}) = A(t_{k+1}) + H(t_{k+1})\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}),$$

в котором $\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1})$ вычисляются по уравнениям непрерывно-дискретного фильтра Калмана.

Последовательности $Y_{\text{ср}}$, $\hat{Y}_{\text{ср}}$, $\hat{Y}_{\text{ср}}^*$ изображены на рис. 2 и 3.

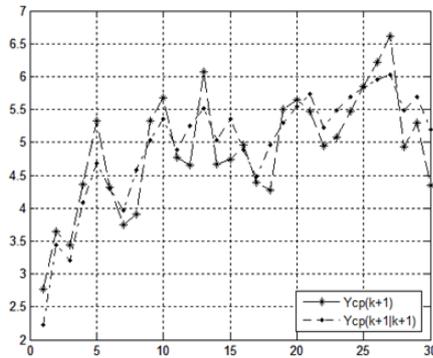


Рис. 2. Графическое представление $Y_{\text{ср}}$, $\hat{Y}_{\text{ср}}$ в случае временной линеаризации

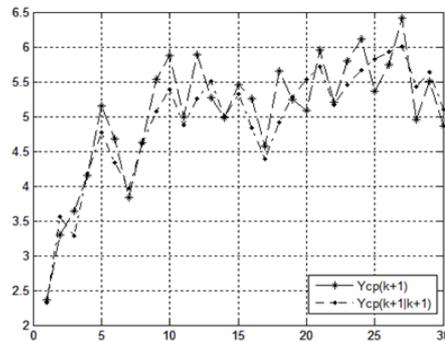


Рис. 3. Графическое представление $Y_{\text{ср}}$, $\hat{Y}_{\text{ср}}^*$ в случае временной линеаризации

Таким образом, в результате выполнения процедуры активной идентификации с применением временной линеаризации удалось уменьшить относительную ошибку оценивания с 16.9 % до 9.6 % в пространстве параметров и с 8.4 % до 6.6 % в пространстве откликов.

Статистическая линеаризация модели состояния (9) приводит к линеаризованной модели (3), в которой

$$a(t) = \left(\frac{0.1}{\theta_1} + \frac{0.025\bar{x}(t)}{\theta_1} \right) \exp \{ 0.25 [u(t) - \bar{x}(t)] + 0.03125P(t) \};$$

$$F(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0.025}{\theta_1} \exp \{ 0.25 [u(t) - \bar{x}(t)] + 0.03125P(t) \};$$

$$\Gamma(t) = \Gamma = \frac{0.1}{\theta_1}.$$

Здесь $\bar{x}(t)$ и $P(t)$ определяются по следующим ДУ:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1} \bar{x}(t) + \frac{0.1}{\theta_1} \exp\{0.25[u(t) - \bar{x}(t)] + 0.03125P(t)\}, & t \in [t_0, t_N]; \\ \bar{x}(t_0) = 0, \end{cases}$$

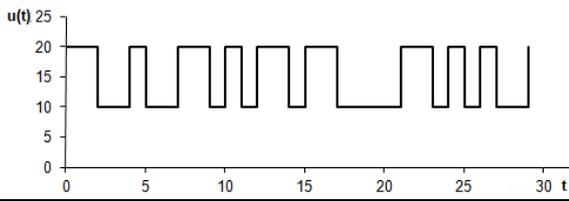
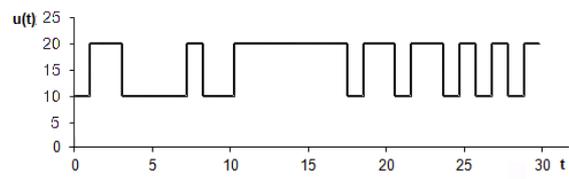
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P(t) = 2 \left(-\frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0.1}{\theta_1} \exp\{0.25[u(t) - \bar{x}(t)] + 0.03125P(t)\} \right) P(t), & t \in [t_0, t_N]; \\ P(t_0) = 0.01. \end{cases}$$

Таким образом, подлежащие оцениванию параметры входят в $a(t)$, $F(t)$ и $\Gamma(t)$.

Так же, как и при временной линеаризации, произведем пять независимых запусков системы с пробным входным сигналом из табл. 1, при этом реализации выходных сигналов берем те же, что и раньше. Выполним все этапы процедуры активной параметрической идентификации аналогично изложенному выше. Результаты всех этапов идентификации параметров представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации в случае статистической линеаризации

Входной сигнал	Номер запуска системы	Значения оценки параметров	
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
<p>Исходный</p> 	1	3.311	0.414
	2	4.431	0.485
	3	3.031	0.482
	4	3.501	0.513
	5	3.554	0.519
	$\hat{\Theta}_{\text{ср}}$	3.566	0.489
<p>Синтезированный</p> 	1	4.524	0.490
	2	4.642	0.406
	3	4.230	0.504
	4	4.073	0.538
	5	4.001	0.565
	$\hat{\Theta}_{\text{ср}}^*$	4.294	0.501

Относительные ошибки оценивания в пространстве параметров равны

$$\delta_{\Theta} = 0.108; \quad \delta_{\Theta}^* = 0.073.$$

Для вычисления относительных ошибок оценивания в пространстве откликов воспользуемся входным сигналом, представленным на рис. 1. Получаем

$$\delta_Y = 0.086; \quad \delta_Y^* = 0.086.$$

Последовательности $Y_{\text{ср}}$, $\widehat{Y}_{\text{ср}}$, $\widehat{Y}_{\text{ср}}^*$ изображены на рис. 4 и 5.

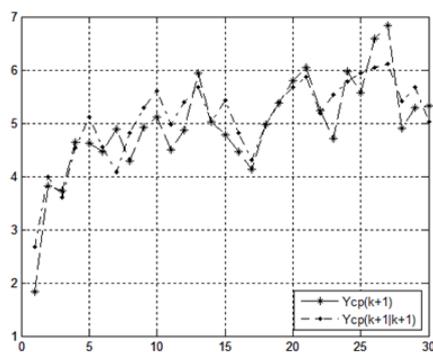


Рис. 4. Графическое представление $Y_{\text{ср}}$, $\widehat{Y}_{\text{ср}}$ в случае статистической линеаризации

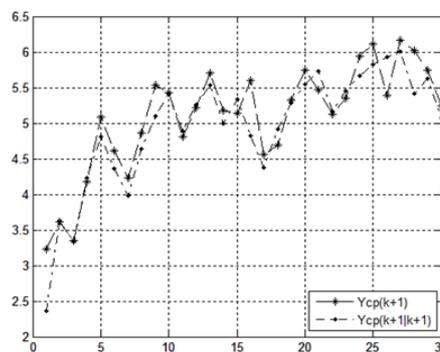


Рис. 5. Графическое представление $Y_{\text{ср}}$, $\widehat{Y}_{\text{ср}}^*$ в случае статистической линеаризации

Таким образом, в результате выполнения процедуры активной идентификации с применением статистической линеаризации удалось уменьшить относительную ошибку оценивания с 10.8 % до 7.3 % в пространстве параметров и с 8.6 % до 6.1 % в пространстве откликов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано систематическое изложение наиболее существенных для практики вопросов теории и техники активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем на основе планирования входных сигналов. Рассмотрен случай вхождения неизвестных параметров в уравнения состояния и наблюдения, начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. На примере одной модельной структуры продемонстрирована эффективность и целесообразность применения концепции активной параметрической идентификации при построении моделей стохастических динамических систем в случае применения как временной, так и статистической линеаризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Hjalmarsson H.** From experiment design to closed-loop control / H. Hjalmarsson // *Automatica*. – 2005. – Vol. 41. – P. 393–438.
- [2] **Gevers M.** Identification of multi-input systems: variance analysis and input design issues / M. Gevers, L. Miskovic, D. Bonvin, A. Karimi // *Automatica*. – 2006. – Vol. 42. – P. 559–572.
- [3] **Овчаренко В.Н.** Планирование идентифицирующих входных сигналов в линейных динамических системах / В.Н. Овчаренко // *АиТ*. – 2001. – № 2. – С. 75–87.
- [4] **Jaubertie C.** An optimal input design procedure / C. Jaubertie, L. Denis-Vidal, P. Coton, G. Joly-Blanchard // *Automatica*. – 2006. – Vol. 42. – P. 881–884.
- [5] **Mehra R.K.** Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems – survey and new results / R.K. Mehra // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 1974. – Vol. 19. – № 6. – P. 753–768.
- [6] **Чубич В.М.** Оптимальная идентификация дискретных систем на основе метода статистической линеаризации / В.М. Чубич // *Информационные технологии и вычислительные системы*. – 2010. – № 4. – С. 47–56.
- [7] **Чубич В.М.** Информационная технология активной параметрической идентификации стохастических квазилинейных дискретных систем / В.М. Чубич // *Информатика и ее применения*. – 2011. – Т. 5. – Вып. 1. – С. 46–57.
- [8] **Денисов В.И.** Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова, Д.И. Бобылева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – 192 с.
- [9] **Чубич В.М.** Активная параметрическая идентификация нелинейных дискретных систем на основе линеаризации во временной области и оптимального управления / В.М. Чубич, О.С. Черникова // *Проблемы управления*. – 2011. – № 2. – С. 9–15.
- [10] **Чубич В.М.** Применение методов теории планирования экспериментов при параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // *АПЭП 2010*. Акту-

альные проблемы электронного приборостроения: материалы 10 Международной конф. Новосибирск. – 2010. – Т. 6. – С. 85–93.

[11] Чубич В.М. Особенности вычисления информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. – 2009. – № 1(34). – С. 41–54.

[12] Сеницын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева / И.Н. Сеницын. – М.: Логос, 2007. – 776 с.

[13] Казаков И.Е. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем / И.Е. Казаков, Б.Г. Доступов. – М.: Физматгиз, 1962. – 332 с.

[14] Пугачев В.С. Основы статистической теории автоматических систем / В.С. Пугачев, И.Е. Казаков, Л.Г. Евланов. – М.: Машиностроение, 1974. – 400 с.

[15] Gupta N.K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations / N.K. Gupta, R.K. Mehra // IEEE Trans. Automat. Control. – 1974. – Vol. 19. – № 6. – P. 774–783.

[16] Astrom K.J. Maximum likelihood and prediction errors methods / K.J. Astrom // Automatica. – 1980. – Vol. 16. – P. 551–574.

[17] Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов / М.А. Огарков. – М.: Энергоатомиздат, 1980. – 208 с.

[18] Базара М. Нелинейное программирование / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.

[19] Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, В.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

[20] Чубич В.М. Алгоритм вычисления информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – № 3(36). – С. 15–22.

[21] Денисов В.И. Математическое обеспечение системы ЭВМ – экспериментатор / В.И. Денисов. – М.: Наука, 1977. – 250 с.

[22] Чубич В.М. Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 2(39). – С. 53–63.

[23] Чубич В.М. Нахождение производных от информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для стохастических непрерывно-дискретных моделей, полученных в результате применения статистической идентификации / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // Науч. вест. НГТУ. – 2011. – № 4(45). – С. 35–48.

[24] Денисов В.И. Алгоритм вычисления производных от информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала для стохастических непрерывно-дискретных моделей, полученных в результате применения статистической идентификации / В.И. Денисов, В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1(46). – С. 29–46.

[25] Ермаков С.М. Математическая теория оптимального эксперимента / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

[26] Чубич В.М. Программный комплекс активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем (ПК-П) / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011612718. – М.: Роспатент, 2011.

[27] Чубич В.М. Интерактивная программная система активной параметрической идентификации стохастических динамических систем (APIS 1.0) / В.М. Чубич, О.С. Черникова, Е.В. Филиппова // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012617399. – М.: Роспатент, 2012.

Чубич Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – анализ и планирование экспериментов для стохастических динамических систем. Имеет более 40 публикаций, в том числе 5 учебных пособий и монографию. E-mail: chubich_62@ngs.ru.

Филиппова Елена Владимировна, магистр прикладной математики и информатики, аспирантка кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: alenafilippova@mail.ru.

V.M. Chubich, E.V. Filippova

Active parametrical identification of stochastic continuous-discrete systems on basis of design input signals

For stochastic nonlinear continuous-discrete systems are described of models in the state space the theoretical and applied aspects of the active parametrical identification are considered. The case that the parameters of mathematical models to be estimated appear in the state and control equations, as well as the initial condition and the covariance matrices of the dynamic noise and measurement errors is considered. Original results are shown. An example of optimal parameter estimation for one model structure is considered.

Key words: linearization, parameter estimation, maximum likelihood method, design of optimal input signals, information matrix, optimality criteria.