

УДК 621.317: 541.135

Анализ отклонений спектров аналитических сигналов от спектров их дискретных выборок и спектров аналоговых сигналов, сформированных на основе этих выборок¹

С.П. НОВИЦКИЙ, А.Л. ПЕЧНИКОВ

Показано, что в тех случаях, когда для получения информации о частотных свойствах исследуемого объекта сигнал воздействия на исследуемый объект и отклик сигнала представлены дискретными выборками, во многих случаях целесообразно дискретные выборки сигналов предварительно преобразовать в аналоговые сигналы с использованием полиномиальных сплайнов Лагранжа и к полученным аналоговым сигналам применить Фурье-преобразование.

Ключевые слова: спектр, быстрое преобразование Фурье и Фурье-преобразования, полиномиальный сплайн Лагранжа.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях при изучении частотных свойств электрических [1] или, например, электрохимических объектов [2–4], первичная информация, полученная в результате проведения электрических измерений, представляет собой временные последовательности (выборки) дискретных отсчетов, например отсчетов сигналов воздействия и отклика. Для анализа этой информации в частотной области необходимо получение спектральной плотности этих сигналов [5, 6] (в дальнейшем для краткости спектров). Широко распространенным методом расчета спектров дискретных сигналов является дискретное преобразование Фурье (*FFT*-преобразование). Однако этот метод чувствителен к шумовой помехе, а также не позволяет получить спектр сигнала на более мелкой сетке отсчетов с равной точностью измерений. В настоящей работе с целью устранения указанных недостатков предлагается вначале восстановить непрерывную форму сигнала с использованием полиномиальных сплайнов Лагранжа, а затем выполнить Фурье-преобразование этого сигнала. Использование предлагаемого метода, разработанного на основе [7, 8], позволяет для определенных форм воздействующего сигнала [5] повысить точность расчета спектров сигналов воздействия и отклика и производных от них величин.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для подтверждения эффективности предлагаемого способа получения спектров дискретных сигналов, преобразованных в аналоговый сигнал с использованием полиномиальных сплайнов Лагранжа выполним следующие операции:

- получим выражение для расчета спектра дискретного сигнала, непрерывная форма которого восстанавливается полиномиальным сплайном Лагранжа;
- сравним отклонения спектров некоторых аналитических сигналов от спектров дискретных сигналов, полученных с помощью *FFT*-преобразования [5, 6], и спектров аналоговых сигналов, сформированных на основе тех же дискретных выборок с использованием интерполяционных сплайнов Лагранжа.

¹Статья получена 13 февраля 2013 г.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Пусть в процессе проведения измерений получена выборка – дискретный сигнал $e[k]$, где $k \in [0, N]$, представляющий собой последовательность отсчетов непрерывного сигнала $e(t)$ с интервалом дискретизации Δt . Для восстановления непрерывной формы сигнала $e[k]$ используем уточненный интерполяционный сплайн Лагранжа степени L , полученный в работе на основе [7, 8]. В предлагаемом методе отсчеты, недостающие для интерполяции участков в конце сигнала, дополним нулями, т. е. $e[k] = 0$ при $k > N$. Затем на каждом k -м интервале интерполяции, для последовательности из $L + 1$ отсчетов $e[k]$, $e[k + 1]$, ..., $e[k + L]$ строим $L + 1$ базисных функций

$$Q_{k,i}(t) = \prod_{m=0, m \neq i}^L \frac{t - \Delta t(m+k)}{\Delta t(i-m)}, \quad i = 0, \dots, L. \quad (1)$$

Используя (1), интерполяционный полином Лагранжа L -й степени для k -го интервала дискретного сигнала определяется выражением

$$P_k(t) = \sum_{i=0}^L e(i+k) Q_{k,i}(t). \quad (2)$$

Путем объединения членов с равной степенью переменной t выражение (2) приводится к виду

$$P_k(t) = \frac{1}{L!} \sum_{i=0}^L a_{k,i} \frac{(t-k\Delta t)^i}{\Delta t^i}. \quad (3)$$

В (3) $a_{k,i}$ – весовые коэффициенты при членах t^i для k -го интервала интерполяции.

При построении сплайна на первом интервале ($0 \leq t < \Delta t$, т. е. при $k = 0$) восстанавливаемую непрерывную временную функцию представим полиномом L -й степени

$$g_0(t) = P_0(t) = \frac{1}{L!} \sum_{i=0}^L a_{0,i} \frac{t^i}{\Delta t^i} = \frac{1}{L!} \sum_{i=0}^L b_{0,i} \frac{t^i}{\Delta t^i}. \quad (4)$$

В (4) $b_{0,i} = a_{0,i}$. На всех последующих интервалах интерполяции функции $g_k(t)$ представляются разностями полиномов

$$g_k(t) = P_k(t) - P_{(k-1)}(t) = \frac{1}{L!} \sum_{i=1}^L b_{k,i} \frac{(t-k\Delta t)^i}{\Delta t^i}, \quad (5)$$

при $k = 1, \dots, N$. В выражении (5) $g_k(t) = 0$ при $t < k\Delta t$.

Уточненные по отношению к [7, 8], весовые коэффициенты $b_{k,i}$ для полиномов Лагранжа 1-4 степеней представлены в табл. 1–4.

Таблица 1

Выражения весовых коэффициентов $b_{k,i}$ для степени полинома $L = 1$

i	k	$b_{k,i}$
0	0	$e[0]$
0	1...N	0
1	0	$-e[0] + e[1]$
1	1...N	$e[k-1] - 2e[k] + e[k+1]$

Таблица 2

Выражения весовых коэффициентов $b_{k,i}$ для $L = 2$

i	k	$b_{k,i}$
0	0	$2e[0]$
0	1...N	0
1	0	$-3e[0] + 4e[1] - e[2]$
1	1...N	$e[k-1] - 3e[k] + 3e[k+1] - e[k+2]$
2	0	$e[0] - 2e[1] + e[2]$
2	1...N	$-e[k-1] + 3e[k] - 3e[k+1] + e[k+2]$

Таблица 3

Выражения весовых коэффициентов $b_{k,i}$ для $L = 3$

i	k	$b_{k,i}$
0	0	$6e[0]$
0	1...N	0
1	0	$-11e[0] + 18e[1] - 9e[2] + 2e[3]$
1	1...N	$2e[k-1] - 8e[k] + 12e[k+1] - 8e[k+2] + 2e[k+3]$
2	0	$6e[0] - 15e[1] + 12e[2] - 3e[3]$
2	1...N	$-3e[k-1] + 12e[k] - 18e[k+1] + 12e[k+2] - 3e[k+3]$
3	0	$-e[0] + 3e[1] - 3e[2] + e[3]$
3	1...N	$e[k-1] - 4e[k] + 6e[k+1] - 4e[k+2] + e[k+3]$

Таблица 4

Выражения весовых коэффициентов $b_{k,i}$ для $L = 4$

i	k	$b_{k,i}$
0	0	$24e[0]$
0	1...N	0
1	0	$-50e[0] + 96e[1] - 72e[2] + 32e[3] - 6e[4]$
1	1...N	$6e[k-1] - 30e[k] + 60e[k+1] - 60e[k+2] + 30e[k+3] - 6e[k+4]$
2	0	$35e[0] - 104e[1] + 114e[2] - 56e[3] + 11e[4]$
2	1...N	$-11e[k-1] + 55e[k] - 110e[k+1] + 110e[k+2] - 55e[k+3] + 11e[k+4]$
3	0	$-10e[0] + 36e[1] - 48e[2] + 28e[3] - 6e[4]$
3	1...N	$6e[k-1] - 30e[k] + 60e[k+1] - 60e[k+2] + 30e[k+3] - 6e[k+4]$
4	0	$e[0] - 4e[1] + 6e[2] - 4e[3] + e[4]$
4	1...N	$-e[k-1] + 5e[k] - 10e[k+1] + 10e[k+2] - 5e[k+3] + e[k+4]$

После определения интерполирующих функций на всех участках дискретного сигнала получаем выражение для полиномиального сплайна, представляющего собой оценку $\tilde{e}(t)$ сигнала $e(t)$ в диапазоне $0 \leq t \leq \Delta t \cdot N$:

$$\tilde{e}(t) = \sum_{k=0}^N g_k(t). \quad (6)$$

Преобразуя выражение (6) с учетом (5), получим

$$\tilde{e}(t) = \sum_{k=0}^N g_k(t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{L!} \sum_{i=0}^L b_{k,i} \frac{(t-k\Delta t)^i}{\Delta t^i}. \quad (7)$$

Применив к (7) преобразование Фурье, получим формулу расчета спектра интерполированного сигнала $\tilde{e}(t)$

$$S(f) = \frac{1}{L!} \sum_{i=0}^L \left[(-1)^i \frac{i!}{(-j2\pi f)^{i+1}} \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^i \sum_{k=0}^N b_{k,i} \exp(-j2\pi k \Delta t f) \right]. \quad (8)$$

Выражение (8) позволяет вычислить спектр аналогового сигнала, полученного по исходным дискретным выборкам, взятым с интервалом дискретизации Δt . При этом значения весовых коэффициентов $b_{k,i}$ в (8) непосредственно определяются по значениям отсчетов $e[k]$ согласно табл. 1–4.

Для оценки перспективности использования предложенного метода выполним расчеты спектров предложенным методом и методом *FFT* для сигналов, аналитические выражения спектров которых известны [5]. Сравним отклонения аналитического спектра [5] для каждого из выбранных сигналов от спектра его дискретной выборки и спектра этой же выборки, преобразованной в аналоговый сигнал с использованием уравнения (8). Выберем в качестве критерия перспективности оцениваемых методов (дискретное *FFT* и Фурье-преобразование сигнала, описываемого уравнением (8)) минимум отклонений рассчитанных амплитудного и фазового спектров по отношению к соответствующим теоретическим спектрам.

Пример 1. Экспоненциальный сигнал. Для расчетов здесь и далее использовалась вычислительная среда MathCAD 13.

В качестве тестового сигнала выберем экспоненциальный сигнал

$$e(t) = \exp(-\alpha t), \quad (9)$$

где $\alpha = 1000$ 1/с. Спектр сигнала (9) определяется выражением [5]

$$St(f) = \frac{1}{\alpha + j \cdot 2\pi f}. \quad (10)$$

Амплитудный и фазовый спектры сигнала (9), определяемые выражением (10), представлены на рис. 1.

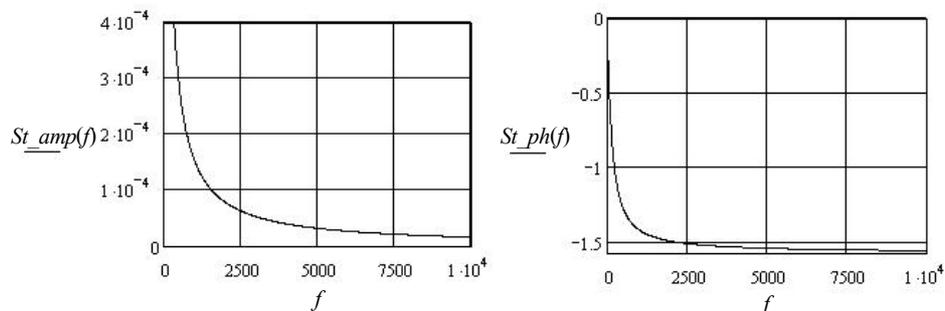


Рис. 1. Аналитические амплитудный ($St_amp(f)$) и фазовый ($St_ph(f)$) спектры экспоненциального сигнала

Для исходного экспоненциального сигнала (9) получена последовательность отсчетов сигнала с частотой дискретизации $f_d = 10^4$ Гц, т. е. $e[n] = \exp(-\alpha \cdot \Delta t \cdot n)$, где $\Delta t = 10^{-4}$ с – шаг дискретизации по времени, $n \in [0, N]$, $N = 127$. Для расчета FFT -преобразования $e[n]$ использовалась встроенная в MathCAD функция преобразования $FFT(x)$; при расчете спектра по выражению (8) использовался сплайн Лагранжа степени $L = 4$; выражения весовых коэффициентов $b_{k,i}$ для $L = 4$ определялись с использованием табл. 4. Из графиков рис. 1 видно, что амплитудный и фазовый спектры экспоненты монотонны и не содержат нулей. Поэтому для сравнения спектров двух методов с аналитическим спектром экспоненты будем использовать относительные отклонения. На рис. 2 приведены графики относительных отклонений расчетных значений амплитудного и фазового спектров от $Fd = \Delta f \cdot n$, где Fd – дискретная частота с шагом $\Delta f = 1 / (\Delta t \cdot (N + 1)) = 78.125$ Гц. Из графиков (рис. 2) видно, что за исключением первых двух частотных отсчетов метод расчета спектра по выражению (8) дает значительное преимущество в точности приближения к аналитическому спектру по сравнению FFT -преобразованием.

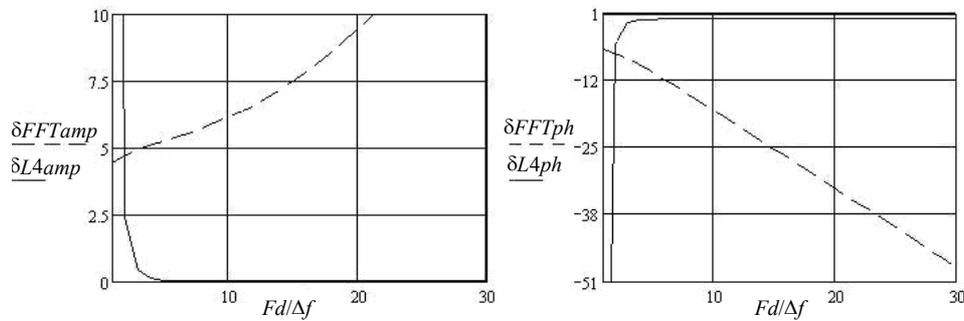


Рис. 2. Относительные отклонения амплитудных ($\delta FFTamp$ и $\delta LAamp$) и фазовых ($\delta FFTph$ и $\delta LAph$) спектров методов FFT и с использованием полиномиального сплайна Лагранжа при $L = 4$ (см. уравнение (8)) от соответствующих спектров аналитического экспоненциального сигнала; здесь $Fd = \Delta f \cdot n$, $\Delta f = 1 / (\Delta t \cdot (N + 1)) = 78.125$ Гц – шаг дискретизации по частоте

Пример 2. Прямоугольный сигнал определяется выражением

$$e(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_u, \\ 0, & \text{при } t > \tau_u. \end{cases}$$

Аналитическое выражение для спектра этого сигнала с учетом запаздывания сигнала по времени на $\tau_u / 2$ определяется выражением [5]

$$St(f) = \tau_u \frac{\sin(2\pi f \cdot \tau_u / 2)}{2\pi f \cdot \tau_u / 2} \cdot \exp(-j2\pi f \cdot \tau_u / 2).$$

Амплитудный спектр этого сигнала содержит нули, поэтому сравнение двух методов по относительным отклонениям становится затруднительным. В связи с этим на рис. 3, а проведено сопоставление отклонений ΔS амплитудного спектра, приведенных к максимальному амплитудному значению ($\varepsilon = (\Delta S \cdot 100\%) / S_{\max}$), а на рис. 3, б – абсолютных отклонений $\Delta \varphi$ фазовых спектров.

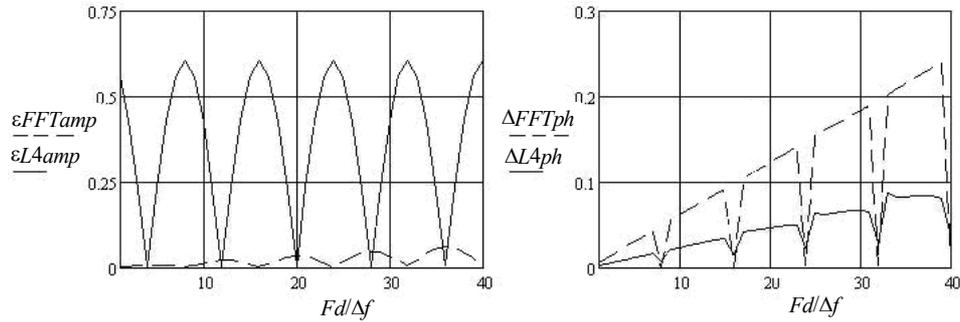


Рис. 3. Приведенные относительные отклонения амплитудных (ε_{FFTamp} и ε_{L4amp}) и абсолютные отклонения фазовых (Δ_{FFTph} и Δ_{L4ph}) спектров, полученных методом FFT и с использованием полиномиального сплайна Лагранжа при $L = 4$, от соответствующих аналитических спектров прямоугольного сигнала, $Fd = \Delta f \cdot n$, $\Delta f = 1 / (\Delta t \cdot (N + 1)) = 78.125$ Гц – шаг дискретизации по частоте

Из рис. 3, а видно, что приведенные относительные отклонения амплитудного спектра прямоугольного сигнала, полученного методом FFT -преобразования, от аналитического спектра значительно меньше, чем спектра, полученного с использованием полиномиального сплайна Лагранжа 4 степени. Однако абсолютные отклонения фазового спектра (рис. 3, б) для последнего метода меньше, чем для метода с FFT -преобразованием.

Пример 3. Треугольный сигнал определяется выражением

$$e(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2|t - \tau_u / 2|}{\tau_u}, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_u, \\ 0, & \text{при } t > \tau_u. \end{cases}$$

Теоретический спектр такого сигнала [5], относительно которого и определяются отклонения сравниваемых методов, с учетом задержки по времени $\tau_u / 2$ имеет вид

$$St(f) = \frac{\tau_u}{2} \left(\frac{\sin(2\pi f \cdot \tau_u / 4)}{2\pi f \cdot \tau_u / 4} \right)^2 \cdot \exp(-j2\pi f \cdot \tau_u / 2).$$

Отклонения амплитудных спектров и абсолютные отклонения фазовых спектров сравниваемых методов от соответствующих аналитических спектров представлены на рис. 4.

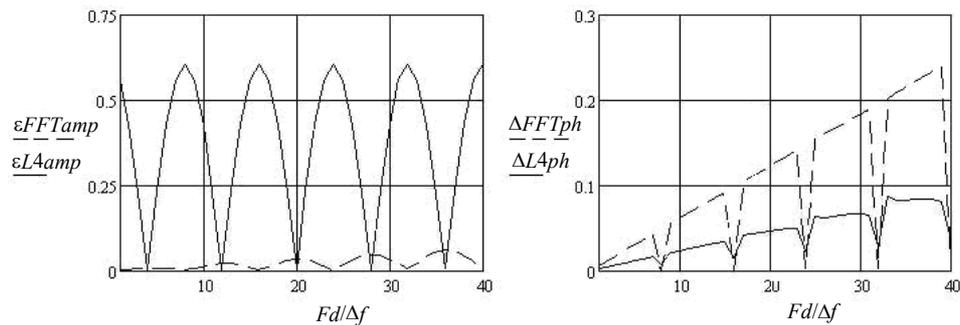


Рис. 4. Приведенные относительные отклонения амплитудных спектров (ε_{FFTamp} и ε_{L4amp}) и абсолютные отклонения фазовых спектров (Δ_{FFTph} и Δ_{L4ph}) для метода FFT и метода с использованием полиномиального сплайна Лагранжа при $L = 4$ от спектра треугольного сигнала при $\Delta f \approx 123$ Гц

При использовании треугольного испытательного сигнала приведенные относительные отклонения амплитудного спектра и абсолютные отклонения фазового спектра, полученные с использованием полиномиального сплайна Лагранжа 4 степени от аналитических спектров, существенно меньше, чем отклонения соответствующих спектров, полученных при использовании *FFT*-преобразования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены выражения для преобразования дискретных выборок сигналов, например сигналов воздействия и отклика, в аналоговые сигналы с использованием полиномиальных сплайнов Лагранжа. Показано, что применение полиномиальных сплайнов Лагранжа для представления дискретных выборок определенных сигналов (экспонента, треугольный импульс) в аналоговой форме обеспечивает меньшие отклонения рассчитанных спектров от теоретических, чем спектров, рассчитанных классическим методом *FFT*-преобразования. Однако предложенный метод расчета спектра дает выигрыш не для всех форм испытательных сигналов. Так, например, для прямоугольного сигнала выигрыш с использованием предложенного метода имеется только для фазового спектра. Поэтому целесообразно при использовании других форм воздействующих сигналов вначале провести предварительную проверку их эффективности.

Из материалов работы следует, что при проведении импедансных исследований [2–4] по дискретным выборкам сигналов воздействия и отклика в качестве воздействующих сигналов могут быть рекомендованы экспоненциальный и треугольный сигналы. В качестве метода определения их спектров – метод Фурье-преобразования с предварительным преобразованием дискретных выборок сигналов воздействия и отклика в аналоговые сигналы с использованием для этой цели полиномиальных сплайнов Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Айфичер Э. Цифровая обработка сигналов. Второе издание / Э. Айфичер. – М.: СПб.; Киев, 2004. – 989 с.
- [2] Дамаскин Б.Б. Принципы современных методов изучения электрохимических реакций / Б.Б. Дамаскин. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 104 с.
- [3] Лейкис Д.И. Об интерпретации результатов измерения импеданса в электрохимических исследованиях / Д.И. Лейкис // Электрохимия. – 1965. – Т. 1. – № 4. – С. 472–476.
- [4] Графов Б.М. Электрохимические цепи переменного тока / Б.М. Графов, Е.А. Укше. – М.: Наука, 1973. – 128 с.
- [5] Гоноровский В.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. / В.С. Гоноровский. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
- [6] Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Главн. ред. физ.-мат. литературы, 1981. – 721 с.
- [7] Патент № 2133041 RU, МКИ 6 G01 R23/16. Способ определения спектра электрических сигналов / С.П. Новицкий, А.В. Филатов // 1999. – БИ № 19.
- [8] Попантонопуло В.Н. Использование полиномиальных сплайнов Лагранжа для повышения точности измерения амплитудно- и фазочастотных характеристик электропроводных объектов по сигналам воздействия и отклика / В.Н. Попантонопуло, С.П. Новицкий, А.Л. Печников // Научный вестник НГТУ. – 2004. – № 1(16). – С. 75–82.

Новицкий Станислав Поликарпович, доктор технических наук, профессор кафедры Радиоприемных и радиопередающих устройств Новосибирского государственного технического университета. Основные направления научных исследований – изучение характеристик многоэлементных двухполюсников и определение их параметров, а также сокращение избыточности видео- и телевизионных изображений. Имеет более 250 научных работ, в том числе 1 монографию, 10 учебных пособий, 40 авторских свидетельств. E-mail: novitskiysp@mail.ru.

Печников Андрей Львович, ведущий инженер ООО «КБ Автоматика». Основное направление научных исследований – измерение параметров электрофизических и электрохимических объектов. Имеет более 30 публикаций, в том числе 1 монографию, 2 учебных пособия, 3 авторских свидетельства. E-mail: pechnikov@ngs.ru.

S.P. Novitskiy, A.L. Pechnikov

The analysis of analytic spectrums deviations from spectrums obtained by discrete samples and by signals restored preliminarily to an analog form

It is shown that to obtain frequency characteristics of researched objects and when a signal effected on the objects and a respond signal represented by discrete samples, in many cases, it is more effective to use preliminary restoring signals to an analog form by polynomial Lagrange splines and then to apply the Fourier transform.

Key words: spectrum, FFT and Fourier transform polynomial Lagrange spline.