

УДК 519.6

Исследование влияния структурных параметров периодически неоднородной среды на эффективные коэффициенты электропроводности*

В.О. КАЛЕДИН¹, Я.С. КРЮКОВА¹, С.Г. РУДАКОВ²

¹ Новокузнецк, Кемеровский государственный университет

² Новокузнецк, Сибирский государственный индустриальный университет

Численно исследовано влияние структурных параметров периодически неоднородной среды на эффективные коэффициенты электропроводности. Поле потенциалов и плотность тока в структурном звене определялись решением трехмерной задачи электропроводности. Программная реализация алгоритма численного решения задачи на микроуровне выполнена на базе пакета программ «Композит НК». Приведены результаты численного решения задачи электропроводности для случая периодически неоднородной среды при приложении распределенного или сосредоточенного тока на границе. Выявлено, что с увеличением удельного сопротивления материала включений, эффективное удельное сопротивление неоднородной среды также возрастает, что качественно согласуется с известными представлениями. Проведен анализ вклада влияния расстояний между включениями в периодически неоднородной среде на значения компонент тензора электропроводности. Приведено сравнение результатов расчета эффективного удельного сопротивления среды с натурным экспериментом, определена зависимость эффективного удельного сопротивления рассматриваемой среды от удельной проводимости материала включений. Получено, что компоненты удельного сопротивления среды в разных направлениях мало чувствительны к изменению отношения расстояний между включениями. Полученные результаты позволяют решать задачу электропроводности для случая периодически неоднородной среды на макроуровне без учета анизотропии, что упрощает ее решение.

Ключевые слова: задача электропроводности, периодически неоднородная среда, эффективное удельное сопротивление, поле электрического потенциала, распределенный ток на границе среды, метод конечных элементов, численное решение, анизотропия.

ВВЕДЕНИЕ

При применении технологии электровзрывного напыления покрытий и электровзрывного легирования (ЭВЛ) поверхности металлов и сплавов получаемая среда на макроуровне является анизотропной. Применение такого рода технологии осуществляется с целью изменения структурно-фазовых состояний и функциональных свойств металлов и сплавов [1] и используются, например, в электротехнике для формирования покрытий на контактных поверхностях с высокой электроэрозионной стойкостью.

Для оценки всех компонент тензора электропроводности полученной среды невозможно непосредственно использовать правило смесей [4]. В данной работе рассматривается задача на микроуровне: исследуется влияние расстояний между включениями в периодически неоднородной среде на эффективные коэффициенты удельного сопротивления среды, что позволяет оценить степень анизотропии для дальнейшего моделирования на макроуровне.

ПРОТЕКАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В МИКРОНЕОДНОРОДНОМ МАТЕРИАЛЕ С РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРОЙ ВКЛЮЧЕНИЙ

Рассмотрим среду, состоящую из меди, содержащую периодически систему молибденовых включений с объемной долей 22,2 %. Схема размещения включений показана на рис. 1. Удельная проводимость меди и молибдена принимались равным $5,81 \cdot 10^7$ и $1,82 \cdot 10^7$ Ом⁻¹·м⁻¹

* Статья получена 15 октября 2013 г.

соответственно. Поле потенциалов и плотность тока в структурном звене определялись решением трехмерной задачи электропроводности по методике [3].

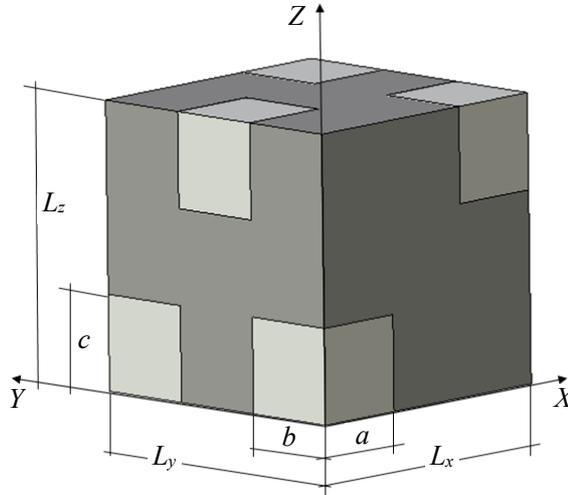


Рис. 1. Схема одного структурного звена среды

Установившийся ток в сплошной проводящей среде описывается дифференциальным уравнением (закон Кирхгофа)

$$\operatorname{div} \vec{j} - q = 0, \tag{1}$$

где \vec{j} – вектор плотности тока, q – плотность источника тока. Разобьем границу Γ рассматриваемой среды на три части Γ_1, Γ_2 и Γ_3 , на которых поставим граничные условия

$$U|_{\Gamma_1} = 0, U|_{\Gamma_2} = U_\Gamma, j_n|_{\Gamma_3} = 0, \tag{2}$$

где U – потенциал, j_n – нормальная составляющая вектора плотности тока, Γ_1 – левая часть границы звена в направлении оси OY , на которой задан постоянный потенциал, равный нулю; Γ_2 – правая часть границы звена в направлении оси OY , на которой задан постоянный потенциал U_Γ , Γ_3 – часть границы, на которой задана постоянная плотность тока по направлению нормали, равная нулю.

Связь между плотностью тока и градиентом потенциала (закон Ома в дифференциальной форме) в каждой точке периодически неоднородной среды имеет вид

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}^T. \tag{3}$$

Здесь j_x, j_y, j_z – координаты вектора плотности тока j ; γ – коэффициент проводимости среды в данной точке.

Однозначная разрешимость краевой задачи (1–3) в слабой постановке и оценка погрешности ее решения методом конечных элементов для распределенного и сосредоточенного тока на границе показана, например, в [5].

Введем в рассмотрение некоторое разбиение области V на n малых элементов. Решение поставленной задачи сводится к решению системе уравнений с неизменной матрицей коэффициентов:

$$[H]\{U\} = \{Q\}, \quad (4)$$

где $\{U\}$ – вектор-столбец узловых неизвестных потенциалов, $\{Q\}$ – вектор-столбец узловых токов возбуждающего поля, $[H]$ – матрица электропроводности.

Численная реализация выполнена на базе пакета прикладных программ «Композит НК» [2, 3].

Для оценки степени анизотропии исследовалось влияние расстояний между включениями на изменение эффективного удельного сопротивления среды (ЭУСС) в разных направлениях при неизменном объемном содержании, равном 22,2 %. На рис. 2 изображены графики зависимости ЭУСС от отношения L_y/L_x при фиксированном L_z/L_x , равном 0,5, 2 и 10. Результаты численного расчета находятся между верхней и нижней оценками ЭУСС по правилу смесей [4]. Значение ЭУСС при увеличении ширины и высоты структурного звена в 10 раз незначительно отличается от значения ЭУСС при уменьшении высоты и ширины звена в два раза. Разница значений составляет $2,367 \cdot 10^{-9}$ Ом·м (11,34 %).

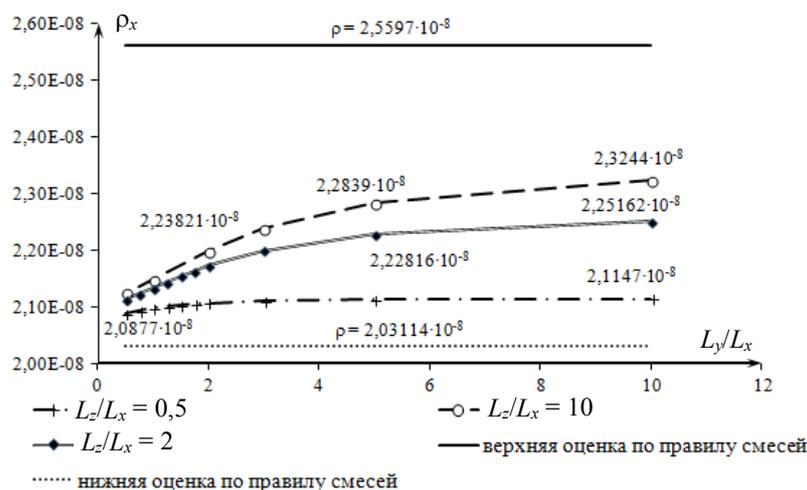


Рис. 2. Графики зависимости эффективного удельного сопротивления периодически неоднородной среды от отношения L_y/L_x

Приведем сопоставление результатов расчета с данными, полученными прямым экспериментальным измерением. Эксперимент проводился на образце, полученном напылением диборида титана на медную пластину и состоящем из трех слоев – меди, переходной зоны со включениями диборида титана и слоя диборида титана, не содержащего меди. Длина и площадь поперечного сечения пластины равны соответственно 1 мм и $0,7 \text{ мм}^2$.

Измерения проводились на установке, состоящей из электродного узла машины точечной контактной сварки с регулируемыми параметрами по усилию сжатия и силе тока, и измерительного прибора – милливольтметра (класс точности 1.0). Пневматическая схема машины включает компрессор для сжатия воздуха, пневмоцилиндр, электромагнитный пневмоклапан, дроссельные клапаны для смягчения ударных процессов и манометр.

Получено, что значение ЭУСС образца равно $7,35 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. При численном расчете процентное содержание материала включений принималось равным 50 %, а полученное значение ЭУСС составляет $5,6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Различие результатов расчета и эксперимента составляет 31,25 %. Это различие может быть вызвано недостаточно стабильной проводимостью диборида титана, которая отдельно не измерялась; отличием структуры армированного материала

от идеализированного представления, принятого при расчете; неидеальностью электрического контакта образца с электродами. Отметим, что в пользу последнего предположения говорит то, что измеренное сопротивление оказалось больше рассчитанного.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе численного решения задачи электропроводности для периодически неоднородной среды определена зависимость ЭУСС от параметров включений. Полученные значения ЭУСС попадают в «вилку» между верхней и нижней оценками по правилу смесей. Проведено исследование изменения ЭУСС при варьировании структурных параметров среды. Вычисленные компоненты удельного сопротивления в разных направлениях мало чувствительны к изменению отношения расстояний между включениями. Полученные результаты позволяют решать задачу электропроводности для случая периодически неоднородной среды на макроуровне без учета анизотропии, что упрощает ее решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Будовских Е.А. Формирование поверхностных слоев металлов и сплавов при электровзрывном легировании / Е.А. Будовских, С.В. Карпин, В.Е. Громов // Изв. РАН. Сер. Физ. – 2009. – Т. 73. – № 9. – С. 1324–1327.
- [2] Бурнышева Т.В. Развитие пакета программ математического моделирования сопряженных задач механики неоднородных конструкций / Т.В. Бурнышева, В.О. Каледин, И.В. Равковская, С.В. Эптешева // Вестник КемГУ. – 2010. – № 1. – С. 3–8.
- [3] Бурнышева Т.В. Эффективные коэффициенты электропроводности кусочно-однородной среды / Т.В. Бурнышева, В.О. Каледин, Я.С. Крюкова // Научно-технический вестник Поволжья. – 2013. – № 2. – С. 146–149.
- [4] Сендецки Дж. Композиционные материалы / Дж. Сендецки // Механика композиционных материалов: в 8 т. – М.: Мир. – Т. 2. – 569 с.
- [5] Шеметов В.А. Моделирование кусочно-неоднородного массива горных пород применительно к задачам электроразведки при помощи метода конечных элементов / В.А. Шеметов // Издательство СО РАН НИЦ ОИГТМ СО РАН. Новосибирск, 1998. – Т. 39. – Геология и геофизика. – № 2. – С. 250–259.

REFERENCES

- [1] Budovskikh E.A., Karpin S.V., Gromov V.E. Formirovanie poverkhnostnykh sloev metallov i splavov pri elektrovzryvnom legirovanii [Formation of surface layers of metals and alloys at electroexplosive alloying]. Izvestiya RAN. Seriya fizicheskaya [Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics], 2009, vol. 73, no. 9, pp. 1324–1327.
- [2] Burnysheva T.V. i dr. Razvitie paketa programm matematicheskogo modelirovaniia sopriazhennykh zadach mekhaniki neodnorodnykh konstruktсии [Development of mathematical modeling software package coupled problems in mechanics of inhomogeneous structures]. Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta [Vestnik of Kemerovo State University], 2010, no. 1, pp. 3–8.
- [3] Burnysheva T.V., Kaledin V.O., Kryukova Ya.S. Effektivnye koeffitsienty elektroprovodnosti kusochno-odnorodnoi sredy [Efficient factors of electric conductivity of piecewise homogeneous medium]. Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzhya [Scientific and technical vestnik Povolzhya], 2013, no. 2, pp. 146–149.
- [4] Sendeckij G.P. Mechanics of composite materials. Academic press, London, 1974, vol. 2, 525 p. (Russ. ed.: Il'iushina A.A., Pobedri B.E. Kompozitsionnye materialy. Moscow, Mir Publ., 1978, vol. 2, 569 p.).
- [5] Shemetov V.A. Modelirovanie kusochno-odnorodnogo massiva gornykh porod primenitel'no k zadacham elektro-razvedki pri pomoshchi metoda konechnykh elementov [Modeling of inhomogeneous rock media by finite-element method in application to electrical prospecting problems]. Izdatel'stvo SO RAN NITs OIGGM SO RAN, Novosibirsk [Scientific Publishing Center of the Joint Institute of Geology, Geophysics and Mineralogy of the Siberian Branch of the RAS], 1998, vol. 39, no. 2, pp. 250–259.

Каледин Валерий Олегович, доктор технических наук, профессор, действительным член МАН высшей школы, декан факультета информационных технологий ФГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет». Основное направление научных исследований – вычислительная механика сплошной среды, механика композиционных конструкций. Имеет более 200 публикаций, в том числе 3 монографии и 5 учебных пособий. E-mail: krjanik@rambler.ru

Крюкова Яна Сергеевна, аспирант кафедры информационных систем и управления ФГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет». Основное направление научных исследований – математическое моделирование и численные методы вычислительной механики. Имеет более 15 публикаций. E-mail: krjanik@rambler.ru

Рудаков Сергей Григорьевич, кандидат технических наук, профессор кафедры металлургии и технологии сварочного производства ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный индустриальный университет», действительный член международной академии энергоинформационных наук и Российской академии медико-технических наук, член-корр. Российской академии проблем качества. Основное направление научных исследований – применение сплавов с термомеханической памятью и низкочастотного ультразвука в медицине. Имеет более 200 публикаций, в том числе 4 учебных пособия. E-mail: krjanik@rambler.ru

V.O. Kaledin, Y.S. Kryukova, S.G. Rudakov

Investigation of the influence of structural parameters of a periodically inhomogeneous medium on the effective coefficients of conductivity

We study numerically the influence of structural parameters periodically inhomogeneous medium to effective conductivity coefficients. Field potentials and current density in the structural units determined the three-dimensional solution of the problem of electrical conductivity. The results of numerical solution of the conductivity in the case of periodically inhomogeneous medium by applying distributed or concentrated at the boundary current. Revealed that an increase in the resistivity of the material inclusions effective resistivity inhomogeneous medium also increases, which is qualitatively consistent with the known views. The analysis of the impact of the contribution of distances between inclusions in a periodically inhomogeneous medium on the values of the components of the conductivity tensor. The comparison of the results of calculating the effective resistivity of the medium with field experiments, the dependence of the effective resistivity of the medium on the specific conductivity of the material inclusions. It was found that the components of the resistivity of the medium in different directions are not very sensitive to changes in the ratios of distances between inclusions. The results obtained allow us to solve the problem of electrical conductivity in the case of periodically inhomogeneous medium at the macro level without anisotropy.

Key words: conductivity problem, periodically inhomogeneous medium, the effective resistivity of the electric potential field, current distributed at the boundary, the finite element method, numerical solution, the anisotropy.