Научный вестник НГТУ. – 2013. – № 2(51)

СООБЩЕНИЯ

УДК 681.513

Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов заданной структуры*

А.А. ВОЕВОДА, В.В. ВОРОНОЙ

Предлагается полиномиальная методика синтеза многоканальных регуляторов, составленная путем объединения модальных методик [1–6] и использования принципа «обратного» дифференцирования для вычисления неизвестных параметров регулятора. В основу методики заложено решение так называемого диофантова уравнения. По сравнению с [1, 2] предлагается использовать другую структуру матрицы Сильвестра, более удобную для поиска и оценки линейно-зависимых строк. Для поиска параметров регулятора используется оптимизационная процедура сдвига полюсов замкнутой системы в заданную область устойчивости, для чего предлагается рассматривать движение корней на каждом шаге оптимизационной процедуры на корневом портрете системы.

Ключевые слова: модальный метод синтеза, полиномиальное разложение, многоканальная система, диофантово уравнение, регулятор заданного порядка, «обратное» дифференцирование, матрица Сильвестра.

ВВЕДЕНИЕ

В литературе представлено множество различных работ, посвященных синтезу многоканальных регуляторов модальным методом с использованием полиномиального разложения. Так, например, в [1, 2] можно проследить методику синтеза многоканальных систем, учитывающую различные возмущения (доступных и не доступных измерению), измеренное значение управляемой величины и др.

В [3, 4] также можно проследить методику, которая при определенных допущениях в постановке задачи синтеза, описании объекта управления и системы в целом представляет собой частный случай [1], положительной чертой которой является возможность оценки нижней границы порядка регулятора и соответствующей желаемой характеристической матрицы замкнутой системы. К сожалению, методику [3, 4] не совсем удобно применять для синтеза систем, когда регулятор имеет определенную *заданную структуру*[1]. В связи с чем, при синтезе возникают определенные проблемы, связанные, например, с невозможностью задания точного желаемого распределения полюсов характеристической матрицы системы. Для решения этой проблемы в [5, с. 73–75] предлагается достаточно формализованная методика, представляющая собой набор пошаговых действий, при помощи которых можно достаточно легко синтезировать регулятор заданной структуры при определенных начальных условиях. К сожалению, в самой методике не отображены способы расчета порядка необходимого регулятора, а также выбор порядка полиномов желаемой характеристической матрицы. Однако в самой работе рассматривается выбор степени регулятора путем простого перебора различных вариантов, и далее рассматриваются различные варианты заданных элементов регулятора. В работах [5–9] для синтеза регуляторов пониженного порядка предлагается использовать метод «*обратного*» *дифференцирования*, суть которого заключается в применении дифференцирования «справа», т. е. дифференцирование полинома $\tilde{P}(s)=s^{n}P(1/s)$ [10, с. 113–114], но с возвратом к старой переменной s после дифференцирования $\overline{P}(s)=s^{n-1}\tilde{P}'(1/s)$. Обозначим данную операцию как $\overline{P}(s):=dP(s)\setminus ds$.

---

* *Статья получена 14 января 2013 г. Повторно после исправлений 28 марта 2013 г.*

Работа выполнена по заданию Министерства образования и науки по проекту «Исследование предельных точностей оптических методов измерения параметров движения и мехатронных методов управления движением и разработка новых робототехнических и электромеханических систем», Темплан, проект № 7.559.2011, гос. рег. номер НИР №01201255056

[1] Встречаются также понятия: заданный порядок, пониженный порядок, низкий порядок, фиксированная структура, означающих практически одно и то же.

Далее предлагается модальная методика синтеза многоканальных регуляторов заданной структуры с использованием полиномиального разложения, составленная путем объединения всех представленных выше методик, со значительными доработками использования «обратного» дифференцирования, предложенного в [5–9].

МЕТОДИКА СИНТЕЗА

– Исходя из требований к показателям качества поведения системы, задается желаемая область расположения полюсов системы Ω_D, или иначе Ω_D – это область D-устойчивости.

– Из описания системы в пространстве состояний осуществляется переход к полиномиальному матричному описанию в виде левого взаимно-простого полиномиального разложения.

– Переход к правому взаимно-простому полиномиальному разложению.

– Определяются столбцовые степени матрицы $D(s)$: $\mu_i := \partial D_{ci}$, $i = \overline{1, p}$.

– Выбирается максимальное значение $\mu := \max(\mu_1,\ \mu_2,\ \dots\ \mu_p)$

– Формируются матричные полиномы $D(s)$ и $N(s)$ в виде:

$$D(s) = D_\mu s^\mu + D_{\mu-1}s^{\mu-1} + \dots D_0,\ N(s) = N_\mu s^\mu + N_{\mu-1}s^{\mu-1} + \dots + N_0.$$

– Выполняется первый шаг формирования матрицы Сильвестра[2]:

$$S = \begin{bmatrix} D_\mu & D_{\mu-1} & \dots & D_0 \\ N_\mu & N_{\mu-1} & \dots & N_0 \end{bmatrix}.$$

– Вычисляется v_i – количество линейно-независимых Ni-строк в матрице Сильвестра от всех предыдущих.

– Вычисляется сумма $\sum_{i=1}^{p} v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_p$.

– Если сумма линейно-независимых Ni-строк меньше порядка объекта n, тогда формируется следующая матрица:

$$S = \begin{bmatrix} D_\mu & D_{\mu-1} & \dots & D_0 & O \\ 0 & D_\mu & D_{\mu-1} & \dots & D_0 \\ N_\mu & N_{\mu-1} & \dots & N_0 & 0 \\ O & N_\mu & N_{\mu-1} & \dots & N_0 \end{bmatrix}.$$

– Если нет, то к матрице, полученной на предыдущем шаге, приписываются еще строки Ni и Di со сдвигом вправо. Данный пункт выполняется до тех пор, пока сумма линейно-независимых Ni-строк не станет равной порядку объекта n, тогда построение результанта Сильвестра закончено.

– Проверяется обусловленность полученной матрицы S. Если $\mathrm{cond}(S) > \psi$ (ψ – некоторое допустимое значение числа обусловленности), то необходимо вернуться к этапу формирования правого взаимно-простого разложения и ввести замену переменной $s = M \cdot \overline{s}$, повторить формирование матрицы Сильвестра и проверить обусловленность полученной матрицы S. Если $\mu(S) < \psi$, то во введении масштаба по времени нет необходимости.

---

[2] Отличается от [3] структурой построения, более удобной для поиска линейно независимых Ni-строк.

— Вычисляется строчный индекс результанта $v := \max(v_1,\ v_2,\ \dots\ v_q)$.

— Задаются столбцовые степени матрицы «знаменателя» регулятора: $m_i \ge v - 1$.

— Формируются матричные полиномы регулятора:

$$Y(s) = Y_m s^m + Y_{m-1} s^{m-1} + \dots + Y_0,\ X(s) = X_m s^m + X_{m-1} s^{m-1} + \dots + X_0.$$

Здесь $Y_i,\ X_i,\ i = \overline{0, m}$ числовые матрицы размерностью $p \times p$.

— Выбирается необходимая структура регулятора, задавая некоторые матрицы $Y_i,\ X_i,\ i = \overline{0, m}$ нулевыми. Иначе говоря, вводится ограничение на структуру регулятора. Обозначим через l – количество заданных нулевых матриц.

— Составляется матрица $R = [Y_m \quad Y_{m-1} \quad \dots \quad Y_0 \quad X_m \quad X_{m-1} \quad \dots \quad X_0]$.

— Из матрицы R исключаются блочные нулевые столбцы. Полученную матрицу обозначим $\overline{R}$.

— Из матрицы S исключаются блочные строки, соответствующие блочным нулевым столбцам матрицы R.

— Выписывается левая часть диофантова уравнения $\overline{Y}(s)D(s) + \overline{X}(s)N(s)$.

— Проводится операция обратного дифференцирования l раз:

$$d^l (Y(s)D(s) + X(s)N(s)) \setminus ds^l.$$

— Выписывается новая матрица Сильвестра. Ниже представлен пример для случая $l = 1$:

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} D_{\mu-1} & 2D_{\mu-2} & \dots & (\mu-1)D_0 & 0 & 0 & 0 \\ D_\mu & 2D_{\mu-l} & \dots & \dots & \mu D_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (\mu-1)D_\mu & \mu D_{\mu-1} & \dots & 2\mu D_0 \\ N_{\mu-1} & 2N_{\mu-2} & \dots & (\mu-1)N_0 & 0 & 0 & 0 \\ N_\mu & 2N_{\mu-1} & \dots & \dots & \mu N_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (\mu-1)N_\mu & \mu N_{\mu-1} & \dots & 2\mu N_0 \end{bmatrix}.$$

— Вычисляются столбцовые степени $f_i,\ i = \overline{1, p}$ формируемой желаемой характеристической матрицы [11] системы $\overline{F}$ по выражению $f_i = m_i + \mu_i$.

— Выбирается максимальное значение из всех $f_i,\ i = \overline{1, p}$: $f_{\max} = (f_1, \dots, f_i),\ i = \overline{1, p}$.

— Из каждого $f_j,\ j = \overline{1, k}$ равного $f_{\max}$ вычитается l: $\overline{f}_j = f_j - l,\ j = \overline{1, k}$,

где k – количество столбцов матрицы $\overline{F}$ со столбцовыми степенями равными $f_{\max}$. Все остальные столбцовые степени остаются без изменений.

— Выбирается структура желаемой характеристической матрицы (диагональная[3] или не диагональная).

[3] Диагонализация «знаменателя» облегчает решение задачи автономного управления или задачи И.Н. Вознесенского.

— Формируется характеристическая матрица системы в виде матричного полинома $\overline{F}(s)=\overline{F}_{m+\mu}s^{m+\mu}+\overline{F}_{m+\mu-1}s^{m+\mu-1}+...\overline{F}_0$.

— Формируются диагональные матрицы:

$$H_c(s)=diag(s^{\mu_1},\ s^{\mu_2},\ ...,\ s^{\mu_p}),\ H_r(s)=diag(s^{m_1},\ s^{m_2},\ ...,\ s^{m_p}).$$

— Вычисляется матрица $F_h=\lim\limits_{s\to\infty}H_r^{-1}(s)\overline{F}(s)H_c^{-1}(s)$.

— Если матрица F_h получилась невырожденной числовой матрицей, то переходим к следующему шагу. Иначе нужно снова перейти выбору столбцовых степеней матрицы $\overline{F}$.

— Задается желаемое расположение корней[4] (с учетом масштабирования, если применялось на предыдущих шагах) и рассчитывается каждый полином желаемой характеристической матрицы[5].

— Составляется матрица $\overline{F}=[\overline{F}_{m+\mu}\quad \overline{F}_{m+\mu-1}\quad ...\quad \overline{F}_0]$.

— Выписывается система уравнений в матричном виде: $\overline{R}\overline{S}=\overline{F}$.

— В матрице $\overline{S}$ необходимо определить нулевые столбцы и удалить их. Обозначим полученную матрицу $\overline{S_1}$.

— В матрице $\overline{F}$ необходимо также удалить столбцы, соответствующие нулевым столбцам $\overline{S}$. Полученную матрицу обозначим $\overline{F}_1$.

— Определяются линейно-зависимые строки матрицы $\overline{S}_1$ и удаляются. Полученную матрицу обозначим $\overline{S_2}$.

— В матрице параметров регулятора $\overline{R}$ необходимо задать нулевыми столбцы соответствующие удаленным строкам на предыдущем шаге. Полученную матрицу обозначим $\overline{R_1}$.

— Составляется матричное уравнение: $\overline{R_1}\,\overline{S_2}=\overline{F_1}$.

— Решается матричное уравнение: $\overline{R_1}=\overline{F_1}\,\overline{S_2}^{-1}$

— Восстанавливается матрица *R*.

— Выписываются матрицы регулятора $Y(s)$ и $X(s)$.

— Находится характеристическая матрица и вычисляются ее корни, которые соответствуют полюсам замкнутой системы. Для удобства можно корни отобразить на комплексной плоскости, и рассматривать корневой портрет.

— Если хоть один полюс не попал в желаемую область устойчивости D ($s_j\notin D$), то необходимо вернуться назад, задать новое значение для желаемого полинома $\overline{F}$ и повторить расчеты. Если все полюса попали в желаемую область, то процедура синтеза регулятора заканчивается.

— При необходимости провести моделирование замкнутой системы.

[4] В соответствии с теорией графов, разработанной А.В. Чехонадских, удобно задавать желаемые корни кратными.

[5] Требование задается не к полной системе, а системе полученной после обратного дифференцирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена методика синтеза многоканальных регуляторов заданной структуры, сочетающая в себе положительные моменты методик, изложенных в [1–5], и принципа «обратного» дифференцирования [5–9]. Сложность построения заключалась в том, что подробная пошаговая методика расчета многоканальных регуляторов была изложена только в [6], во всей остальной литературе методика изложена неявно, а многие моменты требуют доработки и самостоятельного доосмысливания. Кроме того, отличительной особенностью от работ [5–9] является то, что принцип «обратного» дифференцирования заложен в итерационную процедуру с последовательным вхождением в заданную область устойчивости D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Гайдук А.Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход) / А.Р. Гайдук. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 360 с.

[2] **Гайдук А.Р.** Теория автоматического управления: учебник / А.Р. Гайдук. – М.: Высш. шк, 2010. – 415 с.

[3] **Chen C.T.** Linear System Theory and Design, Third Edition / C.T. Chen // New York Oxford, 1999. – 334 p.

[4] **Doyle J.C.** Multivariable feedback design: concept for a classical/modern synthesis / J.C. Doyle, G. Stein // IEEE Trans. Aut. Control. – 1981. – AC-26. – № 1. – P. 4–16.

[5] **Шоба Е.В.** Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. … канд. техн. наук / Е.Б. Шоба. – Новосибирск: НГТУ, 2013. – 192 с.

[6] **Вороной В.В.** О методике синтеза регулятора «пониженного» порядка методом «обратного» дифференцирования / В.В. Вороной // Теория и практика современной науки: материалы VIII Международной научно-практической конференции, г. Москва, 26–27 декабря 2012 г. В 3 т.: т. 1. Науч.-инф. издат. центр «Институт стратегических исследований». – Москва: Изд-во «Спецкнига», 2012. – С. 215–220.

[7] **Voevoda A.A.** Low order controllers synthesis using the «reverse derivative» / A.A. Voevoda, V.V. Voronoy, E.V. Shoba // Proceedings of RFBR and DST Sponsored «The 2-nd Russian-Indian Joint Workshop on Computational Intelligence and Modern Heuristics in Automation and Robotics», 10–13 September, 2011. – P. 12–22. [Синтез регулятора пониженного порядка с использованием «обратного дифференцирования»].

[8] **Воевода А.А.** Модальный синтез многоканальных регуляторов пониженного порядка с использованием «обратного» дифференцирования характеристической матрицы / А.А. Воевода, В.В. Вороной // Сб. науч. тр. НГТУ. – 2011. – № 3 (65). – С. 3–10.

[9] **Воевода А.А.** Модальный синтез многоканального регулятора пониженного порядка с использованием «обратной» производной на примере трёхмассовой системы / А.А. Воевода, В.В. Вороной, Е.Б. Шоба // Науч. вестник НГТУ. – 2012. – № 1 (46). – С. 15–22.

[10] **Немировский А.С.** Необходимые условия устойчивости полиномов и их использование / А.С. Немировский, А.А. Воевода, В.В. Вороной, Е.Б. Шоба // Науч. вестник НГТУ. – 2012. – № 1 (46). – С. 15–22.

[11] **Петрикевич Я.И.** Рандомизированные методы стабилизации дискретных линейных систем / Я.И. Петрикевич // АиТ. – 2008. – № 11. – С. 103–113.

Воевода Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований: управление многоканальными объектами. Имеет более 200 публикаций. E-mail: ucit@ucit.ru.

Вороной Вадим Владимирович, аспирант кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований: синтез многоканальных систем автоматического управления. Имеет 25 публикаций. E-mail: vorongo@yandex.ru.

Voevoda A.A., Voronoy V.V.

Polynomial method for calculating multi-channel controllers of a given structure

Proposed the polynomial procedure for multi-channel controllers synthesis, it is composed by modal methods symbiosis [1–6] and using the "reverse" derivative principle to calculate the unknown controller parameters. The methodology laid the solution of so-called Diophantine equation. Compared to [1, 2] proposed to use a different structure of the Sylvester matrix, more convenient to search for and evaluation of linearly-dependent rows. The optimization procedure of closed system poles shift in the given stability region is used to find the controller parameters, which is proposed to consider the roots movement in each optimization procedure step at the system root portrait.

Key words: modal synthesis method, polynomial decomposition, multi-channel system, Diophantine equation, given order controller, «reverse» derivative, Sylvester matrix.